بنك أسئلة التابع اللوغاريتمي

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة التابع اللوغاريتمي

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ زياد داوود سلمية 0936834286

م . مروان بجور حمص 0930170828

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

مروان بجور	أحمد الشيخ عيسى	زياد داوود	وسيم فاطمة
حمص 0930170828	الرقة 0988024183	سلمية 0936834268	اللاذقية 0936497038

التمرين 1 :

احسب كلاً من النهايات التالية :

1. $f(x)=\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$ $\qquad a=0^+,+\infty$
2. $f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x}$ $\qquad a=+\infty$
3. $f(x)=x-x(\ln x)^2$ $\qquad a=0^+$
4. $f(x)=\ln x.\ln(x+1)$ $\qquad a=0^+$
5. $f(x)=\ln x.\ln(1-x)$ $\qquad a=0^+,1^-$

الحل :

$f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\ : D=]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{u\to0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0^+}x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$
$$=\lim_{x\to0^+}x\ln(x+1)-x\ln(x)=0-0=0$$

$f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{x}$ $\qquad a=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u}=0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1\Longrightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x+1}}{\frac{x}{x+1}}=\frac{0}{1}=0$$

$f(x)=x-x(\ln x)^2$ $\qquad a=0^+$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-x(\ln x)^2)=\lim_{x\to0^+}\left(x-\left(\sqrt{x}\ln x\right)^2\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x-\left(2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right)^2\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\sqrt{x}\ln\sqrt{x}=\lim_{u\to0^+}u\ln u=0\implies\lim_{x\to0^+}f(x)=0-0=0$$

$f(x)=\ln x.\ln(x+1)$ $\qquad a=0^+$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln x.\ln(x+1))=\lim_{x\to0^+}\left(x\ln x\ .\ \frac{\ln(x+1)}{x}\right)=0\times1=0$$

$f(x)=\ln x.\ln(1-x)$ $\qquad a=0^+,1^-$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(\ln x.\ln(1-x))=\lim_{x\to0^+}\left(-x\ln x\ .\ \frac{\ln(1-x)}{-x}\right)$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1-x)}{-x}=\lim_{u\to0^+}\frac{\ln(1+u)}{u}=1\Longrightarrow\lim_{x\to0^+}f(x)=0\times1=0$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}(\ln x.\ln(1-x))=\lim_{x\to1^-}\left(-\frac{\ln x}{(x-1)}.\left((1-x)\right)\ln(1-x)\right)=-1\times0=0$$

حيث : $\lim_{x\to1^-}\left(\left((1-x)\right)\ln(1-x)\right)=\lim_{u\to0}\left((u)\ln(u)\right)=0$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 2 :

حل المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0$ واستنتج حلول المتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$

الحل :

مجموعة تعريف المعادلة $]0, +\infty[$

$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 = 0 \Rightarrow (\ln x - 3)(\ln x + 1) = 0 \Rightarrow$
$\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$
$\ln x - 3 = 0 \Rightarrow \ln x = 3 \quad \Rightarrow x = e^3$
$(\ln x)^2 - 2\ln x - 3 \geq 0$

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
اشارة $(\ln x)^2 - 2\ln x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعة حلول المتراجحة $x \in \left]0, \frac{1}{e}\right] \cup [e^3, +\infty[$

التمرين 3 :

حل المعادلات و المتراجحات التالية :

1. $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$
2. $\frac{1}{2}\ln 2x = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$
3. $3\ln x > \ln(3x-2)$
4. $\ln(2-x) > 1$
5. $\log(x-1) = 2$

الحل :

1. $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

مجموعة تعريف المعادلة :

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2 \;, x + 4 > 0 \Rightarrow x > -4 \Rightarrow D =]-4, +\infty[\setminus \{2\}$
$\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2 \Rightarrow \ln|x-2|(x+4) = \ln 2^3 \Rightarrow$
$|x-2|(x+4) = 8 \Rightarrow$
$x < 2 \Rightarrow (x-2)(x+4) = -8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = -8 \Rightarrow$
$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,, x_2 = -2$
$x > 2 \Rightarrow (x-2)(x+4) = 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 8 \Rightarrow x^2 + 2x - 16 = 0 \Rightarrow$
$\Delta = 4 - 4 \times 1 \times (-16) = 68 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{17} \Rightarrow$

$x_3 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{17}}{2} = -1 + \sqrt{17} \quad , \quad x_4 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{17}}{2} = -1 - \sqrt{17}$ مرفوض

وبالتالي مجموعة حلول المعادلة $\{-2 \;,\; 0 \;,\; -1 + \sqrt{17}\}$

2. $\frac{1}{2}ln2x = ln(3-x) - ln\sqrt{x+1}$

$2x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x \in]0,+\infty[$
$3 - x > 0 \Rightarrow x < 3 \Rightarrow x \in]-\infty,3[$
$x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow x \in]-1,+\infty[$

وبالتالي مجموعة تعريف المعادلة هي $D =]0,3[$ **وحسب خواص اللوغاريتم :**

$\frac{1}{2}ln2x = ln(3-x) - \frac{1}{2}ln(x+1) \Rightarrow ln2x + ln(x+1) = 2ln(3-x) \Rightarrow$
$\ln 2x(x+1) = ln(3-x)^2 \Rightarrow 2x(x+1) = (3-x)^2 \Rightarrow$
$2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0 \Rightarrow (x+9)(x-1) = 0 \Rightarrow$

مقبول $x = 1 \in]0,3[$, **مرفوض** $x = -9 \notin]0,3[$ **ومنه مجموعة حلول المعادلة هي** $S = \{1\}$

طريقة ثانية :

$ln\sqrt{2x} + ln\sqrt{x+1} = ln(3-x) \Rightarrow ln\sqrt{2x^2+2x} = ln(3-x) \Rightarrow$
$\sqrt{2x^2+2x} = 3 - x \Rightarrow 2x^2 + 2x = 9 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 + 8x - 9 = 0$
مقبول $x = 1 \in]0,3[$, **مرفوض** $(x+9)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -9 \notin]0,3[$
وبالتالي مجموعة حلول المعادلة هي $S = \{1\}$

3. $3lnx > ln(3x-2)$

شرط الحل $3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3} \Rightarrow x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

$3lnx > ln(3x-2) \Rightarrow lnx^3 > ln(3x-2) \Rightarrow x^3 > 3x - 2 \Rightarrow$
$x^3 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x-2) > 0 \Rightarrow (x-1)^2(x+2) > 0 \Rightarrow$
$x \in]-2,1[\cup]1,+\infty[$ **و منه مجموعة حلول المتراجحة** $S = \left]\frac{2}{3},1\right[\cup]1,+\infty[$

4. $ln(2-x) > 1$

شرط الحل هو : $2 - x > 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x \in]-\infty,2[$ **وبالتالي :**

