بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على
أشرف الأنبياء والمرسلين

حل تمارين المقرر 140 ريض precalculus

Chapter 3

الجزء الثاني

إعداد د. عبد الله بن عثمان المغيره (أستاذ مشارك بجامعة الملك سعود سابقاً والآن متقاعد)

أعزائي طلاب وطالبات السنة التحضيرية ؛ إن رأيتم أن هذا العمل مفيد فالرجاء إخبار زملائكم فالدال على الخير كفاعله

أرحب بآرائكم ومقترحاتكم وللتواصل بريد الكتروني
elmo1502@hotmail.com

تمارين (3.4) EXERCISES صفحة 152 و 153 في الكتاب .

In Exercises 1 – 16 , determine all intercepts of the graph of the equation . Then decide whether the graph is symmetric x-axis , y-axis or the origin .

في التمارين 1 – 16 حدد جميع تقاطعات رسم المعادلة . ثم قرر فيما إذا كان الرسم متماثل مع محور x , محور y أو نقطة الأصل .

1) الرسم يقطع محور الصادات (y-axis) عندما x=0 لذلك لكي نجد قيمة y التي عندها يقطع الرسم محور y (y-intercept) نعوض في المعادلة عن كل x بالعدد 0 ونحل الناتج بالنسبة للمتغير y .

2) الرسم يقطع محور السينات (x-axis) عندما y=0 لذلك لكي نجد قيمة x التي عندها يقطع الرسم محور x (x-intercept) نعوض في المعادلة عن كل y بالعدد 0 ونحل الناتج بالنسبة للمتغير x .

3) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لمحور x (symmetric with x-axis) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل y بسالب y .

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس y في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لمحور x لأن

$(-y)^{2n} = y^{2n}$, عدد صحيح n

4) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لمحور y (symmetric with y-axis) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل x بسالب x . أي

$$\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$$

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس x في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لمحور y لأن

$(-x)^{2n} = x^{2n}$, عدد صحيح n

5) يكون رسم المعادلة متماثل بالنسبة لنقطة الأصل (symmetric with origin) إذا لم تتغير المعادلة عندما نستبدل كل x بسالب x وكل y بسالب y .

لاحظ أنه إذا كانت كل أسس x وكل أسس y في المعادلة أعداداً زوجية فإن رسم المعادلة يكون متماثلاً بالنسبة لنقطة الأصل origin .

1. $\boldsymbol{x = 3y^2 - 2}$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$$0 = 3y^2 - 2\,, \qquad 3y^2 = 2\,, \qquad y^2 = \frac{2}{3}\ , y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$y - intercepts : \sqrt{\frac{2}{3}}\ and - \sqrt{\frac{2}{3}}$$

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

X=0 – 2 = - 2 , x-intercept : - 2

نستبدل كل y بسالب y في المعادلة أي

$x = 3(-y)^2 - 2 = 3y^2 - 2\,, \quad (-a)^2 = a^2$ لا تنسى

لم تتغير المعادلة إذاً رسم المعادلة متماثل حول محور x , symmetric with x-axis

نستبدل كل x بسالب x في المعادلة أي

$$-x = 3y^2 - 2\ \ or\ x = -3y^2 + 2$$

تغيرت المعادلة إذاً رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Not symmetric with y-axis

نستبدل كل x بسالب x و كل y بسالب y في المعادلة أي

$$-x = 3(-y)^2 - 2 = 3y^2 - 2\,, \qquad x = -3y^2 + 2$$

تغيرت المعادلة إذاً رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Not symmetric with origin

2. $4x^2 + y^2 = 12$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$y^2 = 12\,, \;\; ,y = \pm\sqrt{12} = \pm\sqrt{4.3} = \pm 2\sqrt{3}$

$y - intercepts : 2\sqrt{3}\;\; and — \; 2\sqrt{3}$

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$4x^2 = 12 \;\; ,x^2 = \frac{12}{4} = 3\,, x = \pm\sqrt{3}$

$x - intercepts : \sqrt{3} \;\; and - \sqrt{3}$

أسس كل من x و y هي أعداد زوجية إذاً

لو استبدلنا كل x بسالب x و كل y بسالب y لما تغيرت المعادلة إذاً

رسم المعادلة متماثل حول محور x , symmetric with x-axis

رسم المعادلة متماثل حول محور y , symmetric with y-axis

رسم المعادلة متماثل حول نقطة الأصل symmetric with origin

3. $x^2 - y^2 = 1$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$-y^2 = 1\,, \;\; y^2 = -1\,, \qquad no\ solution$

لا يوجد حل حقيقي لأن $y^2 \geq 0$ إذاً الرسم لا يقطع محور y أي

No y-intercept

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$x^2 = 1\,, \qquad x = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

x-intercepts : 1 , - 1

أسس كل من x و y هي أعداد زوجية إذاً

لو استبدلنا كل x بسالب x و كل y بسالب y لما تغيرت المعادلة إذاً

رسم المعادلة متماثل حول محور x , symmetric with x-axis

رسم المعادلة متماثل حول محور y , symmetric with y-axis

رسم المعادلة متماثل حول نقطة الأصل symmetric with origin

4. $x^2 = y^{15} - y^9$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$y^{15} - y^9 = 0 , \; y^9(y^6 - 1) = 0$

$y^9 = 0 \; , y = 0 \; or \; y^6 - 1 = 0 \, , y^6 = 1 , y = \pm 1$

y-intercepts : 0 , - 1 , 1

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$x^2 = 0 \; , x = 0$

x-intercept : 0

أسس x في المعادلة زوجية أي أن f(-x)=f(x) إذاً الرسم متماثل حول محور y

symmetric with y-axis

عندما نستبدل كل y بسالب y ينتج

$x^2 = (-y\,)^{15} — y9 = \; -y^{15} + y^9$

تغيرت المعادلة أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

أيضا يكون الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل لأنه عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة

Not symmetric with origin

5. $x^4 = 3y^3$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$3y^3 = 0\,, \qquad y = 0$

y-intercepts : 0

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$x^4 = 0 \;\; , x = 0$

x-intercept : 0

أسس x في المعادلة زوجية أي أن f(-x)=f(x) إذاً الرسم متماثل حول محور y

symmetric with y-axis

عندما نستبدل كل y بسالب y ينتج

$x^4 = 3(-y)^3 = -3y^3$

تغيرت المعادلة أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

أيضا يكون الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل لأنه عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة

Not symmetric with origin

6. $x^4 = 3y^3 + 4$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

$$3y^3 + 4 = 0\,, 3y^3 = -4, y^3 = -\frac{4}{3}\,, y = \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}$$

$$\mathrm{y - intercepts}:\ \sqrt[3]{-\frac{4}{3}}$$

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$$x^4 = 4\ , \qquad (x^2)^2 = 4, x^2 = \pm 2, x = \pm\sqrt{2}$$

$$\mathrm{x - intercept}:\ \sqrt{2}\,, -\sqrt{2}$$

أسس x في المعادلة زوجية أي أن f(-x)=f(x) إذاً الرسم متماثل حول محور y

symmetric with y-axis

عندما نستبدل كل y بسالب y ينتج

$$x^4 = 3(-y)^3 + 4 = -3y^3 + 4$$

تغيرت المعادلة أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

أيضا يكون الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل لأنه عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة

Not symmetric with origin

7. $x^2y^4 - 2x^4 = 1$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

0=1 عبارة غير صحيحة لذلك لا يقطع محور الصادات

No y-intercept

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$-2x^4 = 1, \qquad x^4 = -\frac{1}{2} \ , \qquad x^4 \geq 0$

لا يوجد حل لذلك لا يقطع محور السينات

No x-intercept

المعادلة لن تتغير عندما نستبدل x بسالب x أو y بسالب y لأن أسسهما زوجية

أي أن الرسم متماثل حول المحور وحول نقطة الأصل

symmetric with x-axis , symmetric with y-axis , symmetric with origin

8. $2y^2x - 4x^2 = xy^4$

يقطع محور الصادات عندما x=0 أي

0 = 0

وهذه عبارة صحيحة لكل قيم y أي أن جزءاً من الرسم ينطبق على محور y أي

y-intercept : all real numbers = R

يقطع محور السينات عندما y=0 أي

$-4x^2 = 0, \qquad x^2 = 0\,, x = 0$

x-intercept : 0

جميع أسس y زوجية لذلك الرسم متماثل مع محور x

symmetric with x-axis

نستبدل كل x بسالب x أي

$-2y^2\, x - 4x^2 = \ -xy^4$

تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل مع محور y أي

Not symmetric with y-axis

تغيرت المعادلة عند استبدال كل x بسالب x إذاً الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل أي

Not symmetric with origin

9. $y = x - \dfrac{1}{x}$

المعادلة غير معرفة عندما x = 0 أي لا يوجد قيمة للمتغير y

No y-intercept

$0 = x^2 - 1$, $(x-1)(x+1) = 0$, $x = \pm 1$

x-intercept 1 , - 1

نستبدل كل y بسالب y أي

$-y = x - \frac{1}{x}$, $y = -x + \frac{1}{x}$

تغيرت المعادلة أي أن الرسم غير متماثل مع محور x

Not symmetric with x-axis

نستبدل كل x بسالب x أي

$y = -x + \frac{1}{x}$

تغيرت المعادلة أي أن الرسم غير متماثل مع محور y

Not symmetric with y-axis

نستبدل كل y بسالب y و كل x بسالب x أي

$-y = -x + \frac{1}{x}$, $y = x - \frac{1}{x}$

ضربنا الطرفين بـ 1 -

لم تتغير المعادلة أي أن الرسم متماثل حول نقطة الأصل

symmetric with origin

10. $y = \frac{x}{1 + x^2}$

$x = 0 \ , y = \frac{0}{1+0} = 0 \ , \mathrm{y - intercept} : 0$

$y = 0 \, , \qquad 0 = \dfrac{x}{1+x^2} \ , \qquad x = 0 \, , x - intercept : 0$

$-y = \frac{x}{1+x^2} \ , \ y = -\frac{x}{1+x^{\wedge}2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$y = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Graph Not symmetric with y-axis

$-y = \dfrac{-x}{1+(-x)^2} = -\dfrac{x}{1+x^2} \ , y = \dfrac{x}{1+x^2}$

لم تتغير المعادلة عند استبدال y بسالب y واستبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة متماثل مع نقطة الأصل

Graph symmetric with origin

11. $y = \sqrt{9 - x^2}$

$when\ x = 0\ ,\quad y = \sqrt{9-0} = \sqrt{9}\ ,\quad y = 3$

y-intercept : 3

$when\ y = 0\ , 0 = \sqrt{9-x^2}\ ,\ 9 - x^2 = 0\ , x = \pm 3$

x-intercept : - 3 , 3

$-y = \sqrt{9-x^2}\ ,\quad y = -\sqrt{9-x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$y = \sqrt{9 — x}2\quad ,\quad y = \sqrt{9-x^2}$

لم تتغير المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة متماثل مع محور y

Graph symmetric with y-axis

$-y = \sqrt{9 — x}2\quad , -y = \sqrt{9-x^2}\ ,\quad y = -\sqrt{9-x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y و استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph Not symmetric with origin

لا حظ أن المعادلة هي معادلة الجزء العلوي لدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 3

12. $|x-3| = |y+5|$

X=0 , |0-3|=|-3|=3 , |y+5|=3 , y+5=3 or y+5= -3

Y=3-5=-2 or y=-3-5=-8

y-intercept : -2 , - 8

y=0 , |x-3|=5 , x-3=5 or x-3 = -5

x=8 or x= -2

x-intercept : - 2 , 8

|x-3|=|-y+5|, |x-3|=| -(y-5)|=|-1||y-5|=|y-5|

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

|-x-3|=|y+5| , |-(x+3)|=|y+5| , |-1||x+3|=|y+5|

|x+3|=|y+5|

تغيرت المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Graph Not symmetric with y-axis

|-x-3|=|-y+5| , |-(x+3)|=|-(y-5)| , |-1||x+3|=|-1||y-5|

|x+3|=|y-5|

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y و استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph Not symmetric with origin

13. $\sqrt{y} + \sqrt{x} = 1$

$x = 0$, $\sqrt{y} = 1 , y = 1$

y-intercept : 1

$y = 0$, $\sqrt{x} = 1 , x = 1$

x-intercept : 1

$\sqrt{-y} + \sqrt{x} = 1 , \sqrt{y}\, i + \sqrt{x} = 1$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$i = \sqrt{-1}$ لا تنسى

$\sqrt{y} + \sqrt{-x} = 1 , \sqrt{y} + \sqrt{x}\, i = 1$

تغيرت المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Graph Not symmetric with y-axis

$\sqrt{-y} + \sqrt{-x} = 1 ,$ $\sqrt{y}\, i + \sqrt{x}\, i = 1 \;, i\left(\sqrt{y} + \sqrt{x}\right) = 1$

عدد مركب complex number يساوي عدد حقيقي real number

Graph Not symmetric with origin

$0 \leq x \leq 1 , 0 \leq y \leq 1$ لاحظ أن

14. $y^2 = x\sqrt{1 + x^2}$

$x = 0 , y^2 = 0 , y = 0 ,$ $\mathrm{y - intercept :}\ 0$

$y = 0\,, \qquad x\sqrt{1+x^2} = 0\,, x = 0 \; or \; 1 + x^2 = 0 \;\;, 1 + x^2 \geq 1$

x-intercept : 0

أس y عدد زوجي إذاً الرسم متماثل حول محور x

Graph is symmetric with x-axis

$y^2 = -x\sqrt{1+(-x)^2} = -x\sqrt{1+x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور y

Graph Not symmetric with y-axis

$(-y)^2 = -x\sqrt{1+(-x)^2}\;, \qquad y^2 = -x\sqrt{1+x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y و استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph Not symmetric with origin

$15\;\; y^2 = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$x = 0\,, \qquad y^2 = \dfrac{1}{-1} = -1\,, \qquad but\;\; y^2 \geq 0\,, no\ solution$

No y-intercept

$y = 0\,, \qquad 0 = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

$x^2 + 1 = 0\,, but\;\; x^2 + 1 \geq 1\,, no\ solution$

No x-intercept

أسس كل من y و x أعداد زوجية إذاً الرسم متماثل مع محور x و محور y ونقطة الأصل

Graph is symmetric with y-axis , Graph is symmetric with x-axis

Graph is symmetric with origin

16. $y = x^2\sqrt{9 - x^4}$

$when\;\; x = 0\;\;, y = 0\,, y - intercept : 0$

$when\ y = 0\ ,\qquad x^2\sqrt{9 - x^4} = 0\ , x^2 = 0\ \ or\ \ 9 - x^4 = 0$

$x = 0\ or\ \ x^4 = 9\ ,\qquad (x^2\ )^2 = 9\ \ , x^2 = 3\ , x = \pm\sqrt{3}$

$x - intercepts\!: -\sqrt{3}\ , 0\ , \sqrt{3}$

$-y = x^2\sqrt{9 - x^4}\quad ,\quad y = -\,x^2\sqrt{9 - x^4}$

عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل حول محور x

Graph is not symmetric with x-axis

كل أسس x أعداد زوجية إذاً الرسم متماثل مع محور y

Graph is symmetric with y-axis

$-y = (-x)^2\sqrt{9 — x4}\quad , -y = x^2\sqrt{9 - x^4}\, , y = -\,x^2\sqrt{9 - x^4}$

عند استبدال y بسالب y وx بسالب x تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph is not symmetric with origin

In Exercises 17 – 26 , sketch the graph .List the intercepts and describe the symmetry (if any) of the graph .

في التمارين 17 - 26 ارسم المنحني , اسرد التقاطعات وصف التماثل (ان وجد) للمنحني

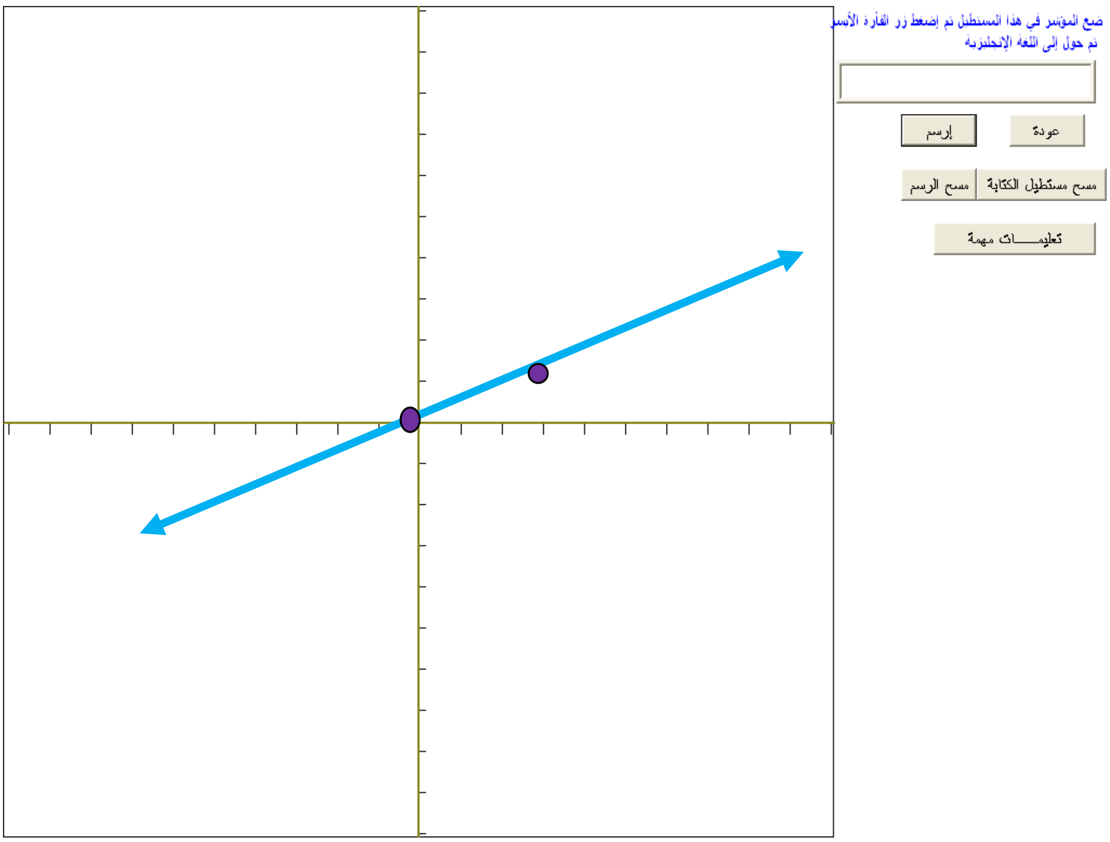
منحني المعادلة يعني رسم المعادلة

17. $y = \frac{1}{3}x$

هذه معادلة الدرجة الأولى ورسم معادلة الدرجة الأولى هو مستقيم لذلك لرسم المستقيم يكفي ايجاد نقطتين فقط نصلهما مع بعض بمستقيم ثم نمده من الجهتين

X	0	3
Y	0	1

أي نرسم النقطتين (0 , 0) و (1 , 3)



If X=0 , then y=0 so y-intercept : 0

If y=0 , then x=0 so x-intercept : 0

$-y = \frac{1}{3}x$, $y = -\frac{1}{3}x$

عند استبدال y بسالب y تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل حول محور x

Graph is not symmetric with x-axis

$y = \frac{1}{3}(-x\,)\,, \qquad y = -\,\frac{1}{3}x$

عند استبدال x بسالب x تغيرت المعادلة إذاً الرسم غير متماثل حول محور y

Graph is not symmetric with y-axis

$-y = \frac{1}{3}(-x\,), \qquad -y = -\,\frac{1}{3}x\,, \qquad y = \frac{1}{3}x$

عند استبدال x بسالب x و عند استبدال y بسالب y لم تتغير المعادلة أي أن الرسم متماثل حول نقطة الأصل

Graph is symmetric with origin

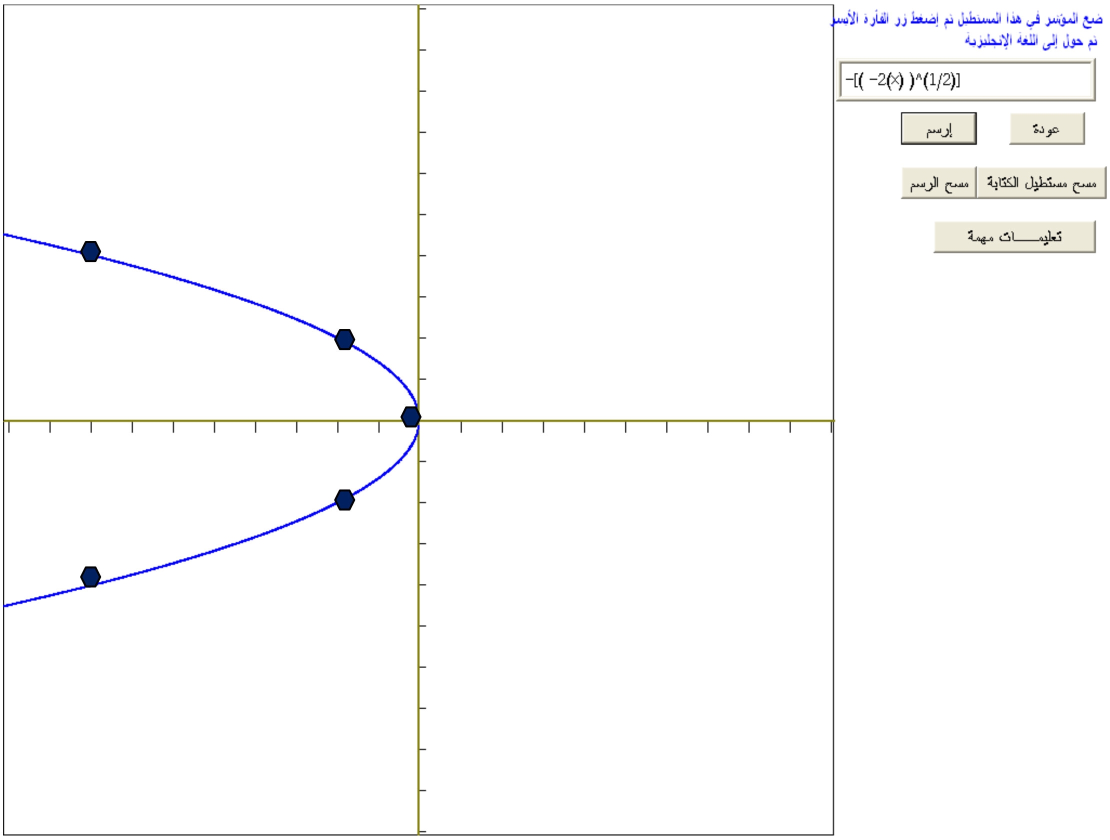
لا تنسى ضرب جميع حدود المعادلة بعدد لا يغير المعادلة هنا ضربنا بالعدد 1-

18. $2x = -y^2\,, \quad y^2 = -2x\,, \qquad y = \pm\sqrt{-2x}\,, -2x \geq 0\,, x \leq 0$

لا تنسى عند قسمة طرفي المتباينة على عدد سالب نغير اتجاه المتباينة

X	0	- 2	- 2	- 8	- 8
Y	0	- 2	2	- 4	4

نحدد هذه النقاط على ورقة الرسم ثم نصلها بمنحني ناعم



من الرسم يتضح أن

y-intercept = x-intercept = 0

Graph is symmetric with x-axis , Graph is not symmetric with y-axis

Graph is not symmetric with origin

19. $y = x^2 - 3$

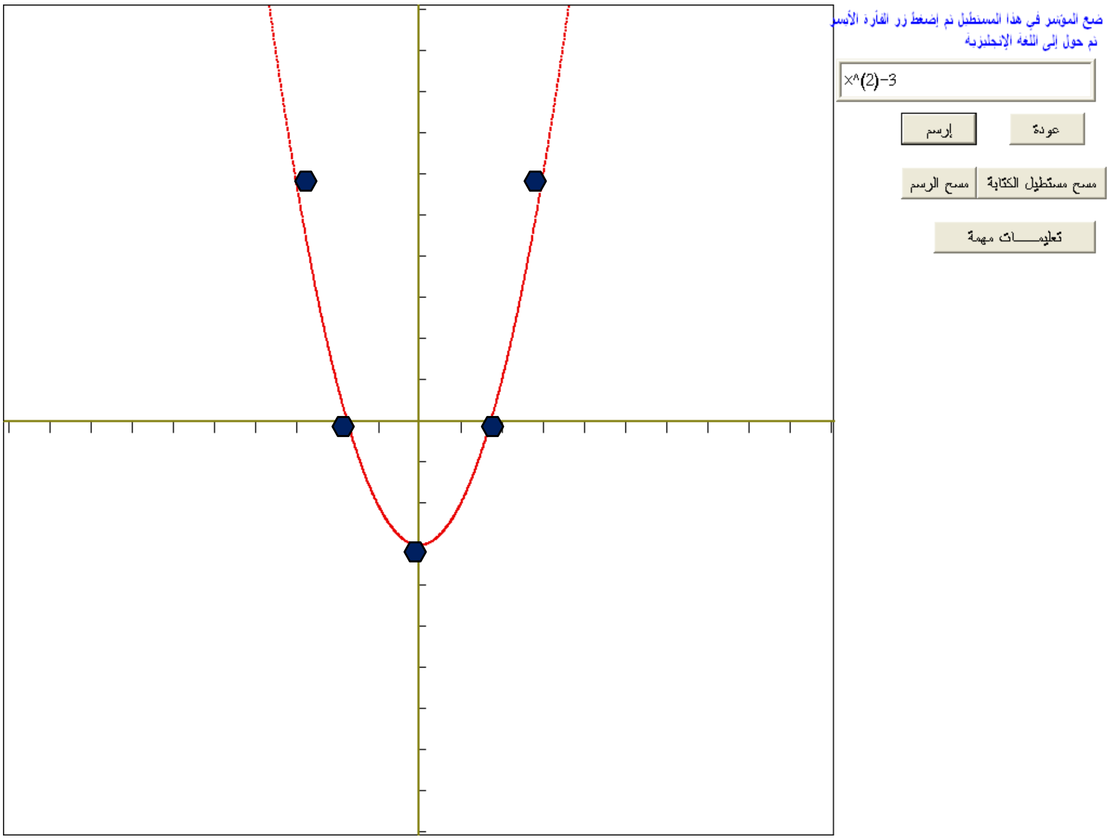
x	0	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	3	-3
y	-3	0	0	6	6

من جدول القيم ومن الرسم نجد أن

y-intercept : - 3 , $x-\text{intercept}\ :\ \sqrt{3}\,,-\sqrt{3}$

Graph is symmetric with y-axis , Graph is not symmetric with x-axis

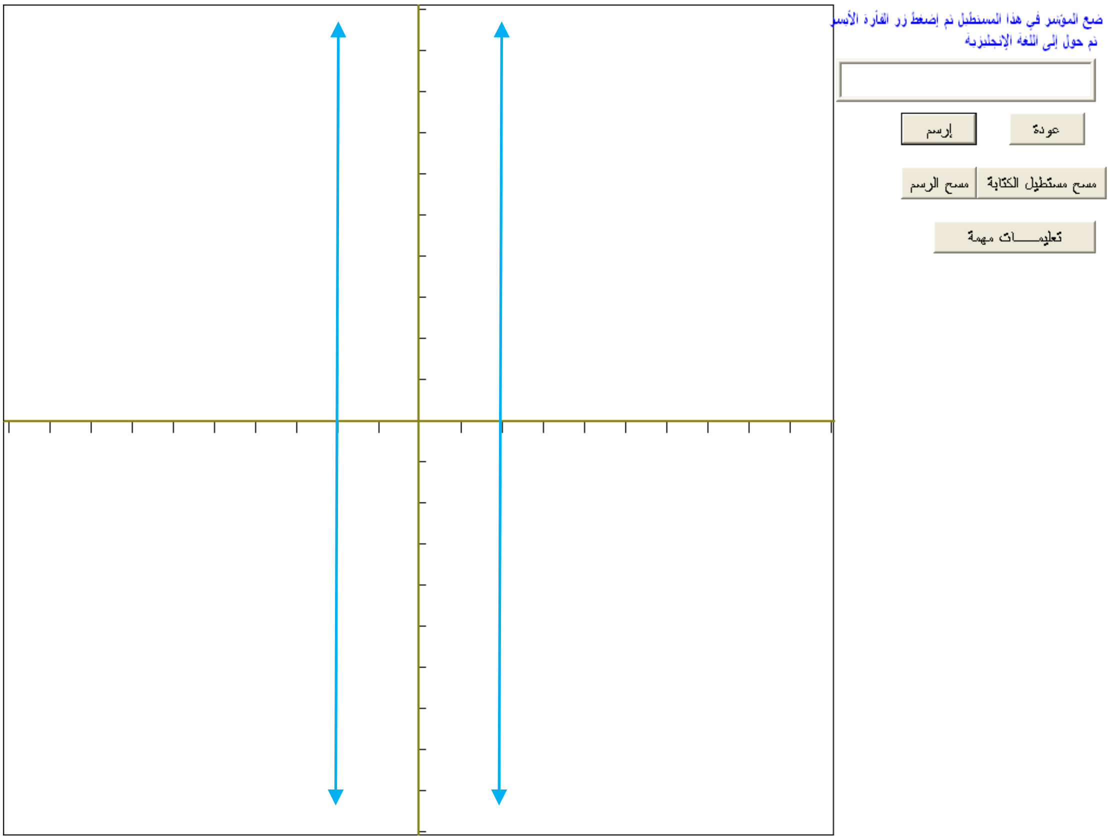
Graph is not symmetric with origin



20. $|x|=2\ \ ,x=2\ \ or\ x=-2$

X=2 مستقيم رأسي (موازي لمحور y) يقطع محور x عند (2 , 0)

X= - 2 مستقيم رأسي (موازي لمحور y) يقطع محور x عند (- 2 , 0)



