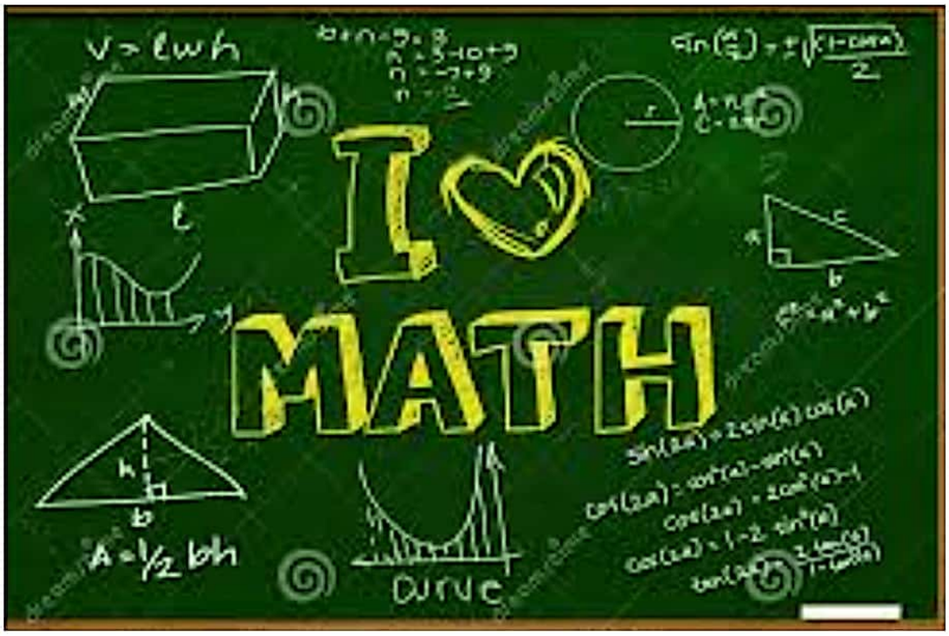
اوراق الجلسة الامتحانية الخاصة بقسم التحليل

إعداد:

ا.امجد ذبيان

و

ا.خالد شاكر



0992932502

1) $f(x) = e^{-x} + x - 2$

[1] أثبت أن المستقيم $y = x - 2$ مقارب مائل في جوار $+\infty$.

[2] ادرس تغيرات التابع.

[3] أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حلان.

[4] ارسم C

[5] احسب $S(t)$ مساحة السطح المحصور بين C والمستقيم Δ والمستقيمين $x = 0$ و $x = t$ حيث $t > 0$ واستنتج $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$

---

2) $f(x) = \frac{2e^{x}}{x^2+1}$ $\quad \mathbb{R}$

[1] ادرس تغيرات التابع

[2] اكتب معادلة المماس T في النقطة $x = 1$

[3] ادرس الوضع النسبي بين C, T

[4] ارسم C, T

$f(x) = 2x + 1 - e^{x}$ $\quad \mathbb{R}$

[1] أثبت أن Δ مقارب مائل في جوار $-\infty$ $\quad \Delta: y = 2x+1$

[2] ادرس تغيرات التابع f

[3] أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حلان أحدهما صفر والثاني α وأثبت أن $1 < \alpha < 2$

[4] ارسم C, Δ

[5] احسب مساحة السطح المحصور بين Δ, C والمستقيمين $x = \ln 2$ ، $x = 0$

$f(x) = (1-x)e^{x}$ $\quad \mathbb{R}$ $\quad f(x) = e^{x} - xe^{x}$

[1] ادرس تغيرات . [2] ارسم C

[3] استنتج C الخط البياني للتابع $f(x) = (x-1)e^{x}$

[4] احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحوري الإحداثيات.

---

5) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad]0, +\infty[$

[1] ادرس تغيرات [2] ارسم C

[3] استنتج الخط البياني للتابع $f(x) = \frac{1}{x}\ln x$

[4] احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور $x'x$ والمستقيم $x = e$.

