«الحركة التوافقية البسيطة»

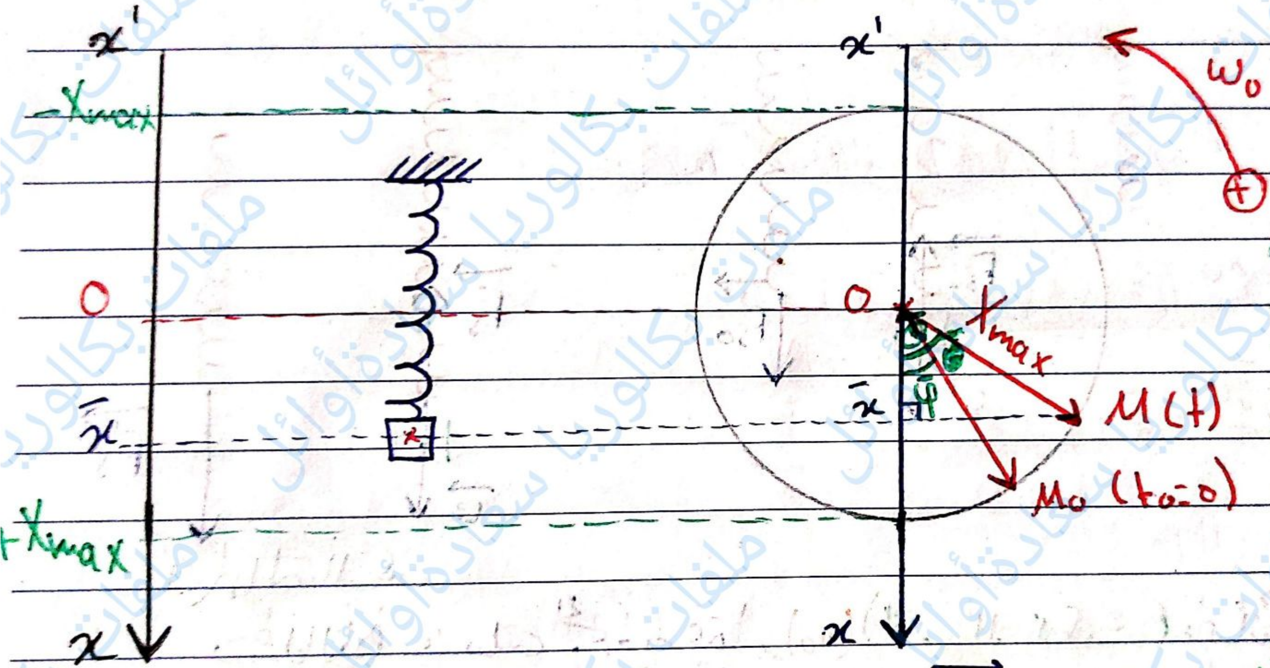
«الحركة الجيبية الانسحابية»

1) تعريفها:

هي الحركة الاهتزازية لجسم صلب أو لنقطة مادية إلى جانبي نقطة ثابتة تدعى «مركز الاهتزاز».

النواس المرن: هو جسم صلب معلق بنابض مرن مهمل الكتلة حلقاته متباعدة يهتز حركة اهتزازية إلى جانبي مركز الاهتزاز.

2) تمثيلها: «بشعاع فرينل».



$\bar\theta$: بين $\vec{OM(t)}$ والمحور $\vec{ox}$

$\bar\varphi$: بين $\vec{OM_0}$ و $\vec{ox}$

1) شعاع فرينل: وهو الشعاع $\vec{OM}$ شعاع الموضع الذي يحدد في كل لحظة موضع نقطة مادية تدور على دائرة حركة دائرية منتظمة.

- ويدور هذا الشعاع بسرعة زاوية ثابتة (ω_0) وبالاتجاه الموجب تدعى: «النبض الخاص للحركة».
- وتمثل فاصلة مسقط نهاية الشعاع في كل لحظة على المحور ($x'x$) مطال الحركة ($\bar{x}$).

* المطال: القياس الجبري لبعد النقطة المتحركة عن وضع توازنها في كل لحظة.

ومن الشكل:

$$\cos\bar\theta = \frac{\bar{x}}{X_{max}}$$

$$\bar{x} = X_{max}\cos\bar\theta$$

وبالقياس في الحركة الدائرية المنتظمة:

$$\bar\theta = \bar\omega t + \bar\theta_0$$

نقابل بالاصطلاح:

$$\boxed{\bar\theta = \omega_0 t + \bar\varphi}$$

طور الحركة

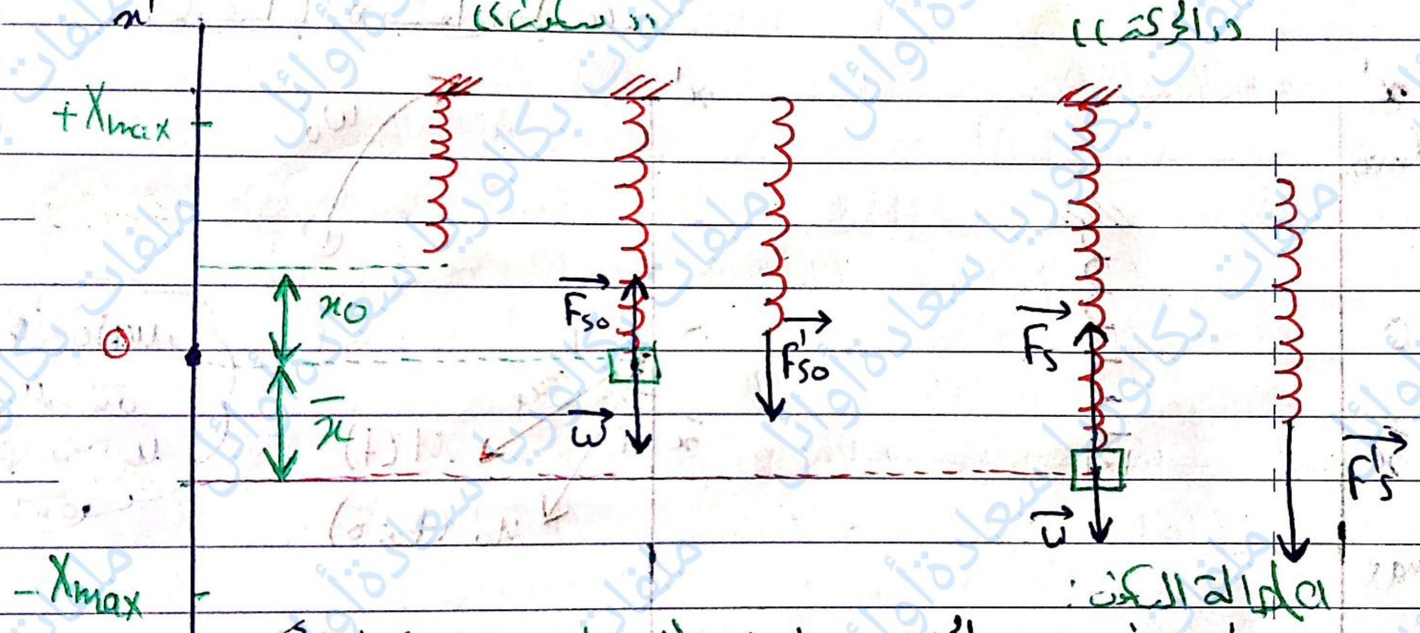
الطور الابتدائي

نعرّف: $\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

مطال الحركة (m) ؛ سعة الحركة (m) ؛ النبض الخاص $rad.s^{-1}$ ؛ الطور الابتدائي rad

