حـــــــــــل

تكون $\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{7n-4}=\frac{3}{7}$ إذاوفقط إذا كانت

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{7n-4}-\frac{3}{7}\right| < \varepsilon.$$

وسنبحث عن شرط على n (يتعلق بطبيعة الحال ب ε) بحيث تتحقق المتباينة الأخيرة انطلاقا من صف معين. فنرى بأن

$$\left|\frac{3n+1}{7n-4}-\frac{3}{7}\right| = \left|\frac{19}{7(7n-4)}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}$$

ويتضح حينئذ أنه يمكن أخذ N تساوي $\left[\frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}\right]+1$ إذا كنا نريد أن يكون N طبيعيا أو تأخذه مساويا للعدد $\frac{19}{49\varepsilon}+1$ أو العدد $\frac{19}{49\varepsilon}+2$ أو.....ونجد بالتالي أن:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{19}{49\varepsilon}+\frac{4}{7}\right]+1,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq N \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{7n-4}-\frac{3}{7}\right| < \varepsilon.$$

وهي عبارة تبين المطلوب.

ب- "طبيعة المتتالية التي يتحصل عليها من جمع متتاليتين متباعدتين هي التباعد" هذه عبارة غير سليمة في الحالة العامة فلو أخذنا على سبيل المثال المتتاليتين $u_n=(-1)^n$ و $v_n=-(-1)^n$ لبان لنا بأن المتتاليتين متباعدتان لكن جمعهما هو المتتالية الثابتة الصفرية المتقاربة.

المملكة العربية السعودية
وزارة التعليم العالي
جامعة الملك خالد
مجمع الاكاديمي ومعايل

العام الدراسي :1436-1437هـ
كلية : العلوم
قسم:الرياضيات
المقرر: 322 ريض3
الشعبة: 378 - 379

نموذج إجابة

الاختبار الأول في مادة: تحليل حقيقي 1

(الفصل الدراسي الأول)

التمرين الأول (7 درجات)

ضعي علامة (√) أمام العبارة الصحيحة و علامة (X) أمام العبارة الخاطئة في كل مما يأتي مع تبرير الجزئيتين الأخيرتين:

ا. كل عدد نسبي هو عدد جبري. (√)

ب- خاصية الاكتمال تتحقق في مجموعة الاعداد النسبية $\mathbb{Q}$. (X)

ج- خاصية الاكتمال تتحقق في مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. (√)

د- لكل عدد حقيقي a يكون $a.0 = 0$. (√)

التبرير

إذا كان a عدد حقيقي فمن خاصية العنصر المحايد الجمعي نجد أن

$$a \times 0 = a \times (0 + 0)$$

وبالاعتماد على خاصية التوزيع (توزيع الضرب على الجمع) نحصل على

$$a \times 0 = a \times 0 + a \times 0$$

وبإضافة النظير الجمعي للعنصر $a \times 0$ لطرفي المساواة الاخيرة ثم استخدام خاصية التجميعة والعنصر النظيرو المحايد على التوالي ينتج المطلوب :

$$-a \times 0 + a \times 0 = -a \times 0 + (a \times 0 + a \times 0)$$

$$-a \times 0 + a \times 0 = (-a \times 0 + a \times 0) + a \times 0$$

$$0 = 0 + a \times 0$$

$$0 = a \times 0$$

هـ- ليكن $a, b \in \mathbb{R}$. إذا كان $a \leq b$ فإن $-a \leq -b$. (X)

التبرير

لو فرضنا على سبيل التعارض صحة العبارة المعطاة وأخذنا $a = 1$ و $b = -1$ لبان لنا من المسلمة (O_1) أنه إما أن يكون $-1 \leq 1$ أو $1 \leq -1$ وباستخدام صحة العبارة نجد أن $-1 \leq 1$ و $1 \leq -1$ وبالاعتماد على المسلمة (O_2) نجد أن $-1 = 1$ وبالتالي $0 = 2$ وبضرب طرفي المساواة في معكوس العدد 2 نجد أن $0 = 1$ وهو مناقض لحقيقة أن $0 < 1$ (مثبتة في إحدى المحاضرات).

التمرين الثاني (7 درجات)

إملئي الفراغات التالية بكلمات مناسبة:

ا- إذا كان a عدد حقيقي فإن

$$|-a| = max(a, -a)$$

ب- كثافة $\mathbb{Q}$ في $\mathbb{R}$ تعني أن بين كل عددين ...**حقيقيين**....يوجد ..... **عدد نسبي**...

ج- تنص مسلمة الاكتمال على أن المجموعة S الجزئية من $\mathbb{R}$ و التي تكون غير خالية ومحدودة من أعلى **تمتلك حدا علويا أصغر**.

د- إذا كانت S مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ غيرخالية وغير محدودة من أعلى فإن

$$sup\, S = \infty$$

هـ - المتتالية الحقيقية هي دالة يكون ميدان (نطاق) تعريفها من الشكل $\{n \in \mathbb{Z}: n \geq m\}$، حيث $m \in \mathbb{Z}$ وعادة ما تكون $m = 0$ أو $m = 1$.

و- إذا كانت $S_n = (-1)^{n+1}$، لكل عدد طبيعي n فإن $S_{9999999999999999} = 1$.. ونهاية المتتالية **غير موجودة**.

التمرين الثالث (4 درجات)

ختاري الإجابة الصحيحة:

- المجموعة $]0,1[$

ا- **مفتوحة** ب- مغلقة ج- متراصة د- مغلقة وغير مفتوحة

2- المجموعة $[0,1]$

ا- مفتوحة **ب- متراصة** ج- غير محدودة د- مفتوحة و غير مغلقة

3- المتتالية ذات الحد العام $u_n = \frac{2n^{1437}+2015n}{598n+3n^{1437}}$ متقاربة وتتقارب نحو

ا- ∞ ب- $\frac{2}{598}$ **ج-** $\frac{2}{3}$ د- $\frac{2015}{598}$

4- $max(0,1)$ هو

ا- غير موجود ب- 0 ج- $(0,1)$ د- 1

التمرين الرابع (7 درجات).

ا- بالاعتماد على التعريف، بيني أن

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{7n-4} = \frac{3}{7}.$$

ب- حددي ما إذا كانت العبارة التالية صحيحة أو لا مع تبرير الاجابة:

"طبيعة المتتالية التي يتحصل عليها من جمع متتاليتين متباعدتين هي التباعد".