$2 - x > e \Rightarrow x < 2 - e \Rightarrow x \in]-\infty,2-e[$

ومجموعة حلول المتراجحة $S =]-\infty,2-e[$

5. $log(x-1) = 2$

شرط الحل $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in]1,+\infty[$

$log(x-1) = 2 \Rightarrow \frac{\ln(x-1)}{\ln 10} = 2 \Rightarrow \ln(x-1) = 2\ln 10 \Rightarrow$
$\ln(x-1) = \ln 10^2 \Rightarrow x - 1 = 100 \Rightarrow x = 101$

التمرين 4 : النموذج الوزاري الثالث

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة الآتية: $ln(x-1) = lnx - ln(x+1)$

الحل:

شرط وجود الحل هو $x - 1 > 0 \Rightarrow x > 1 \Rightarrow x \in]1, +\infty[$

$$ln(x-1) + ln(x+1) = lnx \Rightarrow ln(x^2-1) = lnx \Rightarrow x^2 - 1 = x \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad , \quad \Delta = 1 + 4 = 5 \Rightarrow$$

$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$ مقبول ، $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ مرفوض

التمرين 5 :

جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

$$\begin{aligned} (ln\,x)(ln\,y) &= -12 \\ ln(xy) &= 1 \end{aligned}$$

الحل :

$$x > 0 \; , \; y > 0 \;\Rightarrow\; \begin{aligned} (ln\,x)(ln\,y) &= -12 \\ ln(xy) &= 1 \end{aligned} \;\Rightarrow\; \begin{aligned} (ln\,x)(ln\,y) &= -12 \quad (1) \\ ln\,x + ln\,y &= 1 \quad (2) \end{aligned}$$

من (2) نجد $ln\,x + ln\,y = 1 \Rightarrow ln\,x = 1 - ln\,y$ وبالتالي نعوض في (2)

$$(1 - ln\,y)(ln\,y) = -12 \Rightarrow (ln\,y)^2 - ln\,y - 12 = 0 \Rightarrow$$

$$(ln\,y - 4)(ln\,y + 3) = 0$$

$$ln\,y = 4 \Rightarrow ln\,x = -3 \Rightarrow x = e^{-3}, y = e^4$$

$$ln\,y = -3 \Rightarrow ln\,x = 4 \Rightarrow x = e^4 \Rightarrow y = e^{-3}$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 6 :

اثبت صحة المتراجحة $ln(x-1) < 2lnx - 1$ **على مجموعة تعريفها**

الحل :

مجموعة تعريف المتراجحة $x-1>0 \Rightarrow x>1\ ,\ x>0 \Rightarrow x>1 \Rightarrow D =]1,+\infty[$

طريقة أولى :

$$ln(x-1) < 2lnx - 1 \Rightarrow ln(x-1) - 2lnx + 1 < 0$$

بفرض $f(x) = ln(x-1) - 2lnx + 1$ **المعرف على** $D =]1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{2}{x} = \frac{x-2x+2}{x(x-1)} = \frac{-x+2}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -x+2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(2) = 1 - 2ln2$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	$1-2ln2$	$\searrow$	

من جدول الاطراد : $f(x) \le 1 - 2ln2 < 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow ln(x-1) < 2lnx - 1$

طريقة ثانية :

$$ln(x-1) < 2lnx - 1 \Rightarrow ln(x-1) < lnx^2 - lne \Rightarrow ln(x-1) < ln\frac{x^2}{e} \Rightarrow$$

$$(x-1) < \frac{x^2}{e} \Rightarrow e(x-1) - x^2 < 0 \Rightarrow -x^2 + ex - e < 0 \Rightarrow x^2 - ex + e > 0$$

$$\Rightarrow$$

$$x^2 - ex + e = 0 \Rightarrow \Delta = e^2 - 4e < 0$$

x	1 $\qquad\qquad$ $+\infty$
اشارة $x^2 - ex + e$	$+$

وبالتالي : $x^2 - ex + e > 0 \Rightarrow ln(x-1) < 2lnx - 1$

التمرين 7 :

كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2 - 2x + ln(m+1) = 0$ جذران مختلفان

الحل :

المعادلة معرفة بشرط $m+1 > 0 \Rightarrow m > -1 \Rightarrow m \in]-1,+\infty[$

يكون لمعادلة $x^2 - 2x + ln(m+1) = 0$ **جذران مختلفان اذا كان** $\Delta > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4ln(m+1) = 4(1 - ln(m+1)) \Rightarrow$$

$$4(1 - ln(m+1)) > 0 \Rightarrow 1 - ln(m+1) > 0 \Rightarrow ln(m+1) < 1 \Rightarrow m+1 < e$$

$$m+1 < e \Rightarrow m < e-1 \Rightarrow m \in]-\infty, e-1[$$

وبالتالي ليكون للمعادلة جذران مختلفان $m \in]-\infty, e-1[\cap]-1,+\infty[=]-1, e-1[$

التمرين 8 :

ليكن لدينا التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ **وفق** $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ **والمطلوب :**

❶ أدرس قابلية الاشتقاق للتابع f عند الصفر

❷ استنتج معادلة المماس للخط عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

الحل :

$$g(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{x^2}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right)}{x} = \frac{x}{2}\left(lnx - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}xlnx - \frac{3}{4}x \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{2}xlnx - \frac{3}{4}x\right) = 0 - 0 = 0$$

وبالتالي التابع f قابل للاشتقاق عند الصفر و $f'(0) = 0$

وبالتالي المماس عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$ أفقي معادلته $y = f(0) = 0$

التمرين 9 : النموذج الوزاري الأول

ليكن f التابع المعرّف على $I =]-1,+\infty[$ وفق العلاقة $g(x) = ln(\sqrt{x}+1)$

❶ احسب كلاً من $g(1)$ و $g'(x)$ و $g'(1)$ واستنتج $\lim\limits_{x\to1}\frac{ln(\sqrt{x}+1)-ln\sqrt{2}}{x-1}$

❷ احسب نهاية التابع f المعرّف على $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ وفق: $f(x) = \frac{2x+sinx}{x-2}$ عند $+\infty$

الحل:

❶ $g(x) = ln(\sqrt{x}+1)$, $g(1) = ln\sqrt{2}$, $g'(x) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{x+1}$, $g'(1) = \frac{1}{4}$

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = g'(1) \quad \Rightarrow \lim_{x\to1}\frac{ln(\sqrt{x+1})-ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{4}$$

❷ $f(x) = \frac{2x+sinx}{x-2}$

نعلم أنّه مهما يكن $x \in \mathbb{R}\backslash\{2\}$ فإنّ $-1 \le sinx \le 1$ وبالتالي

$2x-1 \le 2x+sinx \le 2x+1$ وفي حال $x > 2$ فإنّ $x-2 > 0$ وبالتالي:

$$\frac{2x-1}{x-2} \le \frac{2x+sinx}{x-2} \le \frac{2x+1}{x-2}$$

وبما أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x-2} = 2$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+1}{x-2} = 2$

فحسب مبرهنة الإحاطة يكون : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x+sinx}{x-2} = 2$

التمرين 10 : النموذج الوزاري الثاني 2020

ليكن التابع f المعرف على $[0,+\infty[$ والمعطى بالعلاقة $f(x) = \sqrt{x}ln(1+x)$.