II) الدراسة التحريكية:

س) أثبت أن الجسم الذي يتحرك حركة توافقية بسيطة يكون خاضعاً في كل لحظة لقوة محصلة تحرك الجسم من الشكل $\boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$ تدعى "قوة إرجاع" تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة.



a) حالة السكون:

يستطيل النابض عندما نعلق الجسم فيه بمقدار (x_0) (الاستطالة السكونية) ونجد أن:

أ) الجسم: يتوازن تحت تأثير القوتين: ثقله $\vec{W}$ ، قوة توتر النابض $\vec{F}_{s0}$

شرط التوازن: $\sum\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{W} + \vec{F}_{s0} = \vec{0}$ وبالإسقاط على محور شاقولي موجه نحو الأسفل: $W - F_{s0} = 0 \Rightarrow \boxed{W = F_{s0}}$

ب) النابض: ويؤثر فيه القوة $\vec{F'}_{s0}$ التي تسبب الاستطالة (x_0) وتعطى بالعلاقة: $\boxed{F'_{s0} = kx_0}$

ولكن: $\boxed{F_{s0} = F'_{s0}}$ (بإهمال كتلة النابض) $\Rightarrow F_{s0} = kx_0$

$\Rightarrow \boxed{W = kx_0}$ (1)

b) حالة الحركة:

نسحب الجسم شاقولياً نحو الأسفل (بالاتجاه الموجب) مسافة (X_{max}) ثم نتركه بدون سرعة ابتدائية ليهتز بحركة توافقية بسيطة وفي لحظة ما نجد أن:

أ) الجسم: يخضع لتأثير القوتين: ثقله $\vec{w}$

قوة توتر النابض $\vec{F_s}$

بتطبيق قانون نيوتن الثاني: $\sum \vec{F} = m\vec{a} \Leftarrow$ $\vec{w} + \vec{F_s} = m\vec{a}$ نسقط على محور شاقولي موجه

نحو الأسفل: $\Leftarrow$ $\boxed{w - F_s = m\bar{a}}$

ج) النابض: يتأثر فيه القوة $\vec{F'_s}$ التي تسبب الاستطالة: $(\bar{x} + x_0)$ وتعطى بالعلاقة:

ولكن: $\boxed{F'_s = k(\bar{x} + x_0)}$; $\boxed{F_s = F'_s}$ (لإهمال كتلة النابض) $\boxed{F_s = k(\bar{x} + x_0)}$ نعوض:

$$w - k(\bar{x} + x_0) = m\bar{a}$$

ومن (1) نجد: $\boxed{w = kx_0}$ نعوض:

$$kx_0 - k\bar{x} - kx_0 = m\bar{a}$$

$$-k\bar{x} = m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow \boxed{\bar{F} = -k\bar{x}}$$

فهي قوة إرجاع تتناسب طرداً مع المطال وتعاكسه بالإشارة.

هام ج: أ) ب) الدراسة الحركية:

استنتاج طبيعة الحركة:

لدينا: $\bar{F} = m\bar{a}$, $\bar{F} = -k\bar{x}$

$$\bar{a} = (\bar{v})'_t = (\bar{x})''_t , \quad \bar{v} = (\bar{x})'_t$$

$$\Rightarrow m\bar{a} = -k\bar{x} \Rightarrow \bar{a} = -\frac{k}{m}\bar{x} \Rightarrow$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل $\Leftarrow$ (2) $\boxed{(\bar{x})''_t = -\frac{k}{m}\bar{x}}$

حلاً جيبياً من الشكل:

$$\boxed{\bar{x} = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

لأنه باشتقاقها مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{x})'_t = \boxed{\bar{v} = -X_{max}\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$(\bar{x})''_t = \boxed{\bar{a} = -X_{max}\,\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$\Rightarrow \bar{a} = -\omega_0^2 . \bar{x} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\bar{x})''_t = -\omega_0^2 . \bar{x}} \quad (3)$$

وبالمطابقة بين (2) و(3) نجد أنّ:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$$

وهذا محقق لأن k و m مقداران موجبان تماماً.

نستنتج أن حركة الجسم المهتز هي حركة جيبية انسحابية (توافقية بسيطة) نبضها الخاص من العلاقة:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad (4)$$

* فالنبض الخاص:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

* والدور الخاص:

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad (5)$$

حيث T_0 الدور الخاص ويقدر بالثانية

m كتلة الجسم المهتز بالكيلوغرام

k ثابت صلابة النابض: $N.m^{-1}$

س: ما خواص الدور؟

- يتناسب طرداً مع $\sqrt{m}$
- يتناسب عكساً مع $\sqrt{k}$
- لا يتعلق بـ X_{max}.

س: كيف يتم اختيار المطال بشكله الأبسط؟

باختيار مناسب للحظة بدء الزمن بحيث تختار $(t=0)$ عندما $\bar{x} = +X_{max}$ نعوض:

$$+X_{max} = X_{max}\cos(\underbrace{\omega_0 \times 0}_{0} + \bar{\varphi})$$

$$\Rightarrow \cos\bar{\varphi} = +1$$

$$\Rightarrow \bar{\varphi} = 0 \ \boxed{rad}$$

$$\Rightarrow \boxed{\bar{x} = X_{max}\cos\omega_0 t}$$

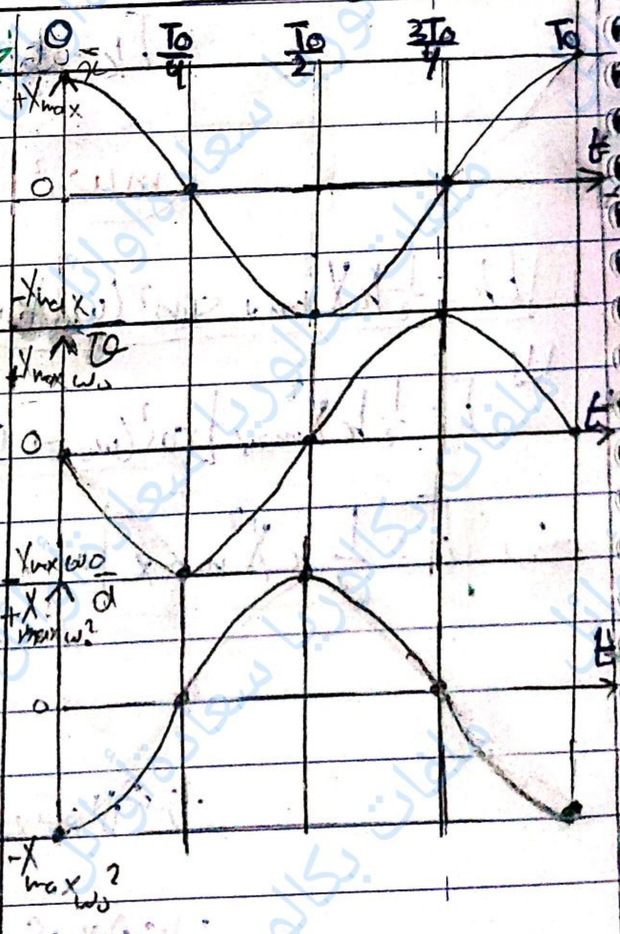
س: اشتق التابع $\bar{x}$ ، $\bar{v}$ ، $\bar{a}$ ، $\bar{F}$ في لحظة ما؟