---

6) $f(x) = x - \ln x$ $\quad]0, +\infty[$

[1] ادرس تغيرات [2] ارسم C

[3] استنتج الخط البياني للتابع $f(x) = -x - \ln\frac{1}{x}$

[4] احسب مساحة السطح المحصور بين C و $x'x$ والمستقيمين $x = e$ ، $x = 1$

---

7) $C: f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x-4}\right)$

$]-\infty, 2[\cup]4, +\infty[$

[1] أثبت أن النقطة $A(3, 0)$ مركز تناظر لـ C

[2] ادرس تغيرات التابع على المجال $]4, +\infty[$

[3] ارسم C على مجموعة تعريفه .

[4] أثبت أن المعادلة $f(x) = 1$ لها حل وحيد

---

8) $f(x) = 2 - x + \ln\left(\frac{x+1}{x-3}\right)$ $\quad]3, +\infty[$

$d: y = 2 - x$

[1] أثبت أن d مقارب مائل في جوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

[2] ادرس تغيرات - [3] أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد وليكن α وأثبت أن $3 < \alpha < 4$

[4] ارسم C, d

---

9) $f(x) = 2x - 2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ $\quad]0, +\infty[$

[1] أثبت أن Δ مقارب لـ C وادرس وضعه النسبي.

[2] ادرس تغيرات التابع .

[3] أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ لها حل وحيد α وأثبت أن $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1[$

[4] ارسم C, d .

10) $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ $]0,1[\cup]1,+\infty[$

1 ادرس تغيرات التابع

2 ارسم C.

11) ليكن C الخط البياني المعرف على $]0,+\infty[$

$f(x)=\frac{x+\ln x}{x}$

1 ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

2 أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ جذراً وحيداً $\alpha\in(1,\dots)$

3 ارسم C

4 احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور $x'x$ و $x=1$ ، $x=e$

5 استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x)=1+\frac{1}{x}\ln\frac{1}{x}$

12) $f(x)=\sqrt{2+x}$ $]2,+\infty[$

1 ادرس تغيرات $]-2,+\infty[$ وارسمه

2 احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور $x'x$ والمستقيمين $x=2$ ، $x=0$

3 لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ معرفة بالعلاقة التراجعية

$U_{n+1}=\sqrt{2+U_n}$ $U_0=1$

a أثبت أن $U_n<U_{n+1}<2$

b - أثبت أنها متقاربة واحسب نهاية المتتالية

13) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$

$f(x)=1+\frac{2\ln x}{x}$

احسب نهاية التابع f عند الصفر و$+\infty$ واستنتج ما له من مقاربات توازي المحورين ثم ادرس وضع النسبي لـ C مع مقاربه الأفقي Δ

ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ حلاً وحيداً على المجال $]\frac{1}{2},1[$

4 باستخدام التقريب التآلفي احسب القيمة التقريبية لـ $f(1,1)$

5 ارسم C ، Δ

6 استنتج رسم الخط البياني للتابع f_1 المعرف بالعلاقة $f_1(x)=\frac{2\ln x}{x}$

7 ناقش بيانياً وحسب قيم الوسيط $\lambda\in\mathbb{R}$ عدد الحلول للمعادلة $f(x)=\lambda$

14) $f(x)=\frac{2x}{x+1}$ $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

1 أوجد النهاية عند $+\infty$

2 أعط عدداً حقيقياً A ويحقق $x>A$ لكي يكون $f(x)\in]1.9,2.1[$

3 احسب $\int_{2}^{4} f(x)\,dx$

15) نعرف لدينا التابع $f(x)=\ln(e^x+1)$ على $\mathbb{R}$

1 احسب $f(0)$ ، $f(x)$ ، $f(-x)$ واستنتج $\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(e^x+1)-\ln(2)}{x}\right]$

16) $f(x)=x+3-\frac{1}{x^2}$ معرف على $\mathbb{R}^*$

1 أثبت أن $\Delta: y=x+3$ مقارب بجوار $+\infty$ و ادرس وضعه النسبي.