من الرسم يتضح أن

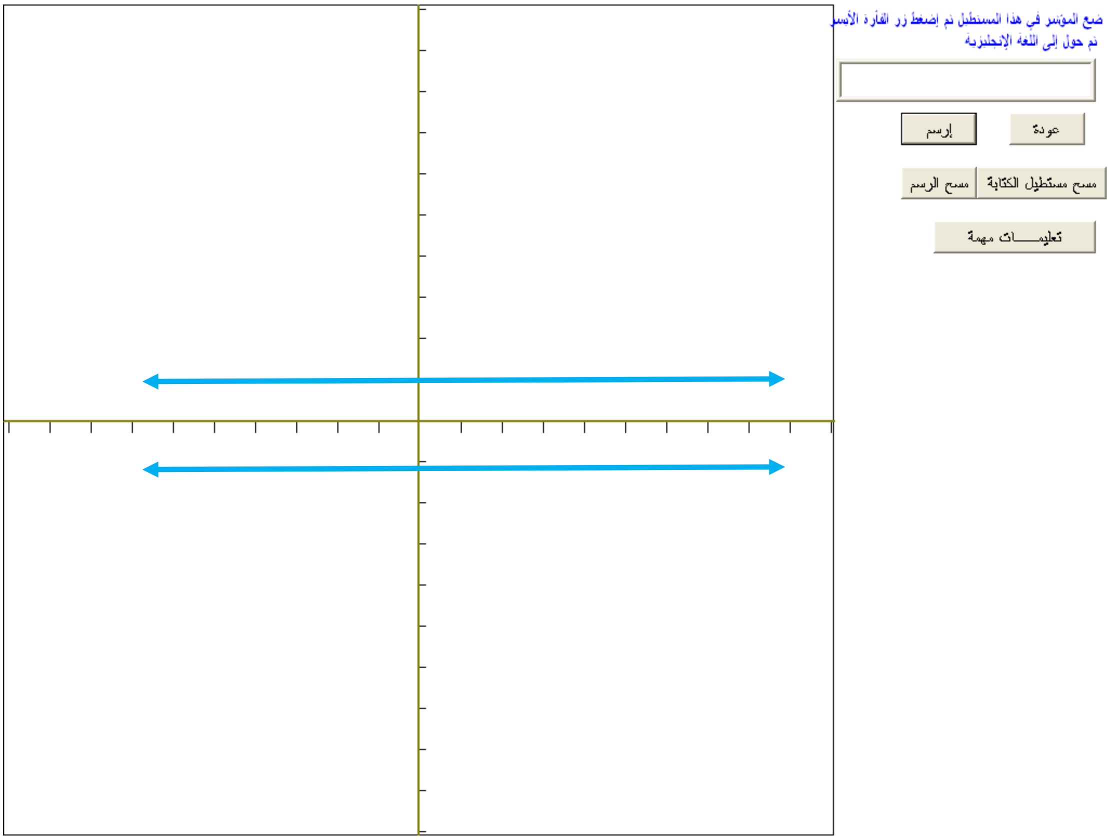
No y-intercept: , x-intercept : - 2 , 2

Graph is symmetric with y-axis , Graph is symmetric with x-axis , Graph is symmetric with origin

21. $|y| = 1$, $\quad y = 1 \;\; or \;\; y = -1$

Y=1 مستقيم أفقي (موازي لمحور x) يقطع محور y عند (0 ,1)

Y=-1 مستقيم أفقي (موازي لمحور x) يقطع محور y عند (0 , -1)



من الرسم يتضح أن

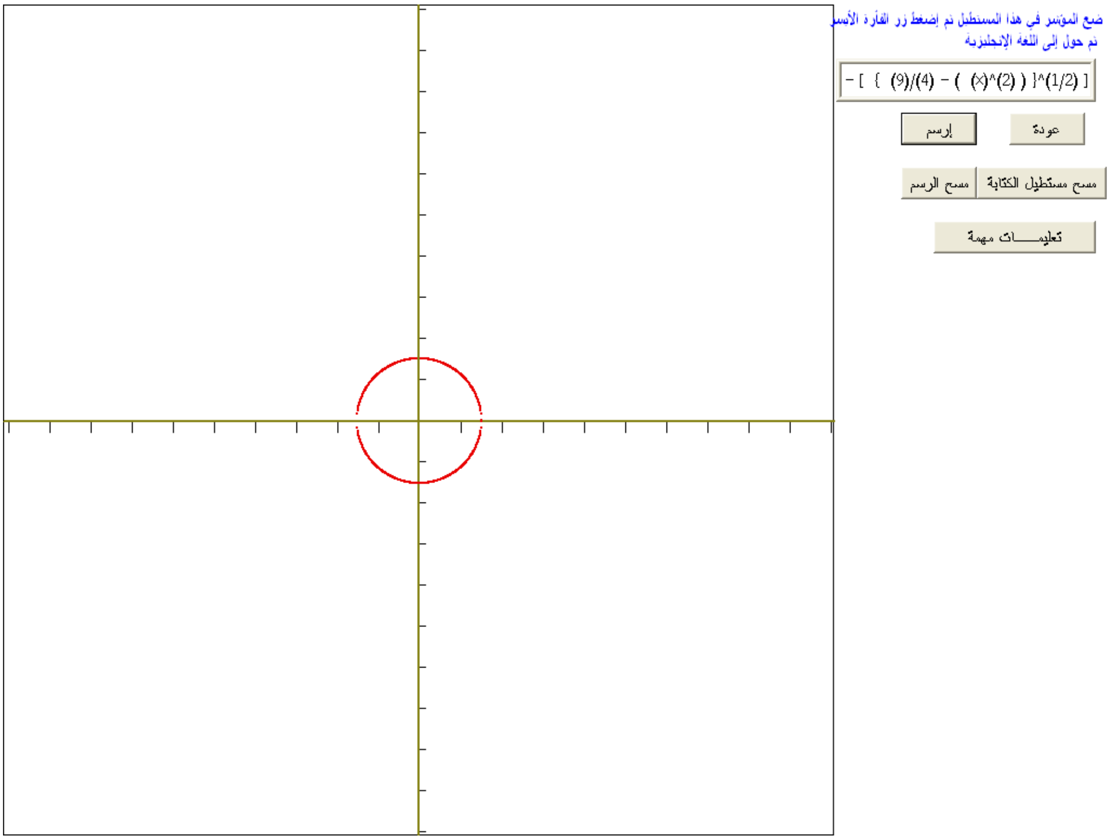
No x-intercept: , y-intercept : - 1 , 1

Graph is symmetric with x-axis , Graph is symmetric with y-axis , Graph is symmetric with origin

22. $4x^2 + 4y^2 = 9\,,\;\; x^2 + y^2 = \dfrac{9}{4}\,,\;\;\; y^2 = \dfrac{9}{4} - \, x^2\;\;,$

$$y = \pm\sqrt{\frac{9}{4} - \, x^2}$$

$\sqrt{\dfrac{9}{4}} \;=\; \dfrac{3}{2} = 1.5$ معادلة دائرة مركزها نقطة الأصل origin ونصف قطرها



من الرسم يتضح أن

x-intercept: - 1.5 , 1.5 , y-intercept : - 1.5 , 1.5

Graph is symmetric with x-axis , Graph is symmetric with y-axis
Graph is symmetric with origin

23. $x = \sqrt{4 - y^2}$

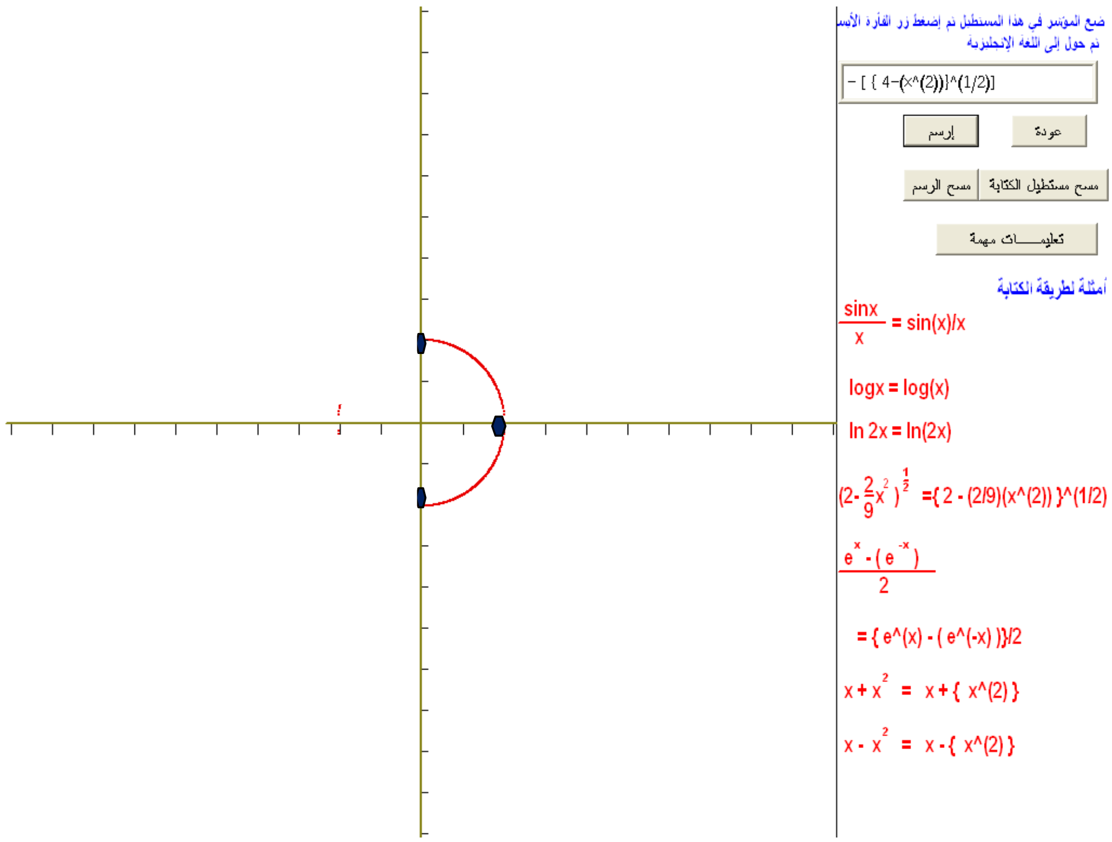
لاحظ أن x بدلالة y وليس العكس

$$4-y^2 \geq 0\,, \qquad y^2 \leq 4\,, \qquad y \leq 2\ or\ y \geq -2$$

$$4-y^2 \geq 0\ so\ \sqrt{4-y^2} \geq 0\ \ so\ \ x \geq 0$$

لا حظ أن $x \geq 0$ وأن $-2 \leq y \leq 2$ أي أن الرسم هو النصف الأيمن لدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 2

y	-2	0	2
x	0	2	0



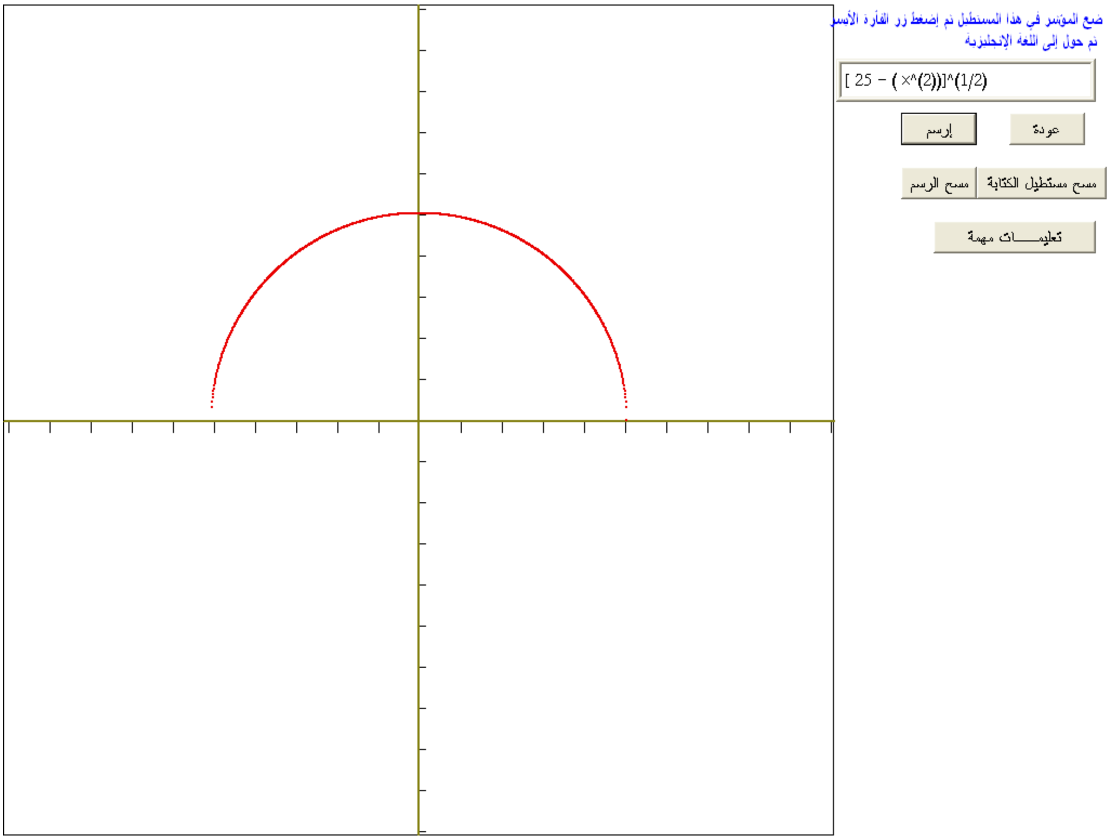
من الرسم يتضح أن

x-intercept: 2 , y-intercept : - 2 , 2

Graph is symmetric with x-axis

24. $y = \sqrt{25 - x^2}$

لا حظ أن المعادلة هي معادلة الجزء العلوي لدائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها 5



من الرسم ومن التحليل يتضح أن

$when\ x = 0\ ,\ y = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25}\,,\ y = 5$

y-intercept : 5

$when\ y = 0\,, 0 = \sqrt{25 - x^2}\ ,\ 25 - x^2 = 0\,, x = \pm 5$

x-intercept : - 5 , 5

$-y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = -\sqrt{25 - x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع محور x

Graph Not symmetric with x-axis

$y = \sqrt{25 — x2}$, $y = \sqrt{25 - x^2}$

لم تتغير المعادلة عند استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة متماثل مع محور y

Graph is symmetric with y-axis

$-y = \sqrt{25 — x2}$, $-y = \sqrt{25 - x^2}$, $y = -\sqrt{25 - x^2}$

تغيرت المعادلة عند استبدال y بسالب y و استبدال x بسالب x أي أن رسم المعادلة غير متماثل مع نقطة الأصل

Graph Not symmetric with origin

25. $|3x| = |y|$

$y = |3x|$ or $y = -|3x|$ so $y = 3x$ or $y = -3x$

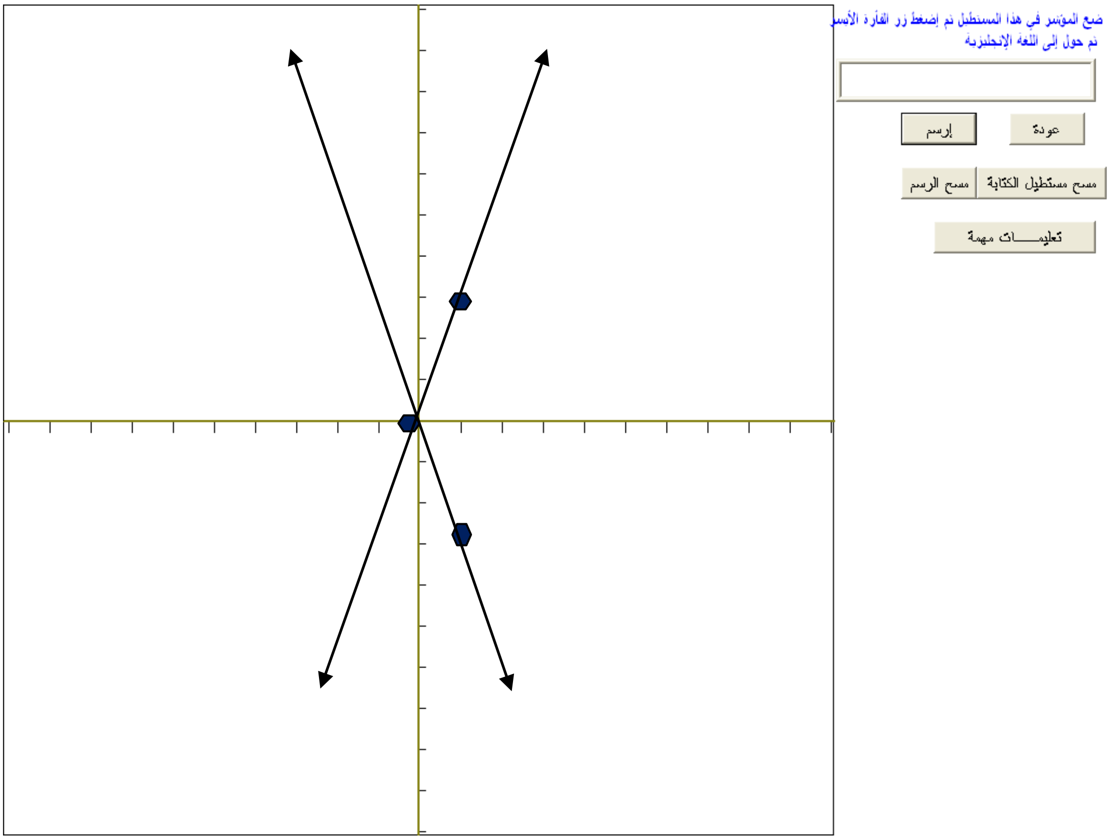
X	0	1
Y	0	3

or

x	0	1
y	0	- 3

نرسم المستقيم المار بالنقطتين (0 , 0) و (1 , 3)

و نرسم المستقيم المار بالنقطتين (0 , 0) و (1 , -3)



من الرسم يتضح أن

x-intercept = y-intercept = 0

Graph is symmetric with y-axis , x-axis and origin

26. $|2y-3| = |x+4|$

$2y-3 = |x+4| \quad or \quad 2y-3 = -|x+4|$

$2y-3 = x+4 \quad or \quad 2y-3 = -x-4\,)$

$$y = \frac{x+7}{2} \quad or \quad y = \frac{-x-1}{2} = -\frac{x+1}{2}$$

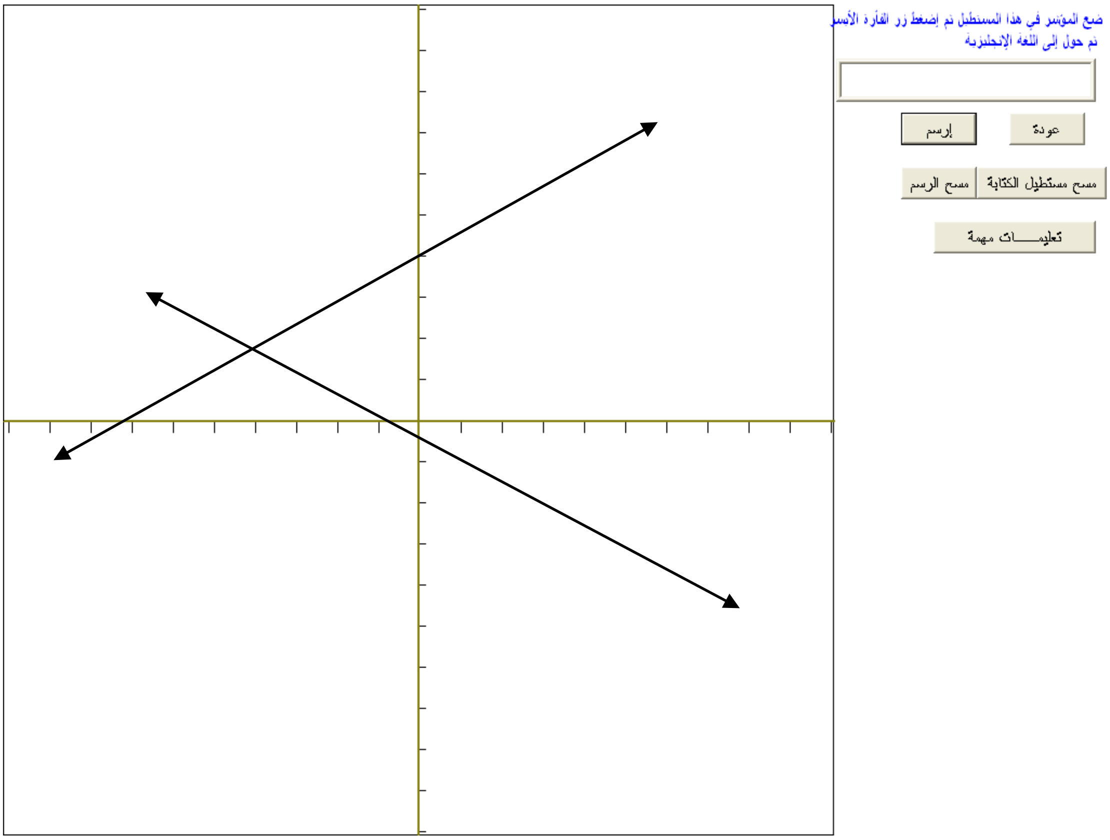
X	- 7	1
Y	0	4

or

x	- 1	3
y	0	- 2

نرسم المستقيم المار بالنقطتين (- 7 , 0) و (1 , 4)

و نرسم المستقيم المار بالنقطتين (- 1 , 0) و (3 , -2)



من الرسم يتضح أن

x-intercept : - 1 , - 7 and   y-intercept : - 1 , $\frac{7}{2}$ =3.5

no symmetry

In Exercises 27 – 38 sketch the graph of the given equation with the help of a suitable translation . Show both the x and y axis and the X and Y axis.

في التمارين 27 – 38 ارسم منحني المعادلة المعطاة وذلك بمساعدة انسحاب (translation) مناسب. وضح على الرسم محور x و y ومحور X و y.

انتبه: x – a تعني انسحاب إلى اليمين على محور x و x + a تعني انسحاب إلى اليسار على محور x أي عكس ما تتوقع , a عدد موجب

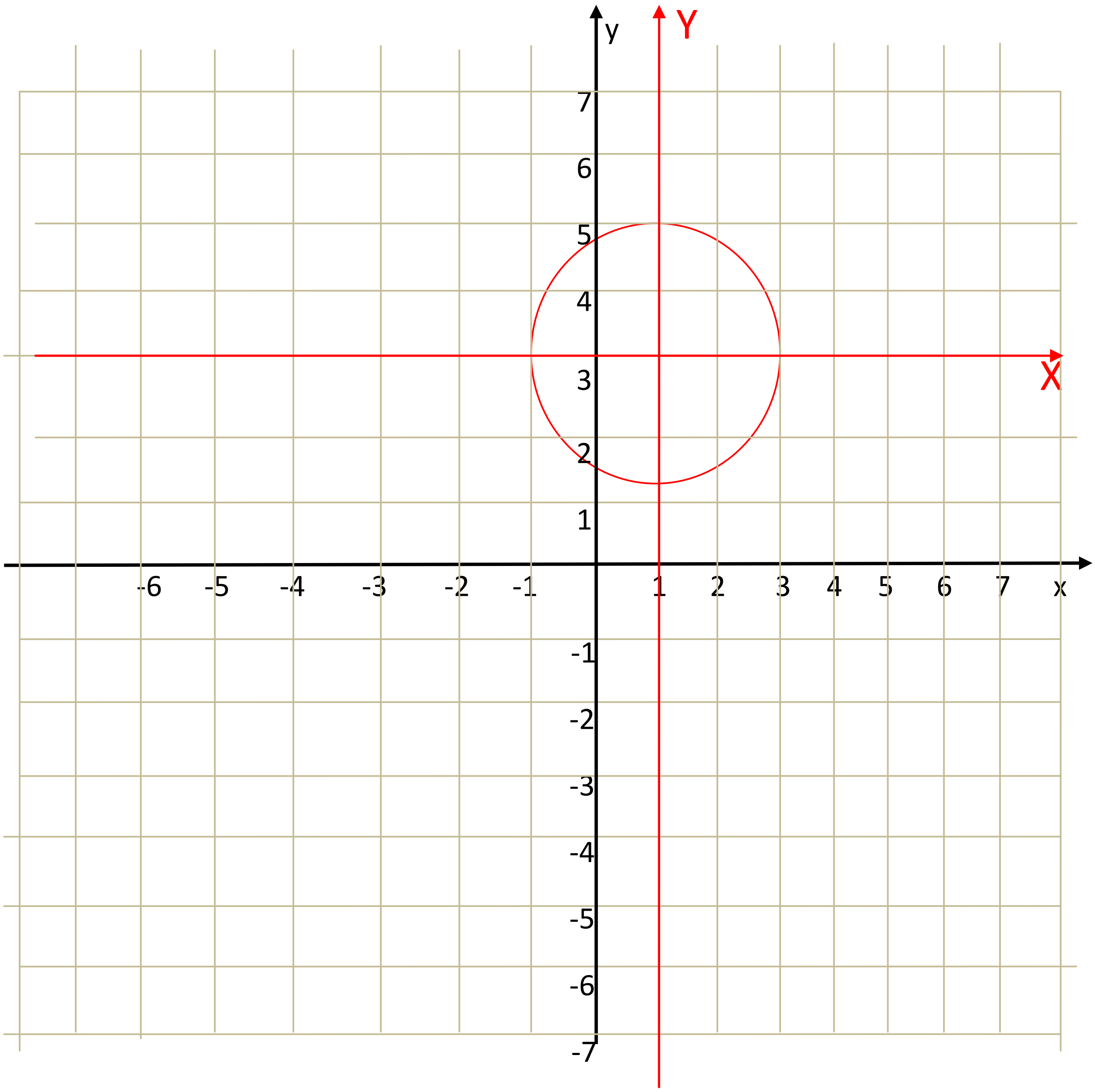
y – a تعني انسحاب إلى الأعلى على محور y و y + a تعني انسحاب إلى الأسفل على محور y أي عكس ما تتوقع

27. $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$

معادلة دائرة مركزها (1 , 3) ونصف قطرها 2

$$\mathrm{X} = x - 1 \quad , \mathrm{Y} = y - 3$$

$$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 4$$ إذاً

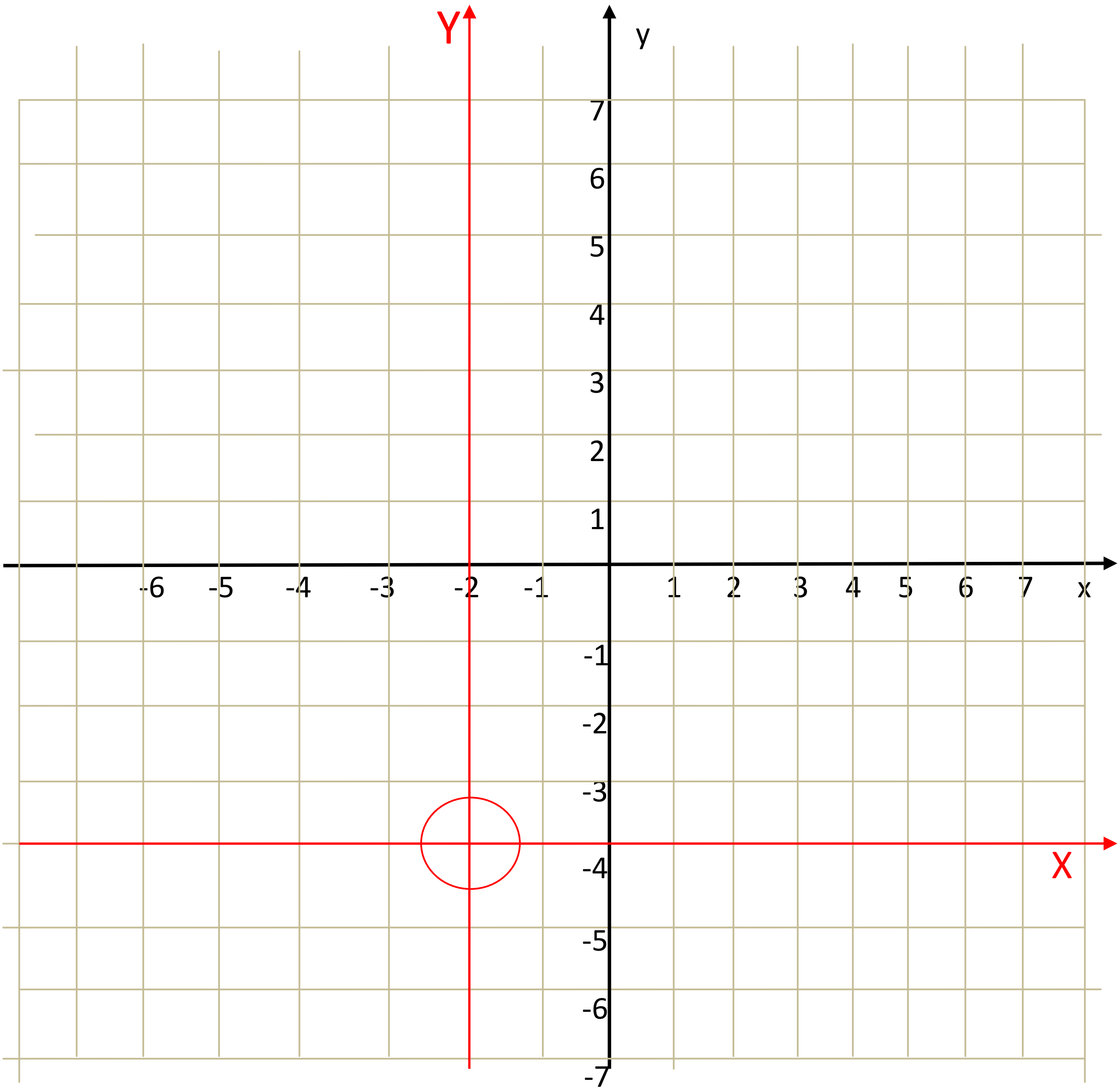

y
Y
7
6
5
4
3
2
1
X
-6 -5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5 6 7 x
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7