أكمل 13 الصفحة

t	$\omega_0 t = \frac{2\pi}{T_0} \times t$	$\cos\omega_0 t$	$\sin\omega_0 t$	$\bar{x}$	$\bar{v}$	$\bar{a}$
0	$\frac{2\pi}{T_0} \times 0 = 0$	$+1$	0	$+X_{max}$	0	$-X_{max}\omega_0^2$
$\frac{T_0}{4}$	$= \frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2}$	0	$+1$	0	$-X_{max}\omega_0$	0
$\frac{T_0}{2}$	$= \frac{2\pi}{T_0} \times \frac{T_0}{2} = \pi$	-1	0	$-X_{max}$	0	$+X_{max}\omega_0^2$
$\frac{3T_0}{4}$	$\frac{2\pi}{T_0} \times \frac{3T_0}{4} = \frac{3\pi}{2}$	0	-1	0	$+X_{max}\omega_0$	0
T_0	$= \frac{2\pi}{T_0} \times T_0 = 2\pi$	$+1$	0	$+X_{max}$	0	$-X_{max}\omega_0^2$

التابع	معادلته	في الوضعين الأقصيين	في مركز الاهتزاز
$\bar{x} =$	$X_{max}\cos\omega_0 t$	$\bar{x} = \mp X_{max}$ أعظمي $\cos\omega_0 t = \mp 1$	$\bar{a} = 0$ معدوم $\cos\omega_0 t = 0$
$\bar{v} =$	$-X_{max}\omega_0 \sin\omega_0 t$	$\sin\omega_0 t = 0$ $\bar{v} = 0$ معدومة	$\sin\omega_0 t = \mp 1$ أعظمي $v_{max} = X_{max}\omega_0$
$\bar{a} =$	$-X_{max}\omega_0^2\cos\omega_0 t$ $= -\omega_0^2 \bar{x}$	أعظمي $a_{max} = \omega_0^2 X_{max}$	$\bar{a} = 0$ معدوم

مخطط



ماخواص التسارع؟

- يتناسب طرداً مع المطال ويعاكسه بالإشارة [حيز متغير أي ليس ثابت]

- ينعدم في مركز الاهتزاز

- يتجه دوماً نحو مركز الاهتزاز

- أعظمي (طويلة) في الوضعين الطرفيين

(5) الطاقة في الحركة التوافقية البسيطة:

هام جداً

* الطاقة الميكانيكية: $E = E_p + E_k$

* الطاقة الكامنة المرونية للنابض: $E_p = \frac{1}{2}kx^2$

* حيث: $x = X_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

* نعوض: $\boxed{E_p = \frac{1}{2}kX^2_{max}\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$

* والطاقة الحركية للجسم الصلب: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$

* حيث: $\bar{v} = -X_{max}\omega_0\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

* نعوض: $E_k = \frac{1}{2}mX^2_{max}\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})$

ومن (4):

$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ومنه k

$m\omega_0^2 = k$

نعوض:

$$\boxed{E_k = \frac{1}{2}kX^2_{max}\sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

إذاً

$$E = \frac{1}{2}kX^2_{max}\left[\underbrace{\cos^2(\omega_0 t + \bar{\varphi}) + \sin^2(\omega_0 t + \bar{\varphi})}_{1}\right]$$

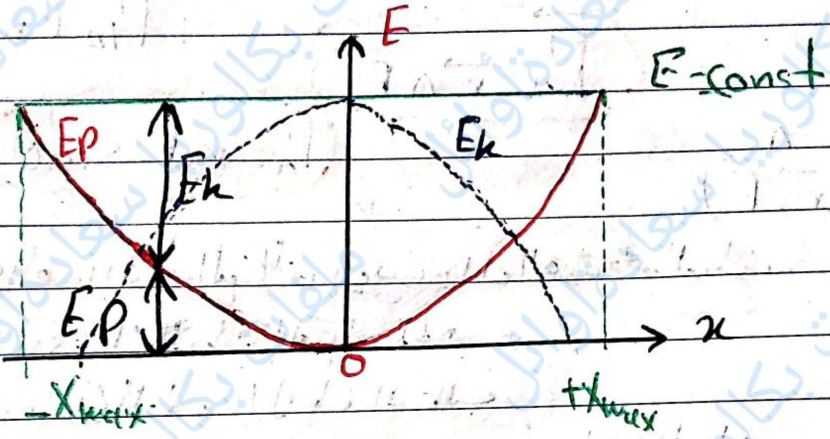
$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{1}{2}kX^2_{max}}$$