17) $f(x)=x+1+\frac{\ln x}{x}$

المعرف على المجال $]0,+\infty[$

1 أثبت أن $\Delta: y=x+1$ مقارب مائل بجوار $+\infty$ وادرس وضعه النسبي

18) لتكن الدالة f المعرفة على المجال $[0,7]$ بـ
$f(x) = 2x + E(x)$ ... [illegible]

ارسم C الخط البياني على المجال $[0,7]$

أوجد النهاية $\lim_{x\to+\infty} \frac{E(x)}{x^2+1}$

نعرف التابع $g(x) = 2x + \frac{E(x)}{x^2+1}$

أثبت أن $y=2x$ مقارب مائل ... [illegible] $+\infty$

---

19) لدينا التابع f المعرف وفق: $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

1) أوجد $f(1)$، $f'(x)$، $f'(1)$ ثم استنتج
$$\lim_{x\to1}\left(\frac{e^{\sqrt{x}}-e}{x-1}\right)$$

أوجد النهاية التالية:
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\sin x - \sin x\cos 2x}{x^3}\right]$$

---

21) احسب النهاية التالية
$$\lim_{x\to0}\left[\frac{e^{x}-e^{\sin x}}{\sin 2x}\right]$$

---

22) ليكن التابع المعرف على $\mathbb{R}$
$g(x) = \sqrt{x^2+x+2}$

1) احسب $g(1)$، $g'(x)$، $g'(1)$

2) استنتج
$$\lim_{x\to1}\left[\frac{\sqrt{x^2+x+2}-2}{x-1}\right]$$

---

23) نفرض أن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$
$$f(x)\begin{cases}\dfrac{\cos 2x - 1}{\sqrt{x^2+1}-1} & ; x\neq0\\[2mm] m & ; x=0\end{cases}$$
ما قيمة m التي تجعل f مستمراً على $\mathbb{R}$

---

24) ليكن التابع f ... [illegible]
$f(x) = \frac{[illegible]}{x-1}$
... [illegible]
... [illegible] f ... [illegible]
$x=1$ ...

---

25) لتكن التابع f المعرف على $[1,+\infty[$ وفق
$f(x) = x + \sqrt{x-1} - 4$

1) ادرس تغيرات التابع f وأثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً

2) سمّ هذا الحل الوحيد α أثبت أن $\alpha\in]2,3[$

3) احسب قيمة تقريبية لـ ... [illegible]

4) ادرس قابلية الاشتقاق عند (1) و ... [illegible] وأول هندسياً النتيجة.

---

26) $(U_n)_{n\geq0}$ ، $(V_n)_{n\geq0}$
$U_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

~~[illegible]~~

$V_n = U_n + \frac{1}{n}$ أثبت أن U_n و V_n متجاورتان

---

27) $V_n = \frac{-2}{n+1}$ ، $U_n = \frac{2}{n^2-5n+5}$
أثبت أن $(U_n)_{n\geq1}$ ، $(V_n)_{n\geq1}$ متجاورتان

---

28) $U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}}$ ، $U_0 = 7$

1) احسب U_1 ثم أثبت $U_{n+1} < U_n$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أنها متقاربة.

---

29) نفرض لدينا المتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ المعطاة بالشكل التدريجي
$U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$ ، $U_0 = \frac{3}{2}$

1) أثبت أن $1 < U_n < 2$

2) أثبت أن U_n متناقصة واستنتج أنها متقاربة واحسب النهاية.

30) $(U_n)_{n\geq 0}$ الموصوفة $U_n=\frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$

1) أثبت أن $U_n \leq 3$ لكل n عدد طبيعي

2?) $U_n=\frac{1}{1}+\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\dots+\frac{n}{3^n}$ ، $n\geq 1$

1) أثبت بالتراجع من أجل العدد n أنه $n\leq 2^n$ محققا لكل العدد الطبيعي n

2) استنتج حصرا راجحا للمتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ بالاستفادة من التراجح

$$U_n=\frac{1}{1}+\frac{2}{3^1}+\frac{3}{3^2}+\dots+\frac{n}{3^n}$$

3) أثبت الأطرادية ثم استنتج التقارب.

$$U_{n+1}-U_n=\frac{n+1}{3^{n+1}}>0$$

---

31) أثبت أن $3^n\geq (n+1)^2$ أيا كان العدد الطبيعي $n\geq 7$

أثبت بالتدريج على n أنه $n\geq 3$

32) المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $U_n=\frac{n^3}{n!}$

1) أثبت أن $n!\geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ أيا كان $n\geq 4$

