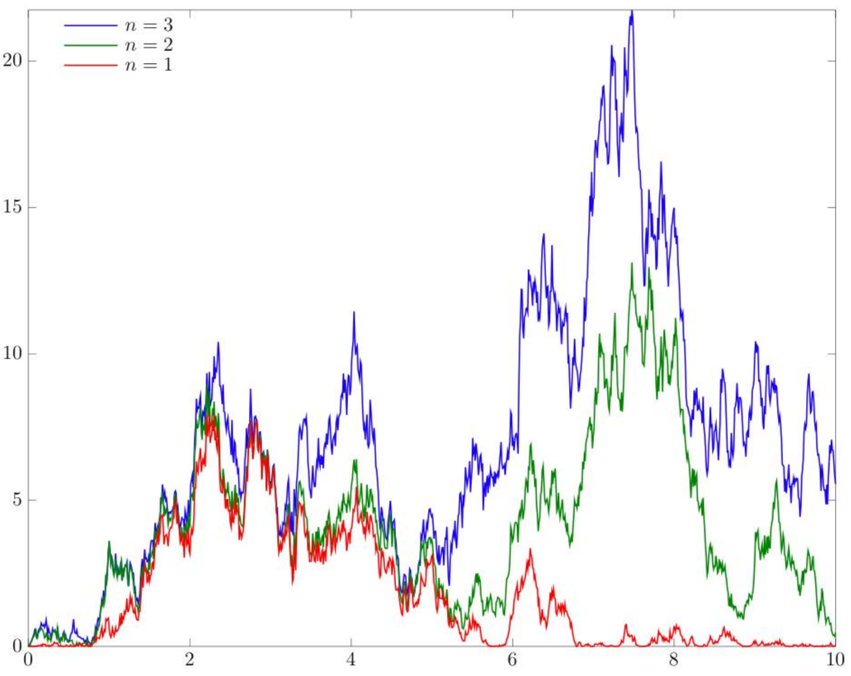
المحاضرة الثانية

السنة الثالثة –إحصاء رياضي

طوريات عشوائية (1)

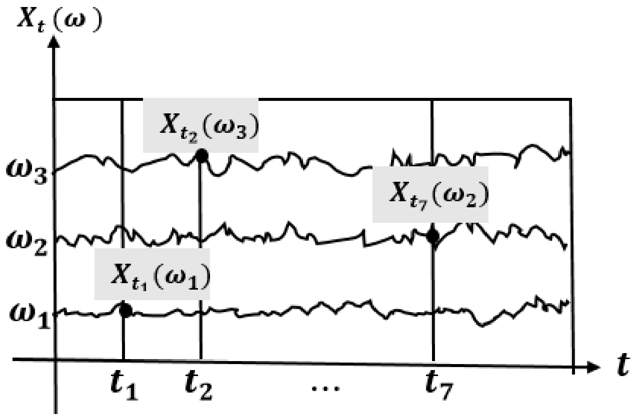


مدرس المقرر د. هادية طهماز

الطوريات العشوائية Random Processes

مثال توضيحي لوصف الطوري العشوائي:

لنأخذ مثال يظهر في تقنيات التصنيع والمتمثل بسطح مثقول لمعدن، ولنفترض أن هذا السطح له شكل مستطيل على النحو الآتي:



لو قمنا بوضع هذا المقطع تحت المجهر لوجدنا أنه ليس ثقيلاً، إنما يحوي على تعرجات كثيرة غير منظمة.

في حال قمنا باستخدام ماسح يعطي عروضاً بيانية لشكل التعرجات على هذا السطح، وباختيار نقطة عشوائية من هذا المقطع.. سنجد أنه من أجل أي نقطة مختارة عشوائياً سيعطينا رسماً بيانياً موافقاً لبيان دالة حقيقية نرمز لها بـــ X_t، وهذه الدالة معرفة على مجموعة نقاط عرض المقطع والتي اختيرت منها نقطة عشوائية ولتكن Ω:

$$X_t : \Omega \to \mathbb{R}$$

من الشكل السابق نلاحظ ما يلي:

نلاحظ أن قيمة الدالة X_t عند قيمة مثبتة مثلاً $t_1 \in T$ هي قيمة عشـــوائية ناتجة عن الاختيار العشـــوائي للنقطة $\omega_1 \in \Omega$ التي انطلق منها أثناء المســح.... وهكذا بالنســبة لباقي النقاط...

وبما أن T هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ ذات طول موجب تماماً، فإن ذلك يعني أنه سيتولد لدينا في هذه التجربة أسرة من المتغيرات العشوائية X_t عددها غير منته بل غير قابل للعد في مثالنا هذا وسنرمز لهذه الأسرة بـ $\{X_t; t \in T\}$ أو بالشكل $\{X_t\}_{t\in T}$.

تعريف الطوري العشوائي:

هو عبارة عن أسرة من المتحولات العشوائية $\{X_t; t \in T\}$ المعرفة على الفضاء الاحتمالي (Ω, f, P) ويأخذ قيمه في الفضاء E، كما يلي:

$$X_t(\omega): \Omega \times \mathrm{T} \to \mathrm{E}$$

ندعو T فضاء وسطاء الطوري و E فضاء قيم الطوري (أو فضاء الحالة).

نلاحظ أنه في حال كانت t ثابتة يكون $X_{t_0}(\omega)$ عبارة عن متغير عشوائي، أما في حال ω ثابتة يصبح $X_t(\omega_0)$ تابع للزمن ويدعى بمسار الطوري العشوائي.