س: ناقش حالة الطاقة ماذا تلاحظ؟

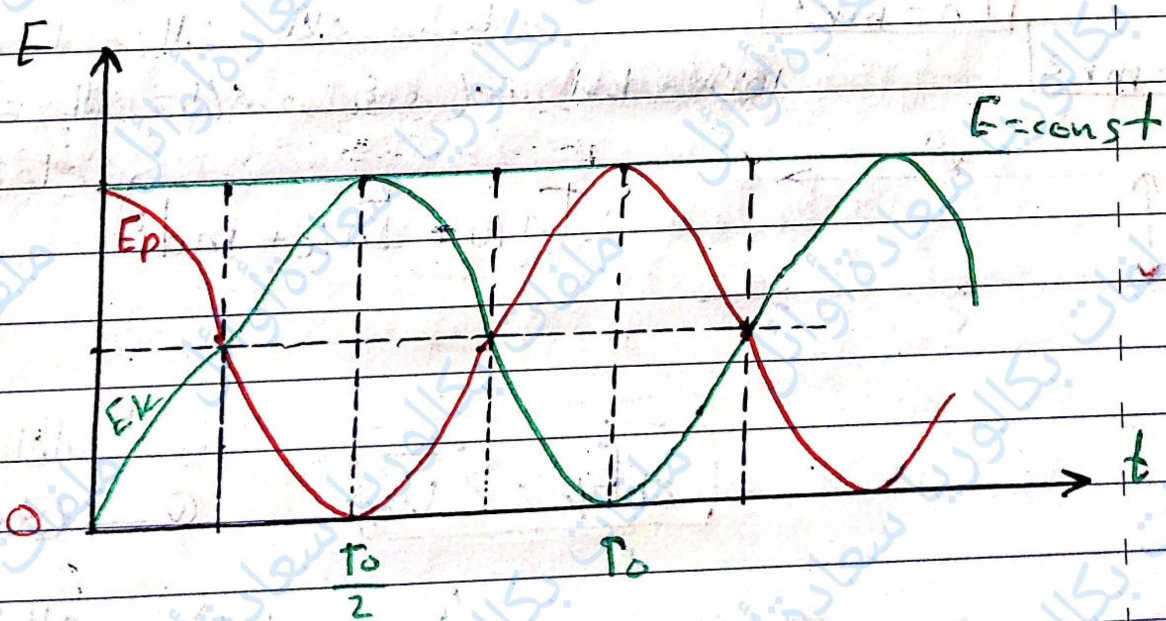
E: ثابتة لحلقة معينة ولحركة معينة

E_p: عظمى في الوضعين الطرفيين ومعدومة في مركز الاهتزاز

E_k: معدومة في الوضعين الطرفيين وعظمى في مركز الاهتزاز



وعندما يكون $x = X_{max} \cos \omega_0 t$ فإن المخطط البياني الممثل لتحولات ال



مراجعة :

"الحركة الدورانية"

① عزم القوة Γ_Δ (m.N) :

$$\vec{\Gamma}_\Delta = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

قيمته الجبرية :

$$\Gamma_\Delta = r.F.\sin\theta$$

حيث : $\hat{\theta} : (\vec{r}, \vec{F})$

وحيث : (r) "ذراع القوة" وهو البعد العمودي بين حامل القوة ومحور الدوران.

والعزم : موجب : إذا أدى إلى الدوران بالاتجاه الموجب

سالب : إذا أدى إلى الدوران بالاتجاه السالب.

وينعدم العزم إذا كان حامل القوة : يلاقي أو يوازي أو ينطبق على محور الدوران.

② عزم العطالة I_Δ (kg.m²) :

a) النقطة مادية : بالنسبة إلى محور دورانها :

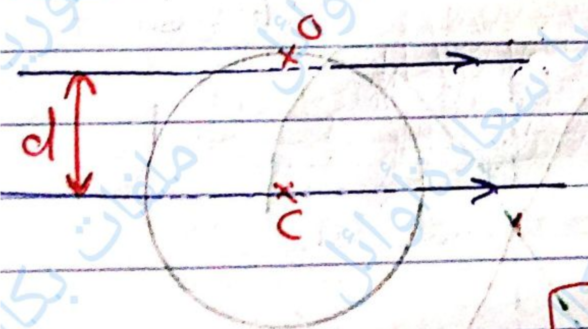
$$I_\Delta = mr^2$$

b) حلقة : بالنسبة إلى محور دوران عمودي على مستويها ومار من مركزها

$$I_\Delta = mr^2$$

c) نظرية هايغنز :

$$I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + md^2$$



3) نظرية الطاقة الحركية : ① → ②

$$\Delta E_k = \sum \bar{W}_{F}$$

4) العزم الحركي : L (kg.m².rad.s⁻¹) :

$$L = I_\Delta.\bar{\omega}$$

L → kg.m².rad.s⁻¹ ، I_Δ → kg.m² ، $\bar{\omega}$ → rad.s⁻¹

5) العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني : "نظرية التسارع الزاوي" :

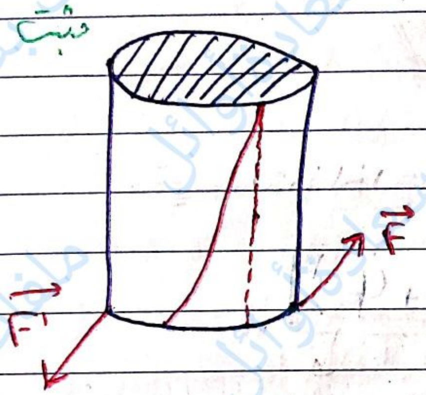
$$\sum \Gamma_\Delta = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

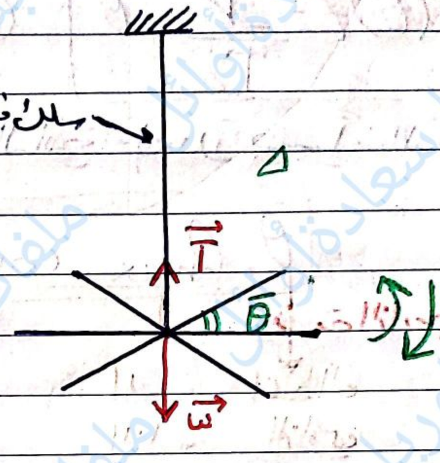
$\sum\Gamma_\Delta$ → m.N ، I_Δ → kg.m² ، $\bar{\alpha}$ → rad.s⁻¹

الاهتزازات الجيبية الدورانية

نواس الفتل غير المتخامد

1) الدراسة التحريكية:





توازن الساق المتجانسة الأفقية والمعلقة من منتصفها بسلك فتل شاقولي تحت تأثير القوتين:

ثقلها: $\vec{w}$

قوة توتر السلك: $\vec{T}$

عن وضع توازنها

وعند تدويرها في مستوٍ أفقي حول محور الدوران (Δ) بزاوية ما ثم تركها دون سرعة زاوية ابتدائية

تنشأ في سلك الفتل ((مزدوجة فتل)) $\vec{\eta}$ (مقاومة) تعاكس عملية الدوران وتسعى إلى إعادة الساق إلى وضع توازنها، عزمها:

$$\boxed{\Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = -k\,\bar{\theta}}$$

عزم الفتل — عزم إرجاع $(m.N)$

ثابت فتل السلك $(m.N.rad^{-1})$

زاوية الفتل rad — المطال الزاوي

مزدوجة عزم إرجاع فهو يتعاكس مع المطال الزاوي دائماً بالإشارة.

هام 2) الدراسة الحركية: ((دراسة طبيعة الحركة))

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني:

$$\sum \Gamma_{/\Delta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$$

$$\Gamma_{\vec{w}/\Delta} + \Gamma_{\vec{T}/\Delta} + \Gamma_{\vec{\eta}/\Delta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$$

$$0 + 0 - k\bar{\theta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha} \Rightarrow \boxed{-k\bar{\theta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}} \quad (1)$$

لأنهما تلاقيان (Δ)

$$\Rightarrow \boxed{\bar{\alpha} = -\frac{k}{I_\Delta} \cdot \bar{\theta}} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{k}{I_\Delta} \cdot \bar{\theta}} \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\boxed{\bar{\theta} = \theta_{max} \cdot \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

المطال الزاوي (rad) — السعة الزاوية (rad) — النبض الخاص (rad.s⁻¹) — الطور الابتدائي rad

لأنه باشتقاق مرتين بالنسبة للزمن:

$$(\bar{\theta})'_t = \boxed{\bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$(\bar{\theta})''_t = \boxed{\bar{\alpha} = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta} \Rightarrow \boxed{(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta}} \quad (3)$$

وبالمطابقة بين (2) و(3) نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن I_Δ, k مقادير موجبة دوماً فنستنتج أن حركة الفتل السابق هي حركة جيبية دورانية تعطى تابع مطالها الزاوي بالعلاقة:

$$\boxed{\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

ويحسب نبضها الخاص من العلاقة:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{I_\Delta}} \quad (4)$$

* نسالنبض الخاص:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{I_\Delta}}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

* ما الدور الخاص:

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{k}}} \quad 5$$

س: ما خواص الدور؟

لا يتعلق بـ θ_{max}.