28. $(x+2)^2+(y+4)^2=\frac{1}{4}$

معادلة دائرة مركزها (- 2 , - 4) ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

$$X = x + 2 \quad , Y = y + 4$$

إذاً $X^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$



29. $x^2 - 2x + y^2 = 3$

نكمل المربع في x وذلك بإضافة مربع نصف معامل x إلى الطرفين , معامل x هو -2
ونصفه هو -1 ومربعه 1 =(-1)(-1) أي

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 3 + 1$$

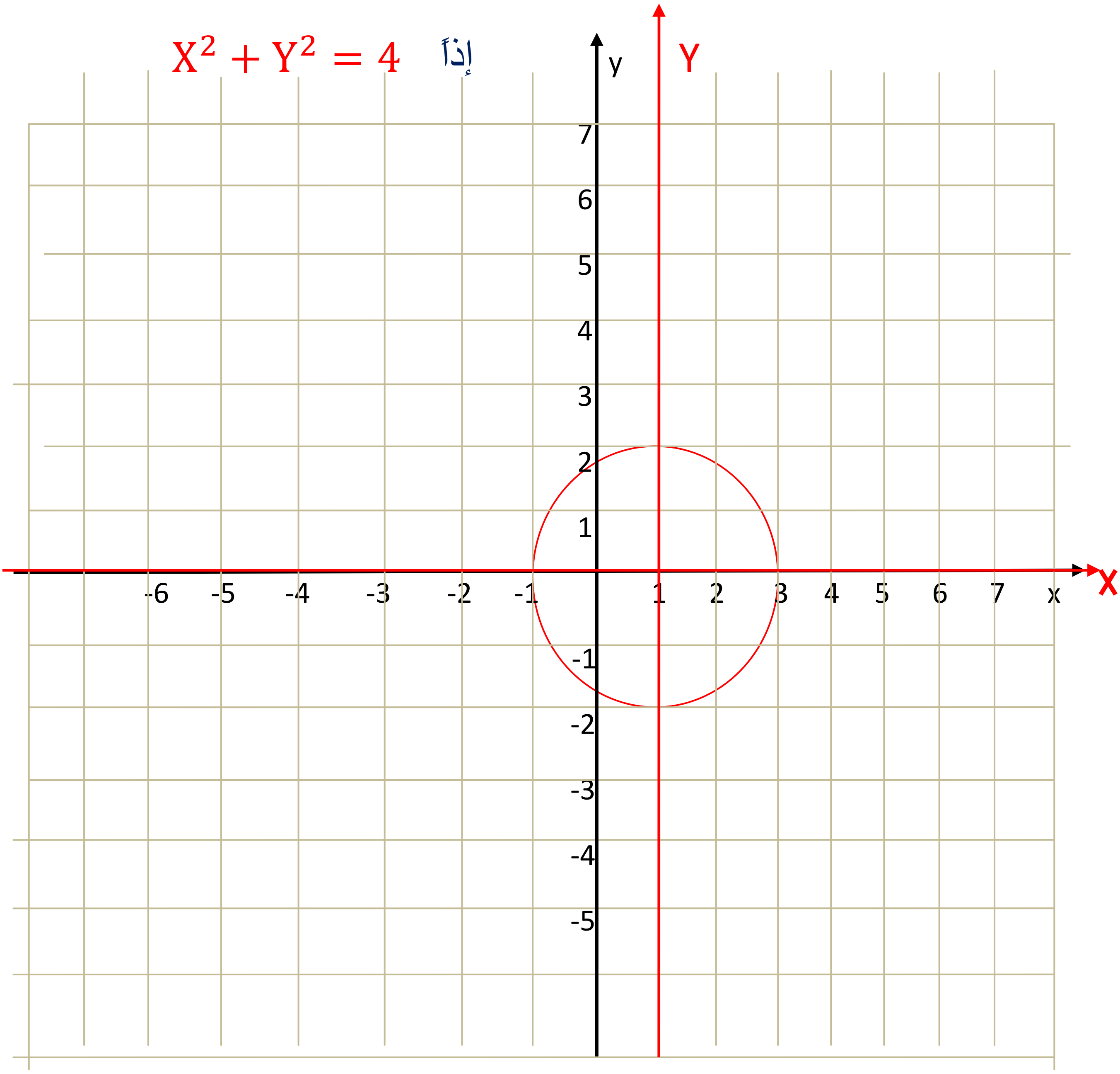
$$(x-1)^2 + y^2 = 4$$

$$(x-1)^2 + (y-0)^2 = 4$$

معادلة دائرة مركزها (1 , 0) ونصف قطرها $\sqrt{4} = 2$

$$\mathrm{X} = x - 1 \quad , \mathrm{Y} = y$$

إذاً $\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 4$



30. $x^2 + y^2 + 4y = -1$

نكمل المربع في y وذلك بإضافة مربع نصف معامل y إلى الطرفين , معامل y هو 4 ونصفه هو 2 ومربعه 4 أي

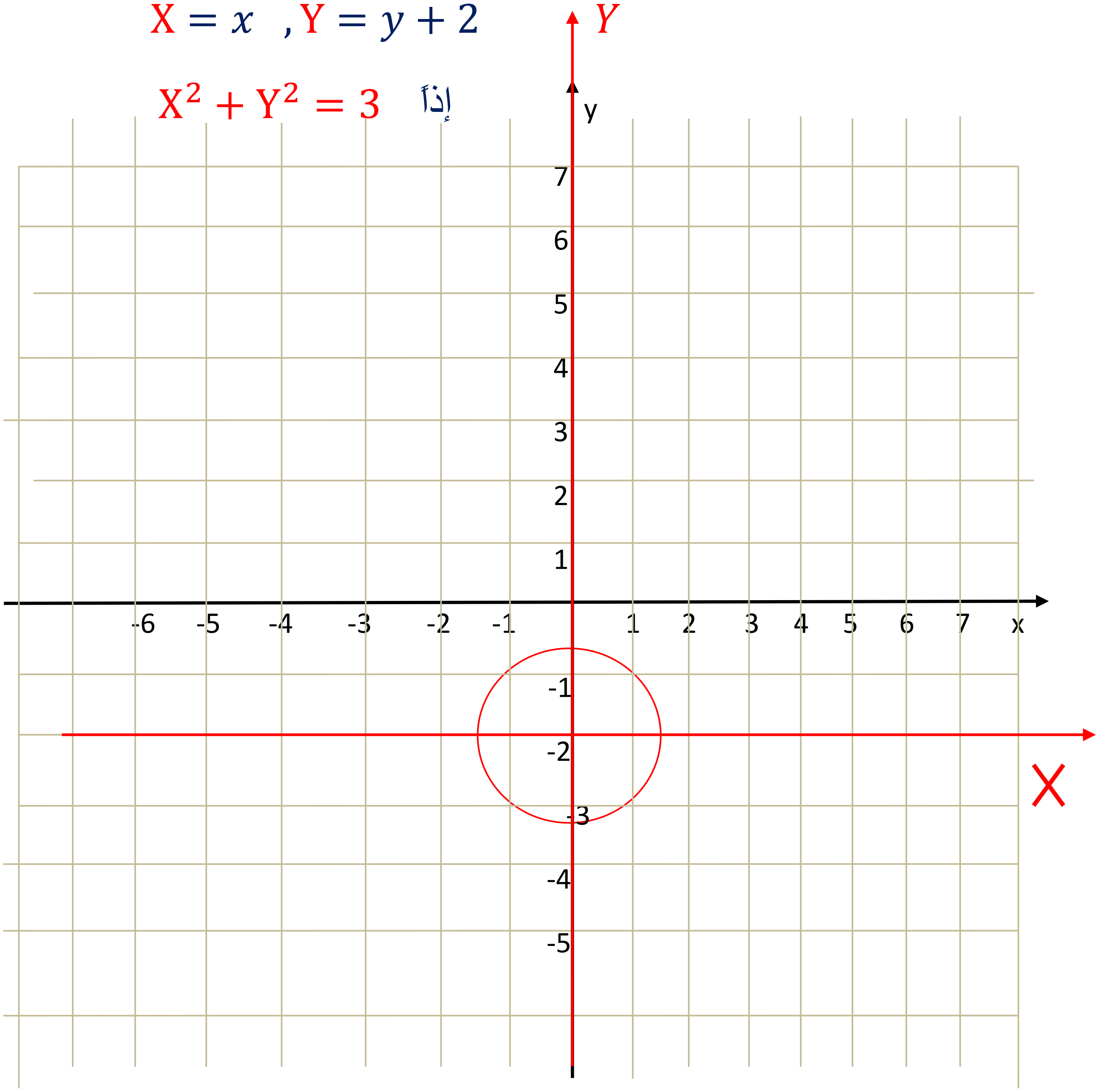
$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = -1 + 4$$

$$(x+0)^2 + (y+2)^2 = 3$$

معادلة دائرة مركزها (0 , -2) ونصف قطرها $\sqrt{3}$

$\mathrm{X} = x \quad , \mathrm{Y} = y + 2$

$\mathrm{X}^2 + \mathrm{Y}^2 = 3$ إذاً

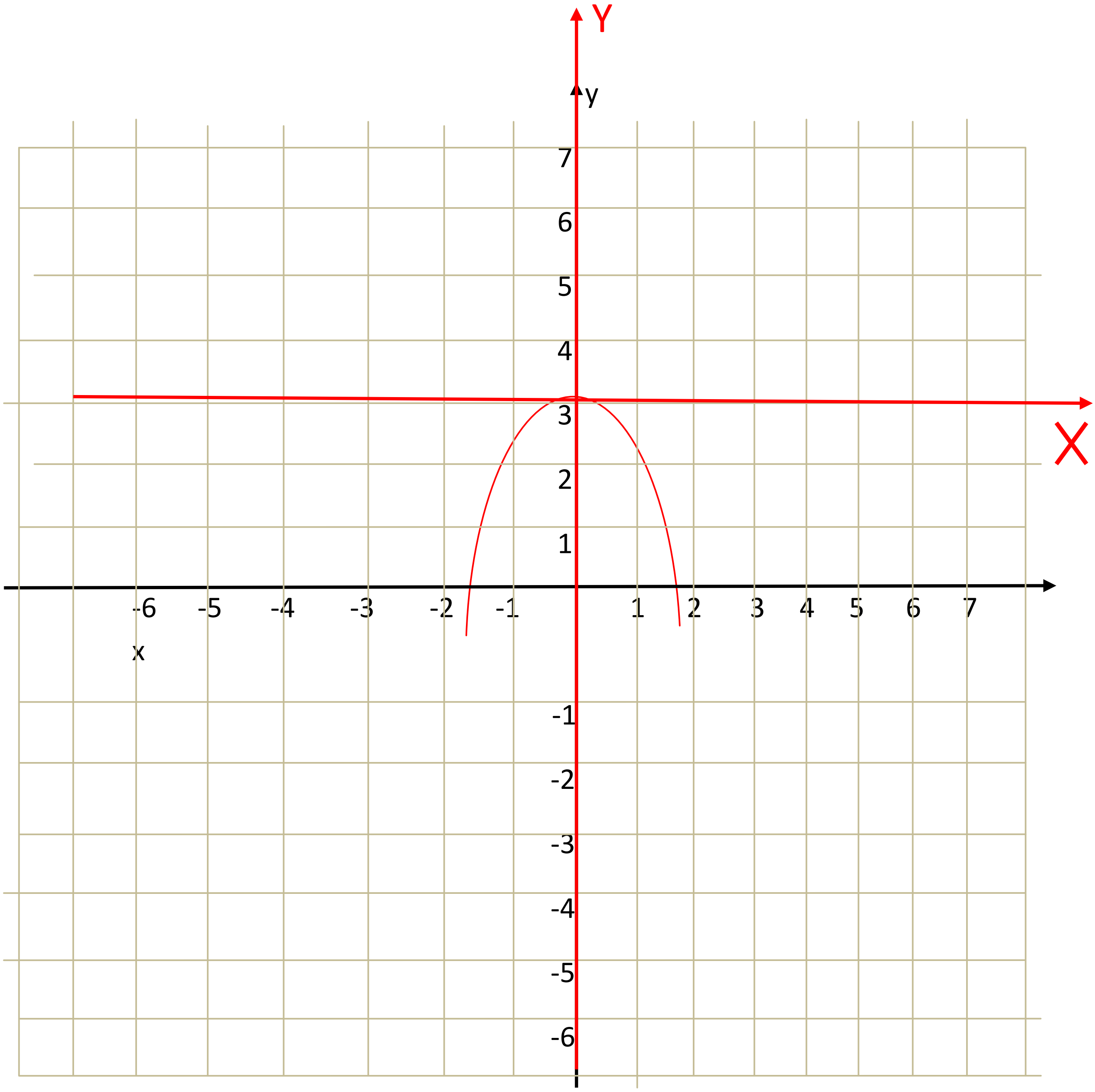


31. $x^2 + y - 3 = 0$

$X = x \quad , \qquad Y = y - 3$

$X^2 + Y = 0$

نقطة الأصل الجديدة هي (0 , 3)



32. $x^2 - 4x + y = 5$

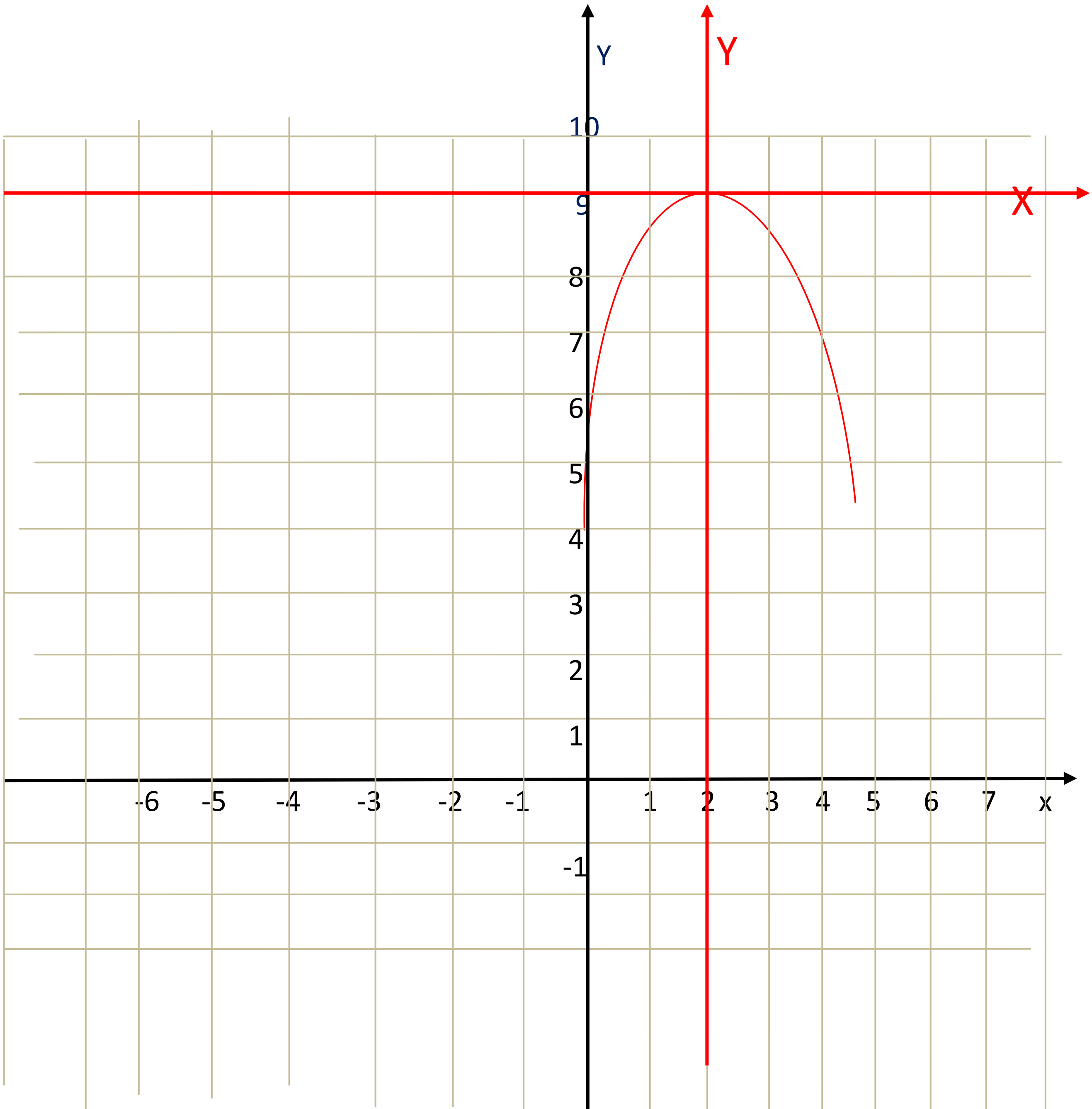
بإكمال المربع في x , أي إضافة مربع نصف معامل x إلى الطرفين ينتج

$x^2 - 4x + 4 + y = 5 + 4$, $(x-2)^2 + (y-9) = 0$

$X = x - 2$, $Y = y - 9$

$X^2 + Y = 0$

نقطة الأصل الجديدة هي (2 , 9)



33. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

بإكمال المربع في كل من x و y ينتج

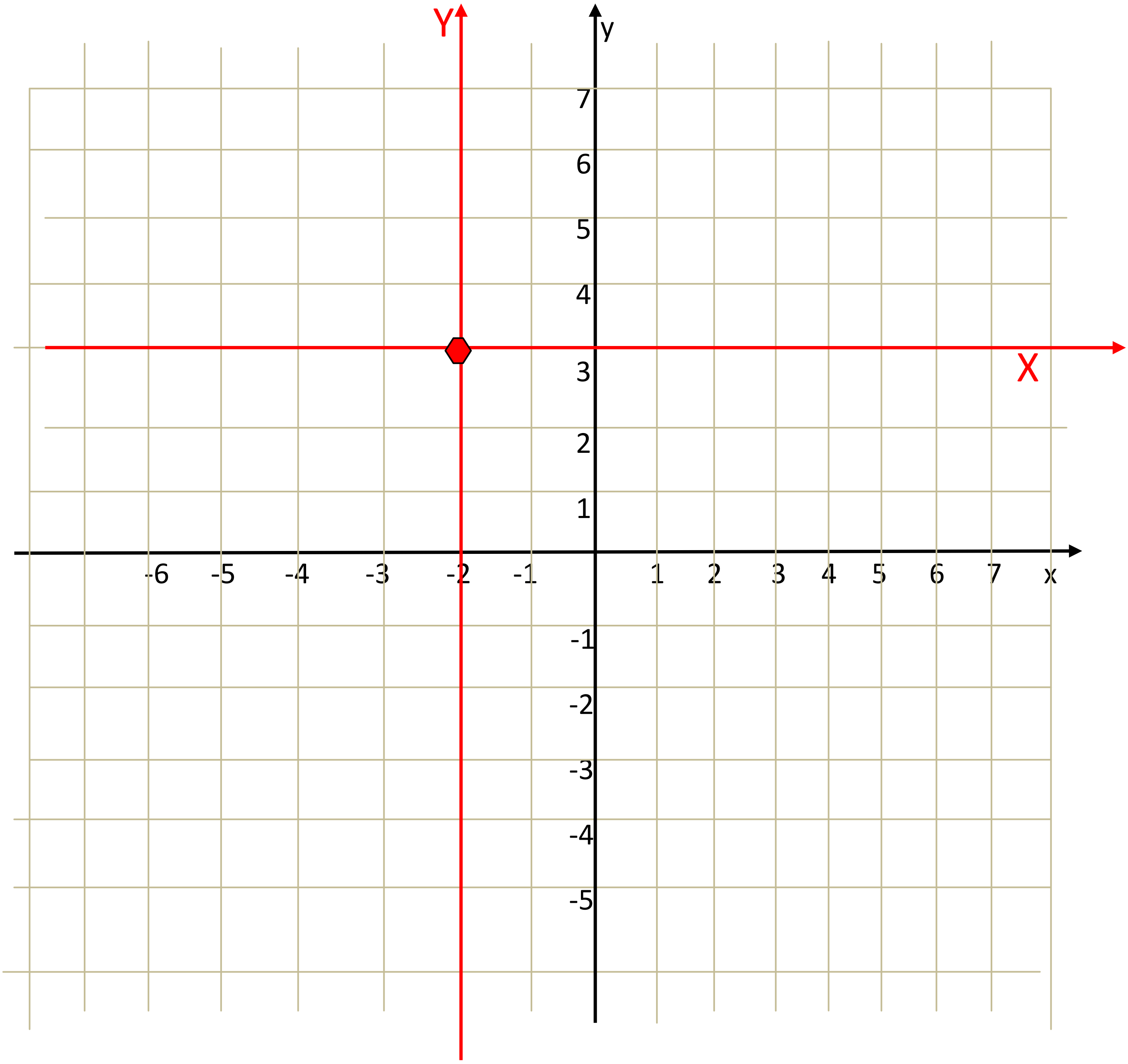
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -13 + 4 + 9$$

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 0 \ , (x+2)^2 \geq 0 \, , (y-3)^2 \geq 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \ \ and \ \ (y-3)^2 = 0 \, ,$$

$$x = -2 \ \ and \ \ y = 3$$

إذاً المعادلة عبارة عن نقطة واحدة هي (3 , 2-) أو دائرة نصف قطرها يساوي صفر



34. $x^2 - 6x + y^2 - y = -9$

بإكمال المربع في كل من x و y ينتج

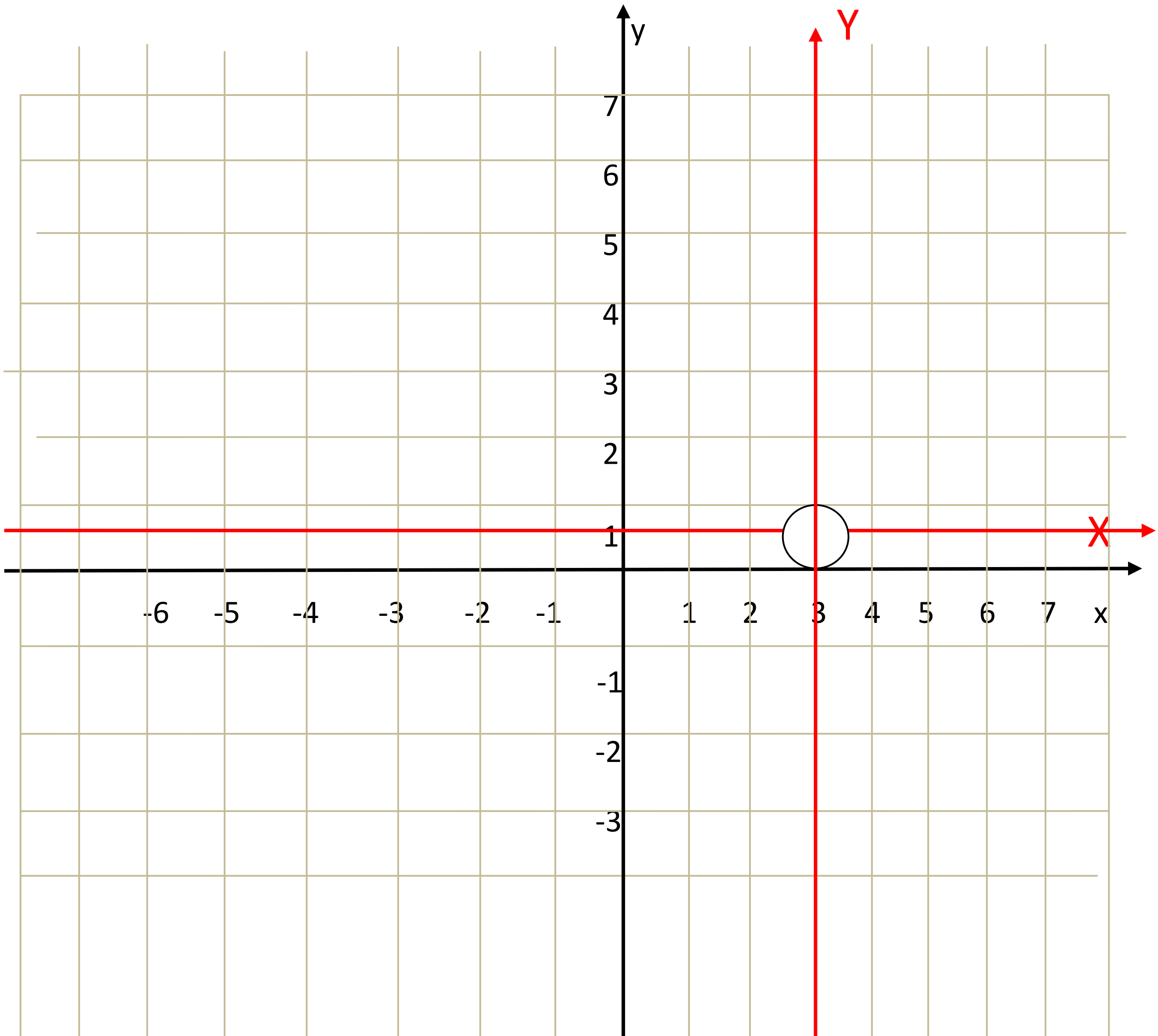
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 - y + \frac{1}{4} = -9 + 9 + \frac{1}{4}$$

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

دائرة مركزها $\left(3, \frac{1}{2}\right)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$

$$X = x - 3 \quad , \qquad Y = y - \frac{1}{2}$$

$$X^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

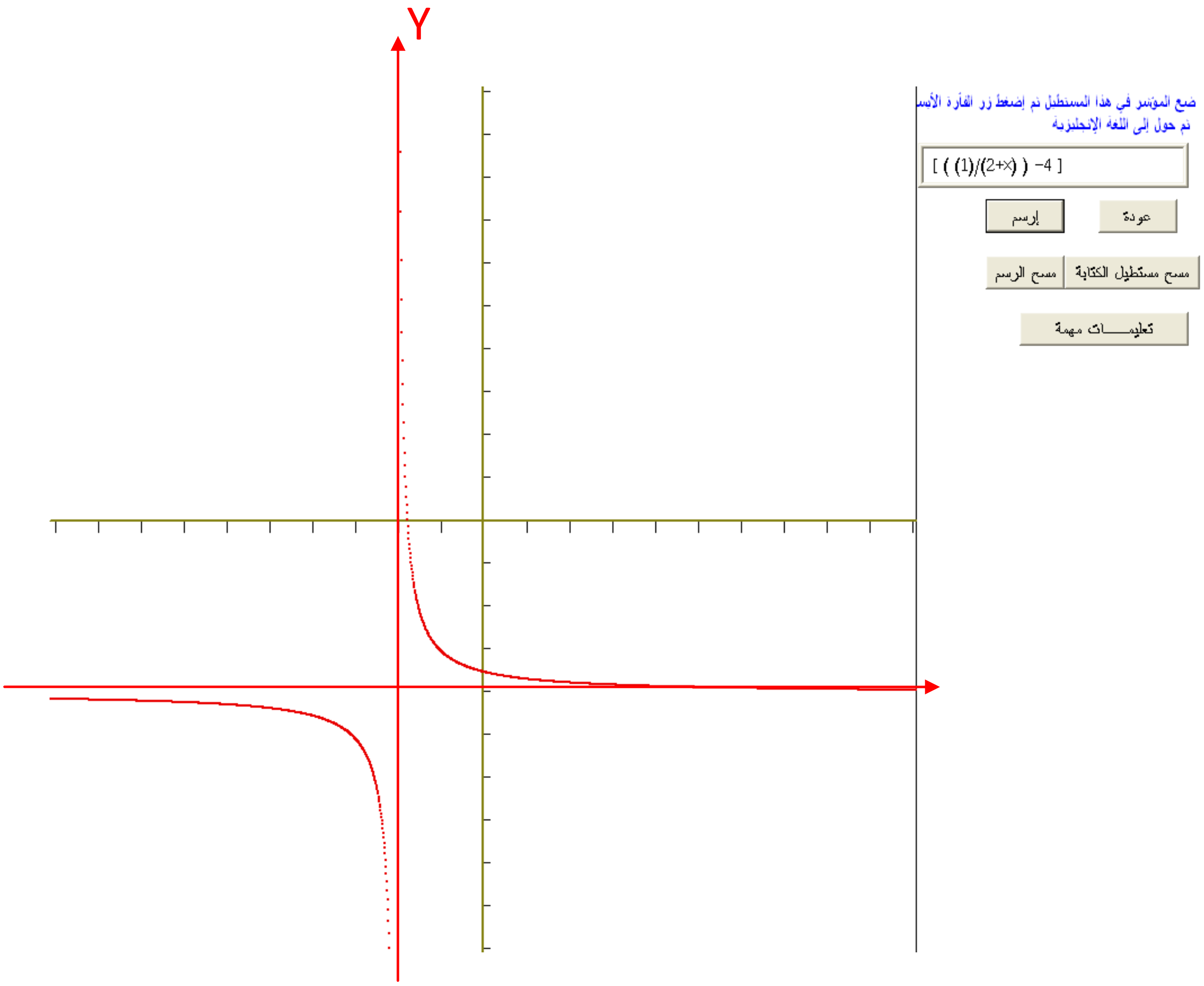


35. $y + 4 = \dfrac{1}{2 + x}$

$X = x + 2 \quad , \qquad Y = y + 4$

$Y = \dfrac{1}{X}$

نقطة الأصل الجديدة عند (-4 , -2)