❶ أثبت أن f اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف f'.

❷ جد $f'(x)$ على $[0,+\infty[$.

❸ استنتج مشتق التابع g المعرف على المجال $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ وفق $g(x) = \sqrt{\cos x}\, ln(1+\cos x)$

الحل :

$$t(x) = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}ln(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x\to0^+}t(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\left(\frac{ln(1+x)}{x}\right)\right) = 0\times1 = 0$$

وبالتالي التابع f اشتقاقي عند الصفر و $f'(0) = 0$ بالتالي مجموعة تعريف f' هي $[0,+\infty[$

$$f'(x) = \begin{cases}\frac{ln(1+x)}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x} = \frac{(1+x)(ln(1+x))+2x}{2\sqrt{x}(1+x)} & : x > 0\\ 0 & : x = 0\end{cases}$$

$$g(x) = \sqrt{\cos x}\, ln(1+\cos x) = f(\cos x)$$

$$g'(x) = f'(\cos x)\times(-\sin x)$$

$$= \frac{(-\sin x)\left((1+\cos x)(ln(1+\cos x)) + 2\cos x\right)}{2\sqrt{\cos x}\,(1+\cos x)}$$

التمرين 11 : دورة 2019 الأولى

ليكن التابع f المعرف على $]e^{-1},+\infty[$ وفق العلاقة : $f(x)=\frac{2+lnx}{1+lnx}$

❶ جد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط عدداً حقيقاً A يحقق الشرط :

إذا كان $x>A$ كان $f(x)$ في المجال $]0.9,1.1[$

❷ أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(f(x))$

الحل

حالة عدم تعيين من الشكل $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\frac{+\infty}{+\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{lnx(\frac{2}{lnx}+1)}{lnx(\frac{1}{lnx}+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{2}{lnx}+1)}{(\frac{1}{lnx}+1)}=1$$

$$|f(x)-1|<0.1 \Rightarrow \left|\frac{2+lnx}{1+lnx}-1\right|<0.1 \Rightarrow \left|\frac{1}{1+lnx}\right|<0.1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+lnx}<\frac{1}{10} \Rightarrow 1+lnx>10 \Rightarrow lnx>9 \Rightarrow x>e^9$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f\big(f(x)\big)=\lim_{x\to1} f(x)=2$$

التمرين 12 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-4+ln(\frac{x}{x+1})$

❶ أدرس تغيرات f ونظم جدولا بها

❷ أثبت ان المستقيم d الذي معادلته $y=x-4$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

❸ ادرس الوضع النسبي للخط البياني C و مقاربه d

الحل :

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-4+ln(\frac{x}{x+1})\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-4+ln(\frac{x}{x+1})\right)=+\infty$

$$f(x)=x-4+ln(x)-ln(x+1) \Rightarrow f'(x)=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1} \Rightarrow$$

$$f'(x)=\frac{x(x+1)+x+1-x}{x(x+1)}=\frac{x^2+x+1}{x(x+1)}>0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-4)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-4+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)-(x-4)\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{x+1}\right)=ln(1)=0$$

وبالتالي $y=x-4$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

و الخط C يقع تحت المقارب $f(x)-(x-4)=ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 13 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ وفق

$f(x) = ln(e^{-x} + 1)$ والمطلوب :

❶ جد نهاية f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ هل يقبل الخط C مقاربات غير مائلة ؟

❷ أثبت ان $f(x) = -x + ln(e^{x} + 1)$

❸ استنتج أن الخط C يقبل مقاربا مائلا وليكن d في جوار $-\infty$

الحل :

❶ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^{-x} + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} ln(e^{-x} + 1) = \ln(1) = 0 \Rightarrow y = 0$$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

❷ $$f(x) = ln(e^{-x} + 1) = ln\left(e^{-x}(1 + e^{x})\right) = ln\, e^{-x} + ln(1 + e^{x}) = -x + ln(e^{x} + 1)$$

❸ $$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x\to-\infty} \left(-x + ln(e^{x} + 1) - (-x)\right) = \lim_{x\to-\infty} ln(e^{x} + 1) = ln(1) = 0$$

وبالتالي $y = -x$ مقارب مائل للخط C في جوار $-\infty$

التمرين 14 : دورة 2020 الأولى

أثبت أن $ln(x + 1) < \sqrt{x + 1}$ أياً كان $x > -1$

الحل

ليكن التابع f المعرف والمستمر والاشتقاقي على المجال $I =]-1, +\infty[$ وفق العلاقة التالية:

$$f(x) = ln(x + 1) - \sqrt{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{x + 1}} = \frac{2 - \sqrt{x + 1}}{2(x + 1)}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2 - \sqrt{x + 1} = 0 \Rightarrow \sqrt{x + 1} = 2 \quad x = 3$$

$$\Rightarrow f(3) = ln(4) - 2 < 0$$

x	-1	3	$+\infty$
f'	‖ $+$	$\mathbf{0}$	$-$
f	‖ ↗	$ln(4) - 2$	↘

ومن جدول الاطراد نلاحظ ان $f(x) < 0$ وذلك مهما تكن $x \in I$ أي $ln(x + 1) - \sqrt{x + 1} < 0$

$ln(x + 1) < \sqrt{x + 1}$ محققة أياً كان $x > -1$

وسيم فاطمة زياد داوود أحمد الشيخ عيسى مروان بجور
اللاذقية 0936497038 سلمية 0936834268 الرقة 0988024183 حمص 0930170828

التمرين 15 : الاختبار 1

أثبت أنّ $lnx \leq x - 1$ **أيّاً كان** $x > 0$ **باختيار** $x = e^{\frac{1}{3}}$ **و** $x = e^{-\frac{1}{3}}$ **احصر** e

الحل:

نصطنع التابع $f(x) = lnx + 1 - x$ **المعرّف والاشتقاقي عندما** $x > 0$
ويؤول حل المتراجحة إلى البحث عن قيم التي تجعل $f(x) \leq 0$ **لذلك ندرس اطّراد** $f(x)$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

إشارة f' **من إشارة** $1 - x$ **الذي ينعدم عند** $x = 1$ **ويكون** $f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الاطّراد أنّ $f(x) \leq 0$ **أيّاً كان** $x \in]0, +\infty[$
ومن المتراجحة نلاحظ أنّ:

$$lne^{\frac{1}{3}} \leq e^{\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \geq 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow e^{\frac{1}{3}} \geq \frac{4}{3} \Rightarrow e \geq \frac{64}{27}$$

$$lne^{-\frac{1}{3}} \leq e^{-\frac{1}{3}} - 1 \Rightarrow e^{-\frac{1}{3}} \geq 1 - \frac{1}{3} \Rightarrow e^{-\frac{1}{3}} \geq \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{e} \geq \frac{8}{27} \Rightarrow e \leq \frac{27}{8}$$