يتناسب طرداً مع $\sqrt{I_\Delta}$.

يتناسب عكساً مع $\sqrt{k}$.

س: ما علاقة k بأبعاد السلك؟

$$\boxed{k = k' \frac{(2r)^4}{l}}$$

k: ثابت فتل السلك — $(2r)$: قطر مقطع السلك الأسطواني — k': ثابت يتعلق بنوع السلك — l: طول السلك.

7 التشابه الشكلي (الموازنة) بين النواس المرن ونواس الفتل:

المرن: حركة جيبية انسحابية المطال: $\bar{x}$ السعة: X_{max} السرعة: $\bar{v}$ التسارع $\bar{a}$

الفتل: حركة جيبية دورانية المطال الزاوي: $\bar{\theta}$ السعة الزاوية: θ_{max} السرعة الزاوية: $\bar{\omega}$ التسارع الزاوي: $\bar{\alpha}$

المرن: الكتلة: m ثابت الصلابة: k قوة الإرجاع: $\bar{F} = -k\bar{x}$ الطاقة الكامنة: $E_P = \frac{1}{2}kx^2$

الفتل: عزم العطالة: I_Δ ثابت الفتل: k عزم الإرجاع: $\bar{\Gamma}_\Delta = -k\bar{\theta}$ الطاقة الكامنة: $E_P = \frac{1}{2}k\theta^2$

المرن: الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}mv^2$ الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}kX_{max}^2$

الفتل: الطاقة الحركية: $E_k = \frac{1}{2}I_\Delta\omega^2$ الطاقة الميكانيكية: $E = \frac{1}{2}k\theta_{max}^2$

8. الدراسة التجريبية:

a. علاقة T_0 بـ θ_{max}:

1) نعطي لـ (θ_{max}) قيماً متغيرة متعددة.

2) نقيس في كل مرة (t) زمن (5) نوسات متتالية

3) نحسب في كل مرة الدور الخاص: $T_0 = \frac{t}{5}$

4) نجد: الدور الخاص ثابت لا يتغير فهو لا يتعلق بـ (θ_{max}).

SEBAGH STATIONERY

٢/٤/١٨

ط) علاقة T_0 بـ I_Δ:

أ) نجعل الساق كتلة منفردة (بدون كتل إضافية).

ب) نقيس (t) زمن 5 نوسات متتالية ثم نحسب الدور الخاص ($T_0 = \frac{t}{5}$)

ج) نثبت على الساق بكتلتين نقطيتين متماثلتين ثم نقيس الدور الخاص الجديد (T_0').

د) نباعد بين الكتلتين الإضافيتين ثم نقيس الدور الخاص الجديد (T_0'').

هـ) فنجد أن $T_0 < T_0' < T_0''$ فالدور الخاص يزداد بازدياد I_Δ.

ع) علاقة T_0 بـ (l):

أ) نجعل طول سلك الفتل (l_1) ثم نقيس (T_{01}) الدور الخاص.

ب) نجعل طول سلك الفتل ربع ما كان عليه $l_2 = \frac{l_1}{4}$ ثم نقيس الدور الخاص الجديد (T_{02}).

ج) فنجد أن $T_{02} = \frac{T_{01}}{2}$ أي أن الدور الخاص ينقص بنقصان (l) طول سلك الفتل

"الاهتزازات غير التوافقية"

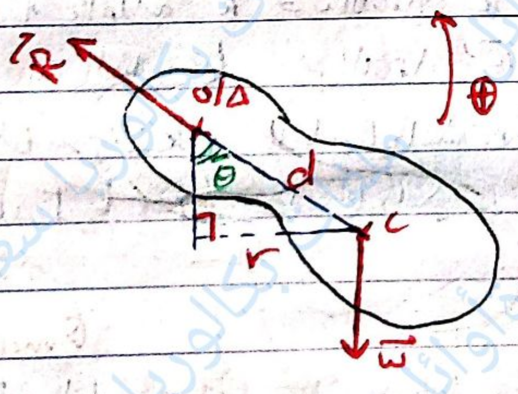
"النواس الثقلي غير المتخامد"

أولاً: المركب:

1) تعريفه:

هو كل جسم صلب يهتز بتأثير عزم قوة ثقله حول محور دوران أفقي عمودي على مستويه ولا يمر من مركز عطالته.

2) الدراسة التحريكية:



القوى الخارجية المؤثرة: ثقل الجسم $\vec{w}$ ، رد فعل محور الدوران $\vec{R}$

نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الدوراني

$$\sum \bar{\Gamma}_{\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

ولكن: $\bar{\Gamma}_{\vec{R}/\Delta} = 0$

لأن حامل $\vec{R}$ يلاقي محور الدوران (Δ)

$$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -r \cdot w$$

حيث $r = d \cdot \sin\bar{\theta}$

$$\Rightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -d(\sin\bar{\theta}) \cdot w$$

$$-d(\sin\bar{\theta})\, w = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

$$= -mgd\sin\bar{\theta} = I_{\Delta} \cdot \bar{\alpha}$$

وإشارة الناقص (-) تدل على أن: $(\sin\bar{\theta})$, $(\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta})$ في إشارتين متعاكستين دوماً.

$$\bar{\alpha} = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \cdot \sin\bar{\theta}$$

$$\Rightarrow \boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \sin\bar{\theta}} \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية ولكن حلها غير جيبي لأنها تحوي $(\sin\bar{\theta})$ بدلاً من $\bar{\theta}$ فالنواس الثقلي في الحالة العامة يؤلف حركة غير جيبية

③ حالة السعات الزاوية الصغيرة:

س: متى يشكل النواس الثقلي حركة جيبية دورانية ؟ ...

في حالة السعات الزاوية الصغيرة أي عندما: $(\theta_{max} \leq 0{,}24\,rad)$ أي: $\theta_{max} \leq 14°$

عندئذٍ فإنَّ $\sin\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}$

نعوض في ① :

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{mgd}{I_{\Delta}} \cdot \bar{\theta}} \quad (2)$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})$$

لنوجد مشتقاتها مرتين بالنسبة للزمن:

$$\boxed{(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0 \theta_{max} \sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\omega_0^2 \bar{\theta} \Rightarrow$$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2 \bar{\theta}} \quad (3)$$

وبالمطابقة بين ② و ③ نجد أن:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{mgd}{I_\Delta}} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} > 0$$

وهذا محقق لأن I_Δ, d, g, m مقادير موجبة دوماً فنستنتج أن حركة اهتزاز الجسم هي في حالة السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية.