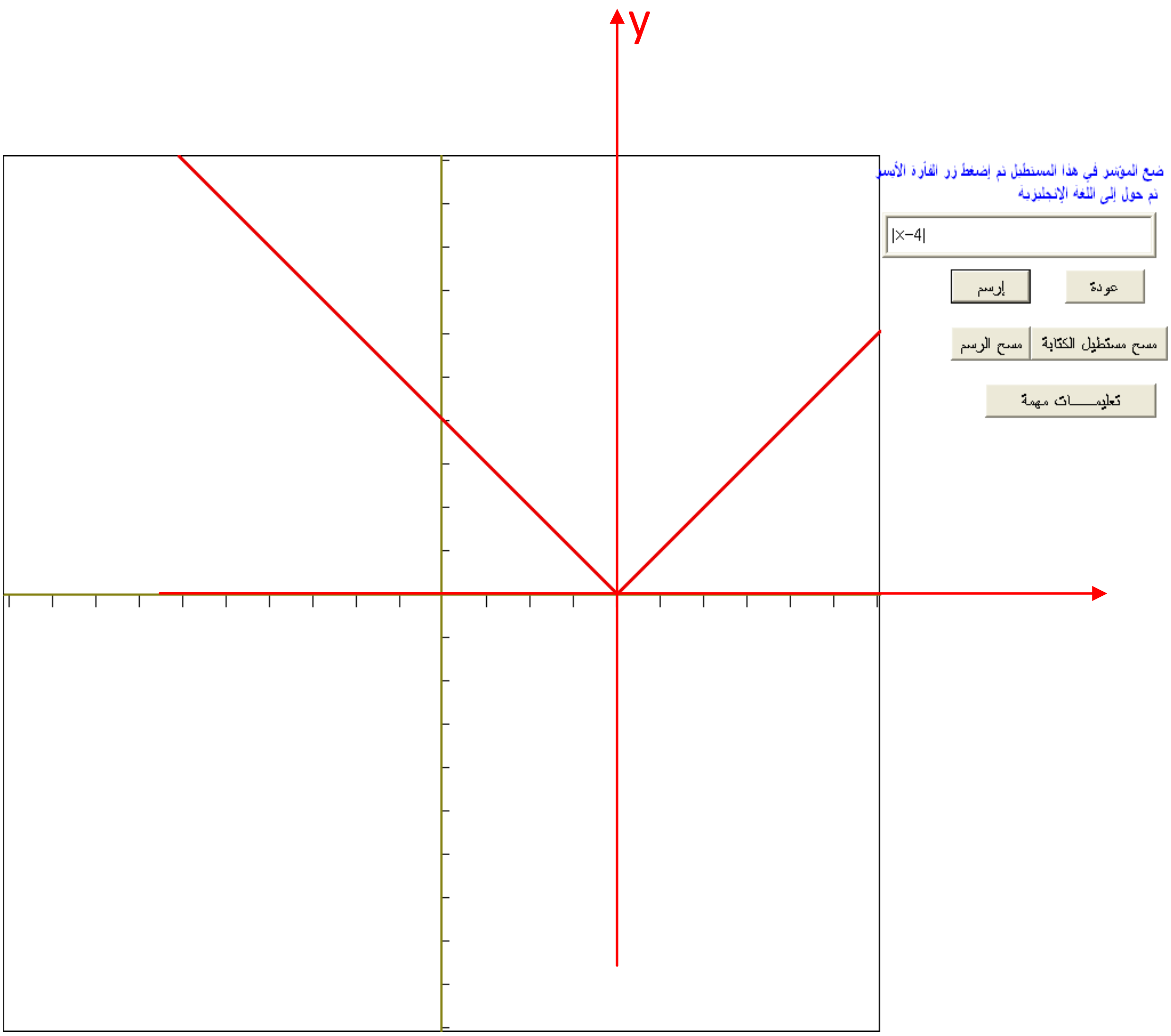


36. $y = |x - 4|$

$X = x - 4$, $Y = y - 0$

$Y = |X|$

نقطة الأصل الجديدة عند (4 , 0)

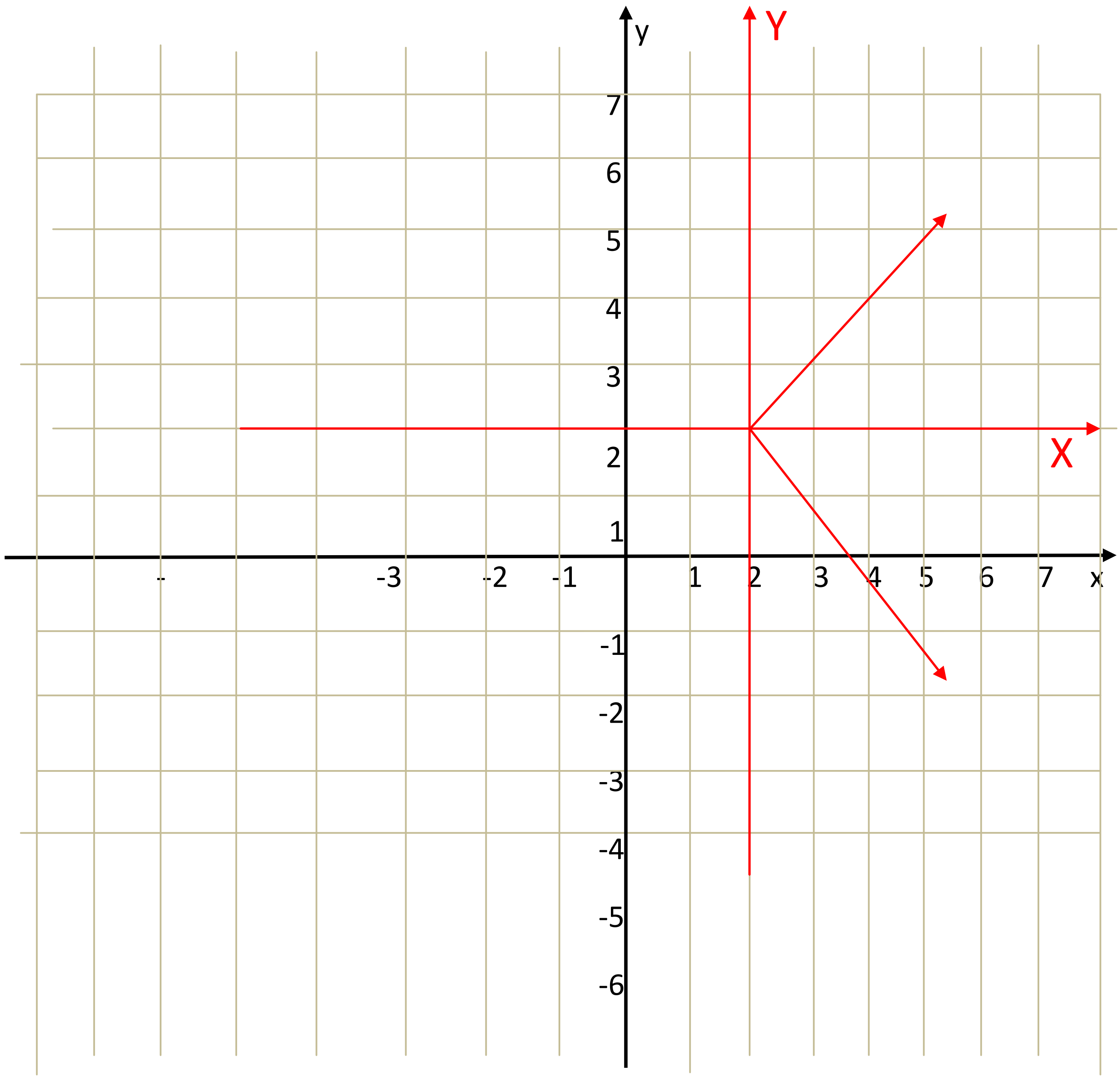


37. $x-2=|y-2|$

$X = x-2 \quad , \qquad Y = y-2$

$X = |Y|$

نقطة الأصل الجديدة عند (2 , 2)

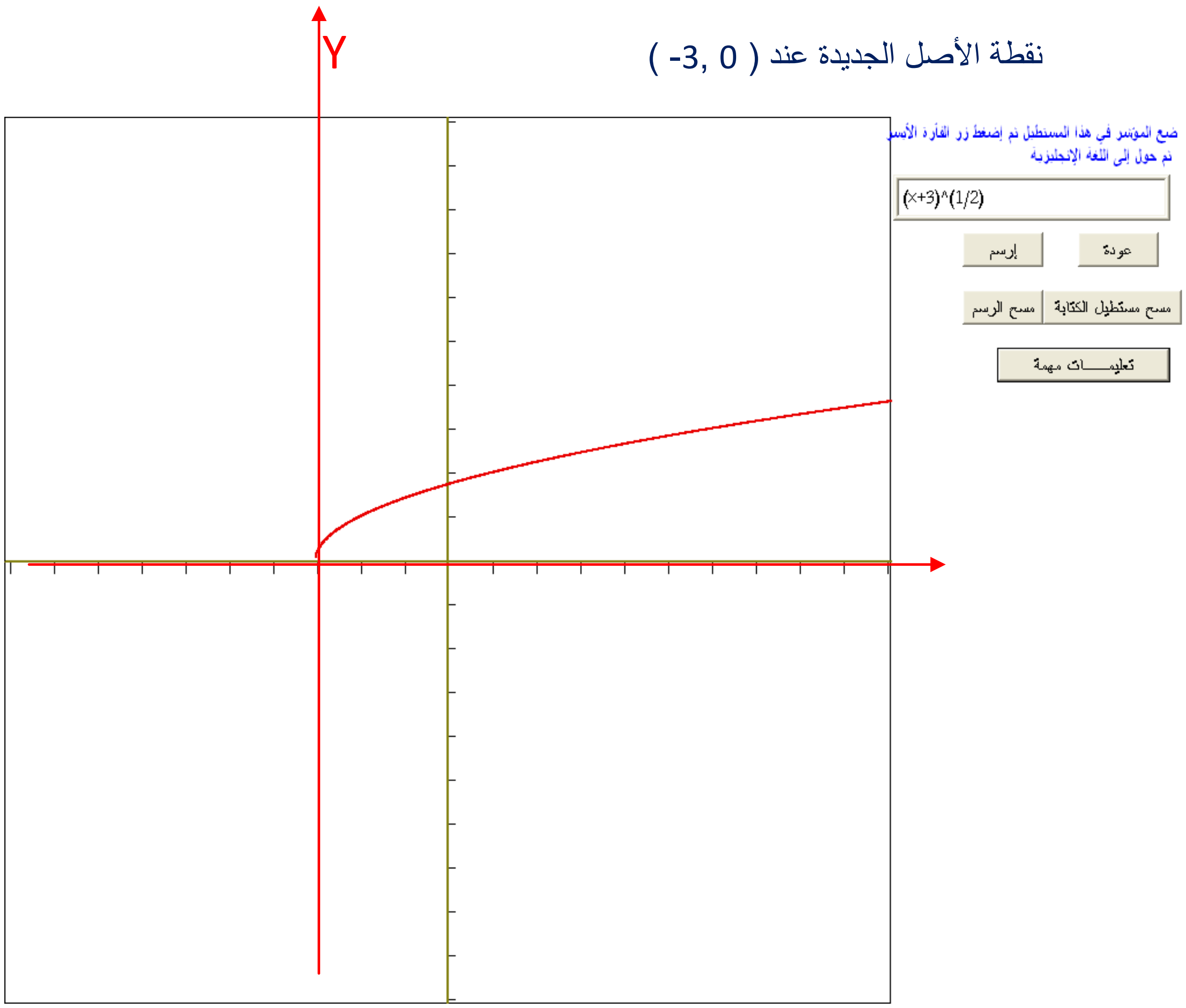


38. $y = \sqrt{x+3}$

$X = x + 3 \quad , \qquad Y = y + 0$

$Y = \sqrt{X}$

نقطة الأصل الجديدة عند (-3, 0)



In Exercises 39 – 47 , determine which of the following functions are odd , which are even , and which are neither.

في التمارين 39 – 47 حدد أي من الدوال الآتية تكون فردية أو تكون زوجية أو تكون لا ذا ولا ذاك

تكون الدالة زوجية even إذا كانت f(-x) = f(x) وتكون فردية odd إذا كانت f(-x) = - f(x)

39. $f(x) = -x$, $\quad f(-x) = -(-x) = -f(x)$ *odd*

40. $f(x) = x^2 + 1$, $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$ *even*

41. $f(x) = 5x^2 - 3$,
$f(-x) = 5(-x)^2 - 3 = 5x^2 - 3 = f(x)$ *even*

42. $f(x) = (x-2)^2$, $\quad f(-x) = (-x-2)^2 = \{(-1)(x+2)\}^2$
$= (-1)^2(x+2)^2$
$= (x+2)^2$ *neither*

43. $f(x) = (x^2+2)^3$, $f(-x) = \{\,(-x)^2 + 2\,\}^3 = (x^2+2)^3$
$= f(x)$ *even*

44. $f(x) = \frac{x}{x^2+4}$, $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+4} = -\frac{x}{x^2+4} = -f(x)$ *odd*

45. $f(x) = x(x^2+1)^3$,. $f(-x) = -x(x^2+1)^3 = -f(x)$ *odd*

46. $y = f(x) = \frac{|x|}{x}$, $f(-x) = \frac{|-x|}{-x} = \frac{|x|}{-x} = -\frac{|x|}{x} = -f(x)$ *odd*

47. $y = f(x) = |x|$, $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ *even*

48. $Let\ f(x) = x^2\ \ and\ g(x) = f(x+3)$

Using a suitable translation ,sketch the graph of g

لتكن $f(x) = x^2$ و $g(x) = f(x+3)$ باستخدام انسحاب مناسب ارسم منحني g

$g(x) = f(x+3) = (x+3)^2$

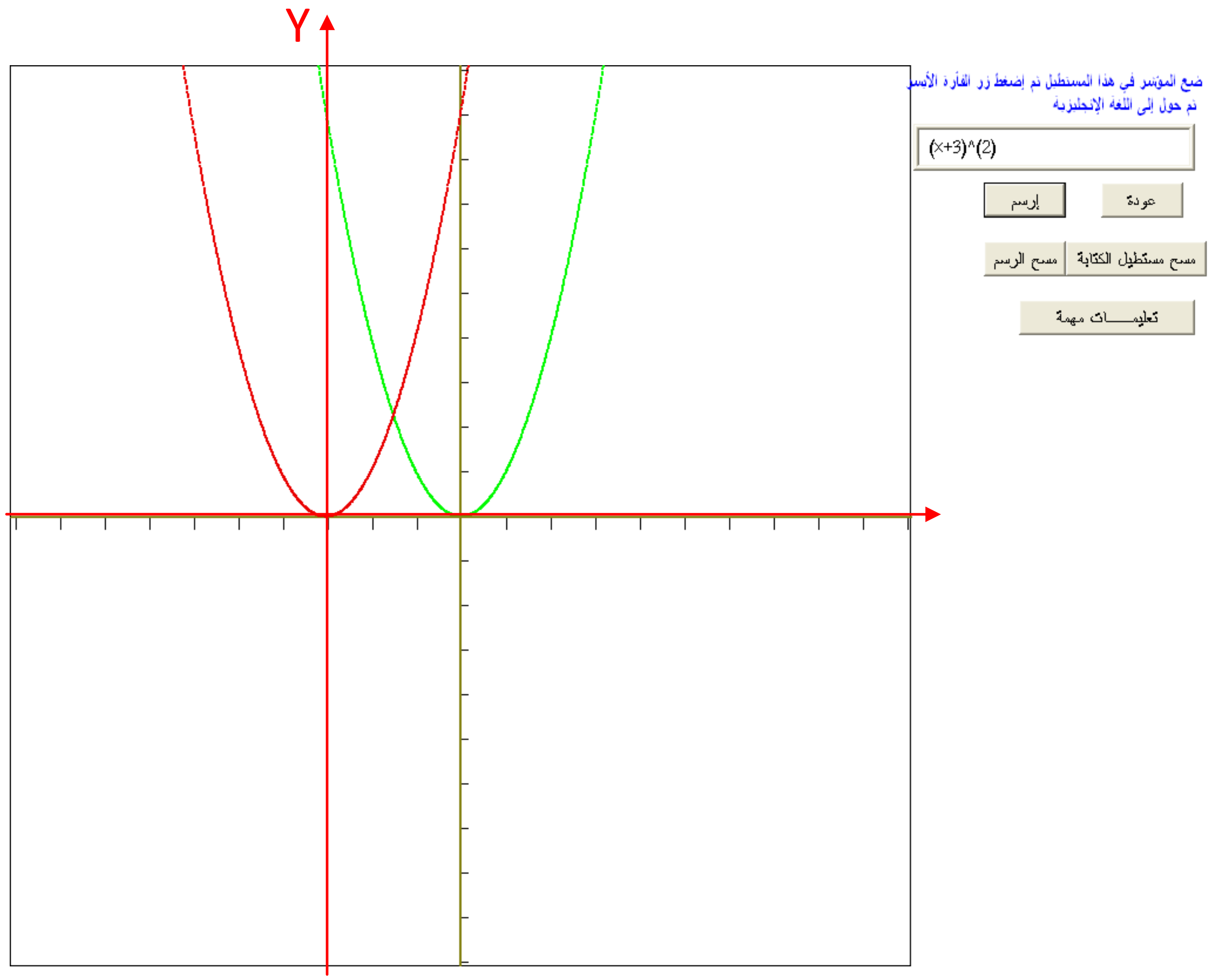
$f(x) = x^2$, $g(x) = (x+3)^2$

$g(x) = y = (x+3)^2$

$X = x + 3$, $Y = y + 0$

$Y = X^2$

نقطة الأصل الجديدة (0 , 3-) انسحاب إلى اليسار على محور x بمقدار 3 وحدات



$49.\ Let\ f(x) = |x|\ \ and\ g(x) = f(x-2)$

sketch the graph of g

لتكن $f(x) = |x|$ و $g(x) = f(x-2)$ ارسم منحني g

$g(x) = f(x-2) = |x-2|$

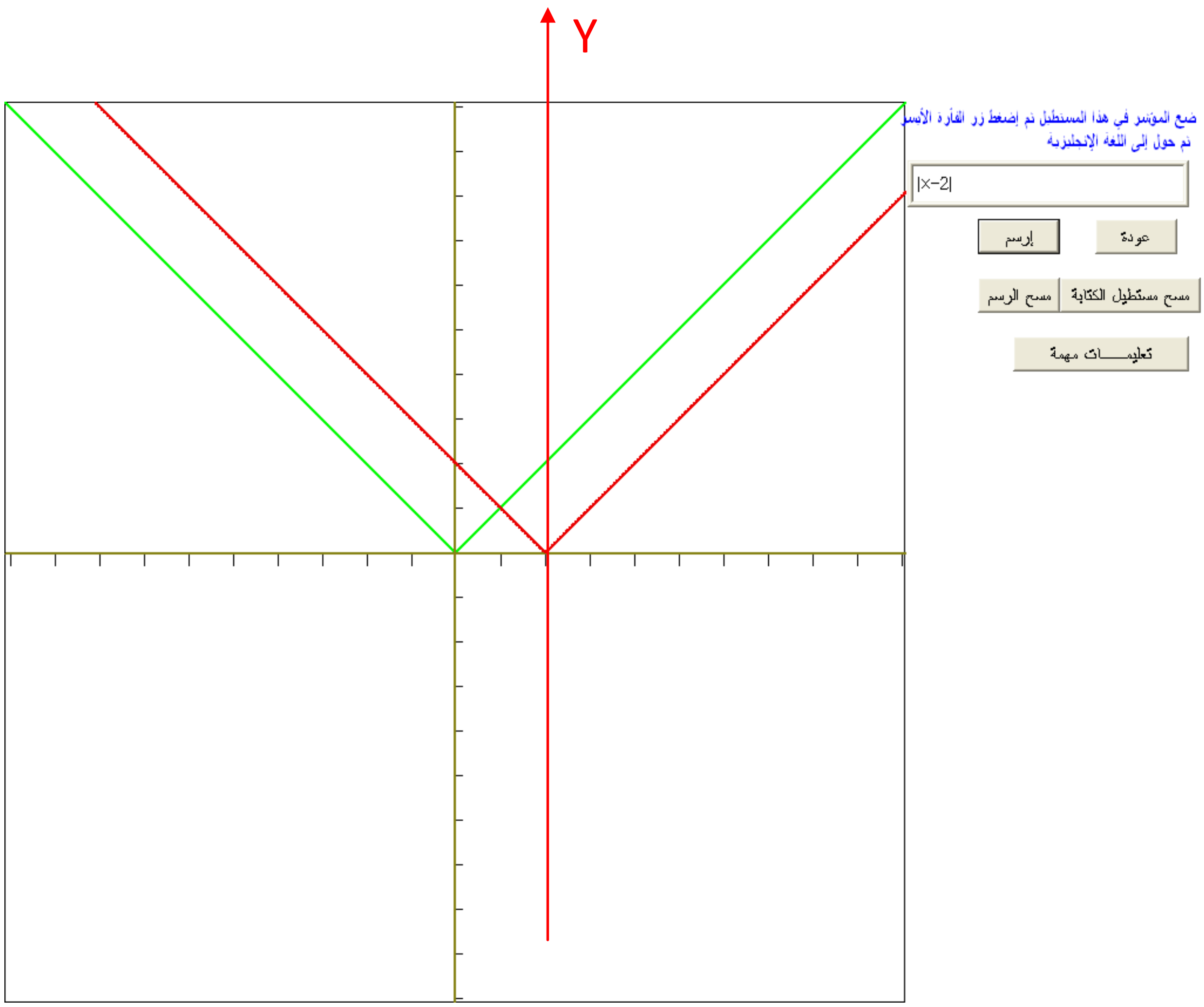
$f(x) = |x|\ ,\quad g(x) = |x-2|$

$g(x) = y = |x-2|$

$X = x - 2\ ,\qquad Y = y + 0$

$$Y = |X|$$

نقطة الأصل الجديدة (2 , 0) انسحاب إلى اليمين على محور x بمقدار وحدتين



50. Let f be a function $and\ let\ g(x) = f(x) - 3\ .What\ is\ the$

Relationship between the graphs of f and g?

لتكن f دالة ولتكن g(x)=f(x)- 3 . ما هي العلاقة بين منحني f و منحني g ؟

Y=f(x)-3

Y+3=f(x)

Y=y+3

انسحاب إلى الأسفل على محور y بمقدار 3 وحدات

51. Suppose the graph of an equation is symmetric with respect to both axes .

Prove that it is symmetric with respect to the origin . Is the converse true ?

إفرض أن منحني دالة ما متماثل بالنسبة لكلي المحورين . أثبت أنه متماثل بالنسبة لنقطة الأصل . هل العكس صحيح ؟

بما أن المنحني متماثل حول المحورين إذاً

إذا استبدلنا x بسالب x واستبدلنا y بسالب y فإن المعادلة لا تتغير وهذا يعني أن المنحني متماثل بالنسبة لنقطة الأصل

العكس غير صحيح أنظر التمرين رقم 17

تمارين (3.5) EXERCISES صفحة 167و168و169 في الكتاب

In Exercices $1-10$, let $f(x)=x^2+4x-2$ and $g(x)=2-x^2$

Find the specified values

في التمارين 1- 10 لتكن $f(x)=x^2+4x-2$ و $g(x)=2-x^2$

أوجد القيم المحددة

1. $(f+g)(-1)=f(-1)+g(-1)$

$$=(-1)^2+4(-1)-2+2—12$$

$$=1-4-2+2-1=3-7=-4$$

أو: أولاً نوجد (f+g)(x)

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^2+4x-2+2-x^2=4x$$

إذاً $(f+g)(x)=4x$ ومنه $(f+g)(-1)=4(-1)=-4$

2. $(f-g)(2)=f(2)-g(2)=2^2+4(2)-2-(2-2^2)$

$$=4+8-2-2+4=16-4=12$$

أو: أولاً نوجد (f-g)(x)

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^2+4x-2-(2-x^2)$$

$$=x^2+4x-2-2+x^2=2x^2+4x-4$$

إذاً $(f-g)(x)=2x^2+4x-4$ ومنه

$$(f-g)(2)=2(2)^2+4(2)-4=8+8-4=12$$

3. $(f-g)(a)\ ,a\epsilon R$

$$(f-g)(a)=f(a)-g(a)=\ a^2+4a-2-(2-a^2)$$

$$=\ a^2+4a-2-2+a^2)=2a^2+4a-4$$

أو: من التمرين السابق وجدنا أن

$$(f-g)(x)=2x^2+4x-4$$

إذاً

$$(f-g)(a)=2(a)^2+4(a)-4=2a^2+4a-\ 4$$

4. $(f.g)(0)=f(0).g(0)=(0+0-2)(2-0)=(-2)(2)=-4$

أو ::

$$(f.g)(x)=\{f(x)\}\{g(x)\}=(x^2+4x-2)(2-x^2)$$

$$=\ (2-x^2)(x^2+4x-2)=2(x^2+4x-2)-x^2(x^2+4x-2)$$

$$=2x^2+8x-4-x^4-4x^3+2x^2=-x^4-4x^3+4x^2+8x-4$$

$$(f.g)(0)=-(0)^4-4(0)^3+4(0)^2+8(0)-4=-4$$

5. $\left(\frac{f}{g}\right)(1)=\frac{f(1)}{g(1)}=\frac{1^2+4(1)-2}{2-1^2}=\frac{1+4-2}{2-1}=\frac{3}{1}=3$

أو::

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x^2+4x-2}{2-x^2}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(1) = \frac{1^2+4(1)-2}{2-1^2} = \frac{5-2}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

6. $(f\ o\ g)(3) = f(\ g(3)\ ) = f(2-3^2) = f(-7)$

$= (-7)^2 + 4(-7) - 2 = 49 - 28 - 2 = 49 - 30 = 19$

أو::أولاً نوجد $(f\ o\ g\ )(x)$

$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)\ ) = f(\ 2-x^2) = (2-x^2)^2 + 4(2-x^2) - 2$

$(f\ o\ g)(3) = (2-3^2)^2 + 4(2-3^2) - 2 = (-7)^2 + 8 - 36 - 2$

= 49+8-38= 19

7. $(g\ o\ f)(3) = g(\ f(3)\ ) = g(3^2 + 4(3) - 2) = g(9 + 12 - 2)$

$= g(19) = 2 - (19)^2 = 2 - 361 = -359$

أو::

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\ x^2 + 4x - 2) = 2 - (\ x^2 + 4x - 2)^2$

$(g\ o\ f)(3) = 2 - (3^2 + 4(3) - 2)^2 = 2 - (9 + 12 - 2)^2$

$= 2 - (19)^2 = 2 - 361 = -359$

8. $(f\ o\ f)(-2) = f(\ f(-2)\ ) = f(\ (-2)^2 + 4(-2) - 2\ )$

$= f(4 - 8 - 2) = f(-6) = (-6)^2 + 4(-6) - 2 = 36 - 24 - 2 = 10$

أو::

$(f\ o\ f)(x) = f(\ f(x)\ ) = f(x^2 + 4x - 2)$

$= (x^2 + 4x - 2)^2 + 4(x^2 + 4x - 2) - 2$

$(f\ o\ f)(-2) = (\ (-2)^2 + 4(-2) - 2)^2 + 4((-2)^2 + 4(-2) - 2) - 2$

$= (4 - 8 - 2)^2 + 4(4 - 8 - 2) - 2 = 36 - 24 - 2 = 10$

9. $(g\ o\ g)(2) = g(\ g(2)\ ) = g(2 - 2^2) = g(-2) = 2—22$

$= \ 2 - 4 = -2$

أو::

$(g\ o\ g)(x) = g(\ g(x)) = g(2 - x^2) = 2 - (2 - x^2)^2$

$(g\ o\ g)(2) = 2 - (2 - (2)^2)^2 = 2— 22 = 2 - 4 = -2$

10. $(g\ o\ f)(2 - a), a\epsilon R$

$(g\ o\ f\ )(2 - a) = g(\ f(2 - a)\ ) = g(\ \ (2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2\ \ )$

$= \ 2 - ((2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2)^2$

$= \ 2 - (a^2 - 4a + 4 + 8 - 4a - 2)^2 = 2 - (a^2 - 8a + 10)^2$

أو::

من التمرين 7 وجدنا أن

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\ x^2 + 4x - 2) = 2 - (\ x^2 + 4x - 2)^2$

$(g\ o\ f)(\ 2 - a) = 2 - ((2 - a)^2 + 4(2 - a) - 2)^2$

$= 2 - (a^2 - 4a + 4 + 8 - 4a - 2)^2 = 2 - (a^2 - 8a + 10)^2$

لاحظ في التمارين السابقة أن الحل المباشر أسهل وأسرع من الحل العام لذلك استخدم الحل المباشر في مثل هذا النوع من المسائل وبالذات في الاختبار

In Exercices $11 - 15$, let $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ $and\ g(x) = (x)^{\frac{1}{4}}$

Find the specified values

في التمارين 11- 15 لتكن $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2}$ و $g(x) = (x)^{\frac{1}{4}}$

أوجد القيم المحددة

11. $(f.g)(1) = f(1).g(1) = \dfrac{1-1}{1+2}\ .(1)^{\frac{1}{4}} = \dfrac{0}{3}.1 = 0.1 = 0$

12. $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)} = (x)^{\frac{1}{4}}\left(\dfrac{x^2+2}{x-1}\right) = \dfrac{x^{2+\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}}}{x-1}$

$$= \frac{x^{\frac{9}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}}}{x-1}$$

$\frac{a}{\frac{b}{c}} = a.\frac{c}{b}$, $x^a.x^b = x^{a+b}$ لا تنسى

13. $(f\ o\ g)(16) = f\big(\,g(16)\big) = f(2) = \frac{2-1}{2^2+2} = \frac{1}{6}$

$g(16) = (16)^{\frac{1}{4}} = (\,2^4)^{\frac{1}{4}} = \ 2^{4.\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{4}} = 2^1 = 2$

14. $(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2+2} = \frac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{2}}\ +2}$

$x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

15. $(g\ o\ g)(x) = g\big(\,g(x)\big) = g\left(x^{\frac{1}{4}}\right) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{16}}$

$(x^a)^b = x^{a.b}$,$(x^3)^4 = x^{12}$ لا تنسى

In Exercises 16 – 24 , find the domains and rules of f+g , f.g , and $\frac{f}{g}$.

