1 – تعريف المتتالية :

- هي تابع مجموعة تعريفه هي مجموعة الأعداد الطبيعة N .

أو أية مجموعة جزئية غير منتهية منها من النمط $\{n_0, n_0+1, n_0+2, ...\}$ حيث n_0 عدد طبيعي

- ترمز المتتالية بالرمز $(u_n)_{n \geq n_0}$ حيث يسمى u_n حد المتتالية ذا الدليل n .

2 – طرائق تعريف المتتالية :

1) بتعريف صريح للحد ذي الدليل n (الحد العام) :

أي يعرف الحد ذو الدليل n بصيغة تتبع العدد n تفيد في حسابه .

- مثل : $u_n = \frac{n^2}{n!}$ و $u_n = (-1)^n$ و $u_n = 2-3n$ و $u_n = 1+\frac{1}{2}+......+\frac{1}{2^n}$

@ تذكرة بالعاملي : $n! = n(n-1)(n-2)......\times 1$ حيث $n \in N^*$ و $0! = 1$.

يمكن التوقف عند أي حد وبالعكس مثل : $n! = n(n-1)!$ و $(n+1)! = (n+1)n!$

ويكتب : $u_n = f(n)$ حيث f تابع معرف على $[n_0, +\infty[$ مثل : $f(x) = \sqrt{x+1}$.

2) بإعطاء حد بدء وعلاقة تدريجية $u_{n+1} = f(u_n)$:

حيث يحسب كل حد بدلالة الحد أو الحدود التي سبقته .

- مثل : المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة إنطلاقاً من $u_0 = 2$

والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = a \cdot u_n + b$

حيث a و b عددان حقيقيان . (ندعو هذه المتتالية بالمتتالية التآلفية)

حدودها : $u_1 = 2a+b$ و $u_2 = a(2a+b)+b$ وهكذا .....

وفي هذه الحالة يعبر عن u_{n+1} كتابع لـ u_n بالصيغة $u_{n+1} = f(u_n)$

حيث f هو التابع : $x \mapsto a \cdot x + b$

3 – المتتالية الحسابية :

1) تعطى بالعلاقة التدريجية : $u_{n+1} = u_n + r$ أياً كان العدد الطبيعي n , والعدد r أساس المتتالية .

- أي ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بإضافة العدد الحقيقي r نفسه (أساس المتتالية الحسابية) .

- لبرهان أن متتالية معطاة هي متتالية حسابية يمكن أن نبرهن أن الفرق بين أي حدين متتاليين ثابت .

2) العلاقة بين أي حدين : أياً كان العددان الطبيعيان المختلفان m و p

فإن : $u_p = u_m + r(p-m)$

وبمعرفة حدين من المتتالية نحسب أساسها من : $r = \dfrac{u_p - u_m}{p-m}$ (فرق الحدين على فرق الدليلين)

وبحالة خاصة عند معرفة حد البدء u_0 وأساسها r يكون : $u_n = u_0 + r \cdot n$.

3) مجموع n حداً متتالياً أولها a وآخرها ℓ : $S = \dfrac{n(a+\ell)}{2}$

وبحالة خاصة : $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (نستفيد منه بحل إحدى التمارين)

@ تذكرة : عدد حدود المجموع $S = u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots + u_p$ هو : $n = p - m + 1$

وبما أن : $r = \dfrac{u_p - u_m}{p-m}$ فإن : $p - m = \dfrac{u_p - u_m}{r}$ وبالتالي : $n = \dfrac{u_p - u_m}{r} + 1$

يستخدم الأخير في حال معرفة الحد الأول u_m والحد الأخير u_p من المجموع , وأساس المتتالية r .

@ تذكرة : إذا كانت الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية حسابية

فإن العدد b هو المتوسط الحسابي للعددين a و c أي : $a + c = 2b$

ولا ننسى أن : $b = a + r$ و $c = a + 2r$ حيث r أساس المتتالية .

4 – المتتالية الهندسية :

1) تعطى بالعلاقة التدريجية : $u_{n+1} = q \cdot u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n , والعدد q أساس المتتالية .

أي ننتقل من حد إلى الحد الذي يليه بالضرب بالعدد الحقيقي q نفسه .

- لإثبات أن متتالية معطاة هي متتالية هندسية , نسعى لكتابتها بالصيغة $u_{n+1} = q \cdot u_n$

حيث q عدد حقيقي ثابت لا يتعلق بـ n .

وإذا كانت حدودها غير معدومة يكفي أن نثبت أن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ ثابتة وهي قيمة q .

2) العلاقة بين أي حدين : أياً كان العددان الطبيعيان m و p فإن : $u_p = u_m \cdot q^{p-m}$

- بحالة خاصة بمعرفة حد البدء u_0 وأساسها $q \neq 0$ فإن : $u_n = u_0 \cdot q^n$ أياً كان العدد الطبيعي n

3) مجموع n حداً متتالياً أولها a هو : $S = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$ بشرط $q \neq 1$.