نحسب نبضها الخاص من العلاقة:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I_\Delta}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

فالدور الخاص:

$$\boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}} \quad (5)$$

حيث:

T_0: الدور الخاص ويقدر بـ (s)

I_Δ: عزم عطالة الجملة بالنسبة إلى محور الدوران ويقدر بـ $(kg \cdot m^2)$

m: كتلة الجملة ويقدر بـ (kg)

d: البعد بين محور الدوران ومركز عطالة الجملة ويقدر بـ (m)

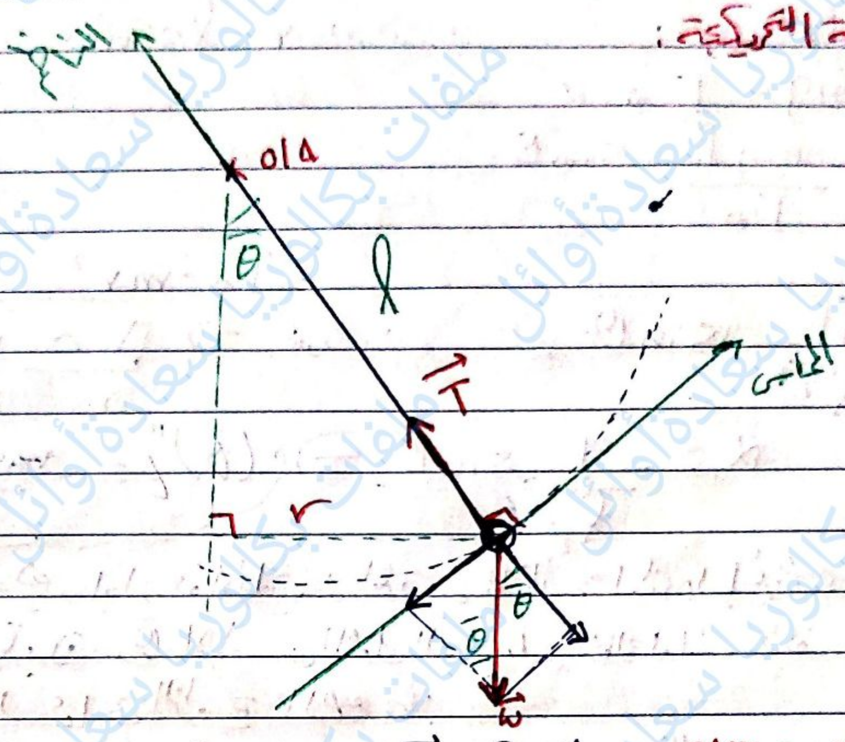
ثانياً: البسيط:

① تعريفه: هام جداً

a) نظرياً: نقطة مادية تهتز بتأثير ثقلها على بعد ثابت (l) من محور أفقي ثابت

b) عملياً: كرة صغيرة كتلتها m وأبعادها النسبية صغيرة معلقة بخيط مهمل الكتلة لا يمتط طوله l كبير بالنسبة إلى نصف قطر الكرة.

② الدراسة التحريكية:



القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{w}$: ثقل الكرة

$\vec{T}$: توتر الخيط

ط1: تطبيق قانون نيوتن الثاني:

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow$

$\vec{w} + \vec{T} = m\vec{a}$ «نسقط على محور مماسي بجهة إزاحة الكرة»

$-w\sin\bar{\theta} + 0 = m\bar{a}_t$

$-\cancel{m}g\sin\bar{\theta} = \cancel{m}\bar{a}_t \Rightarrow \bar{a}_t = -g\sin\bar{\theta}$

ولكن: $\bar{a}_t = \bar{\alpha} \cdot r = \bar{\alpha} \cdot l$ نعوض:

$\bar{\alpha} \cdot l = -g\sin\bar{\theta} \Rightarrow \bar{\alpha} = \frac{-g}{l} \cdot \sin\bar{\theta}$

$\boxed{(\bar{\theta})''_t = \frac{-g}{l}\sin\bar{\theta}}$ (I)

ط2: تطبيق نظرية التسارع الزاوي:

$\sum \bar{\Gamma}_{/\Delta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$

$\bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} + \bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = I_\Delta \cdot \bar{\alpha}$

ولكن: $\bar{\Gamma}_{\vec{T}/\Delta} = 0$

لأن حامل $\vec{T}$ يلاقي محور الدوران Δ

$\Rightarrow \bar{\Gamma}_{\vec{w}/\Delta} = -r \cdot w$

SABBAGH STATIONERY

حيث: $r = l\sin\bar{\theta}$ نعوض:

$$-l(\sin\bar{\theta}).mg = I_\Delta.\bar{\alpha}$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\frac{mgl}{I_\Delta}.\sin\bar{\theta}$$

ولكن: $I_\Delta = mr^2$ نأخذ: $\Rightarrow \boxed{I_\Delta = ml^2}$

$$\bar{\alpha} = -\frac{\cancel{m}g\cancel{l}}{\cancel{m}l^{\cancel{2}}}.\sin\bar{\theta}$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\frac{g}{l}.\sin\bar{\theta} \Rightarrow (\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}.\sin\bar{\theta}$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية لكن حلها غير جيبي لأنها تحوي $(\sin\bar{\theta})$ بدلاً من $\bar{\theta}$ فالنواس الثقلي البسيط في الحالة العامة يؤلف حركة غير جيبية

③ حالة السعات الزاوية الصغيرة:

أي من أجل $\theta_{max} \leq 0,24\,rad$ أو $\theta_{max} < 14°$ عندها: $\sin\bar{\theta} \simeq \bar{\theta}$

نعوض في ①:

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = -\frac{g}{l}.\bar{\theta}} \quad ②$$

وهي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية تقبل حلاً جيبياً من الشكل:

$$\boxed{\bar{\theta} = \theta_{max}\cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

نشتقها مرتين بالنسبة للزمن:

$$\boxed{(\bar{\theta})'_t = \bar{\omega} = -\omega_0\theta_{max}\sin(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

$$\boxed{(\bar{\theta})''_t = \bar{\alpha} = -\omega_0^2\theta_{max}\cos(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha} = -\omega_0^2\bar{\theta} \Rightarrow \boxed{(\bar{\theta})''_t = -\omega_0^2\bar{\theta}} \quad ③$$

بالمطابقة بين ② و ③ نجد أن:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} > 0$$

وهذا محقق لأن المقدارين g, l موجبان دوماً فنستنتج أن حركة الهزاز النواس البسيط في حالة السعات الزاوية الصغيرة هي حركة جيبية دورانية.