في التمارين 16 – 24 أوجد مجالات وصيغ (قواعد) $f+g, f.g, \frac{f}{g}$

مجالات domains f+g و f-g و f.g و $\frac{f}{g}$ هي تقاطع المجالين أي $D_f \cap D_g$

المجال هو فترة أعداد ولإيجاد تقاطع فترتين نأخذ العدد الأصغر من عددي البداية ويكون هو بداية فترة التقاطع نأخذه بأقواسه ونأخذ العدد الأكبر من عددي النهاية ويكون هو نهاية فترة التقاطع أيضاً نأخذه بأقواسه

لاحظ أنه في أقواس البداية يكون مثلاً (a أقل من [a وفي أقواس النهاية يكون (a أكبرمن [a
لاحظ أن بداية الفترة دائماً أكبر من نهايتها والعكس يعني الفترة الخالية أي لا يوجد تقاطع والأمثلة الآتية توضح ذلك

$(1{,}5) \cap (2{,}6) = (2{,}5)$

عددي البداية هما 6 و 5 والأصغر منهما هو 5 وعددي النهاية هما 2 و 1 والأكبر منهما هو 2

$(-\infty,8) \cap (-4,10) = (-4,8)$

عددي البداية هما 10 و 8 والأصغر منهما هو 8 وعددي النهاية هما 4- و ∞- والأكبر منهما هو -4

$(-\infty,8) \cap (-4,8] = (-4,8)$

عددي البداية هما [8 و (8 والأصغر منهما هو (8 وعددي النهاية هما 4- و ∞- والأكبر منهما هو -4

$(2,3) \cap (4,5) = (4,3) = \{\,\} = \emptyset =$ المجموعة الخالية

(4,3) جميع الأعداد التي أقل من 3 وفي نفس الوقت أكبر من 4 لايوجد عدد بهذه الصفة

لاحظ أن (2,3) و (4,5) لا يوجد بينهما عناصر مشتركة أي أن تقاطعهما هو المجموعة الخالية

$[-1,1] \cap (-1,1) = (-1,1)$

لاحظ أن (1,1-) هي مجموعة جزئية من [1,1-]

إن وجدت أن هذه الطريقة لا تعجبك فخذ طريقة الكتاب حيث تقوم طريقة الكتاب على رسم الفترات ومن الرسم يتضح التقاطع

لا حظ أنه في حالة القسمة أي $\frac{f}{g}$ يكون المجال domain هو تقاطع المجالين بعد حذف الأعداد التي عندها تكون g(x)=0 لأن القسمة على الصفر لاتجوز

16. $f(x) = 2x + 1\,, g(x) = 3 - x$

صيغة f+g هي $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x+1) + (3-x) = x + 4$

$Domain(f+g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

صيغة f.g هي $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (2x+1)(3-x)$

$= 2x(3-x) + 1(3-x) = 6x - 2x^2 + 3 - x$

$= -2x^2 + 5x + 3$

$Domain(f.g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$

صيغة $\frac{f}{g}$ هي $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{3-x}\;,\; g(x) \neq 0$

R-{3} هو $g(x)$ domain إذن مجال $x=3$ عندما $g(x)=0$

$$Domain\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g = R \cap (R-\{3\}) = R-\{3\}$$

تقاطع أي فترة مع R هو الفترة نفسها لأن أي فترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R

17. $f(x) = x-2\,, g(x) = x^2-2$

صيغة f+g هي $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = (x-2)+(x^2-2)$

$$= x^2+x-4$$

$$Domain(f+g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$$

صيغة f.g هي $(f.g)(x) = f(x).g(x) = (x-2)(x^2-2)$

$$= x(x^2-2)-2(x^2-2) = x^3-2x-2x^2+4$$

$$= x^3-2x^2-2x+4$$

$$Domain(f.g) = D_f \cap D_g = R \cap R = R$$

صيغة $\frac{f}{g}$ هي $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-2}{x^2-2}$, $g(x) \neq 0$

هو $g(x)$ domain إذن مجال $x=-\sqrt{2}$ أو $x=\sqrt{2}$ عندما $g(x)=0$

$R-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

$$Domain\left(\frac{f}{g}\right) = D_f \cap D_g = R \cap (R-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}) = R-\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$$

تقاطع أي فترة مع R هو الفترة نفسها لأن أي فترة هي مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية R

18. $f(x) = \frac{2}{x-1}$, $g(x) = x-1$

$$(f+g)(x) = \frac{2}{x-1}+x-1 = \frac{2+(x-1)^2}{x-1}$$

Domain f=R-{1} , domain g=R , domain (f+g)=R-{1}

$$(f.g)(x) = \frac{2}{x-1}(x-1) = 2 \ ,x \neq 1$$

Domain f=R-{1} , domain g=R , domain (f.g)=R-{1}

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{2}{x-1}.\frac{1}{x-1} = \frac{2}{(x-1)^2} \ ,g(x) \neq 0$$

x=1 عندما g(x)=0

$$domain\ f = R - \{1\}\ and\ \ domain\ g = R - \{1\}$$

$$domain\ \frac{f}{g} = (R - \{1\}) \cap (R - \{1\} = R - \{1\}$$

$$19.\ f(x) = \frac{x+2}{x-3}\ , \qquad g(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$$

$$(f+g)(x) = \frac{x+2}{x-3} + \frac{x+3}{x^2-4} = \frac{(x+2)(x^2-4)+(x+3)(x-3)}{(x-3)(x^2-4)}$$

$$= \frac{x^3+2x^2-4x-8+x^2-9}{x^3-3x^2-4x+12} = \frac{x^3+3x^2-4x-17}{x^3-3x^2-4x+12}$$

Domain f =R-{3} , domain g=R-{-2,2}

$$domain(f+g) = (R - \{3\} \cap \left(R{-}{-}2{,}2\right\} = R - \{-2{,}2{,}3\}$$

$$(f.g)(x) = \frac{x+2}{x-3}.\frac{x+3}{x^2-4} = \frac{x+2}{x-3}.\frac{x+3}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{(x-3)(x-2)}$$

$$= \frac{x+3}{x^2-5x+6}$$

$$domain(f.g) = (R - \{3\} \cap (R{-}{-}2{,}2\} = R - \{-2{,}2{,}3\}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x+2}{x-3}.\frac{x^2-4}{x+3} = \frac{x^3+2x^2-4x-8}{x^2-9} \ ,g(x) \neq 0$$

لاتنسى في قسمة الكسور نشقلب ونحول القسمة إلى ضرب

$\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ domain لذلك نحذف -3 من مجال x=- 3 عندما g(x)=0

$$domain\left(\frac{f}{g}\right) = R - \{-3, -2, 2, 3\}$$

20. $f(t) = t^{\frac{3}{4}}, g(t) = t^2 + 3$

$$(f + g)(t) = t^{\frac{3}{4}} + t^2 + 3$$

$$f(t) = t^{\frac{3}{4}} = (t^3)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{t^3}$$

$D_f = t^3 \geq 0$, $\quad D_f = t \geq 0 = [0, \infty)$

$D_g = R$, $D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap R = [0, \infty)$

$$(f . g)(t) = t^{\frac{3}{4}} (t^2 + 3) = t^{\frac{11}{4}} + 3t^{\frac{3}{4}}$$

$$\frac{3}{4} + 2 = \frac{3}{4} + \frac{8}{4} = \frac{11}{4}$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap R = [0, \infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{t^{\frac{3}{4}}}{t^2 + 3} \quad , t^2 \geq 0, t^2 + 3 \geq 3 > 0$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = [0, \infty) \cap R = [0, \infty)$$

21. $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $\quad g(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

$$(f + g)(x) = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{2 + x - x^2}$$

$1 - x^2 \geq 0$, $\quad 1 \geq x^2 , x^2 \leq 1 , -1 \leq x \leq 1$

$$D_f = -1 \leq x \leq 1 = [-1, 1]$$

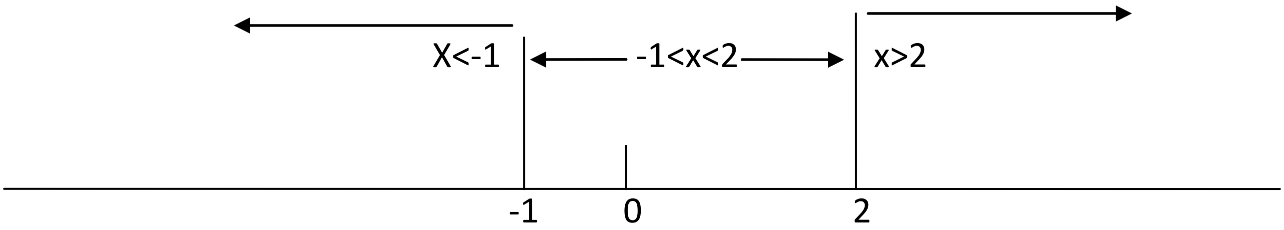
في بعض الأحيان يكون تحديد ما تحت الجذر ليس واضحاً لذلك في مثل هذه الحالة نوجد جذور أو أصفار ما تحت الجذر حيث تقسم هذه الجذور الأعداد الحقيقية إلى فترات وبالتعويض المباشر نحدد المجال domain فمثلاً لإيجاد مجال domain g(x) نقوم بما يلي

$2 + x - x^2 = 0 , -x^2 + x + 2 = 0$, $a = -1, b = 1, c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)(2)}}{2(-1)}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \ , x = \frac{2}{-2} = \ -1 \ \ or\, x = \frac{-4}{-2} = 2$$

جذور المعادلة هي 2 و 1- وهي تقسم الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي الأعداد التي أكبر من 2 والأعداد التي بين 2 و 1- والأعداد التي أقل من 1-



الآن نختار أي عدد في الفترة x>2 وليكن العدد 3 ونعوضه فيما تحت الجذر أي

$$2 + (3) - (3)^2 = 5 - 9 = -4$$

النتيجة عدد سالب وجذر العدد السالب ليس عدد حقيقي أي أن الفترة x>2 ليست ضمن مجال g(x) domain

والآن نختار أي عدد في الفترة -1<x<2 والیكن العدد 0 أي

$$2 + (0) - (0)^2 = 2$$

النتيجة عدد موجب أي أن ما تحت الجذر عدد موجب وهذا يعني أن الفترة -1<x<2 هي ضمن مجال g(x) domain

والآن نختار أي عدد في الفترة x<-1 واليكن العدد 2- أي

$$2 + (-2) — 22 = 2 - 2 - (4) = -4$$

النتيجة عدد سالب وجذر العدد السالب ليس عدد حقيقي أي أن الفترة x<-1   ليست ضمن مجال g(x) domain

وبما أن ما تحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر وحيث أن كلاً من الجذرين يجعل ما تحت الجذر يساوي الصفر لذلك فإن الجذرين 2 و 1- هما ضمن مجال domain g(x)   أي أن

$$D_g = -1 \leq x \leq 2 = [-1,2]$$

$$domain(f+g) = (domian\ f) \cap (domain\ g) = [-1,1] \cap [-1,2]$$
$$= [-1,1]$$

لا حظ أن العدد الأصغر بين البدايتين 2] و 1] هو 1] أما النهايتين فمتساويتين

تمرين : طبق الطريقة السابقة لإيجاد مجال domain $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$$(f.g)(x) = \sqrt{1-x^2}.\sqrt{2+x-x^2} = \sqrt{(1-x^2)(2+x-x^2)}$$
$$= \sqrt{2+x-x^2-2x^2-x^3+x^4}$$
$$= \sqrt{x^4-x^3-3x^2+x+2}$$

$$domain(f.g) = (domian\ f) \cap (domain\ g) = [-1,1] \cap [-1,2]$$
$$= [-1,1]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2+x-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{-(x^2-x-2)}} = \sqrt{\frac{(1-x)(1+x)}{-(x-2)(x+1)}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-x}{2+x}}\ ,\ \ g(x) \neq 0$$

1+x=x+1

وجدنا أعلاه أن g(x)=0 عندما x=2 أو x=-1 لذلك نحذف هذين العددين من مجال domain g(x)

Domain g(x)=(-1,2)

$$domain\left(\frac{f}{g}\right) = (domian\ f) \cap (domain\ g) = [-1,1] \cap (-1,2)$$
$$= (-1,1]$$

لا تنسى $[-1 < (-1$

لا تنسى في التقاطع نأخذ الأصغر من البدايتين والأكبر من النهايتين إنتبه المقارنة بالأقواس فقط عندما تتساوى الأعداد

22. $f(x) = |x|\,, \qquad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

$(f + g)(x) = |x| + \sqrt{x^2 - 1}$

$domain\ f = D_f = R = (-\infty, \infty)$

$x^2 - 1 \geq 0\,, x^2 \geq 1\,, x \geq 1\ or\ x \leq -1$

$domain\ g = x \geq 1\ or\ x \leq -1 = [1, \infty) \cup (-\infty, -1]$

أو $x^2 - 1 = 0, (x-1)(x+1) = 0\,, x = 1\ or\ x = -1$

الجذران 1 و -1 يقسمان الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي x>1 و -1<x<1 و x<-1

لنختبر الفترة x>1 حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=2 ونعوضه في $x^2 - 1$ أي

$(2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة x>1 أي الفترة $(1, \infty)$ تجعل ما تحت الجذر موجب إذا الفترة $(1, \infty)$ ضمن مجال g(x) domain

لنختبر الفترة -1<x<1 حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=0 ونعوضه في $x^2 - 1$ أي

$(0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1 < 0$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة -1<x<1 أي الفترة $(-1,1)$ تجعل ما تحت الجذر سالب إذا الفترة $(-1,1)$ ليست ضمن مجال g(x) domain

لنختبر الفترة x<-1 حيث نأخذ أي عدد فيها وليكن x=-2 ونعوضه في $x^2 - 1$ أي

$(-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$

إذاً جميع الأعداد التي في الفترة x<-1 أي الفترة $(-\infty, -1)$ تجعل ما تحت الجذر موجب إذا الفترة $(-\infty, -1)$ ضمن مجال g(x) domain

إذاً مجال *domain* g(x) هو الفترة $(1,\infty)$ أو $(-\infty,-1)$ ولكن ماتحت الجذر يجب أن يكون أكبر من أو يساوي الصفر أي أن الأعداد التي تجعل ماتحت الجذر يساوي الصفر هي ضمن مجال domain g(x) أي أن الجذرين 1 و -1 هما ضمن مجال domain g(x)

إذاً مجال *domain* g(x) هوالفترة $[1,\infty)$ أو $(-\infty,-1]$ أي $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$

إنتبه : إذا كان الجذر في المقام فإن ماتحت الجذر يجب أن يكون أكبر من الصفر أي أن الجذور والتي تجعل ماتحت الجذر يساوي الصفر ليست ضمن المجال domain

لا تنسى أنه إذا كانت a عدد موجب فإن

$$x^2-a\ge 0\,,x^2\ge a\ ,\qquad x\ge\sqrt{a}\ \ or\ \ x\le-\sqrt{a}$$

$$a-x^2\ge 0\ ,\qquad a\ge x^2\,,\qquad x^2\le a\ ,\ x\le\sqrt{a}\,,\qquad x\ge-\sqrt{a}$$

$x^2+a\ge a>0$ دائماً , $1=1^2$, $\sqrt{1}=1$

هذا الكلام الطويل أعلاه هو للتوضيح أي في الاختبار أكتب الجواب مباشرة

$$D_f+D_g=\ R\cap\{\,(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\,\}$$

لا تنسى أنه إذا كانت A و B و C مجموعات فإن $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

إذاً

$$D_f+D_g=\ R\cap\{\,(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$$

$$=\{R\cap(-\infty,-1]\}\cup\{R\cap[1,\infty)\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

$$(f.g)(x)=|x|\sqrt{x^2-1}$$

$$D_f.D_g=\ R\cap\{\,(-\infty,-1]\cup[1,\infty)\}$$

$$=\{R\cap(-\infty,-1]\}\cup\{R\cap[1,\infty)\}=(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2-1}}\quad,\qquad g(x)\ne 0$$

مما سبق نعلم أن g(x)=0 عندما x=1 أو عندما x=-1 لذلك نحذف هذين العددين من مجال domain حاصل القسمة أي عندما نحذف العدد -1 من $(-\infty,-1]$ تصبح $(-\infty,-1)$

وعندما نحذف العدد 1 من $[1,\infty)$ تصبح $(1,\infty)$ إذاً

$$D_{\frac{f}{g}}=\ R\cap\{\,(-\infty,-1)\cup(1.\infty)\}=\{R\cap(-\infty,-1)\}\cup\{R\cap(1,\infty)\}$$

$$= (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

لا تنسى أن أي فترة هي مجموعة جزئية من R وأن تقاطع ∩ أي فترة مع R هو الفترة نفسها

23. $f(t) = t^{\frac{2}{3}}$, $g(t) = t^{\frac{3}{5}} - 1$

$(f+g)(t) = t^{\frac{2}{3}} + t^{\frac{3}{5}} - 1$

Domain f= domain g =R

$D_{f+g} = R \cap R = R$

لا حظ أن

$$f(t) = t^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{t^2} \quad , \qquad g(t) = t^{\frac{3}{5}} - 1 = \sqrt[5]{t^3} - 1$$

وأن ماتحت الجذر الذي دليله عدد فردي يمكن أن يكون أي عدد حقيقي أي أن مجال domain f(t) و g(t) هو جميع الأعداد الحقيقية أي R

$$(f.g)(t) = t^{\frac{2}{3}}\left(t^{\frac{3}{5}} - 1\right) = t^{\frac{2}{3}+\frac{3}{5}} - t^{\frac{2}{3}} = t^{\frac{19}{15}} - t^{\frac{2}{3}}$$

$\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2(5)}{3(5)} + \frac{3(3)}{5(3)} = \frac{10}{15} + \frac{9}{15} = \frac{19}{15}$ لا تنسى

$D_{f.g} = R \cap R = R$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(t) = \frac{t^{\frac{2}{3}}}{t^{\frac{3}{5}} - 1} \quad , g(t) \neq 0$$

$t^{\frac{3}{5}} - 1 = 0 \,, t^{\frac{3}{5}} = 1 \;, \qquad t = 1$

نحذف من مجال domain g(t) العدد 1 ليصبح مجالها R-{1}

$D_{\frac{f}{g}} = R \cap (R - \{1\}) = R - \{1\}$

24. $f(x) = \frac{x-2}{x+6}$, $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$(f+g)(x)=\frac{x-2}{x+6}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

مقام f(x) يصبح صفراً عندما x=-6 إذاً مجال domain f(x) هو R-{-6}

ومجال domain g(x) هو x>0 أي $(0,\infty)$ إنتبه: x لاتساوي صفر لأن الجذر في المقام

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = (R-\{-6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

$$(f.g)(x)=\frac{x-2}{x+6}.\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x-2}{\sqrt{x}(x+6)}$$

$$D_{f.g} = D_f \cap D_g = (R-\{-6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{x-2}{x+6}.\sqrt{x}=\frac{\sqrt{x}(x-2)}{x+6} \quad , \qquad g(x)\neq 0$$

$$\frac{x-2}{x+6}\div\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{x-2}{x+6}.\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{\sqrt{x}(x-2)}{x+6}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g = (R—6\} \cap (0,\infty) = (0,\infty)$$

In Exercises 25 – 33 find the domains and rules of g o f and f o g

في التمارين 25 – 33 جد مجالات وقواعد (معادلات) g o f و f o g

قبل أن نبدأ بحل التمارين سنورد بعض المقترحات التي تساعدنا على تحديد مجال domain الدالة المركبة composite function f(g(x))

المقترح الأول :

The domain of a composite function f(g(x)) is the set of all x in the domain of g(x) for which g(x) is in the domain of f(x).

هذا المقترح يقول

مجال الدالة المركبة (The domain of a composite function) $f(g(x))$ هو جميع الأعداد x التي في مجال domain $g(x)$ والتي منها فقط يكون العدد $g(x)$ في مجال domain $f(x)$ أي

1) أوجد مجال domain كل من $g(x)$ و $f(x)$

2) من مجال domain $g(x)$ إحذف جميع الأعداد x والتي من أجلها يكون العدد $g(x)$ ليس في مجال domain $f(x)$ وتكون الفترة الناتجة بعد ذلك من مجال domain $g(x)$ هي مجال domain الدالة المركبة $f(g(x))$

إنتبه : إنتبه للترتيب $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تختلف عن $(g \circ f)(x)= g(f(x))$

ملا حظة مهمة :

في التركيب $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ إذا كان مجال domain الدالة الخارجية $f(x)$ هو جميع الأعداد الحقيقية أي R فإن مجال domain الدالة المركبة $(f \circ g)(x)$ هو مجال domain الدالة الداخلية $g(x)$ وذلك لأن $f(x)$ معرفة لجميع الأعداد الحقيقية والتي من ضمنها مجال domain $g(x)$

If domain $f(x)=R$ then domain $(f \circ g)(x)=$domain $g(x)$

المقترح الثاني :

$$Domain\ (f \circ g)(x)=\text{domain}\ g(x) \cap domain\ \ f(g(x))$$

هذا المقترح يقول

أوجد مجال domain الدالة الداخلية $g(x)$ وأوجد مجال domain الدالة المركبة $f(g(x))$ ثم أوجد تقاطع هذين المجالين فتكون الفترة الناتجة هي مجال الدالة المركبة $f(g(x))$

أو

$$Domain\ (g \circ f)(x))=domain\ f(x) \cap domain\ g(f(x))$$

هذا المقترح يقول

أوجد مجال domain الدالة الداخلية f(x) وأوجد مجال domain الدالة المركبة g(f(x))
ثم أوجد تقاطع هذين المجالين فتكون الفترة الناتجة هي مجال الدالة المركبة g(f(x))

إنتبه : في (f o g)(x)=f(g(x)) تكون الدالة الداخلية هي g(x)

في (g o f)(x)=g(f(x)) تكون الدالة الداخلية هي f(x)

هنا قد تقول بما أنني أوجدت مجال الدالة المركبة g(f(x)) فليس هناك حاجة بعد ذلك ولكن المجال الناتج من الدالة المركبة ليس هو المجال الحقيقي لأن ما يجري بالداخل قد يكون يختلف عن النتيجة النهائية والمثال الآتي يوضح ذلك

$f(x) = \sqrt{x} \quad , \qquad g(x) = x^2$

$domain\ f(x) = x \geq 0 = [0, \infty), domin\ g(x) = R$

$(g\ o\ f\ )(x) = g\big(f(x)\big) = g\big(\ \sqrt{x}\ \ \big) = \big(\ \sqrt{x}\ \big)^2 = \ x$

لا حظ هنا أن مجال *domain* *g(f(x))* هو جميع الأعداد الحقيقية *R* أي أن الاعداد السالبة هي من ضمن مجال *g(f(x))* ولكن في الحقيقة لا نستطيع حساب قيمة الدالة عندما مثلاً *x=-3* حيث $f(-3) = \sqrt{-3}$ *ليست في مجال* f(x) *فما يجري في الداخل مختلف*

لذلك فإن

$$domain\ \ g(\ f(x)\ ) = domain\ \ f(x) \cap domain\ g(\ f(x)\ )$$

$$= \quad [0, \infty) \cap R = [0, \infty)$$

25. $f(x) = 1 - x \ \ , \ \ g(x) = 2x + 5$

Domain f =domain g = R لأنها كثيرات حدود

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(1 - x) = 2(1 - x) + 5 = 2 - 2x + 5$

$= \ -2x + 7$

$(f\ \ o\ g)(x) = f\big(\ g(x)\big) = f(2x + 5) = 1 - (2x + 5) = -2x - 4$

Domain (g o f)=domain (f o g)=R

إذا كانت كل من f(x) و g(x) كثيرة حدود فإن f(g(x)) و g(f(x)) هما أيضاً كثيرتي حدود وتكون مجالات domains الكل هو R أي جميع الأعداد الحقيقية

26. $f(x) = x^2 + 2x + 3$, $g(x) = x - 1$

$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(\,x^2 + 2x + 3\,) = (x^2 + 2x + 3\,) - 1$

$= x^2 + 2x + 2$

$(f\ o\ g)(x) = f\big(\,g(x)\big) = f(x-1) = (x-1)^2 + 2(x-1) + 3$

$= x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 3 = x^2 + 2$

Domain f(x)= domain g(x)=domain f(g(x))=domain g(f(x))=R

أنظر الملاحظة السابقة في التمرين 25

27. $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$

$domain\ f(x) = R$, $domain\ g(x) = x \geq 0 = [0, \infty)$

$(g\ o\ f)(x) = g\big(\,f(x)\big) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$

$domain\ g(\,f(x)\,) = R$

$domain\ (g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domain\ g(\,f(x)\,)$

$= R \cap R = R$

إنتبه للترتيب هنا الدالة الداخلية هي f(x)

$(f\ o\ g)(x) = f\big(\,g(x)\big) = f(\,\sqrt{x}\,) = (\,\sqrt{x}\,)^2 = x$

$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) = [0, \infty)$

أنظر ملاحظة مهمة قبل البدء في حل هذه التمارين

أو

$$domain\ f(\ g(x)) = R$$

$$domain\ (f\ o\ g) = domain\ g(x) \cap domain\ f(\ g(x))$$

$$= [0,\infty) \cap R = [0,\infty)$$

إنتبه للترتيب هنا الدالة الداخلية هي g(x)

28. $f(x) = x^6$, $g(x) = x^{\frac{3}{4}}$

$$domain\ f(x) = D_f = R\ ,\qquad g(x) = x^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{x^3}$$

$$domain\ g(x) = D_g = x^3 \geq 0 = x \geq 0 = [0,\infty)$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(x^6) = (x^6)^{\frac{3}{4}} = x^{\frac{18}{4}} = x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}$$

$$= \sqrt{(x^4)^2.x} = x^4\sqrt{x}$$

$$domain\ g(\ f(x)) = domain\ \ x^4\sqrt{x} = x \geq 0 = [0,\infty)$$

$$domain\ (g\ o\ f) = D_{g\ o\ f} = domain\ f(x) \cap domain\ g(f(x))$$

$$= R \cap [0,\infty) = [0,\infty)$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)) = f\left(x^{\frac{3}{4}}\right) = \left(x^{\frac{3}{4}}\right)^6 = x^{\frac{18}{4}} = x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}$$

$$= \sqrt{(x^4)^2.x} = x^4\sqrt{x}$$

$$domain\ \ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) = [0,\infty)$$

أنظر ملاحظة مهمة قبل البدء في حل هذه التمارين

Or:

$$domain\ f(\ g(x)) = domain\ \ x^4\sqrt{x} = x \geq 0 = [0,\infty)$$

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = D_{f\ o\ g} = domain\ g(x) \cap domain f(g(x))$$

$$= [0,\infty) \cap [0,\infty) = [0,\infty)$$

إنتبه : تقاطع أي فترة مع نفسها يساوي الفترة نفسها

29. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 5x + 6$

$domain\ f(x) = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ g(x) = R$ كثيرة حدود

$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(\sqrt{x}\ ) = (\ \sqrt{x}\ )^2 - 5(\sqrt{x}\ \ ) + 6$

$= x - 5(\sqrt{x}\ ) + 6$

بما أن مجال domain g(x)=R لذلك فإن

Domain (g o f)(x)=domain f(x) =[0,∞)

If domain g(x)=R then domain (g o f)(x)=domain f(x)

Or:

$domain\ g\big(f(x)\big) = x \geq 0 = [0, \infty)$

$domain\ (g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domain\ g(\ f(x))$

$= [0, \infty) \cap [0, \infty) = [0. \infty)$

$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)\ ) = f(x^2 - 5x + 6) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

$x^2 - 5x + 6 \geq 0\ , (x-2)(x-3) \geq 0$

تذكر : عددان حاصل جمعهما 5- وحاصل ضربهما 6 إذاً هما 2- و 3-

$(x-2) \geq 0\ and\ (x-3) \geq 0\ \ or\ \ (x-2) \leq 0\ and\ (x-3) \leq 0$

$x \geq 2 \quad and \quad x \geq 3 \qquad or \qquad x \leq 2 \quad and \quad x \leq 3$

$[2, \infty) \quad \cap \quad [3, \infty) \qquad \cup \qquad (-\infty, 2] \quad \cap \quad (-\infty, 3]$

$[3, \infty) \qquad \cup \qquad (-\infty, 2]$

تقاطع:أصغر البدايتين وأكبر النهايتين تقاطع:أصغر البدايتين وأكبر النهايتين

$domain\ f\big(g(x)\big) = [3, \infty) \cup (-\infty, 2] = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ g(x) \cap domain\ f(\ g(x))$$

$$= \quad R \cap \{\ (-\infty, 2] \cup [3, \infty)\ \}$$

$$= (\ R \cap (-\infty, 2]\ ) \cup (\ R \cap [3, \infty)\ )$$

$$= \quad (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$$

لاحظ أن هاتين الفترتين لا يوجد بينهما عناصر مشتركة ولذلك لا يمكن كتابتهما كفترة واحدة

طريقة أخرى لإيجاد مجال domain الدالة f(g(x))

$$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)\ ) = f(x^2 - \ 5x + 6) = \sqrt{x^2 - \ 5x + 6}$$

$$x^2 - \ 5x + 6 = 0\ \ , (x-2)(x-3) = 0\ , x = 2\ or\ x = 3$$

الآن الجذران 2 و3 يقسمان الأعداد الحقيقية إلى ثلاث فترات هي الأعداد التي أكبر من 3 والأعداد التي بين 2 و 3 والأعداد التي أقل من 2

الآن لنجرب كل فترة حيث نأخذ منها عدداً ونعوضه فيما تحت الجذر حيث ما تحت الجذر يجب أن يكون عدد موجب