2) استنتج نهاية $(U_n)_{n\geq 1}$

بيّنا أي المتتاليات $(U_n)_{n\geq 0}$ الآتية مطردة

1) $U_n=\frac{n+1}{n+2}$; لنرمز التابع معرف بوجه هنا على $[0,+\infty[$

$f(x)=\frac{x+1}{x+2}$

2) $U_n=1+\frac{1}{n^2}$

3) $U_n=\frac{n^2}{n!}$

4) $U_n=1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^n}$

---

33) لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ $U_n=\frac{3^n}{2^{n+1}}$

1) احسب كلا من U_0 ، U_1 ، U_2

2) أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ هندسية

3) احسب بدلالة n المجموع $S=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$

أثبت أن المتتاليتين $(X_n)_{n\geq 1}$ ، $(Y_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان

لتكن المتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$ المعرفة

$$\begin{cases} U_0=e^3 \\ U_{n+1}=e\sqrt{U_n} \end{cases}$$

متتالية معرفة $(V_n)_{n\geq 0}$ وفق $V_n=\ln(U_n)$

1) أثبت أن V_n هندسية عين أساسها q ، V_0

2) اكتب V_n بدلالة n ثم استنتج U_n بدلالة n

3) أثبت أن $\lim_{n\to+\infty}U_n=e^2$

المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة على كل عدد طبيعي $n\geq 1$

$$U_n=\frac{n}{n^2+1}+\frac{n}{n^2+2}+\dots+\frac{n}{n^2+n}$$

1) أثبت أن $\frac{n^2}{n^2+n}\leq U_n\leq\frac{n^2}{n^2+1}$ أيا كان $n\geq 1$

2) استنتج تقارب المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ ما نهايتها؟

$(U_n)_{n\geq 1}$ معرفة عند كل $n\geq 1$ وفق

$$U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}$$

1) أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $\frac{1}{n!}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$

2) استنتج أن العدد (3) راجح للمتتالية $(U_n)_{n\geq 0}$

3) أثبت أن $(U_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

لتكن عند كل عدد طبيعي n $U_n=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

1) أوجد عددان حقيقيان a و b ، عند كل عدد طبيعي n:

$$U_n=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right]$$

لتكن $S_n=U_0+U_1+\dots+U_n$ عند كل n عدد طبيعي

عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

$$S_n=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$$

تمارين

[1] $I = \int_{0}^{2} x\,|x-1|\,dx$

[2] $S = \int_{1}^{2} \frac{2}{x(x+1)}\,dx$

مبرهنات

$f(x) = \frac{\ln(x)-1}{x^2}$

بين أن $F(x) = \frac{-\ln(x)}{x}$ تابع أصلي للتابع f

$I = \int_{0}^{\pi} (x-1)\cos x \cdot dx$

---

x	$-\infty$		0		‖		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	3	↗	5

[1] أوجد مجموعة تعريف التابع f أو أوجد D_f .

[2] عين القيم الحدية للتابع f .

[3] ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

[4] أوجد نهايات التابع عند أطراف مجموعة التعريف واستنتج كل مقارب لخطه البياني .

[5] اكتب معادلتي المماسين للخط البياني للتابع f في نقطة فاصلتها

---

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	0	↗	4	↗	6

[1] جد $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

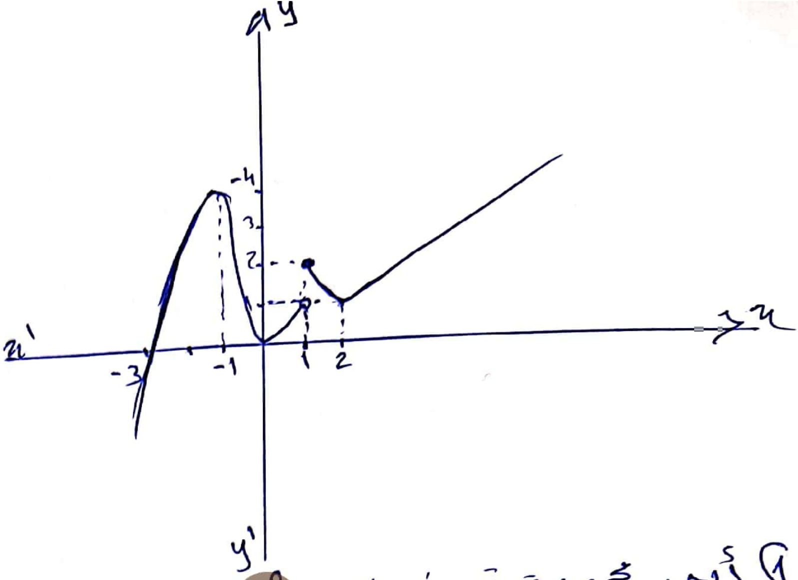
[2] اذكر القيمة الحدية للتابع وبين نوعها