أي الطوري العشـــوائي هو تـــابع لمتحولين، تـــابع الزمن T وتـــابع العينـــة Ω $\{X(t, \omega);\ \omega \in \Omega\ ,\ t \in T\}$.

حالات خاصة من الطوريات العشوائية:

يوضح الجدول التالي الحالات الخاصة التي تصنف الطوري النقطي حسب كلاً من فضاء وسطاء الطوري وفضاء الحالة:

فضاء الوسطاء T	فضاء الحالة E	مصطلح تسمية الطوري
Tمستمر	كيفي(منفصل أو مستمر)	طوري عشوائي
Tمستمر	منفصل	طوري عشوائي منفصل
Tمنفصل	كيفي	متتالية عشوائية
Tمنفصل	منفصل	سلسلة عشوائية

صفات الطوري العشوائي:

1- تابع التوزيع:

بفرض $\{X_t\}_{t\in T}$ طوري عشـــوائي، من أجل زمن مثبت $t_1 \in T$ يكون X_{t_1} متغير عشوائي تابع توزيعه يعرف بالشكل:

$$F_X(x_1,t_1) = p(X_{t_1} \le x_1)$$

ويدعى بالتوزيع من المرتبة الأولى لـ X_t.

وفي حال أخذنا لحظتين زمنيتين نحصل على تابع توزيعهما المشترك من المرتبة الثانية لـ $\{X_t\}$ ويعطى بالعلاقة:

$$F_X(x_1,x_2;t_1,t_2) = p(X_{t_1} \le x_1, X_{t_2} \le x_2)$$

في الحالة العامة يكون التوزيع من المرتبة n يعطى بالعلاقة:

$$\boldsymbol{F_X(x_1,x_2,\dots,x_n\,;t_1,t_2,\dots,t_n) = p(X_{t_1} \le x_1,\dots,X_{t_n} \le x_n)}$$

2- تابع الكثافة :

في حال كان الطوري محدد بمجالات منفصــلة يعطى تابع الكثافة لــــــ $\{X_t\}$ بالعلاقة :

$$\boldsymbol{P_X(x_1, x_2, \dots, x_n\,; t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_{t_1} = x_1, \dots, X_{t_n} = x_n\,)}$$

وفي حال كان الطوري محدد بمجالات مســتمرة يعطى تابع الكثافة لــــــ $\{X_t\}$ بالعلاقة :

$$\boldsymbol{f_X(x_1, x_2, \dots, x_n\,; t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F_X(x_1, x_2, \dots, x_n\,; t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}}$$

3- دالة المتوسط: تعطى بالعلاقة :

$$\boxed{\mu_X(t) = EX_t}$$

4- دالة التباين: تعرف بالعلاقة

$$\boxed{V_X(t) = EX_t^2 - (EX_t)^2}$$

5- دالة التغاير الذاتية :

$$\boxed{C_X(s,t) = cov(X_s, X_t) = E\,X_s\,X_t - EX_s\,.\,EX_t}$$

6- دالة الارتباط الذاتي :

$$\boxed{R_X(s,t) = E\,X_s\,X_t}$$

خواص الطوريات العشوائية:

1- خاصية التزايدات المستقلة :

ليكن $(X_t)_{t\in T}$ طوري عشـــوائي، من أجل كل من $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$ مع $t_1 < t_2, < \cdots < t_n$، تكون المتغيرات العشوائية التالية مستقلة :

$$\boldsymbol{X_{t_1} \& \; X_{t_2} - X_{t_1} \;\& \dots \&\; X_{t_n} - X_{t_{n-1}}}$$

عندئذ يقال عن الطوري العشوائي إنه طوري ذو تزايدات مستقلة.

2- خاصية التزايدات المتجانسة :

ليكن $(X_t)_{t\in T}$ طوري عشـــوائي، من أجل كل من $t, s \in T$ مع $s < t$،

فإن قانون توزيع التزا يد $\boldsymbol{X_t - X_s}$ (ودا لة توزيعه) متعلق بالفرق بين $\boldsymbol{s\,,t}$ فقط.

عندئذ يدعى هذا الطوري بالطوري العشوائي ذو التزايدات المتجانسة.

3- خاصية الاستقرارية :

نقول عن طوري عشـــوائي $(X_t)_{t\in T}$ أنه مســـتقر أو ســـاكن إذا كان توزيعاته ذات البعد المنتهي لا تتغير من أجل أي انسحاب حول أي عدد حقيقي h أي :

$$F_{t_1,t_2,\dots,t_n} = F_{t_1+h,t_2+h,\dots,t_n+h}$$

من أجل $t_1, t_2, \dots, t_n, t_1 + h, t_2 + h, \dots, t_n + h \in T$، أي أن (X_t) و (X_{t+h}) لهما نفس التوزيع.

نطلق عليه طوري عشوائي مستقر بالمعنى الضيق (قوي الاستقرار).

طوري مستقر بالمعنى الواسع (ضعيف الاستقرار):

نقول عن طوري عشوائي $(X_t)_{t\in T}$ أنه مستقر بالمعنى الواسع إذا كان يملك عزوم من المرتبة الأولى والثانية وكانت هذه العزوم لا تتغير عند الانسحابات، أو نقول عن طوري عشوائي أنه مستقر بالمعنى الواسع إذا حقق الشروط التالية:

- $E(X_t) = constant$
- $V(X_t) = constant$
- دالة التغاير $Cov(X_s, X_t)$ متعلقة بالفرق بين s وt.