لنأخذ العدد 4 من الفترة x>3

$$(4)^2 - 5(4) + 6 = 16 - 20 + 6 = 22 - 20 = 2 > 0$$

إذن الفترة x>3 ضمن المجال domain

لنأخذ العدد $2.5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$ من الفترة 2<x<3

$$\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{2}\right) + 6 = \frac{25}{4} - \frac{25}{2} + 6 = \frac{25}{4} - \frac{50}{4} + \frac{24}{4} = \frac{49}{4} - \frac{50}{4}$$

$$= -\frac{1}{4} < 0$$

الناتج عدد سالب أي أن الفترة 2<x<3 ليست ضمن المجال domain

لنأخذ العدد 0 من الفترة x<2

$$(0)^2 - 5(0) + 6 = 6 > 0$$

إذن الفترة x<2 ضمن المجال domain

وبما أن كل من الجذرين 3 و 2 يجعلان ما تحت الجذر مساوياً للصفر والصفر تحت الجذر مقبول (لو كان الجذر في المقام لما قبلنا ذلك لأن القسمة على الصفر لا تجوز) لذلك فإن المجال domain هو

$x \leq 2 \; or \; x \geq 3 = (-\infty, 2] \cup [3, \infty)$

30. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 - 3x - 10$

Domain f(x)=R-{0}   , domain g(x)=R

$$(g \; o \; f)(x) = g(\, f(x) \,) = g\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{x}\right) - 10$$
$$= \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} - 10$$

بما أن domain g(x)=R إذاً

Domain (g o f)(x)=domain f(x)=R-{0}

Or:

Domain g(f(x))=R-{0}

$domain \; (g \; o \; f)(x) = domain \; f(x) \cap domain \; g(\, f(x))$

$$= R - \{0\} \cap R = R - \{0\}$$

$(f \; o \; g)(x) = f(\, g(x) \,) = f(\, x^2 - 3x - 10 \,) = \dfrac{1}{x^2 - 3x - 10}$

$x^2 - 3x - 10 = 0$, $(x - 5)(x + 2) = 0$

X=5 or x=-2

Domain f(g(x))=R-{ - 2 , 5 }

$domain \; (f \; o \; g)(x) = domain \; g(x) \cap domain \; f(\, g(x))$

$$= R \cap R - \{-2, 5\} = R - \{-2, 5\}$$

31. $f(x)=\dfrac{3}{x+2}$, $\quad g(x)=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}x+1}=(-1)\left(\dfrac{3}{x+3}\right)=-\dfrac{3}{x+3}$

$$\frac{1}{3}x+1=\frac{x}{3}+\frac{3}{3}=\frac{x+3}{3}$$

Domain f(x)= R-{ - 2 } , domain g(x)=R-{ -3 }

$$(g\ o\ f)(x)=g(\,f(x)\,)=g\left(\frac{3}{x+2}\right)=-\ \frac{3}{\frac{3}{x+2}+3}$$

$$=\ -3\div\frac{3}{x+2}+3=\ -3\ \div\ \frac{3x+9}{x+2}=(-3)\left(\frac{x+2}{3x+9}\right)$$

$$=(-3)\left(\frac{x+2}{3(x+3)}\right)=-\frac{x+2}{x+3}$$

$$\frac{3}{x+2}+3=\frac{3}{x+2}+\frac{3(x+2)}{x+2}=\frac{3+3x+6}{x+2}=\frac{3x+9}{x+2}$$

إيجاد مجال domain (g o f) بطريقة الحذف

مجال domain g(x) هو R-{-3} أي أن العدد -3 ليس في مجال domain g(x)

إذا متى يكون $g(-3)=g\left(\frac{3}{x+2}\right)=g(\,f(x))$ ؟ يكون عندما

$$\frac{3}{x+2}=-3\ ,3=-3(x+2),3=-3x-6,3x=-9,x=-3$$

مجال domain f(x) هو R-{2} والآن نحذف منه العدد -3 ليصبح R-{-3,-2} وهذا هو مجال domain الدالة المركبة composite function أي

Domain (g o f)(x)=R-{-3,-2}

إيجاد مجال domain (g o f) بطريقة التقاطع

$$domain\ g\big(f(x)\big)=domain-\frac{x+2}{x+3}=R-\{-3\}$$

$$domain(g\ o\ f)(x) = domain\ f(x) \cap domaing(f(x))$$

$$= \quad R - \{-2\} \cap R - \{-3\} = R - \{-2\,,-3\}$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)) = f\left(-\frac{3}{x+3}\right) = \frac{3}{\frac{-3}{x+3}+2}$$

$$= 3 \div \frac{-3}{x+3} + 2 = 3 \div \frac{2x+3}{x+3} = (3)\left(\frac{x+3}{2x+3}\right) = \frac{3x+9}{2x+3}$$

$$\frac{-3}{x+3} + 2 = \frac{-3+2(x+3)}{x+3} = \frac{-3+2x+6}{x+3} = \frac{2x+3}{x+3}$$

إيجاد مجال domain (f o g) بطريقة الحذف

مجال f(x) domain هو R-{-2} أي أن العدد -2 ليس في مجال f(x) domain

إذا متى يكون $f(-2)$ = $f\left(-\frac{3}{x+3}\right)$ = $f(\,g(x))$ ؟ يكون عندما

$$\frac{-3}{x+3} = -2\ ,-3 = -2(x+3), -3 = -2x-6, 2x = -3, x = -\frac{3}{2}$$

مجال g(x) domain هو R-{-3} والآن نحذف منه العدد $-\frac{3}{2}$ ليصبح $R - \{-3, -\frac{3}{2}\}$

وهذا هو مجال domain الدالة المركبة composite function أي

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = R - \{-3, -\frac{3}{2}\}$$

إيجاد مجال domain (f o g) بطريقة التقاطع حيث وجدنا أعلاه أن

$$f(g(x)) = \frac{3x+9}{2x+3}$$

$$2x+3 = 0\,,\ 2x = -3\,,\ x = -\frac{3}{2}$$

$$domain\ f(g(x)) = R - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$$

$$domain\ (f\ o\ g)(x) = domain\ \ g(x) \cap domain\ f(g(x))$$

$$= R - \{-3\} \cap R - \left\{-\frac{3}{2}\right\} = R - \left\{-3\,, -\frac{3}{2}\right\}$$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}\ , g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$f(1) = \dfrac{1}{1-1} = \dfrac{1}{0} = ??$, لا تقسم على الصفر , $g(-1) = \dfrac{1}{-1+1} = \dfrac{1}{0} = ??$

$domain\ \ f(x) = R - \{1\}\ ,\qquad domain\ \ g(x) = R - \{-1\}$

$$(g\ o\ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} + 1}$$

$$= 1 \div \left\{\frac{1}{x-1} + 1\right\} = 1 \div \{\frac{1 + 1(x-1)}{x-1}\}$$

$$= \ 1 \div \left\{\frac{1 + x - 1}{x-1}\right\} = 1 \div \frac{x}{x-1} = (1)\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x-1}{x}$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x-1}\right) = g(-1) = \frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = ??$$

تكون $g\left(\frac{1}{x-1}\right) = g(-1)$ عندما

$$\frac{1}{x-1} = -1, \qquad 1 = -1(x-1), 1 = -x + 1, x = 1 - 1 = 0$$

أي عندما x=0 إذاً نحذف 0 من مجال domain f(x) ليصبح $R - \{1,0\}$

$domain\ (g\ o\ f)(x) = R - \{0,1\}$ إذاً

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x+1} - 1} = \frac{1}{\frac{1 - 1(x+1)}{x+1}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1 - x - 1}{x+1}} = \frac{1}{\frac{-x}{x+1}} = -\frac{x+1}{x}$$

$$f(\,g(x)) = f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f(1) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = ??$$

تكون $f\left(\frac{1}{x+1}\right) = f(1)$ عندما

$$\frac{1}{x+1} = 1, \qquad 1 = x+1, x = 1-1\,, x = 0$$

أي عندما x=0 إذاً نحذف 0 من مجال domain g(x) ليصبح $R - \{-1,0\}$

$domain\ (f\ o\ g)(x) = R - \{-1,0\}$ إذاً

33. $f(x) = \sqrt{x^2+3}\ , \qquad g(x) = \sqrt{x^2-4}$

$x^2 + 3 \geq 3 > 0, \qquad so\ \ domain\, f(x) = R$

$x^2 - 4 \geq 0\,, x^2 \geq 4, \qquad x \geq 2\ \ or\ \ x \leq -2$

$$domain\ \ g(x) = x \geq 2\ \ or\ \ x \leq -2 = [2,\infty) \cup (-\infty,-2]$$
$$= (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\,\sqrt{x^2+3}\,\right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^2 - 4}$$
$$= \sqrt{x^2+3-4} = \sqrt{x^2-1}$$

$x^2 - 1 \geq 0\,, x^2 \geq 1, \qquad x \geq 1\ \ or\ \ x \leq -1$

$$domain\ \ g(\,f(x)) = x \geq 1\ \ or\ \ x \leq -1 = [1,\infty) \cup (-\infty,-1]$$
$$= (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

$$domain(g\ o\ f)(x) = domain\, f(x) \cap domain\ g(f(x))$$
$$= R \cap (\ \ (-\infty,-1] \cup [1,\infty)\ \ )$$
$$= R \cap (\ \ (-\infty,-1]\ ) \cup R \cap (\ [1,\infty))$$
$$= \ (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\ g(x)\ ) = f\left(\ \sqrt{x^2-4}\ \right) = \sqrt{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^2 + 3}$$

$$= \sqrt{x^2-4+3} = \sqrt{x^2-1}$$

بما أن مجال f(x)=R domain إذاً

$$\text{Domain } (\text{f o g})(\text{x}) = \text{domain g(x)} \quad = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$$

لا تنسى : إذا كان مجال domain الدالة الخارجية هو R فإن مجال الدالة المركبة يساوي مجال domain الدالة الداخلية

In Exercises 34 – 41 ,Write F as the composite g o f of two functions f and g (neither of which equal to F)

في التمارين 34 – 41 أكتب F كالتركيب g o f للدالتين f و g (واللآتي كل منهما لا تساوي F)

سنورد مع الحل بعض المقترحات التي قد تساعد على إيجاد الدالتين g(x) و f(x) وستكون f(x) هي الدالة الداخلية و g(x) هي الدالة الخارجية أي (g o f)(x)=g(f(x))

34. $F(x) = (6x-5)^3$

الدالة F(x) بها قوس مرفوع لقوة , خذ f لتساوي ما بداخل القوس وخذ g لتساوي الباقي بعد وضع x بدل ما بداخل القوس

$f(x) = 6x - 5\ \ , g(x) = (x)^3 = x^3$

$(g\ o\ f)(x) = g\big(\ f(x)\big) = g(6x-5\ ) = (6x-5)^3 = F(x)$

35. $F(x) = \sqrt{x+2}$

الدالة عبارة عن جذر فقط , خذ f لتساوي ما تحت الجذر وخذ g لتساوي جذر x

$f(x) = x + 2\ ,\qquad g(x) = \sqrt{x}$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(x+2) = \sqrt{x+2}$$

36. $F(x) = \frac{\sqrt[4]{x}}{2}$

الدالة بسط ومقام , خذ f لتكون مقلوب البسط والمقام وتكون $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt[4]{x}} \ , \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(g \ o \ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g\left(\frac{2}{\sqrt[4]{x}}\right) = \frac{1}{\frac{2}{\sqrt[4]{x}}} = 1 \div \frac{2}{\sqrt[4]{x}} = (1)\frac{\sqrt[4]{x}}{2} = \frac{\sqrt[4]{x}}{2}$$

لا تنسى : في قسمة الكسور شقلب واضرب

37. $F(x) = 3x^2 + 7$

الدالة كثيرة حدود بها حد لا يحوي x , خذ f لتساوي جميع الحدود التي تحوي x وخذ g لتساوي x زائد أو ناقص الحد الذي لا يحوي x

$$f(x) = 3x^2, \qquad g(x) = x + 7$$

$$(g \ o \ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(3x^2\ ) = 3x^2 + 7$$

38. $F(x) = |2x + 9|$

الدالة قيمة مطلقة , خذ f لتساوي ما بداخل القيمة المطلقة وخذ g=|x|

$$f(x) = 2x + 9\ , \qquad g(x) = |x|$$

$$(g \ o \ f)(x) = g(\ f(x)\ ) = g(2x + 9\ ) = |2x + 9|$$

39. $F(x) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$

الدالة F(x) بها قوس مرفوع لقوة , خذ f لتساوي ما بداخل القوس وخذ g لتساوي الباقي بعد وضع x بدل ما بداخل القوس

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \ , \qquad g(x) = x^{\frac{5}{2}}$$

$$(g\ o\ x)(x) = g(\,f(x)) = g\left(x + \frac{1}{x}\ \right) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^{\frac{5}{2}}$$

40. $F(x) = \dfrac{2}{x-3}$

الدالة بسط ومقام , خذ f لتكون مقلوب البسط والمقام وتكون $g(x) = \frac{1}{x}$

$$f(x) = \frac{x-3}{2}\,, \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\frac{x-3}{2}\right) = \frac{1}{\frac{x-3}{2}} = \frac{2}{x-3}$$

41. $F(x) = \sqrt{x} + 1$

الدالة عبارة عن جذر x وأعداد , خذ f لتساوي الجذر وخذ g لتساوي x مع الأعداد

$$f(x) = \sqrt{x}\,, \qquad g(x) = x + 1$$

إذا لم يكن الشرط (neither of which equal to F) أي لا أي منهما يساوي F غير موجود فإن الحل العام الذي يعمل مع أي دالة F هو أن تكون f(x)=F وتكون g(x)=x لأن

(g o f)(x)=g(f(x))=g(F(x))= F(x)

42. Find g if f(x)=|x| and (f+g)(x)=|x|-|2x-5|

أوجد g إذا f(x)=|x| و (f+g)(x)=|x|-|2x-5|

(f+g)(x)=f(x)+g(x))=|x|-|2x-5|

f(x)-|x|+g(x)=-|2x-5| , 0+g(x)=|2x-5| , g(x)=|2x-5|

43. Find g if f(x)=|x| and (fg)(x)=|x||2x-5|

أوجد g إذا f(x)=|x| و (fg)(x)=|x||2x-5|

$(fg)(x) = f(x)g(x)) = |x||2x-5|$

$g(x) = \dfrac{|x||2x-5|}{f(x)}$, $x \neq 0$, $g(x) = \dfrac{|x||2x-5|}{|x|} = |2x-5|$

44. Suppose f is defined on [0,4] and g(x)=f(x+3). What is the domain of g

إفرض أن f معرفة على الفترة [0,4] و g(x)=f(x+3) . ماهو مجال g domain

f(x+3) تعني انسحاب إلى اليسار بمقدار 3 وحدات أي أن [0,4] تصبح [0-3,4-3]=[-3,1]

أي أن domain g=[-3,1]

f is defined on [0,4] تعني أن الفترة [0,4] هي من ضمن مجال f domain

أو

$[0,4] = 0 \leq x \leq 4$

$0 \leq x+3 \leq 4 , 0-3 \leq x \leq 4-3 = -3 \leq x \leq 1 = [-3,1]$

أي أن domain g =[-3,1]

45. *For which functions* f *is there a function* g *such that* $f = g^2$

لأي دالة f يوجد دالة g بحيث أن $f = g^2$

$f(x) = \left(g(x)\right)^2$, $g(x) = \pm\sqrt{f(x)}$, $f(x) \geq 0$

أي جميع الدوال f بحيث أن $f(x) \geq 0$

46. *For which functions* f *is there a function* g *such that* $f = g^3$

لأي دالة f يوجد دالة g بحيث أن $f = g^3$

$f(x) = (g(x))^3$, $\sqrt[3]{f(x)} = g(x)$

الجذر الثالث موجود لأي عدد حقيقي , إذا f هي أي دالة حقيقية

$47.\ For\ which\ functions\ f\ is\ there\ a\ function\ g\ such\ that\ f = \frac{1}{g}$

لأي دالة f يوجد دالة g بحيث أن $f = \frac{1}{g}$

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}\ , \qquad g(x) = \frac{1}{f(x)}\ , \qquad f(x) \neq 0$$

أي دالة f بحيث أن f(x) لا تساوي الصفر لأي x في مجالها

$48.\ Let\ f\ and\ \ g\ \ be\ even\ functions\ .Show\ that\ f + g\ and\ f.g\ are$

even functions .

لتكن f و g دوال زوجية (even) وضح أن f+g و f.g هي دوال زوجية

لا تنسى : إذا كانت f(-x) = f(x) فإن f(x) دالة زوجية

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

$$(f+g)(-x) = (f+g)(x)\ \ then\ \ f+g\ is\ even$$

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$$(f.g)(-x) = (f.g)(x)\ \ then\ \ f.g\ is\ even$$

$49.\ Let\ f\ and\ \ g\ \ be\ odd\ functions\ .Show\ that\ \ f.g\ is\ an\ even\ function$

لتكن f و g دوال فردية (odd) وضح أن و f.g هي دوال فردية

لا تنسى : إذا كانت f(-x) = - f(x) فإن f(x) دالة فردية

$$(f.g)(-x) = f(-x).g(-x) = -(\ f(x)\ ).-(\ g(x)\ )$$

$$= \ (-1)(-1)\big(\ f(x).g(x)\big) = \ f(x).g(x) = (f.g)(x)$$

$$(f.g)(-x) = (f.g)(x)\ \ then\ \ f.g\ is\ even$$

$50.\ Let\ f(x) = \frac{1}{x}\ .Show\ that\ f(\ f(x)\ ) = x\ for\ x \neq 0$

$$f(\ f(x)\ ) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = 1\ \div\ \frac{1}{x} = (1)\left(\frac{x}{1}\right) = x$$

$51.\ Let\ f(x) = \frac{1}{1-x}\ .Show\ that\ \ f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = x$

$for\ x\ different\ from\ 0\ and\ 1$

$for\ x\ different\ from\ 0\ and\ 1 = x \neq 0\ and\ x \neq 1$

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f\left(f\left(\frac{1}{1-x}\right)\right) = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{1}{\frac{1-x-1}{1-x}}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{\frac{-x}{1-x}}\right) = f\left(\frac{1-x}{-x}\right) = \left(\frac{1-\frac{1}{1-x}}{\frac{-1}{1-x}}\right) = \frac{\frac{1-x-1}{1-x}}{\frac{-1}{1-x}}$$

$$= \frac{\frac{-x}{1-x}}{\frac{-1}{1-x}} = \left(\frac{-x}{1-x}\right)\left(\frac{1-x}{-1}\right) = \frac{-x}{-1} = x$$

$52.\ The\ revenue\ function\ for\ a\ certain\ product\ is\ given\ by$

$$R(x) = 5x^2 - \frac{x^4}{10}$$

$The\ cost\ function\ is\ given\ by$

$$C(x) = 4x^2 - 24x + 38$$

The profit function P is defined as the difference R-C . Find the equation that describe P. Then find P(1) and P(2),and show that it is possible to lose money ,and also possible to make a profit

دالة الدخل لمنتج معين معطاة بما يلي

$$R(x) = 5x^2 - \frac{x^4}{10}$$

ودالة التكلفة معطاة بما يلي

$$C(x) = 4x^2 - 24x + 38$$

ودالة الربح P معرفة كالفرق R-C . أوجد المعادلة التي تصف P . ثم أوجد P(1) و P(2)

ووضح أنه من الممكن فقد النقود (أي الخسارة) وأيضاً من الممكن الحصول على ربح

$$P(x) = R(x) - C(x) = 5x^2 - \frac{x^4}{10} - (4x^2 - 24x + 38)$$

$$= 5x^2 - \frac{x^4}{10} - 4x^2 + 24x - 38 = x^2 - \frac{x^4}{10} + 24x - 38$$

$$P(x) = -\frac{x^4}{10} + x^2 + 24x - 38$$

$$P(1) = -\frac{1}{10} + 1 + 24 - 38 = \frac{-1 + 10 + 240 - 380}{10} = -\ \frac{131}{10}$$

$$P(2) = -\frac{2^4}{10} + 2^2 + (24)(2) - 38 = -\frac{16}{10} + 4 + 48 - 38$$

$$= \frac{-16 + 40 + 480 - 380}{10} = \frac{-396 + 520}{10} = \frac{124}{10}$$

$P(1) = -\ \frac{131}{10} = -13.1 < 0$ lose money خسارة

$P(2) = \frac{124}{10} = 12.4 > 0$ make a profit ربح

53. *According to Newton law of gravitation , if two bodies are a distance r apart , then the gravitational force $F(r)$ exerted by one body on the other is given by*

$$F(r) = \frac{k}{r^2} \ for\ r > 0$$

$where\ k\ is\ a\ positive\ constant\ .Suppose\ that\ as\ a\ function\ of\ time\ t$

$the\ distance\ between\ the\ two\ bodies\ is\ given\ by$

$$r(t) = 4000\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right) \quad for\ t \geq 0$$

$Find\ a\ formula\ for\ the\ force\ in\ terms\ of\ time$

حسب قانون نيوتن للجاذبية , فإنه إذا كان جسمان يبعدان عن بعضهما بمقدار r فإن قوة الجاذبية F(r) بينهما تعطى بالمعادلة

$$F(r) = \frac{k}{r^2}\ for\ r > 0$$

حيث k ثابت موجب . إفرض أنه كدالة للزمن t فإن المسافة بين الجسمين تعطى بما يلي

$$r(t) = 4000\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right) \quad for\ t \geq 0$$

أوجد معادلة لقوة الجذب بدلالة الزمن

$$(F\ o\ r)(t) = F(\,r(t)\,) = F\left(4000\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right)\right)$$

$$= \frac{k}{\left(4000\left(\frac{1+t}{1+t^2}\right)\right)^2} = \frac{k}{\frac{\left(4000(1+t)\right)^2}{(1+t^2)^2}}$$

$$= \frac{k(1+t^2)^2}{(4000)^2(1+t)^2}$$

لا تنسى شقلب واضرب

تمارين (3.6) EXERCISES صفحة 184 و 185 و 186 في الكتاب

In Exercises 1 – 5 Using the horizontal-line test , determine whether the function is one-to-one.

في التمارين 1 – 5 باستخدام اختبار الخط الأفقي حدد فيما إذا كانت الدالة واحد لواحد

اختبار الخط الأفقي horizontal-line test : ينص على أنه إذا قطع أي مستقيم أفقي horizontal-line رسم الدالة في أكثر من نقطة واحدة فإن الدالة ليست واحد لواحد

one-to-one = 1-1 = واحد لواحد

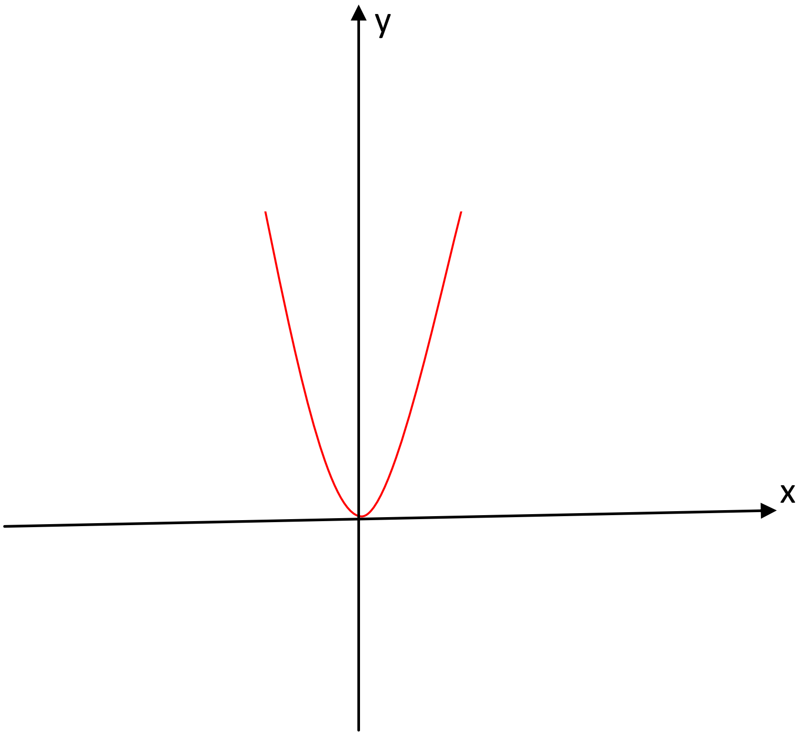
هذا خط أفقي horizontal line

هذا خط رأسي vertical line

إنتبه : الخط الأفقي horizontal-line لاختبار هل الدالة واحد لواحد one-to-one

الخط الرأسي vertical line لاختبار هل الرسم يمثل دالة

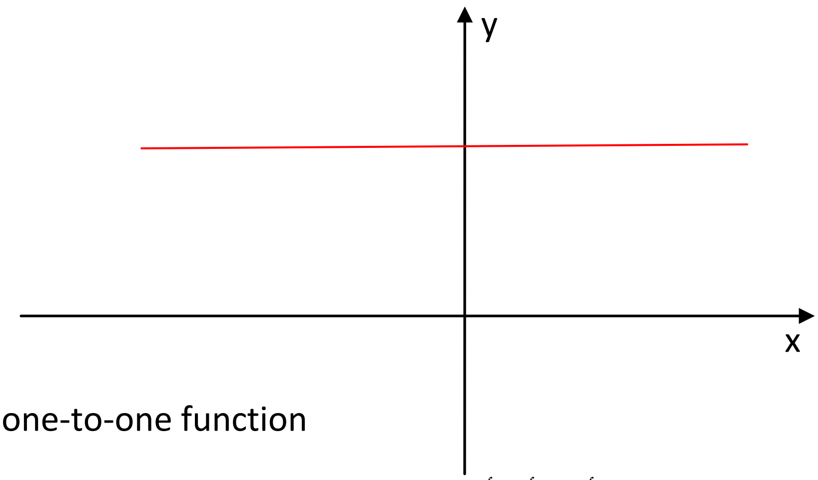
1.



not one-to-one function = not 1-1

ليست دالة واحد لواحد(ليست 1-1) لأنه لو رسمنا مستقيم أفقي horizontal line لقطع رسم الدالة في نقطتين

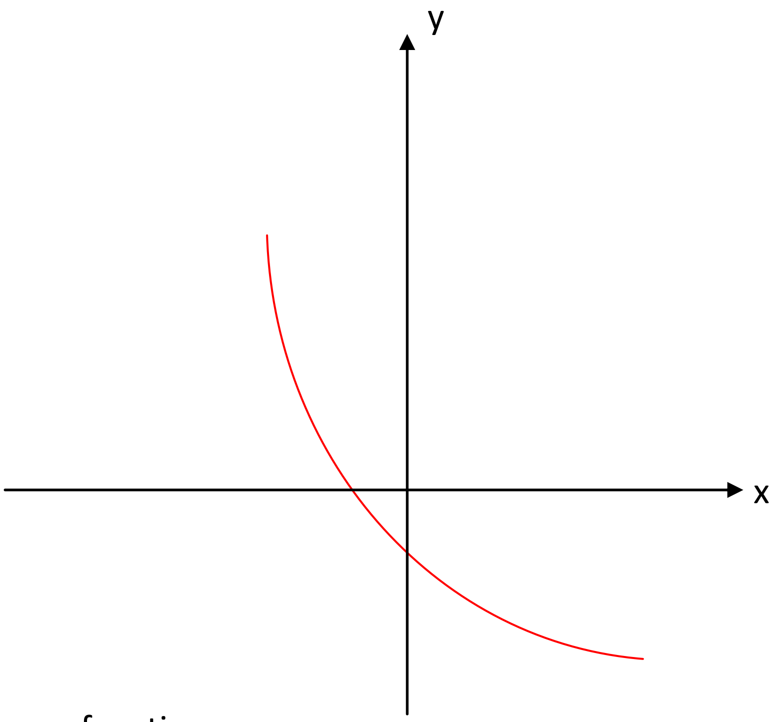
2.



not one-to-one function

ليست 1-1 لأن الرسم نفسه هو مستقيم أفقي أي أنه يقطع نفسه في ما لا نهاية من النقاط

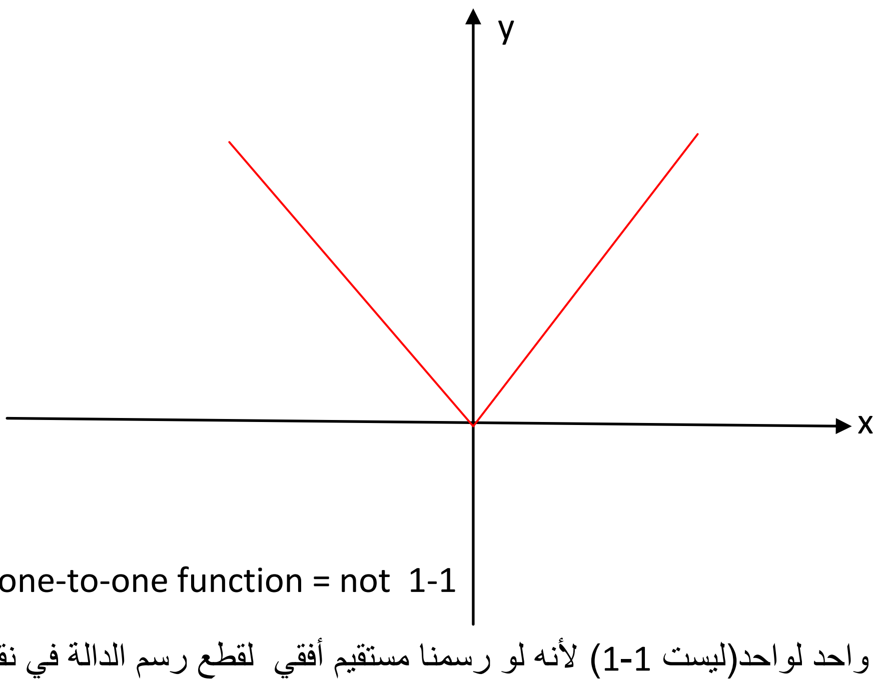
3.



one-to-one function

دالة 1-1 لأن أي مستقيم أفقي سيقطع رسم الدالة في نقطة واحدة فقط

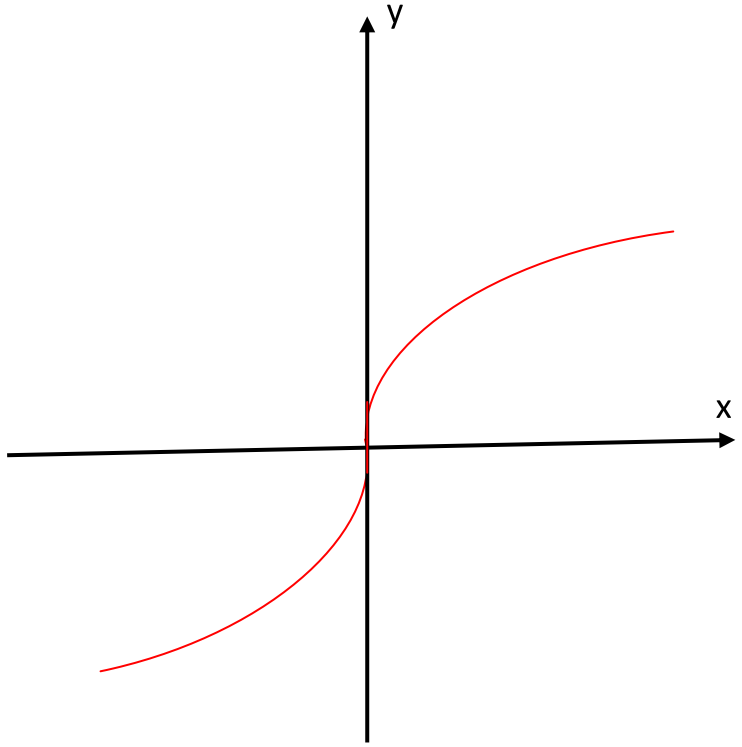
4.



not one-to-one function = not 1-1

ليست دالة واحد لواحد(ليست 1-1) لأنه لو رسمنا مستقيم أفقي لقطع رسم الدالة في نقطتين

5.



one-to-one function

دالة 1-1 لأن أي مستقيم أفقي سيقطع رسم الدالة في نقطة واحدة فقط

In Exercises 6- 11.Assume the following functions are one-to-one .Find their inverse at the specified values.