يعطى التابع الزمني للمطال الزاوي بشكله العام بالعلاقة:

$$\boxed{\bar{\theta} = \theta_{max} \cos(\omega_0 t + \bar{\varphi})}$$

ويحسب نبضه الخاص من العلاقة:

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{g}{\ell}} \quad (4)$$

* النبض الخاص:

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

* والدور الخاص:

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \quad (5)$$

هام ملاحظة: يمكن التوصل إلى علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي البسيط انطلاقاً من علاقة الدور الخاص للنواس الثقلي المركب:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}}$$

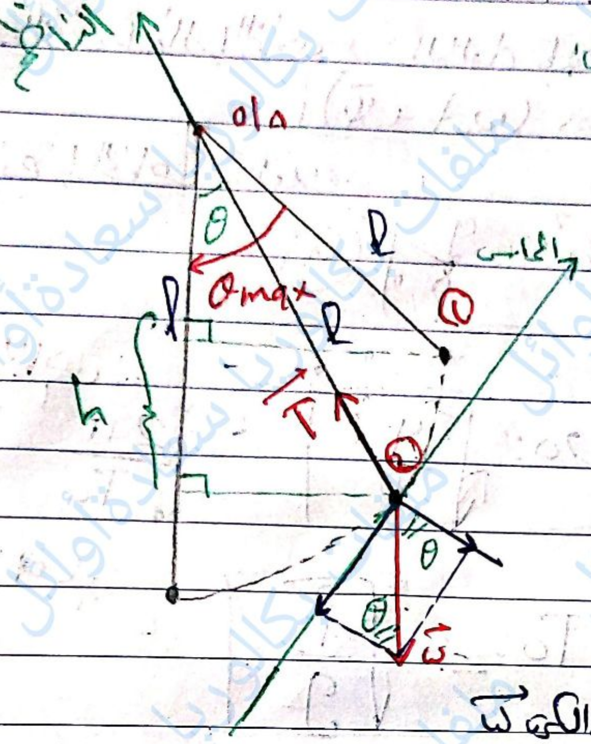
وذلك بتبديل: $d = \ell \quad I_\Delta = m\ell^2$

$$\Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{mg\ell}} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}} \quad (5)$$

حـ) ماخواص الدور؟

1) يتناسب طرداً مع $\sqrt{\ell}$
2) يتناسب عكساً مع $\sqrt{g}$
3) لا يتعلق ب (m) ولا بنوع مادته.
4) التواترات صغيرة السعة الزاوية متواقتة فيما بينها

③ حساب السرعة في وضع معين:



القوى الخارجية المؤثرة: ثقل الكرة $\vec{\omega}$ / توتر الخيط $\vec{T}$

نطبق نظرية الطاقة الحركية في حركة الكرة بين وضعين:

① عندما يصنع الخيط زاوية مع الشاقول θ_{max}

② عندما يصنع الخيط زاوية مع الشاقول θ.

$$\Delta E_k = \sum W_{\vec{F}} \quad ① \to ②$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W_{\vec{\omega}} + W_{\vec{T}}$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v^2 - 0 = \cancel{m}gh + 0$$ ⟵ لأن عمل $\vec{T}$ معدوم لأنه عمودي على الانتقال في كل لحظة

لكن: $h = l\cos\theta - l\cos\theta_{max}$

$$h = l(\cos\theta - \cos\theta_{max}) \Rightarrow$$

$$\boxed{v^2 = 2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_{max})}$$

حالة خاصة: عندما تكون $\theta = 0$ «وضع المرور بالشاقول» وعندئذٍ: $\cos\theta = 1$

$$\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gl(1 - \cos\theta_{max})}}$$

ب) عبارة T بدلالة m ، a_c أو a_t في موضع معين:

أ) القوى الخارجية المؤثرة: $\vec{\omega}$ ثقل الكرة ، $\vec{T}$ توتر الخيط

ج) نطبق العلاقة الأساسية في التحريك الانسحابي: $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

$$\boxed{\vec{\omega} + \vec{T} = m\vec{a}} \quad (1)$$

د) نسقط الإسقاط المناسب:

من أجل: T ، m ، a_c ؛ نسقط على محور ناظمي

a_t : نسقط على محور مماسي

حساب T: نسقط (1) على محور ناظمي:

$$-\omega\cos\theta + T = m a_c$$

$$\Rightarrow -mg\cos\theta + T = m\frac{v^2}{\ell} \Rightarrow T = mg\cos\theta + m\frac{v^2}{\ell}$$

نعوض قيمة v^2 في:

$$T = mg\cos\theta + \frac{m}{\cancel{\ell}}\left(2g\cancel{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_{max})\right)$$

$$\Rightarrow T = mg\cos\theta + 2mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$\Rightarrow T = 3mg\cos\theta - 2mg\cos\theta_{max}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_{max})}$$

ملاحظة: عندما تكون $\theta = 0$ (وضع المرور بالشاقول) فإن: $\cos\theta = 1$ ، نعوض:

$$\boxed{T = mg(3 - 2\cos\theta_{max})}$$

د) الدراسة التجريبية:

(علاقة T_0 بـ θ_{max}):

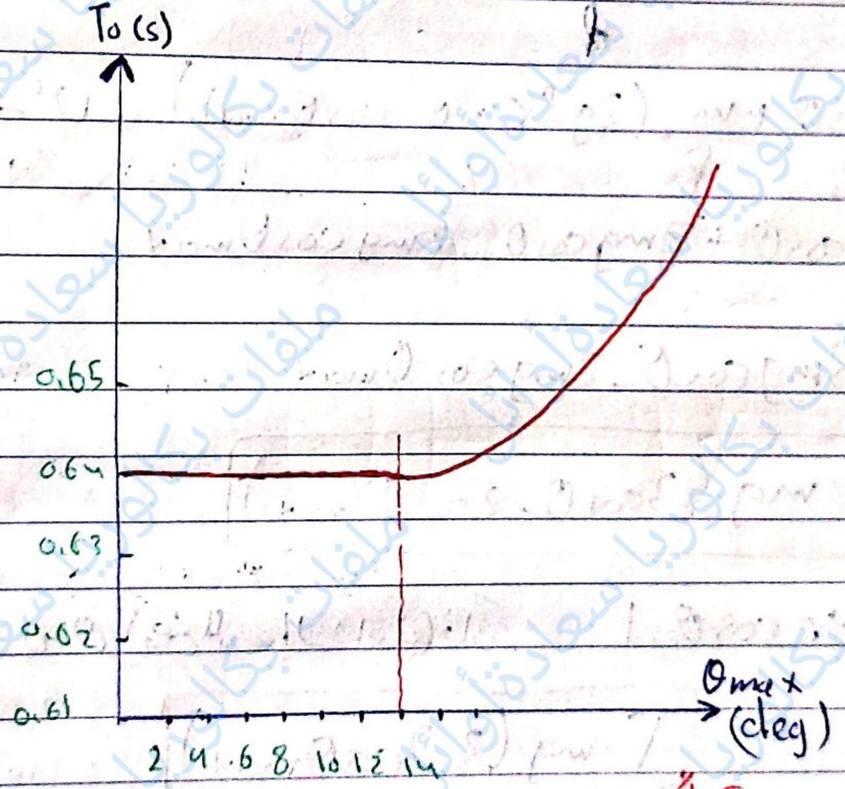
a) نعطي لـ (θ_{max}) قيماً متعددة متزايدة اعتباراً من (2°).