[3] هل $f(5)=4$ قيمة حدية للتابع

[4] اكتب معادلة كل مقارب أفقي للخط البياني .

[5] اكتب مجموعة تعريف التابع g حيث

$g(x) = \ln(f(x))$



1) أوجد مجموعة تعريف التابع f ومستقره العملي

بالإسقاط للشكل على المحور $x'x$ $D=\mathbb{R}$

بالإسقاط على محور $y'y$ نجد $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

2) أوجد $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$, $f'(2)$, $f'(-1)$, $\lim_{x\to 1^-} f(x)$

$f(-3)=0$ $\quad f(0)=0 \quad f(1)=2$

$f'(2)=0$ لأن المماس أفقي

$f'(-1)=0$ لأنها قيمة محلية كبرى فالمماس عندها يكون أفقي ميله معدوم

$$\lim_{x\to 1^<} f(x)=1$$

3) أوجد حلول المتراجحة $f(x)>0$

$x\in\,]-3,\infty[$

مسألة: ليكن f معرف على $\mathbb{R}$ وفق $f(x)=2e^x-x-2$

1- اثبات $d: y=-x-2$ مقارب مائل لـ C وحدد وضعهم النسبي

2- تغيرات

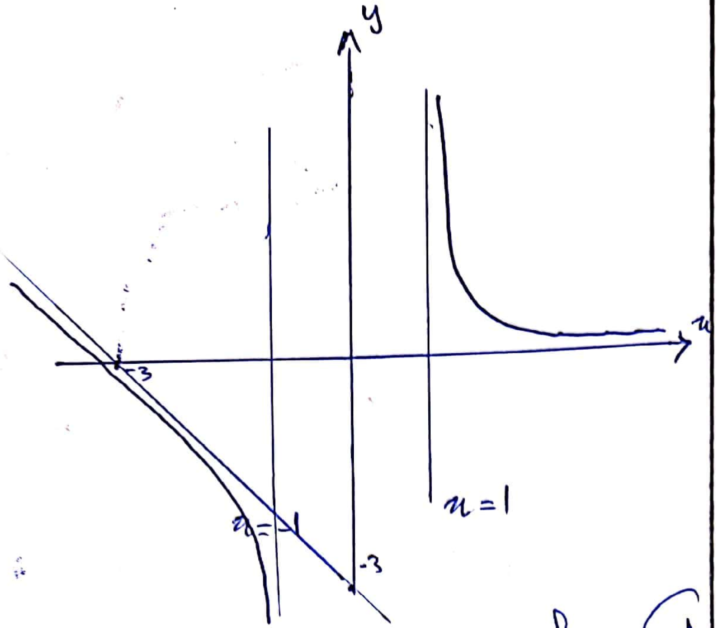
3- استنتج من الطلب السابق أن للمعادلة $f(x)=0$ جذرين أحدهما يساوي الصفر والآخر α، اثبات $-2<\alpha<-1$

4- ادرس اشارة $f(x)$ تبعاً لقيم x

5- ارسم، ثم احسب مساحة السطح المحصور بين C, d والمستقيمين $x=0$, $x=1$

حل 5:

$$S=\int_0^1 (f(x)-y_d)\,dx=\int_0^1 2e^x\,dx=[2e^x]_0^1$$
$$=2e-2$$



ليكن f التابع المعرف على $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,\infty[$ خطه البياني المرسوم في الشكل المجاور:

$y=-x-3$, $y=0$, $x=1$, $x=-1$ مستقيمات مقاربة لخط البيان C_f

احسب كلاً من:

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+x+3)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=-1$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=-\infty$$

(2) ما عدد حلول المعادلة $f(x)=0$

لـ $f(x)=0$ حل وحيد