في التمارين 6 – 11 إعتبر أن الدوال الآتية هي واحد لواحد . أوجد معكوساتها عند القيمة المعينة

إنتبه :هذا النوع من المسائل حله سهل وسريع لذلك في الاختبار إبدأ بالمسائل التي حلها سهل وسريع

$6.\ if\ \ f(4) = 3\ , find\ \ f^{-1}(3)$

إذا كانت $f(4) = 3$ فأوجد $f^{-1}(3)$

$f^{-1}(3) = 4$

أنتبه : $f(4) = 3$ تعني أن الدالة $f(x)$ ترسل العدد 4 إلى العدد 3 . إذاً معكوسها $f^{-1}(x)$ يعمل العكس أي يرسل العدد 3 إلى العدد 4

أي إذا كان الزوج المرتب (4,3) في f فإن الزوج المرتب (3,4) في f^{-1}

$7.\ if\ \ f(2) = 4\ , find\ \ f^{-1}(4)$

$f^{-1}(4)$ =2

أنظر الملاحظات في التمرين 6

$8.\ \ if\ \ g(-5) = 6\ , find\ \ g^{-1}(6)$

$g^{-1}(6) = -5$

أنظر الملاحظات في التمرين 6

$9.\ Find\ (f\ o\ f^{-1})(-5)$

$(f\ o\ f^{-1})(-5) = -5$

لا تنسى $(f\ o\ f^{-1})(x) = (f^{-1}\ o\ f)(x) = x$

$10.\ Find\ (f\ o\ f^{-1})(0)$

$(f\ o\ f^{-1})(0) = 0$

$11.\ Find\ (g\ o\ g^{-1})(-1)$

$(g\ o\ g^{-1})(-1) = -1$

In Exercises 12 – 16 prove that f and g are inverses of each other.

في التمارين 12 – 16 أثبت أن f و g كل منهما معكوس للآخر

لإثبات أن كل منهما معكوس للآخر , يجب أن نثبت أن

$$(f\ o\ g)(x) = (g\ o\ f)(x) = x$$

12. $f(x) = 3x\ ,\qquad g(x) = \dfrac{x}{3}$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\frac{x}{3}\right) = 3\frac{x}{3} = x$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(\,3x) = \frac{3x}{3} = x$$

13. $f(x) = \dfrac{x+2}{6}\ ,\qquad g(x) = 6x - 2$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(\,6x-2) = \frac{(6x-2)+2}{6} = \frac{6x}{6} = x$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\frac{x+2}{6}\right) = 6\left(\frac{x+2}{6}\right) - 2$$

$$= x + 2 - 2 = x$$

14. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\qquad g(x) = x^2\,, x \geq 0$

$$(f\ o\ g\,)(x) = f(\,g(x)\,) = f(x^2) = \sqrt{x^2} = x$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(\sqrt{x}) = (\,\sqrt{x})^2 = x$$

15. $f(x) = \sqrt{6-x}\ ,\qquad g(x) = 6 - x^2\ ,\qquad 0 \leq x \leq 6$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f(6-x^2) = \sqrt{6-(6-x^2)}$$

$$= \sqrt{6-6+x^2} = \sqrt{x^2} = x$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g\left(\sqrt{6-x}\,\right) = 6 - \left(\sqrt{6-x}\,\right)^2$$

$$= 6 - (6-x) = 6 - 6 + x = x$$

16. $f(x) = x^3 - 3\ ,\qquad g(x) = \sqrt[3]{x+3}$

$$(f\ o\ g)(x) = f(\,g(x)\,) = f\left(\sqrt[3]{x+3}\right) = \left(\sqrt[3]{x+3}\right)^3 - 3$$

$$= x + 3 - 3 = x$$

لا تنسى : إذا كانت a عدد صحيح موجب فإن

$$\left(\sqrt[a]{f(x)}\,\right)^a = \left((f(x)\,)^{\frac{1}{a}}\right)^a = (\,f(x)\,)^{\frac{a}{a}} = \left(\,f(x)\right)^1 = f(x)$$

$$(g\ o\ f)(x) = g(\,f(x)\,) = g(x^3 - 3\ \ ) = \sqrt[3]{(x^3-3)+3}$$

$$= \sqrt[3]{x^3} = x$$

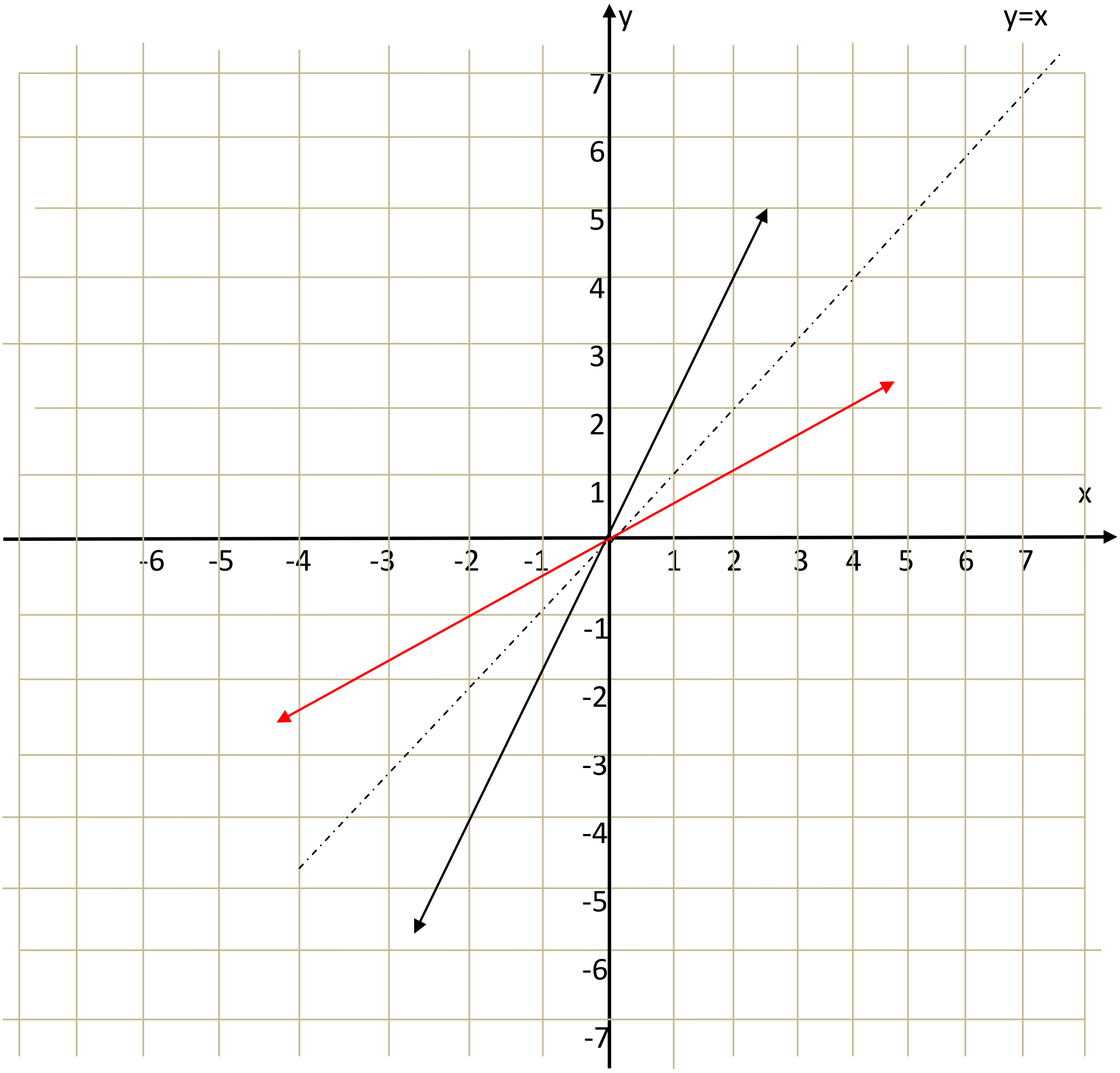
In Exercises 17—22 . The graph of a function f is given . On the same axis ,sketch the graph of f^{-1} .

في التمارين 17 – 22 . منحني (رسم) الدالة f معطى . على نفس مستوي الاحداثيات ارسم منحني f^{-1}

في مثل هذا النوع من التمارين يكون رسم الدالة متماثل مع رسم معكوسها حول المستقيم y=x أي أن المستقيم y=x يمثل مرآة بين الدالة ومعكوسها لذلك ارسم المستقيم y=x إذا لم يكن موجود (في هذه التمارين المستقيم y=x مرسوم مع رسم الدالة)

لاتنسى أنه إذا كانت النقطة (a,b) تقع على رسم الدالة فإن النقطة (b,a) تقع على رسم معكوسها

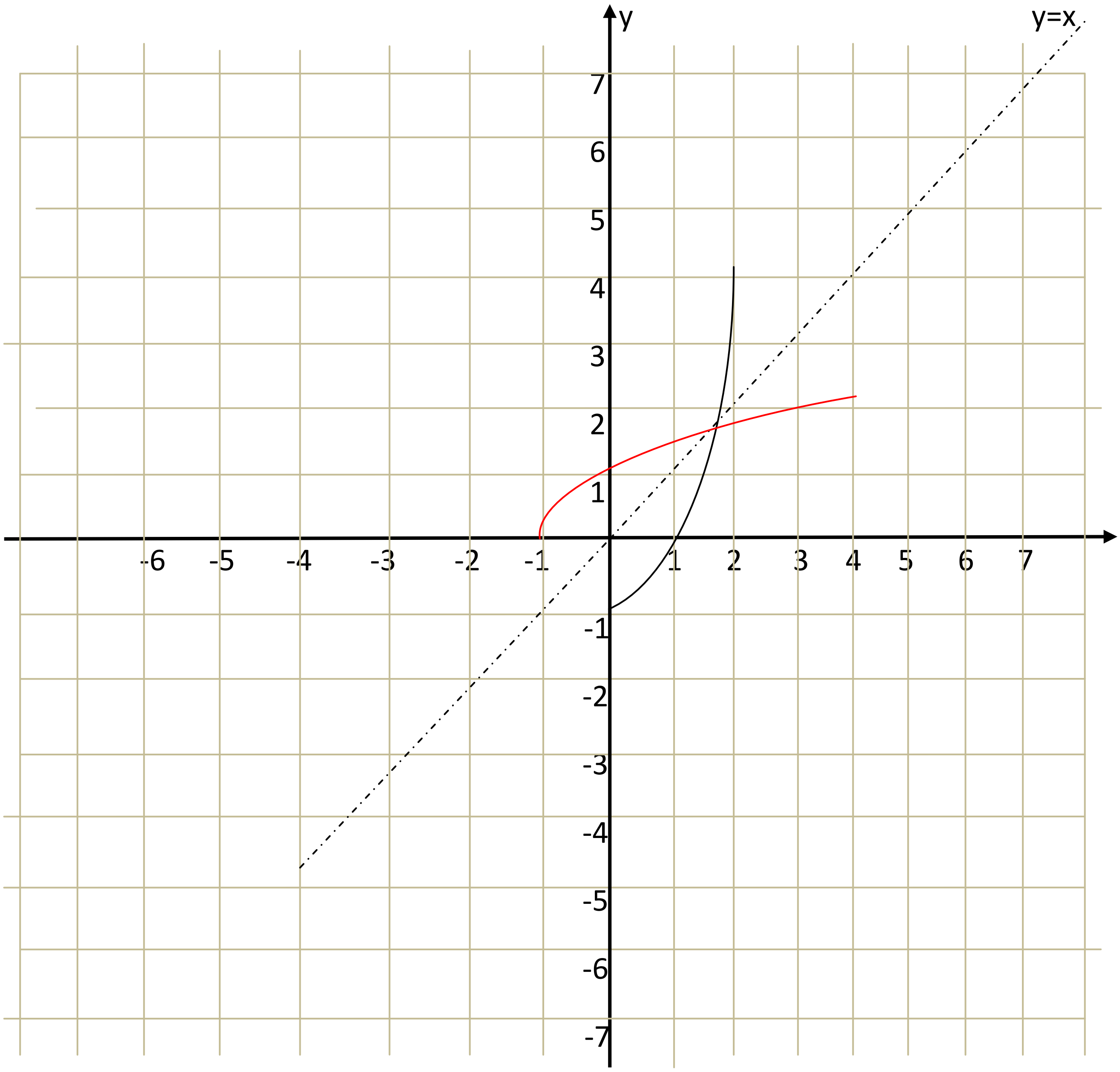
17.



رسم الدالة هو مستقيم لذلك رسم معكوس المستقيم هو أيضاً مستقيم

رسم الدالة يمر بالنقطة (0,0) إذاً رسم المعكوس يمر بالنقطة (0,0) ورسم الدالة يمر بالنقطة (2,4) إذاً رسم المعكوس يمر بالنقطة (4,2) إذاً نرسم المستقيم الذي يمر بالنقطتين (0,0) و (4,2) ونمده بالاتجاهين وهذا هو رسم المعكوس (المستقيم الأحمر في الشكل)

18.



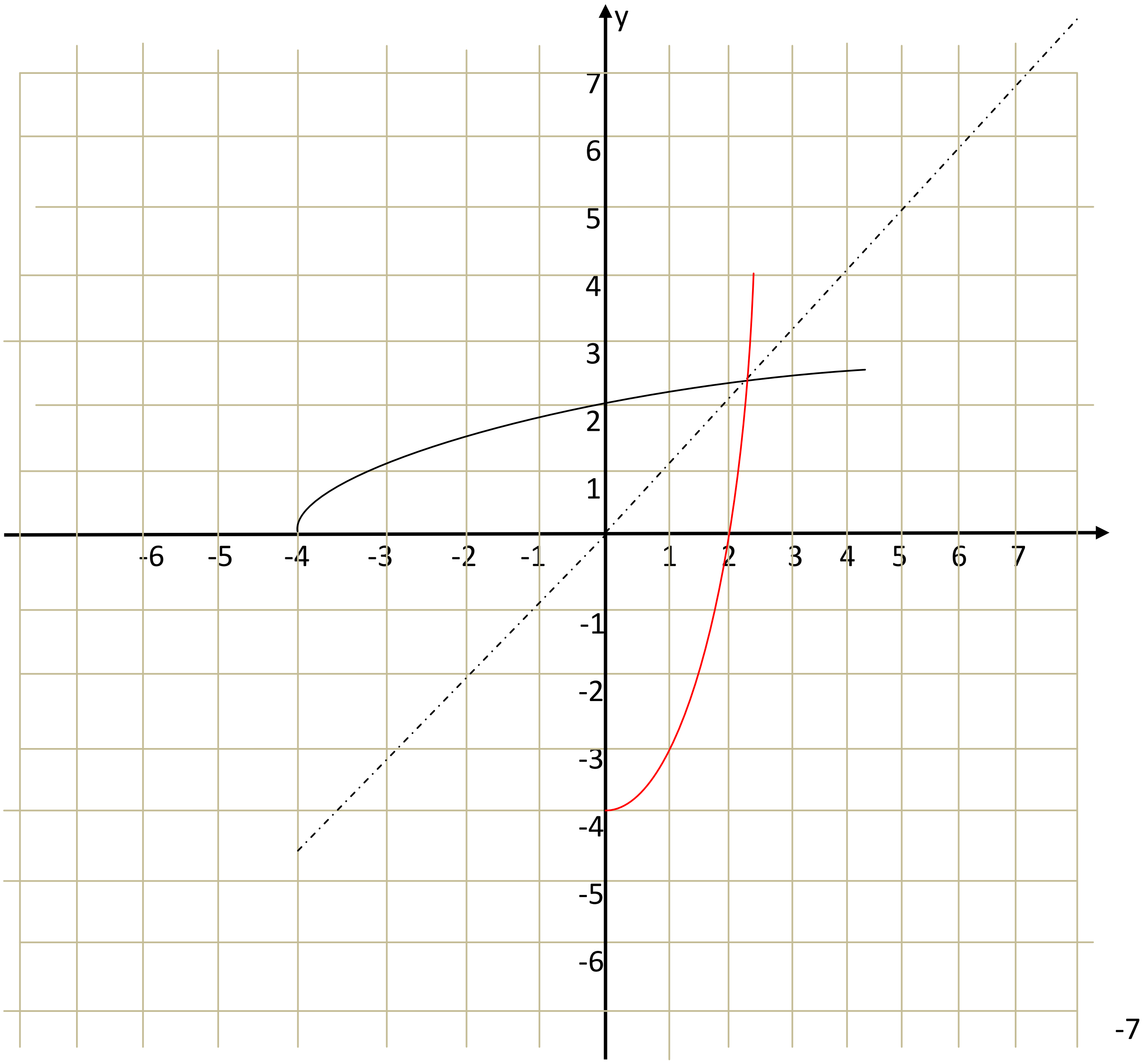
رسم الدالة يمر بالنقاط (0,-1) و (1,o) و (2,3) ويقطع المستقيم $y=x$ عند (a,a)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط (-1,0) و (0,1) و (3,2) ويقطع المستقيم $y=x$ عند (a,a)

على الرسم نرسم النقاط (-1,0) و(0,1) و(3,2) ونقطة التقاطع مع المستقيم ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

ملاحظة: إذا قطع رسم الدالة المستقيم $y=x$ عند نقاط معينة فإن رسم معكوس الدالة يقطع المستقيم $y=x$ عند نفس النقاط (المستقيم $y=x$ يمثل مرآة بين رسم الدالة ورسم معكوسها)

19.



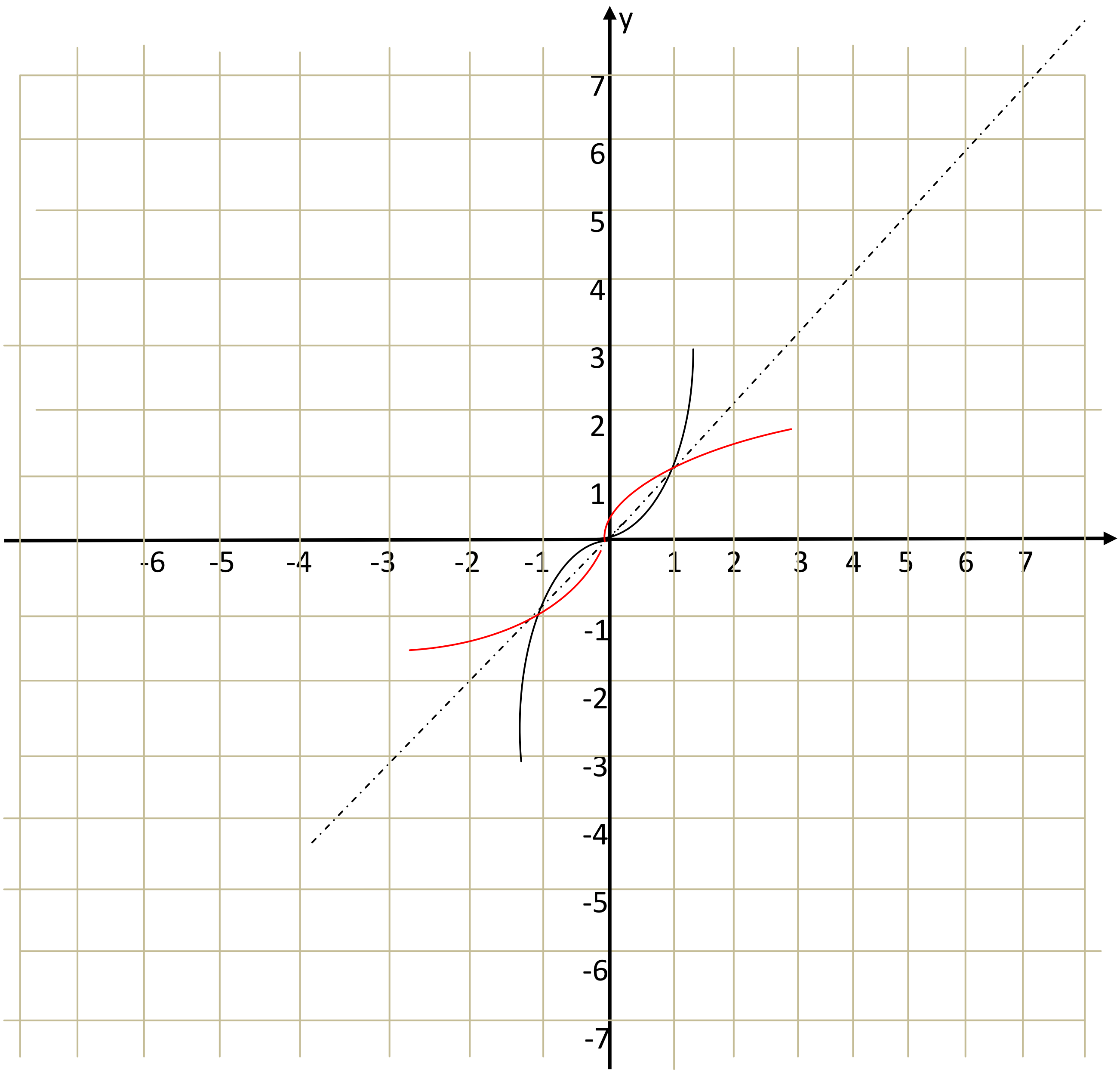
رسم الدالة يمر بالنقاط (-4,0) و (0,2) و (4,2.5) ويقطع المستقيم y=x عند (a,a)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط (0,-4) و (2,0) و (2.5,4) ويقطع المستقيم y=x عند (a,a)

على الرسم نرسم النقاط (0,-4) و(2,0) و(2.5,4) ونقطة التقاطع مع المستقيم ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

ملاحظة: إذا قطع رسم الدالة المستقيم y=x عند نقاط معينة فإن رسم معكوس الدالة يقطع المستقيم y=x عند نفس النقاط (المستقيم y=x يمثل مرآة بين رسم الدالة ورسم معكوسها)

20.



رسم الدالة يمر بالنقاط

(1.25,3) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-1.25,-3)

رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط

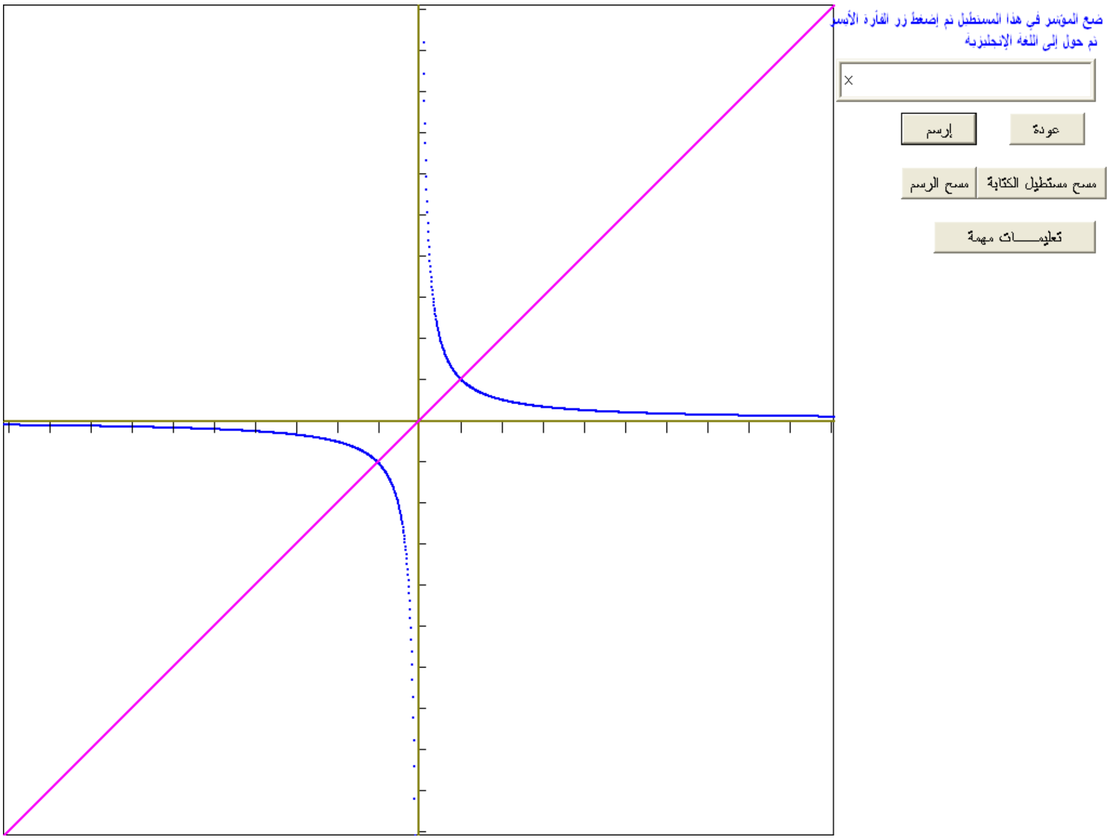
(3,1.25) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-3,-1.25)

على الرسم نرسم النقاط

(3,1.25) , (1,1) , (0,0) , (-1,-1) , (-3,-1.25)

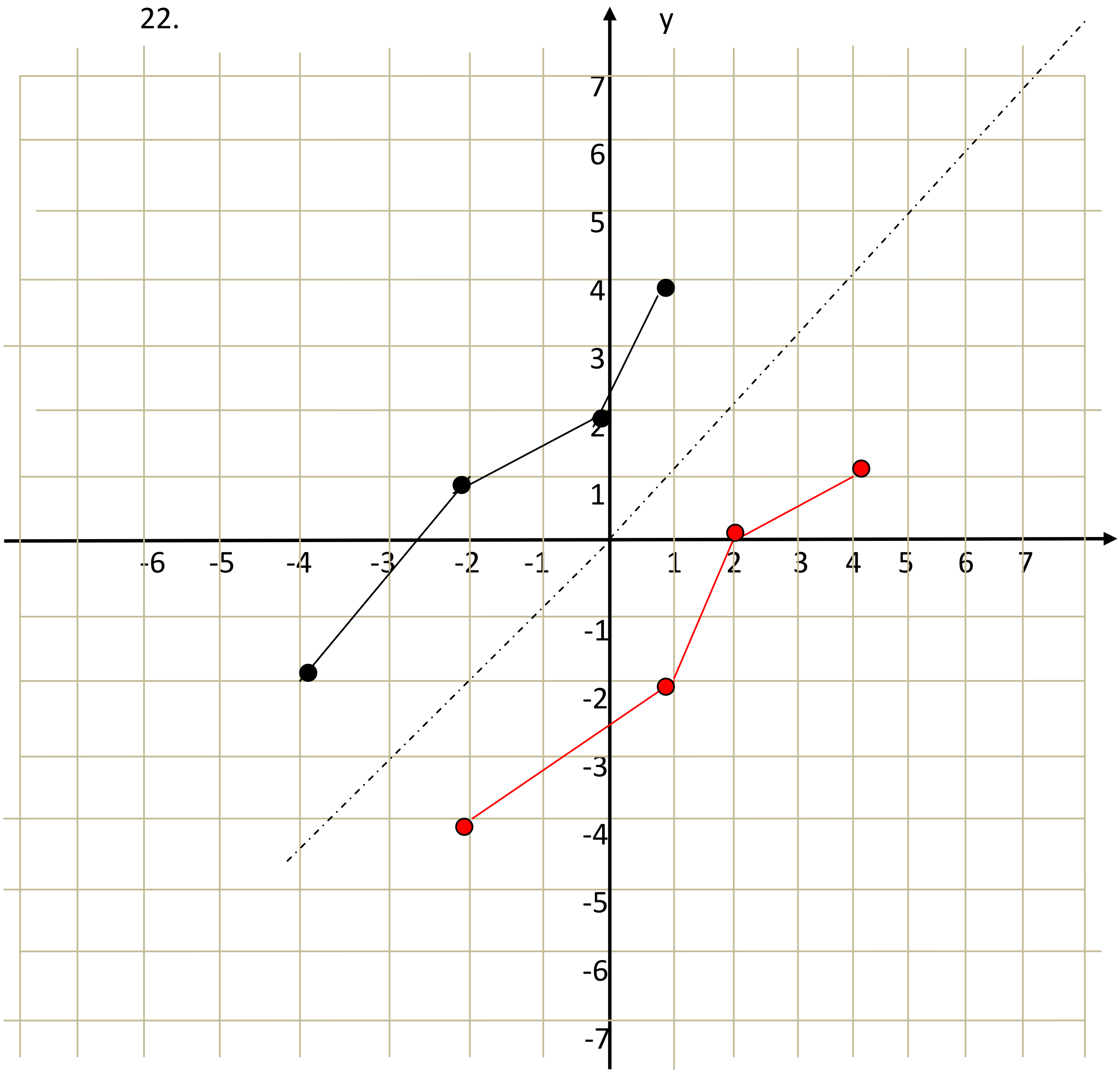
ثم نصل هذه النقاط بمنحي ناعم فيكون هو رسم المعكوس (المنحني الأحمر في الشكل)

21.



$$f(x) = f^{-1}(x) = \frac{1}{x}$$

22.