ومنه نجد أنّ: $\frac{64}{27} \leq e \leq \frac{27}{8}$

التمرين 16 : الاختبار 2

أثبت أنّه أيّاً كانت x **من** $]-1, +\infty[$ **كان** $\frac{x}{1+x} \leq ln(x+1)$

الحل:

نصطنع التابع $f(x) = \frac{x}{x+1} - ln(x+1)$ **يؤول حل المتراجحة إلى** $f(x) \leq 0$
لذلك ندرس اطّراد التابع f

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{-x}{(1+x)^2}$$

إشارة f' **من إشارة** $-x$ **الذي ينعدم عند** $x = 0$ **ويكون** $f(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

من جدول الاطّراد نلاحظ أنّ $f(x) \leq 0$ **وذلك يّاً كان** $x \in]-1, +\infty[$
أي أنّه أيّاً كان $x \in]-1, +\infty[$ **فإنّ** $\frac{x}{x+1} \leq ln(x+1)$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 17 : النموذج الوزاري الثالث 2020

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-2,2[$ وفق $f(x) = ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$, والمطلوب:

❶ أثبت أن التابع f فردي, ثم ادرس تغيرات التابع على المجال $]0,2[$.

❷ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C_f في نقطة منه فاصلتها $x = 0$.

❸ ادرس الوضع النسبي بين C_f و T

الحل :

❶ $\forall\, x \in]-2\,,2\,[\Rightarrow -x \in]-2\,,2\,[$

$f(-x) = ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right) = -\,ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right) = -f(x)$ بالتالي التابع f فردي

التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]0\,,2[$

$f(0) = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = +\infty$

على المجال $]0\,,2[$ يمكن أن نكتب f باستخدام خواص اللوغاريتم بالشكل

$$f(x) = ln(x+2) - ln(-x+2)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x+2} + d\,\frac{1}{2-x} = \frac{4}{(2-x)(2+x)} > 0$$

التابع f متزايد تماما على المجال $]0\,,2[$

x	0		2
$f'(x)$		$+$	‖
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

❷

معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها $x = 0$

$$f(0) = 0 \;\;,\; f'(0) = 1 \Rightarrow y = f'(0)(x-0) + f(0) \Rightarrow\; y = (1)(x-0) + (0)$$

$$T:\quad y = x$$

❸ $h(x) = f(x) - (x) = ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right) - x$

$$h(x) = ln(x+2) - ln(-x+2) - x$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2-x} - 1 = \frac{4}{(2-x)(2+x)} - 1 = \frac{4-(4-x^2)}{(2-x)(2+x)}$$

$$h'(x) = \frac{x^2}{(2-x)(2+x)} \geq 0$$

x	-2		0		2
$h'(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖
$h(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

من جدول الاطراد نستنتج

x	-2		0		2
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	‖
الوضع النسبي		C يقع تحت المماس		C يقع فوق المماس	

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 18 : دورة 2019 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع المعرّف f على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=ax+b-\frac{lnx}{x}$

❶ عين العددين الحقيقين a و b أذا علمت أن المماس للخط البياني C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم الذي معادلته $y=3x$

❷ من أجل $a=4$ و $b=-4$ أثبت أن المستقيم Δ الذي معادلته $y=4x-4$ مقارب مائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل ❶ $f'(x)=a-\frac{(lnx)'.x-(x)'.lnx}{x^2}=a-\frac{\frac{1}{x}.x-lnx}{x^2}=a-\frac{1-lnx}{x^2}$

$$f(1)=0\implies a(1)+b-\frac{ln1}{1}=0\implies a+b=0\ldots(1)$$

$$f'(1)=3\implies a-\frac{1-ln1}{(1)^2}=3\implies a-1=3\implies a=4$$

نعوض قيمة $a=4$ في المعادلة (1) نجد أن $b=-4$

❷ $f(x)=4x-4-\frac{lnx}{x}\implies f(x)-y_\Delta=\left(4x-4-\frac{lnx}{x}\right)-4x-4=-\frac{lnx}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_\Delta]=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{lnx}{x}\right)=0$$

لدراسة الوضع النسبي بين C و Δ ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y_\Delta=-\frac{lnx}{x}$

عندما $x\in]0,1[$ يكون $f(x)-y_\Delta>0$ يكون C فوق Δ

عندما $x\in]1,+\infty[$ يكون $f(x)-y_\Delta<0$ يكون C تحت Δ

عند النقطة $(1,0)$ يكون $f(x)-y_\Delta=0$ أي C يقطع Δ

التمرين 19 :

نفترض وجود عددين حقيقيين موجبين تماماً a و b يحقّقان : (1) $ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{lna+lnb}{2}$

احسب $\frac{a}{b}$

الحل: بما أن $a>0$ و $b>0$ فإن :

$$ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{lna+lnb}{2}\implies ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{1}{2}ln(ab)\implies ln\left(\frac{a+b}{3}\right)=ln\sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{3}=\sqrt{ab}\implies a+b=3\sqrt{ab}\implies(a+b)^2=9ab\implies$$

$$a^2+2ab+b^2=9ab\implies a^2-7ab+b^2=0\implies\frac{a^2}{b^2}-7\frac{a}{b}+1=0$$

بالقسمة على $b^2\neq0$ ينتج : $\frac{a^2}{b^2}-7\frac{a}{b}+1=0\implies\left(\frac{a}{b}\right)^2-7\left(\frac{a}{b}\right)+1=0$

$$\Delta=49-4=45=9\times5\implies\sqrt{\Delta}=3\sqrt{5}$$

$$\frac{a}{b}=\frac{7+3\sqrt{5}}{2}>0\qquad\&\qquad\frac{a}{b}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}>0$$

وهما القيمتان الممكنتان للنسبة $\frac{a}{b}$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 20 :

ادرس تغيرات التابع f في كل مما يلي على المجال المحدد ، وارسم خطّه البياني C:

1. $f(x) = (x+1)lnx \qquad I =]0, +\infty[$
2. $f(x) = ln(1+x^2) \qquad I =]-\infty, +\infty[$

الحل :

1. التابع معرّف ومستمر واشتقاقي على مجموعة تعريفه المفروضة $]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x+1)lnx = \lim_{x\to 0^+} [xlnx + lnx] = 0 - \infty = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} (x+1)lnx = +\infty$$

$$f'(x) = lnx + \frac{x+1}{x} = lnx + 1 + \frac{1}{x}$$

نلاحظ وجود حد يحوي $\frac{1}{x}$ وبالتالي لا نستطيع حل المعادلة $f'(x) = 0$ لذلك ندرس المشتق الثاني