b) ثم نقيس (t) زمن ١٠ نوسات متتالية

c) ثم نحسب الدور الخاص ($T_0 = \frac{t}{10}$) في كل مرة

d) فنجد أن النوسات صغيرة السعة الزاوية متواقتة فيما بينها بخلاف النوسات كبيرة السعة الزاوية

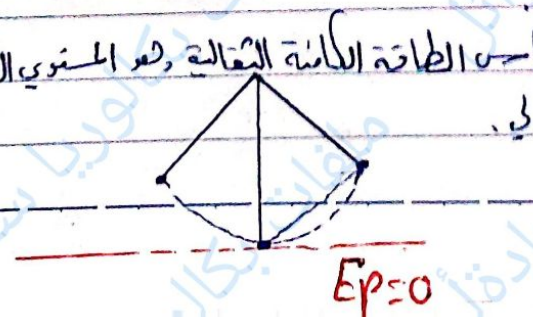
e) ثم نرسم المنحني البياني: $\boxed{T_0 = f(\theta_{max})}$



هـ) الطاقة الميكانيكية:

a) وهي تساوي $\boxed{E = E_p + E_k}$ وهي ثابتة لجملة معينة ولحركة معينة وذلك بإهمال القوى المبددة للطاقة.

b) ونتخذ مستوياً مرجعياً لقياس الطاقة الكامنة الثقالية وهو المستوى الأفقي المار من مركز عطالة الكرة وهي في وضع توازنها الشاقولي.



ملاحظات:

س: ما نص نظرية هايغنز؟

لحساب عزم عطالة جسم بالنسبة الى محور دوران لا يمر من مركز عطالة هذا الجسم، ونحقق الشرطين التاليين:

a) أن يكون للجسم كتلة (أي كتلة غير مهملة)

b) ألا يمر محور الدوران من مركز عطالة هذا الجسم

$$\boxed{I_{\Delta/O} = I_{\Delta/C} + md^2}$$

س: ما هو النواس الذي يدق الثانية؟

هو الذي دوره الخاص يساوي 2(s)

س: إذا لم تكن السعة الزاوية صغيرة فكيف نحسب الدور الخاص؟

نطبق العلاقة:

$$\boxed{T_0' \approx T_0\left(1+\frac{\theta_{max}^2}{16}\right)}$$

T_0': الدور الخاص في حالة السعة الزاوية الكبيرة

θ_{max}: rad

T_0: الدور الخاص في حالة السعات الزاوية الصغيرة

س: ما هو النواس البسيط الموافق لنواس مركب؟

هو الذي يساويه دوراً أي أن لهما نفس الدور

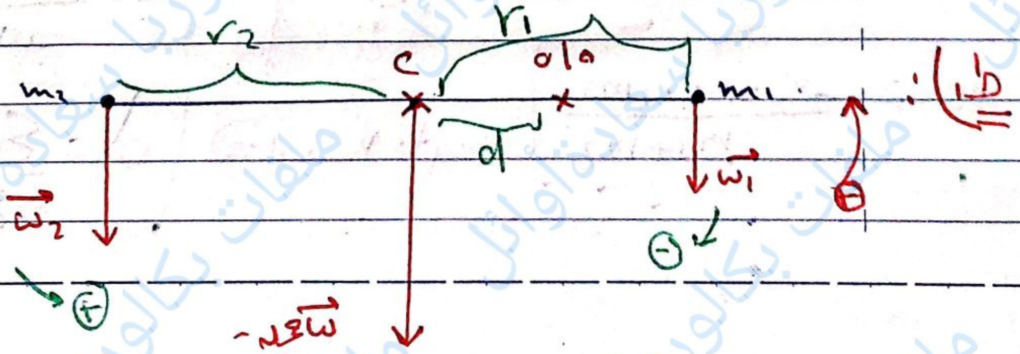
$T_{0\,مركب} = T_{0\,بسيط}$

$$2\pi\sqrt{\frac{l'}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I_\Delta}{mgd}} \xrightarrow{نربع} \boxed{l' = \frac{I_\Delta}{md}}$$

س: كيف نحسب d في النواس المركب؟

نساق محصلة الكتلة

حل:



تتوازن الجملة حول محور دوران عمودي مار من مركز ثقلها وشرط التوازن الدوراني:

$$\sum \overline{\Gamma}_{\Delta/c} = 0$$

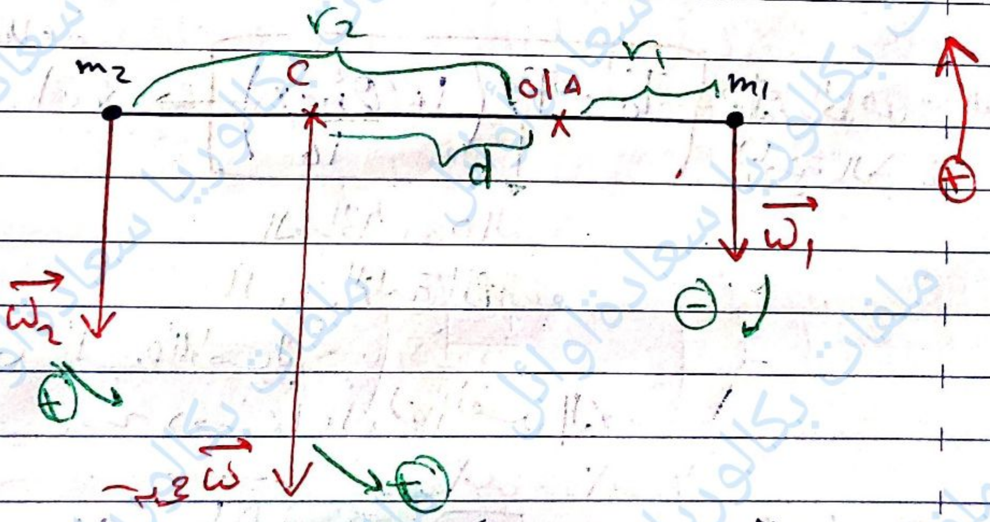
$$\Rightarrow \overline{\Gamma}_{\overline{w}_1/\Delta c} + \overline{\Gamma}_{\overline{w}_2/\Delta c} = 0$$

$$-r_1 w_1 + r_2 w_2 = 0 \Rightarrow r_1 w_1 = r_2 w_2$$

$$r_1 m_1 \cancel{g} = r_2 m_2 \cancel{g}$$

$$\Rightarrow \boxed{r_1 m_1 = r_2 m_2}$$

طح) حساب مركز الثقل:



إن عزم المحصلة يساوي محصلة العزوم

$$+d\,w_{مجموع} = -r_1 w_1 + r_2 w_2$$

$$+d\,\Sigma m \cancel{g} = -r_1 m_1 \cancel{g} + r_2 m_2 \cancel{g} \Rightarrow d = \frac{-r_1 m_1 + r_2 m_2}{\Sigma m}$$

$$\boxed{d = \frac{-r m_1 + r_2 m_2}{m_1 + m_2}}$$

بشكل عام $\Rightarrow$

$$\boxed{d = \frac{\Sigma \overline{rm}}{\Sigma m}}$$