@ تذكرة : عدد الحدود في المجموع $S = u_m + u_{m+1} + \ldots\ldots + u_p$

هو : $n = p - m + 1$

وبما أن : $q^{p-m} = \frac{u_p}{u_m}$ فإن : $q^{n-1} = \frac{u_p}{u_m}$

يستخدم الأخير في حال معرفة الحد الأول u_m والحد الأخير u_p من المجموع , وأساس المتتالية q

- في حالة خاصة عندما $a = 1$ يكون : $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

- يستفاد من العلاقة السابقة بإثبات المطابقة الآتية : (بجعل $q = \frac{a}{x}$)

$$x^n - a^n = (x-a)\left(x^{n-1} + a \cdot x^{n-2} + a^2 \cdot x^{n-3} + \ldots\ldots + a^{n-1}\right)$$

معلومة للإثراء : إذا كان المجموع من الصيغة : $S = u_m + u_{m+t} + u_{m+2t} + \ldots\ldots + u_p \ ; t \in N^*$

لمتتالية حسابية أو متتالية هندسية فإن عدد الحدود : $n = \frac{p-m}{t} + 1$ (للإستئناس)

@ تذكرة : إذا كانت الأعداد a و b و c ثلاثة حدود متعاقبة من متتالية هندسية

كان : $b^2 = a \cdot c$.

ويجب أن لا ننسى أن : $b = a \cdot q$ و $c = a \cdot q^2$

5 – **جهة اطراد متتالية :** تكون المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$:

1) متزايدة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} > u_n$

وتكون متزايدة عندما : $u_{n+1} \geq u_n$.

2) متناقصة تماماً إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} < u_n$

وتكون متناقصة عندما : $u_{n+1} \leq u_n$.

3) ثابتة إذا وفقط إذا تحقق الشرط : مهما تكن $n \geq n_0$ يكن $u_{n+1} = u_n$.

* نقول عن المتتالية التي تحقق أحد الشروط الثلاثة السابقة أنها متتالية مطردة .

* ملاحظة : هناك متتاليات غير مطردة مثل المتتالية المتناوبة : $u_n = (-1)^n$ تأخذ قيمتين -1 و $+1$

6 – **طرائق دراسة جهة اطراد متتالية :**

1) دراسة إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$.

2) مقارنة النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع الواحد عندما تكون حدود المتتالية موجبة تماماً (وخلاف ذلك لا يستخدم)

3) كتابة $u_n = f(n)$ (إن أمكن) وعندها ندرس اطراد التابع f :

فإذا كان مطرداً على المجال $[n_0, +\infty[$

كانت جهة اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq n_0}$ من جهة اطراد f

* تذكرة بأهم قواعد الاشتقاق : (ضمن شروطها)

القاعدة لفظاً	المشتق	التابع
أمثال المتحول (مشتق الثابت = صفر)	$f'(x) = m$	$f(x) = m \cdot x + p$
الأس بالتابع مرفوعاً لأس أقل بواحد بمشتق التابع	$n\, g^{n-1} \cdot g'$	g^n
مشتق ما تحت الجذر على ضعفي الجذر	$\frac{a}{2\sqrt{a \cdot x + b}}$	$\sqrt{a \cdot x + b}$
مجموع المشتقات	$g' + h'$	$g + h$
مشتق الأول بالثاني + مشتق الثاني بالأول	$g' \cdot h + h' \cdot g$	$g \cdot h$
مشتق البسط بالمقام ناقص مشتق المقام بالبسط على مربع المقام	$\frac{g' \cdot h - h' \cdot g}{h^2}$	$\frac{g}{h}$

* ملاحظة : أحياناً لا يمكننا دراسة الإطراد حسب أحد الطرائق الثلاثة السابقة عندها نلجأ إلى حساب بعض الحدود الأولية للمتتالية لنستشف منها عن التزايد أو التناقص أو الثبات .

ثم نبرهن صحة ذلك بالاعتماد على مبدأ الإثبات بالتدريج الذي سنشرحه فيما بعد .

- نصادف ذلك على وجه الخصوص في دراسة إطراد المتتالية التالفية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة إنطلاقاً من $u_0 = c$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = a\cdot u_n + b \;;\; a \neq 1 \;,\; b \neq 0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية

7 – **مبدأ الاثبات بالتدريج (الاستقراء الرياضي) :**

- نكتب الخاصة $E(n)$ التي تتعلق بالعدد الطبيعي n والتي نرغب بإثبات صحتها في حالة $n \geq n_0$

وفي أغلب الأحيان يكون $n_0 = 0$ أو $n_0 = 1$.

- لإثبات صحة الخاصة $E(n)$:

1) نثبت صحة الخاصة من أجل $n = n_0$.

2) في حالة $n \geq n_0$ نفترض صحة الخاصة $E(n)$ ونبرهن صحة $E(n+1)$.

* ملاحظة : إذا كان $a \geq b + c$ حيث b, c مقادير موجبة فإن : $a \geq b$ و $a \geq c$

أيضاً إذا كان $a \geq b \cdot c$ حيث b, c مقادير أكبر من الواحد فإن : $a \geq b$ و $a \geq c$

مثلاً : إذا كان العدد الطبيعي $n \geq 3$ فإن : $n \geq 2$ حتماً و $n \geq 1$ حتماً و $n \geq 0$ حتماً

أيضاً من أجل $n \geq 2$ إذا كان : $n^3 \geq 2 \times 2^n$ فإن : $n^3 \geq 2^n$

- للإثراء والاطلاع :

نعلم في حال : $u_{n+1} = a\cdot u_n + b$ (تالفية) . الحد العام من الصيغة : $u_n = t\cdot a^n + s$

وهو صيغة للقانون المستنتج في الصف الحادي عشر : $u_n = \left(u_0 - \dfrac{b}{1-a}\right)a^n + \dfrac{b}{1-a}$