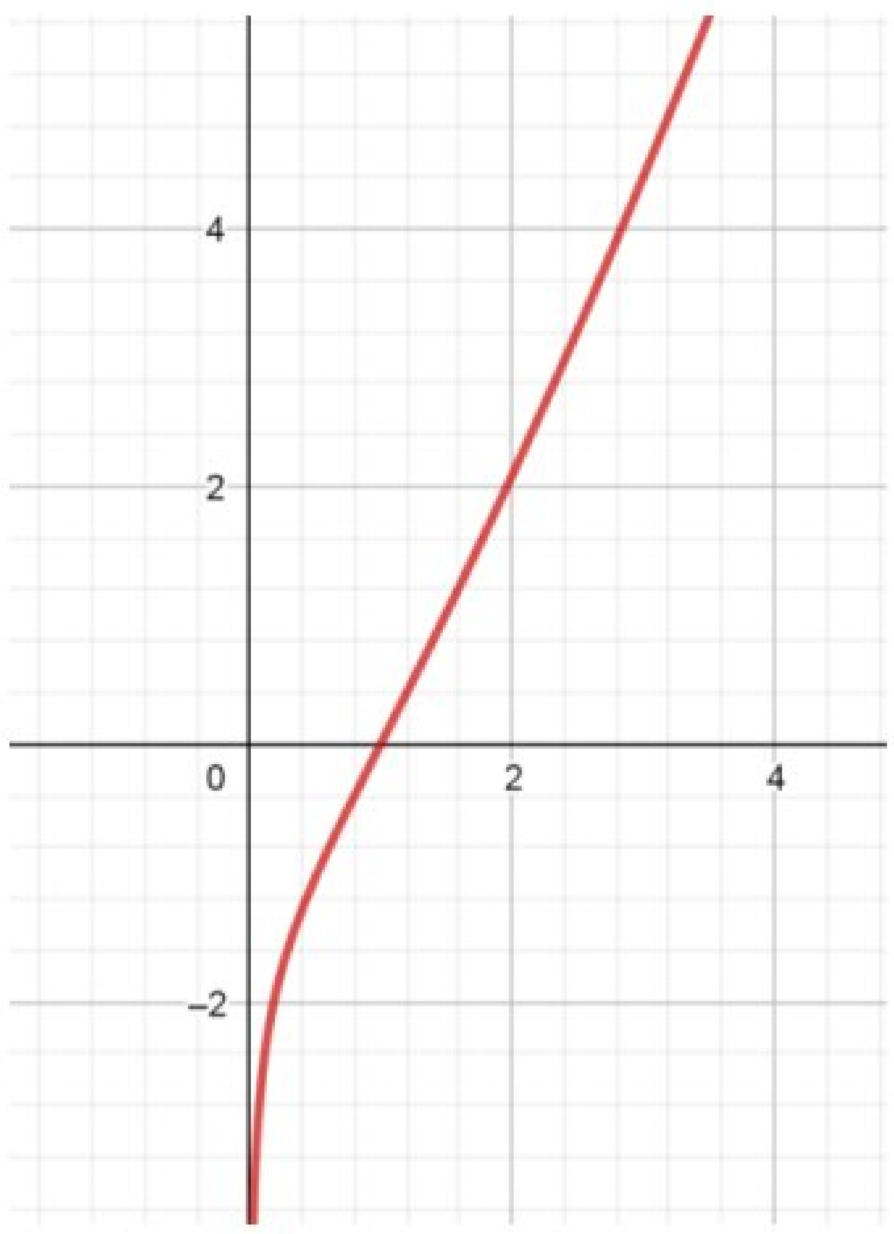
$$f''(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2} \Rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f'(1) = 2$$

x	0		1		$+\infty$
$f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	↘	2	↗	

نلاحظ أنّ $f'(x) \geq 2$ أي أن $f'(x)$ لا ينعدم واشارته موجبة على $\mathbb{R}_+^*$

نعود لجدول تغيرات $f(x)$ نجد :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$



② $f(x) = ln(1+x^2)$ $\qquad I = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

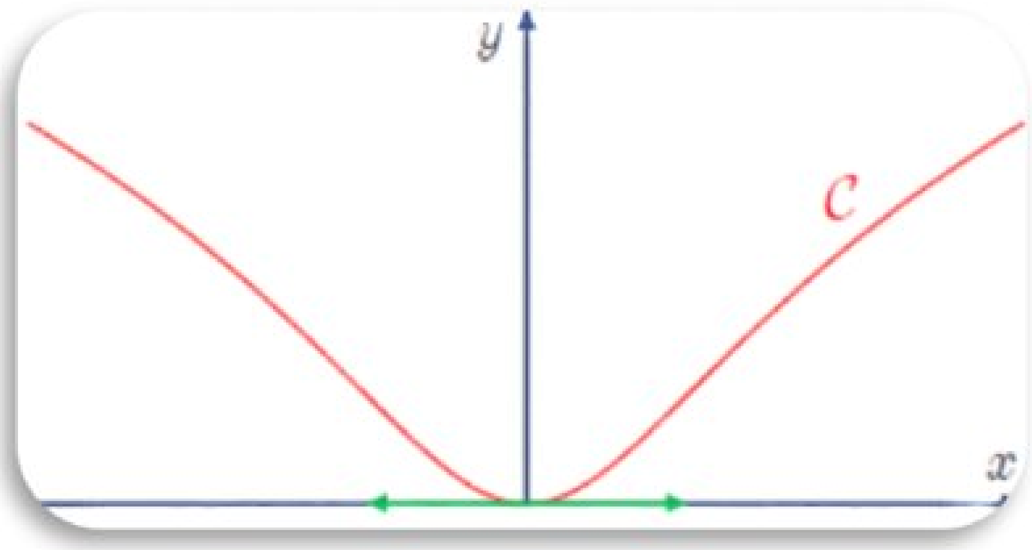
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} ln(1+x^2) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} ln(1+x^2) = +\infty$

$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad , f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



التمرين 21 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة : $f(x) = ln(lnx) - lnx$

❶ أثبت أنّ مجموعة تعريف f هي $D_f =]1, +\infty[$.

❷ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f. واكتب معادلة المقارب الشاقولي

❸ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

❹ ارسم الخط C ومقاربه في معلمٍ متجانس.

الحل :

❶ $f(x) = ln(lnx) - lnx$

f معرف بشرط $x > 0$ و $lnx > 0 \Rightarrow x > 1$ بالتالي $D_f =]1, +\infty[$

❷ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} (ln(lnx) - lnx) = -\infty - 0 = -\infty$

$x = 1$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (ln(lnx) - lnx) = \lim_{x\to+\infty} lnx\left(\frac{ln(lnx)}{lnx} - 1\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ln(lnx)}{lnx} = \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} lnx = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