رسم الدالة يمر بالنقاط

(-4,-2) , (-2,1) , (0,2) , (1,4)

إذاً رسم معكوس الدالة يمر بالنقاط

(-2,-4) , (1,-2) , (2,0) , (4,1)

نصل الناط

(-2,-4) , (1,-2) , (2,0) , (4,1)

بمستقيمات فيكون الشكل الناتج هو رسم المعكوس (الرسم الأحمر في الشكل)

In Exercises 23 – 33 .Determine whether the given functions are one-to-one .If it is one-to-one ,find its inverse.

في التمارين 23 – 33 حدد فيما إذا كانت الدوال المعطاة واحد لواحد . إذا كانت واحد لواحد فأوجد معكوسها

23. f = {(12,2),(15,4),(19,-1),(25,6),(78,0)} is one-to-one

$f^{-1} = \{(2,12),(4,15),(-1,19),(6,25),(0,78)\}$

24. $g = \{(-1,2),(0,4),(9,-4),(18,6),(23,-4)\}$

$not\ one-to-one\ \ because\ \ g(9)=-4, g(23)=-4\ ,9\neq 23$

25. $h(x)=x^2+2\ \ not\ one-to-one$

$h(1)=(1)^2+2=3\ ,h(-1)=(-1)^2+2=3, h(1)=h(-1), 1\neq -1$

26. $I(x)=\dfrac{1}{2x-4}\ \ ,x\neq 2$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $I(a)=I(b)$ ونثبت أن $a=b$ أي

$I(a)=\dfrac{1}{2a-4}\ \ ,a\neq 2\ ,\qquad I(b)=\dfrac{1}{2b-4}\ \ ,b\neq 2$

$\dfrac{1}{2a-4}=\dfrac{1}{2b-4}\ \ ,\qquad 2b-4=2a-4\ ,2b=2a\ ,b=a$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $I(x)$ لذلك نكتب

$y=\dfrac{1}{2x-4}$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y(2x-4)=1\ \ ,2xy-4y=1\ \ ,2xy=1+4y\ ,x=\dfrac{1+4y}{2y}$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$x = \frac{1+4y}{2y}$$

إذاً معكوس الدالة هو

$$I^{-1}(x) = \frac{1+4x}{2x}$$

27. $J(x) = -5x + \frac{5}{3}$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $J(a) = J(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$$j(a) = -5a + \frac{5}{3} \ , \qquad j(b) = -5b + \frac{5}{3}$$

$$-5a + \frac{5}{3} = -5b + \frac{5}{3} \ , -5a = -5b \ \ , a = b$$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $J(x)$ لذلك نكتب

$$y == -5x + \frac{5}{3}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y == -5x + \frac{5}{3} \ , 5x = -y + \frac{5}{3} \ , x = -\frac{y}{5} + \frac{5}{5(3)} = \ -\frac{y}{5} + \frac{1}{3}$$

$$x = \ \frac{-3y+5}{15} = \frac{5-3y}{15}$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$J^{-1}\ (x) = \frac{5-3x}{15}$$

28. $K(x) = |5x - 4|$

$$K(0) = |-4| = 4 \ \ ,K\left(\frac{8}{5}\right) = \left|5\left(\frac{8}{5}\right) - 4\right| = |8 - 4| = |4| = 4$$

$$K(0) = K\left(\frac{8}{5}\right) = 4 \ \ ,but\ 0 \neq \frac{8}{5} \ \ so\ \ not\ \ one - to - one$$

ليست واحد لواحد لذلك لا يوجد معكوس

29. $f(x) = -\frac{11}{x+3} \ \ ,x \neq -3$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $f(a) = f(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$$f(a) = -\frac{11}{a+3} \ \ ,a \neq -3\ , \qquad f(b) = -\frac{11}{b+3} \ \ ,b \neq -3$$

$$\frac{11}{a+3} = \frac{11}{b+3} \ \ , \qquad 11(b+3) = \ 11(a+3)\ ,b+3 = a+3, a = b$$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $f(x)$ لذلك نكتب

$$y = -\frac{11}{x+3}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y(x+3) = -11 \ \ ,xy + 3y = -11 \ \ ,xy = -11 - 3y\ ,x = \frac{-11 - 3y}{y}$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$x = \frac{-11 - 3y}{y}$$

إذاً معكوس الدالة هو

$$f^{-1}(x) = \frac{-11-3x}{x} = \frac{-11}{x} - \frac{3x}{x} = \frac{-11}{x} - 3$$

30. $f(x) = \sqrt{x+5} \quad , x \geq -5$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $f(a) = f(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$\sqrt{a+5} = \sqrt{b+5}\ ,\ a+5 = b+5\ , a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $f(x)$ لذلك نكتب

$y = \sqrt{x+5}$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y^2 = x+5\ , \qquad x = y^2 - 5$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$x = y^2 - 5$

إذاً معكوس الدالة هو

$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2 - 5$

31. $f(x) = x\sqrt{9-x^2} \quad , \qquad x \in [-3,3]$

$x \in [-3,3] = x\ in[-3,3] = -3 \leq x \leq 3$

الرمز $\in$ يعني تنتمي إلى أو عنصر في

$f(-3) = -3\sqrt{9-(-3)^2} = -3\sqrt{9-9} = -3\sqrt{0} = -3(0) = 0$

$f(3) = 3\sqrt{9-(3)^2} = 3\sqrt{9-9} = 3\sqrt{0} = 3(0) = 0$

$f(-3) = f(3)\,, -3 \neq 3 \quad not\ \ one-to-one\ \ no\ inverse$

32. $g(x) = \sqrt[3]{x} + 4$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $g(a) = g(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$\sqrt[3]{a} + 4 = \sqrt[3]{b} + 4\,, \qquad \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b} \ , a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $g(x)$ لذلك نكتب

$y = \sqrt[3]{x} + 4$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$y - 4 = \sqrt[3]{x}\,, \quad x = (y-4)^3$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$x = (y-4)^3$

إذاً معكوس الدالة هو

$\mathrm{g}^{-1}(\mathrm{x}) = (x-4)^3$

33. $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = 2 - (3-x)^{\frac{1}{5}}$

لنثبت أنها واحد لواحد one-to-one نفرض أن $g(a) = g(b)$ ونثبت أن $a = b$ أي

$2 - (3-a)^{\frac{1}{5}} = 2 - (3-b)^{\frac{1}{5}}\,, \qquad (3-a)^{\frac{1}{5}} = (3-b)^{\frac{1}{5}}$

$, \qquad (3-a) = (3-b), -a = -b \ , a = b$

إذاً الدالة واحد لواحد function is one-to-one

لإيجاد المعكوس نتبع الخطوات الآتية

1) نستبدل اسم الدالة بالمتغير y

هنا اسم الدالة هو $g(x)$ لذلك نكتب

$$y = 2 - (3 - x)^{\frac{1}{5}}$$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي تكون x في جهة واحدة لوحدها

$$y = 2 - (3 - x)^{\frac{1}{5}}, \quad y - 2 = -(3 - x)^{\frac{1}{5}}, \qquad (3 - x)^{\frac{1}{5}} = -(y - 2)$$

$$, (3 - x)^{\frac{1}{5}} = 2 - y, \qquad 3 - x = (2 - y)^5, \qquad -x = -3 + (2 - y)^5$$

$$, \qquad x = 3 - (2 - y)^5$$

3) نستبدل x التي في جهة لوحدها برمز المعكوس ونستبدل كل y في الجهة الأخرى بالمتغير x

$$g^{-1}(x) = 3 - (2 - x)^5$$

و هذا هو المعكوس

In Exercises 34 – 39 .Determine whether each pair of the following functions are inverse of each other.

في التمارين 34 – 39 حدد فيما إذا كان كل زوج معطى من الدوال الآتية يكون كل منهما معكوس للآخر.

لكي تكون الدالة f(x) معكوس inverse للدالة g(x) يجب أن تكون

(f o g)(x)=(g o f)(x)=x

أي يجب أن يتحقق الشرطين :

1) (f o g)(x)=x

2) (g o f)(x)=x

34. $g(x) = -x^3 - 3 \, , f(x) = \sqrt[3]{-x^3 - 3}$

1) $(g \; o \; f)(x) = g(\, f(x)\,) = g\left(\sqrt[3]{-x^3 - 3} \;\right) = -\left(\sqrt[3]{-x^3 - 3} \;\right)^3 - 3$

$$= -(-x^3 - 3) - 3 = x^3 + 3 - 3 = x^3$$

$(g \; o \; f)(x) = x^3 \neq x$

لا تنسى $\left(\sqrt[a]{f(x)} \right)^a = f(x)$ حيث a عدد صحيح موجب أكبر من العدد 1

لا تنسى جرت العادة على أن $\sqrt[2]{f(x)} = \sqrt{f(x)}$ أي العدد 2 لا يكتب

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

35. $h(x) = \dfrac{x-1}{2} \, , r(x) = 2x + 1$

1) $(h \; o \; r)(x) = h(\, r(x)\,) = h(2x+1) = \dfrac{(2x+1) - 1}{2} = \dfrac{2x}{2} = x$

2) $(r \; o \; h)(x) = r(\, h(x)\,) = r\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = 2\left(\dfrac{x-1}{2}\right) + 1$

$$= x - 1 + 1 = x$$

الشرطان محققان إذاً كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب yes

36. $d(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \, , \qquad I(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

$$(d \; o \; I)(x) = d(\, I(x)\,) = d\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \frac{\dfrac{x-1}{x+1} + 1}{\dfrac{x-1}{x+1} - 1} = \frac{\dfrac{x-1+x+1}{x+1}}{\dfrac{x-1-(x+1)}{x+1}}$$

$$= \frac{\dfrac{2x}{x+1}}{\dfrac{-2}{x+1}} = \left(\frac{2x}{x+1}\right)\left(\frac{x+1}{-2}\right) = \frac{2x}{-2} = -x \quad \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

37. $a(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, $b(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$

$$1)\ (a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) = \frac{2\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)+1}{\frac{2x+1}{x-1}-2}$$

$$= \frac{\frac{4x+2+x-1}{x-1}}{\frac{2x+1-2x+2}{x-1}} = \frac{\frac{5x+1}{x-1}}{\frac{3}{x-1}} = \frac{5x+1}{x-1} . \frac{x-1}{3} = \frac{5x+1}{3} \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

38. $a(x) = x$, $b(x) = x$

$1)\ (a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a(x) = x$

$2)(b\ o\ a)(x) = b(\ a(x)\ ) = b(x) = x$

الشرطان محققان إذاً كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب yes

39. $a(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x+1}}$, $b(x) = \left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$

$$(a\ o\ b)(x) = a(\ b(x)\ ) = a\left(\ \left(\frac{x+1}{x}\right)^2\ \right) = \sqrt{\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+1}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\sqrt{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2+1}} \neq x$$

أحد الشرطين لم يتحقق إذاً ليس كل منهما معكوس للآخر أي يكون الجواب no

In Exercises 40 – 50 . Find the inverse of each of the following functions.(Assume they are 1-1).

في التمارين 40 – 50 أوجد معكوس كل من الدوال الآتية (إفرض أنهم 1 – 1)

40. $g(x) = -(x-2)^3$

1) نستبدل اسم الدالة $g(x)$ بالمتغير y أي

$y = -(x-2)^3$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي

$y = -(x-2)^3$, $(x-2)^3 = -y$, $x - 2 = \sqrt[3]{-y}$, $x = \sqrt[3]{-y} + 2$

$x = \sqrt[3]{-y} + 2$ إذاً

3) نستبدل x برمز المعكوس ونستبدل كل y بالمتغير x أي

$g^{-1}(x) = \sqrt[3]{-x} + 2$

وهذا هو معكوس inverse الدالة

41. $f(x) = -7x + 11$

1) نستبدل اسم الدالة $f(x)$ بالمتغير y أي

$y = -7x + 11$

2) نحل المعادلة الناتجة بالنسبة للمتغير x أي

$y = -7x + 11$, $7x = 11 - y$, $x = \dfrac{11-y}{7}$

$x = \dfrac{11-y}{7}$ إذاً

3) نستبدل x برمز المعكوس ونستبدل كل y بالمتغير x أي

$f^{-1}(x) = \dfrac{11-x}{7}$

وهذا هو معكوس inverse الدالة

42. $f(x) = x^2 - 2\,, x \geq 0$

$y = x^2 - 2\,,\;\; x^2 = y + 2\,, \qquad x = \sqrt{y+2}$

$f^{-1}(x) = \sqrt{x+2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

43. $f(x) = -x^2 + 2 \;\;, x \geq 0$

$y = -x^2 + 2 \;, x^2 = -y + 2 \;, \qquad x = \sqrt{-y+2}$

$f^{-1} = \sqrt{-x+2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

44. $f(x) = \dfrac{2}{x} \;\;, x \neq 0$

$y = \dfrac{2}{x} \;\;,\;\; x = \dfrac{2}{y}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{2}{x} \;\;, x \neq 0$

45. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \;\;, x \neq 1$

$y = \dfrac{x+1}{x-1} \;\;,\;\; y(x-1) = x + 1 \;\;, yx - y - x = 1\,,\;\; x(y-1) = y + 1$

$x = \dfrac{y+1}{y-1}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{x-1} \;\;, x \neq 1$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

46. $f(x) = \sqrt{x+7}\ , x \geq -7$

$y = \sqrt{x+7}\ ,\ \ y^2 = x + 7\ ,\qquad x = y^2 - 7$

$f^{-1}(x) = x^2 - 7$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

47. $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

$y = (x+1)^{\frac{1}{3}}\ ,\qquad y^3 = x + 1\ ,\qquad x = y^3 - 1$

$f^{-1}(x) = x^3 - 1$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

48. $f(x) = 3x - 9$

$y = 3x - 9\ ,\ \ 3x = y + 9\ ,\qquad x = \dfrac{y+9}{3}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{x+9}{3}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

49. $f(x) = \dfrac{2x-3}{5}$

$y = \dfrac{2x-3}{5}\ ,\ \ 5y = 2x - 3\ ,\qquad 2x = 5y + 3\ ,\qquad x = \dfrac{5y+3}{2}$

$f^{-1}(x) = \dfrac{5x+3}{2}$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

50. $f(x) = (x-3)^5$

$y = (x-3)^5\ ,\ \ y^5 = x-3\ ,\qquad x = y^5 + 3$

$f^{-1}(x) = x^5 + 3$

أنظر خطوات الحل في التمارين 40 و 41

In Exercises 51 – 57 .Determine the intervals on which each of the following functions are increasing and the intervals on which they are decreasing.

في التمارين 51 – 57 حدد الفترات intervals التي عليها تكون الدوال الآتية متزايدة increasing والفترات التي تكون عليها هذه الدوال متناقصة decreasing

إذا كانت $x_1 > x_2$ على فترة معينة ينتج عنها أن $f(x_1) > f(x_2)$ لكل x_1 و x_2 في الفترة المعينة فإن الدالة $f(x)$ تكون متزايدة increasing على هذه الفترة

إذا كانت $x_1 > x_2$ على فترة معينة ينتج عنها أن $f(x_1) < f(x_2)$ لكل x_1 و x_2 في الفترة المعينة فإن الدالة $f(x)$ تكون متناقصة decreasing على هذه الفترة

على الرسم : إذا كانت y تتحرك إلى الأعلى عندما تتحرك x إلى اليمين على فترة معينة فإن الدالة تكون متزايدة increasing على هذه الفترة

على الرسم : إذا كانت y تتحرك إلى الأسفل عندما تتحرك x إلى اليمين على فترة معينة فإن الدالة تكون متناقصة decreasing على هذه الفترة

51. $f(x) = 2x - 7$

هذه معادلة الدرجة الأولى ومعادلة الدرجة الأولى هي مستقيم والمستقيم إما يكون متزايداً increasing لكل الأعداد الحقيقية R عندما يكون معامل x موجب أو يكون متناقصاً

decreasing لكل الأعداد الحقيقية R عندما يكون معامل x سالب أو يكون ثابت (مستقيم أفقي يوازي محور x)

إذاً $f(x) = 2x - 7$ دالة متزايدة increasing على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

52. $f(x) = 1 - 3x$

دالة متناقصة decreasing على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

أنظر الملاحظات في التمرين السابق

53. $f(x) = 4$

دالة ثابتة أي ليست متزيدة وليست متناقصة على الفترة $R = (-\infty, \infty)$

54. $f(x) = x^2 - 8$

المعادلة تحوي x^2 فقط لذلك فرسمها متماثل حول محور y ويقطع محور y عندما x=0 أي عندما $y = f(x) = -8$

أولاً : x<0

لنفرض أن $x_1 < x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن ${x^2}_1 < {x^2}_2$ (لأن كل من x_1 و x_2 أقل من الصفر , مثال 10-<5- وبتربيع الطرفين ينتج أن 100<25 لاحظ عكس إتجاه المتباينة)

بإضافة 8- إلى طرفي المتراجحة ينتج أن ${x^2}_1 - 8 < {x^2}_2 - 8$ أي أن

$f(x_1) < f(x_2)$

إذاً الدالة متناقصة decreasing عندما x<0 أي على الفترة $(-\infty, 0)$

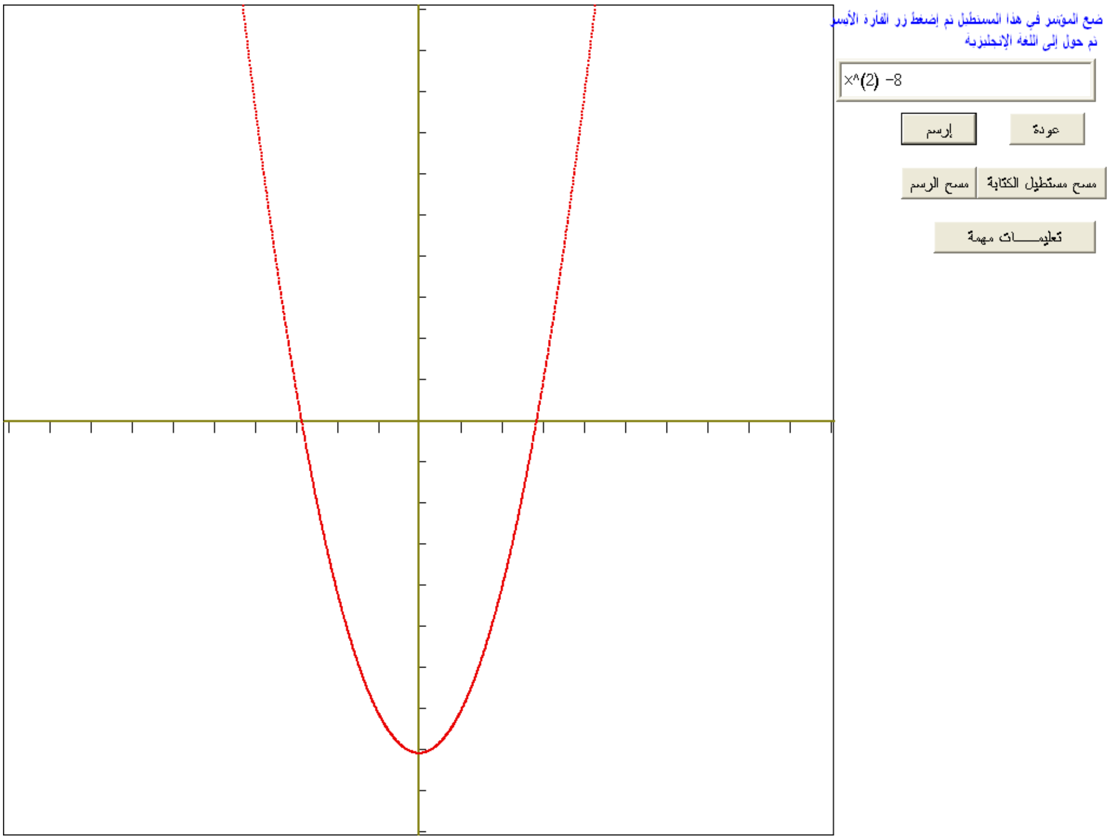
ثانياً: x>0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن ${x^2}_1 > {x^2}_2$

بإضافة 8- إلى طرفي المتراجحة ينتج أن ${x^2}_1 - 8 > {x^2}_2 - 8$ أي أن

$f(x_1) > f(x_2)$

إذاً الدالة متزايدة عندما x>0 أي متزايدة increasing على الفترة $(0,\infty)$



رسم الدالة $y = f(x) = x^2 - 8$

55. $f(x) = 2 - x^2$

المعادلة تحوي x^2 فقط لذلك فرسمها متماثل حول محور y ويقطع محور y عندما x=0 أي عندما $y = f(x) = 2$

أولاً : x<0

لنفرض أن $x_2 < x_1$ بتربيع الطرفين ينتج أن $x^2{}_1 < x^2{}_2$ (لأن كل من x_1 و x_2 أقل من الصفر , مثال -10<-5 وبتربيع الطرفين ينتج أن 100>25 لاحظ عكس إتجاه المتباينة)

بضرب طرفي المتباينة بالعدد -1 ينتج أن $-x^2{}_1 > -x^2{}_2$ (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) وبإضافة العدد 2 إلى طرفي المتباينة ينتج أن $2 - x^2{}_1 > 2 - x^2{}_2$ أي أن

$f(x_1) > f(x_2)$

إذاً الدالة متزايدة increasing عندما x<0 أي على الفترة $(-\infty, 0)$

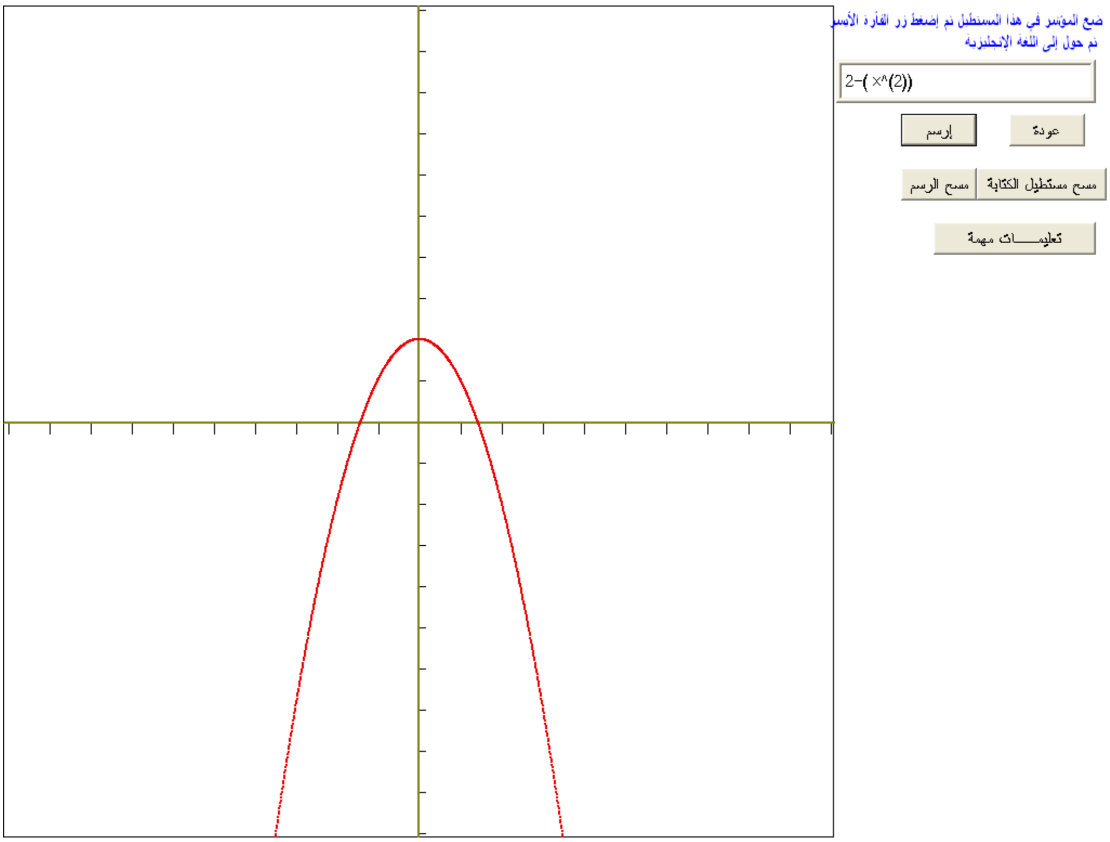
ثانياً: x>0

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتربيع الطرفين ينتج أن ${x^2}_1 > {x^2}_2$

بضرب طرفي المتباينة بالعدد 1- ينتج أن $-{x^2}_1 < -{x^2}_2$ (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) وبإضافة العدد 2 إلى طرفي المتباينة ينتج أن $2 - {x^2}_1 < 2 - {x^2}_2$ أي أن

$f(x_1) < f(x_2)$

إذاً الدالة متناقصة عندما x>0 أي متناقصة decreasing على الفترة $(0, \infty)$



رسم الدالة $y = f(x) = 2 - x^2$

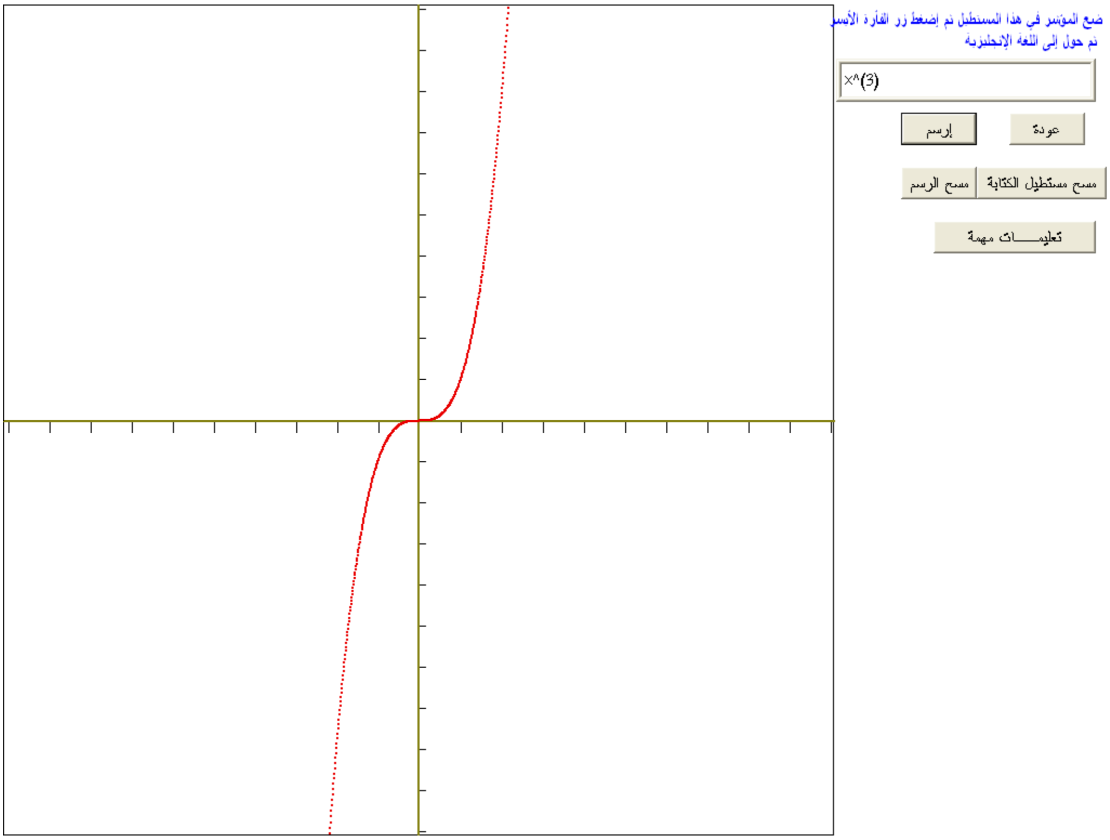
56. $f(x) = x^3$

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتكعيب الطرفين ينتج أن ${x^3}_1 > {x^3}_2$ لكل x أي أن

$f(x_1) > f(x_2)$

إذا الدالة متزايدة increasing لكل عدد حقيقي x أي أنها متزايدة على الفترة $(-\infty, \infty)$

إنتبه : $-5 > -10$ و $(-5)^3 = -125 > (-10)^3 = -1000$



رسم الدالة $y = f(x) = x^3$

57. $f(x) = -x^3$

لنفرض أن $x_1 > x_2$ بتكعيب الطرفين ينتج أن ${x^3}_1 > {x^3}_2$ لكل x وبضرب طرفي المتباينة بالعدد 1- (لا تنسى عند ضرب طرفي المتباينة بعدد سالب نعكس اتجاه المتباينة) ينتج أن

$-x^3{}_1 < -x^3{}_2$

أي أن

$f(x_1) < f(x_2)$

إذا الدالة متناقصة decreasing لكل x أي أنها متناقصة decreasing على الفترة $(-\infty, \infty)$