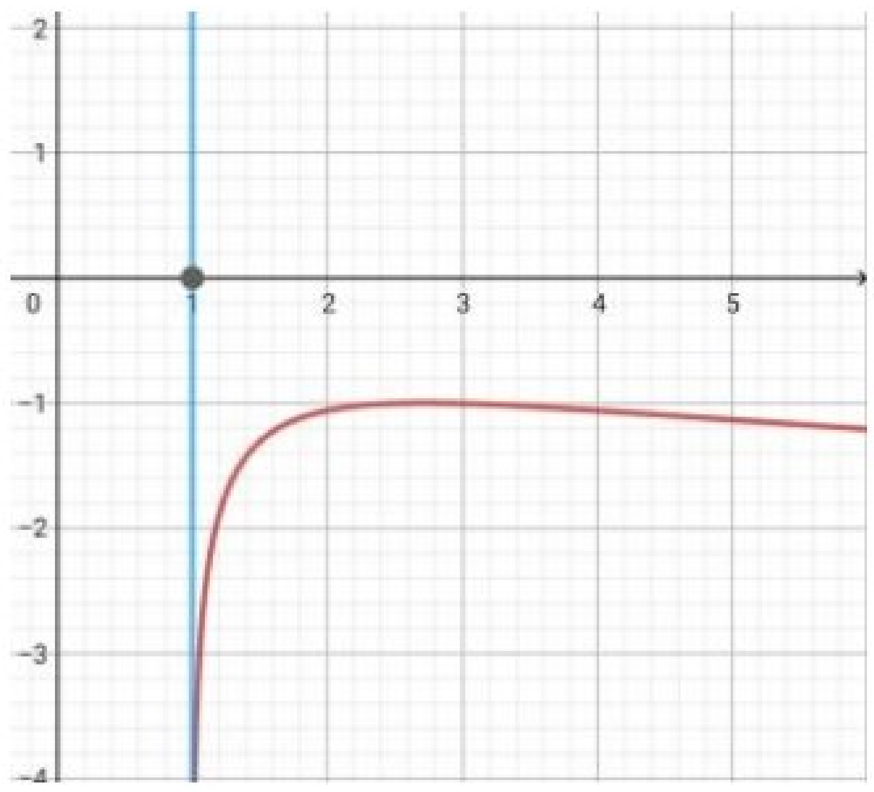
❸ $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{lnx} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln x} - \frac{1}{x} = \frac{1-\ln x}{x\ln x}$

المقام موجب تماما على $]1, +\infty[$ بالتالي اشارة المشتق من اشارة البسط

$f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$

$\Rightarrow f(e) = -1$

x	1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$



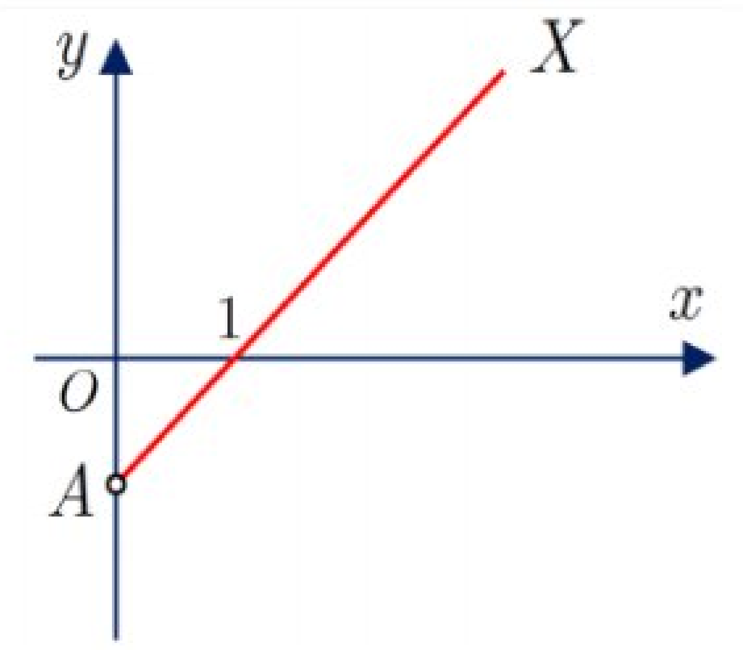
وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 22 :

في كل حالة آتية ارسم في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحقّقة للشرط المشار إليه.

❸ $\ln x + \ln y = 0$ ❷ $\ln y = 2\ln x$ ❶ $\ln x = \ln(y+1)$

الحل:



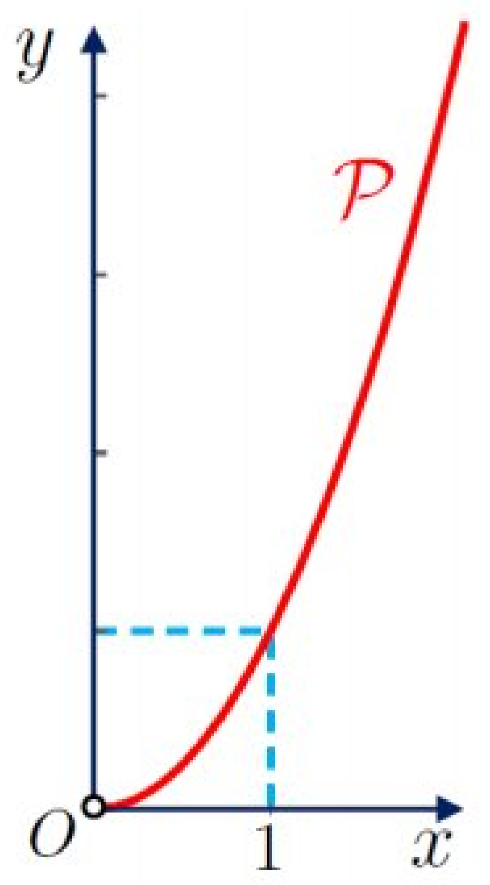
❶ $\ln x = \ln(y+1)$

$x > 0 \quad \& \quad y > -1$

$x = y + 1 \implies y = x - 1$

ومجموعة النقاط التي تحقّق شرطَي مجموعة التعريف

هي نصف المستقيم $[AX)$ عدا طرفه النقطة $A(0,-1)$



❷ $\ln y = 2\ln x$

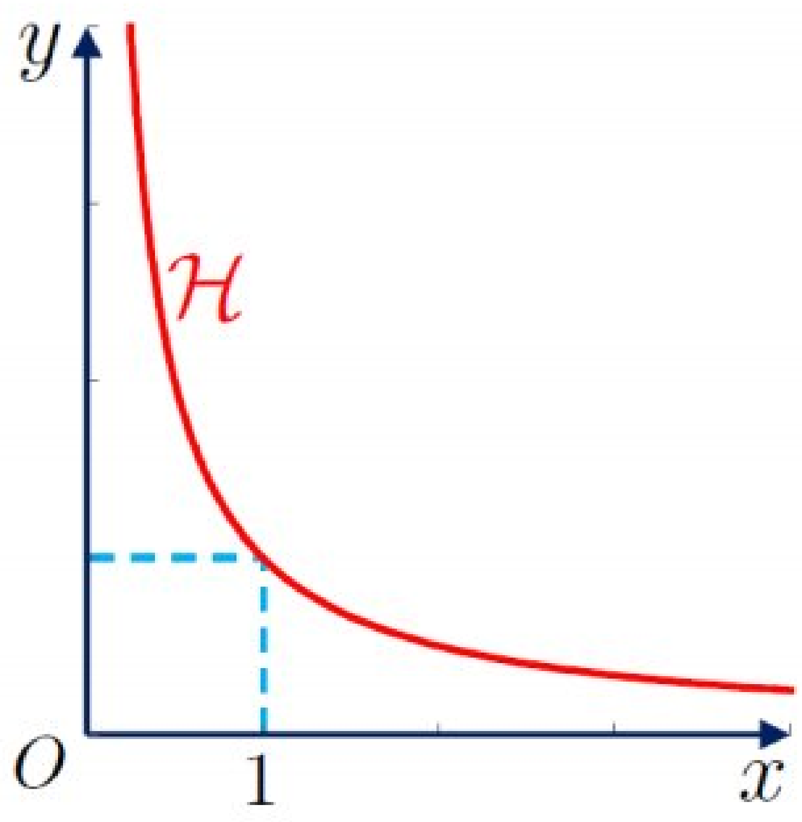
$x > 0 \quad \& \quad y > 0$

$\ln y = \ln x^2 \implies y = x^2$

ومجموعة النقاط التي تحقّق شرطَي مجموعة التعريف

هي نصف القطع المكافئ المرسوم في الربع الأول

عدا ذروته النقطة $O(0,0)$



❸ $\ln x + \ln y = 0$

$x > 0 \quad \& \quad y > 0$

$\ln(xy) = 0 \implies xy = 1 \implies y = \frac{1}{x}$

ومجموعة النقاط التي تحقّق شرطَي مجموعة التعريف

هي فرع القطع الزائد المرسوم في الربع الأول

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 1 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف بالعلاقة : $f(x) = ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right)$

❶ تحقّق أنّ مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$.

❷ a) أثبت أنّ $(4-x) \in D_f$ ، أيّاً يكن $x \in D_f$.

b) احسب عند كل x من D_f المقدار $f(4-x)+f(x)$.

c) استنتج أنّ النقطة $A(2,0)$ هي مركز تناظر للخط C .

❸ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f.

❹ ادرس تغيرات f ونظّم جدولاً بها.

❺ ارسم الخط C في معلمٍ متجانس.

❻ لتكن $(u_n)_{n\geq 4}$ متتالية معرّفة وفق $u_n = f(n)$

نضع $S_n = u_4 + u_5 + \cdots + u_n$ أثبت أنّ: $S_n = ln\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

الحل :

❶ التابع f معرف بشرط $\frac{x-1}{x-3} > 0$ بالتالي $x-1=0 \Longrightarrow x=1$ و $x-3=0 \Longrightarrow x=3$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
اشارة $\frac{x-1}{x-3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

وبالتالي : $D_f =]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$

❷ a) أيّاً يكن $x \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ فإنّ: $-x \in]-\infty,-3[\cup]-1,+\infty[$

و بالتالي : $(4-x) \in]-\infty,1[\cup]3,+\infty[$ أي أن : $x \in D_f \Longrightarrow (4-x) \in D_f$

b) أيّاً يكن x من D_f فان :

$$f(4-x)+f(x) = ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) = -\,ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) + ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) = 0$$

C) تكون النقطة $A(x_0\,,y_0)$ مركز تناظر للخط البياني لتابع f إذا تحقّق الشرطان:

$x \in D_f \Longrightarrow 2x_0 - x \in D_f$. هذا الشرط محقّق حيث $x_0 = 2$.

$f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$ هذا الشرط محقّق أيضاً حيث $y_0 = 0$.

وبتحقيق f لهذين الشرطين تكون النقطة $A(2,0)$ مركز تناظر للخط C.

❸ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $-\infty$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) = -\infty \Longrightarrow$ $x=1$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^+} ln\left(\frac{x-1}{x-3}\right) = +\infty \Longrightarrow$ $x=3$ مقارب شاقولي للخط C

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Longrightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

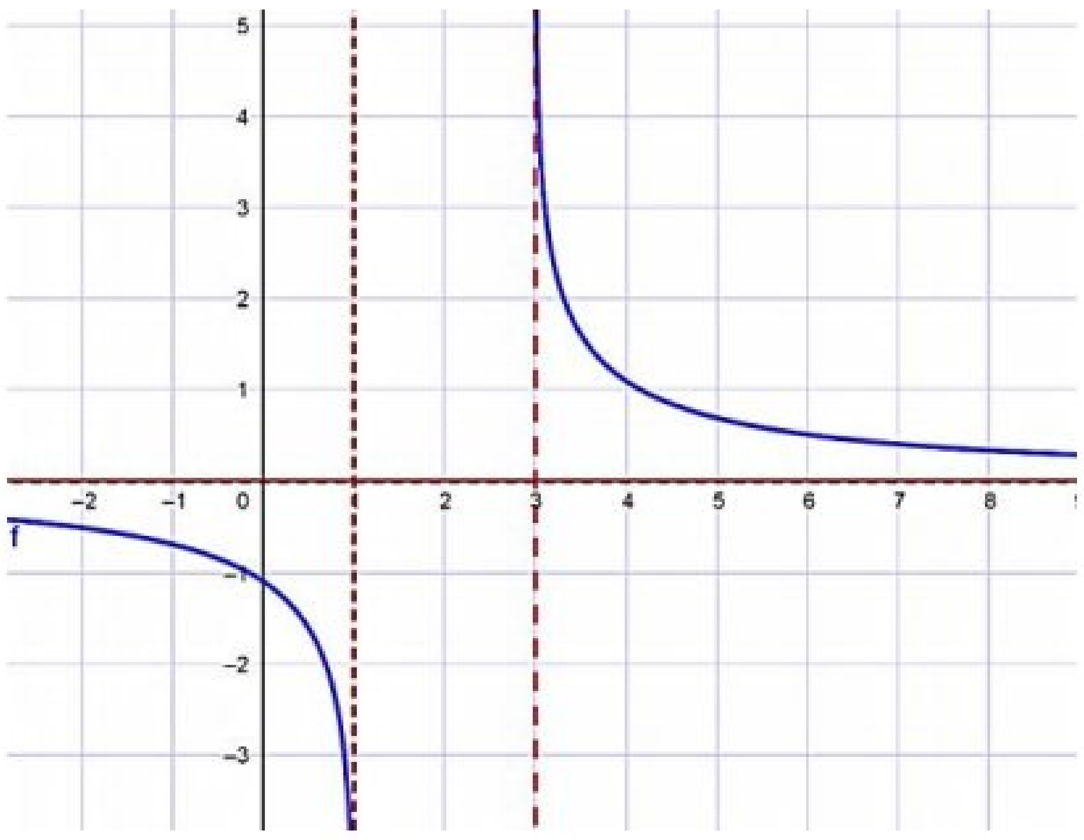
وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

❹ **دراسة تغيرات f :**

$$f(x) = ln(x-1) - ln(x-3)$$
$$f'(x) = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x-3} = \frac{x-3-x+1}{(x-1)(x-3)} = \frac{-2}{(x-1)(x-3)} < 0$$

x	$-\infty$		1	3		$+\infty$
f'		$-$	‖	‖	$-$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖	‖ $+\infty$	↘	0

❺ **الرسم**



❻

$$S_n = u_4 + u_5 + \cdots + u_n$$
$$S_n = ln3 + ln\frac{4}{2} + ln\frac{5}{3} + .. + ln\left(\frac{n-3}{n-5}\right) + ln\left(\frac{n-2}{n-4}\right) + ln\left(\frac{n-1}{n-3}\right)$$
$$S_n = ln\left(3 \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \ldots.. \times \frac{n-3}{n-5} \times \frac{n-2}{n-4} \times \frac{n-1}{n-3}\right) = ln\frac{(n-1)(n-2)}{2}$$

طريقة ثانية :

بفرض لدينا القضية $E(n): S_n = ln\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ **و لنثبت صحة القضية** $E(n)$ **بالتدريج**

نثبت صحة القضية $E(4)$

$$l_1 = S_4 = u_4 = ln\left(\frac{4-1}{4-3}\right) = ln3 \quad , \quad l_2 = ln\frac{(4-1)(4-2)}{2} = ln3$$

$l_1 = l_2$ **و القضية صحيحة من أجل** $n = 4$

نفرض صحة القضية $E(n): S_n = ln\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

و لنثبت صحة القضية $E(n+1) \; : \; S_{n+1} = ln\frac{(n)(n-1)}{2}$

$$l_1 = S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = ln\frac{(n-1)(n-2)}{2} + ln\left(\frac{n}{n-2}\right)$$
$$= ln\frac{(n-1)(n-2)}{2} \times \frac{n}{n-2} = ln\frac{(n)(n-1)}{2} = l_2$$

فالقضية صحيحة من أجل أي عدد طبيعي $n \geq 4$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 2 : دورة 2020 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $]-2,2[$ وفق $f(x)=ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)$ والمطلوب:

❶ **أثبت أن f تابع فردي.**

❷ **ادرس تغيرات التابع f على المجال $[0,2[$.**

❸ **اكتب معادلة المماس T عند النقطة التي فاصلتها $x=0$,**

واحسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x=0.1$.

❹ **في معلم متجانس ارسم الخط البياني C.**

❺ **استنتج رسم الخط البياني C' للتابع $g(x)=ln(2-x)-ln(x+2)$ على المجال $]-2,2[$.**

الحل :

❶ **أياً كانت** x **من المجال** $]-2,2[$ **كانت** $-x$ **من المجال** $]-2,2[$

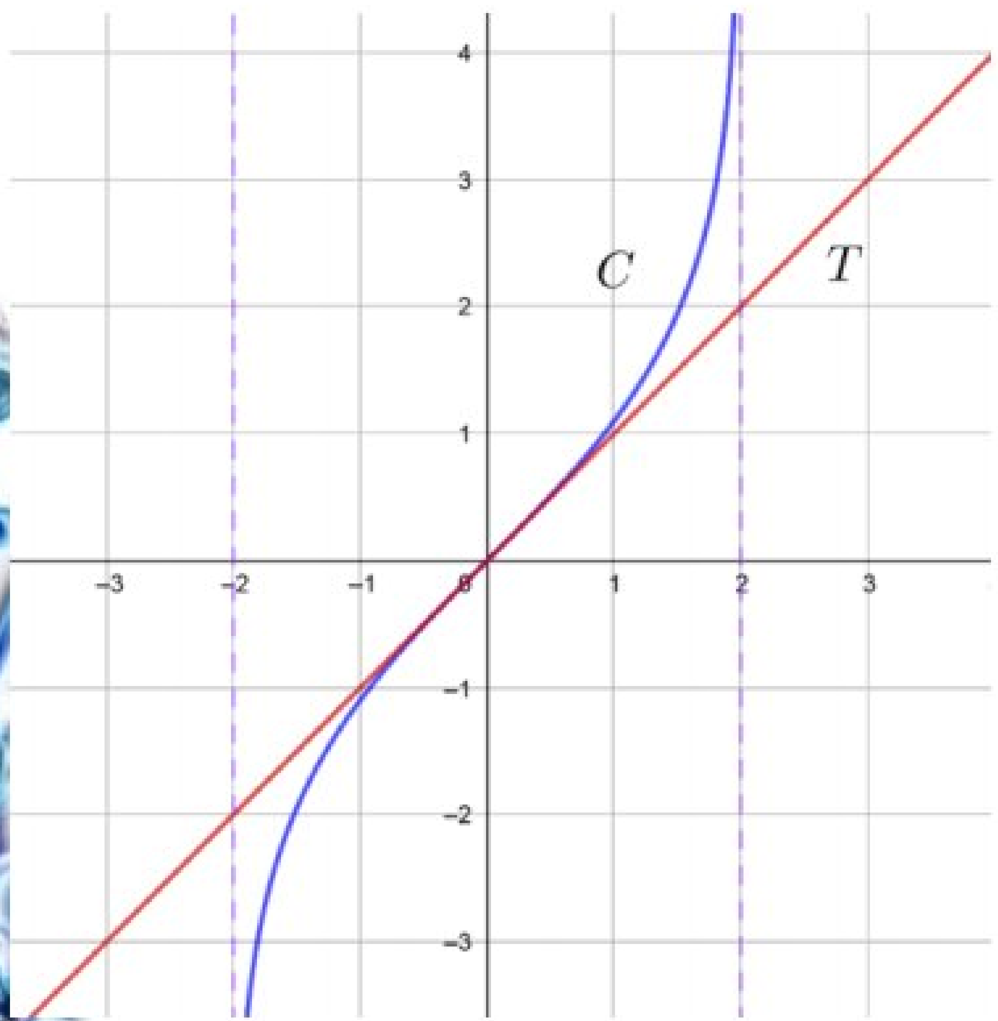
$f(-x)=ln\left(\frac{-x+2}{2+x}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)=-f(x)$ **أي التابع f فردي**

❷ **التابع f معرف ومستمر واشتقاقي على المجال** $[0,2[$ $\quad f(0)=0\ ,\ \lim_{x\to 2} f(x)=+\infty$

أي $x=2$ **مقارب شاقولي للخط البياني** C

$$f'(x)=\frac{\frac{(1)(2-x)-(-1)(x+2)}{(2-x)^2}}{\left(\frac{x+2}{2-x}\right)}=\frac{2-x+x+2}{(2-x)^2}\times\frac{2-x}{x+2}=\frac{4}{(2-x)(2+x)}>0$$

x	0		2
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$+\infty$



❸ **معادلة المماس عند النقطة التي فاصلتها** $x=0$

$f'(0)=1$ **و** $f(0)=0$

$T:\quad y=f'(0)(x-0)+f(0)\Longrightarrow$

$y=(1)(x-0)+(0)\Longrightarrow\quad y=x$

$f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

$h=0.1\quad ,\quad a=0$

$f(0+0.1)\approx f(0)+(0.1)f'(0)\Longrightarrow f(0.1)\approx 0.1$

❹ **الرسم :**

❺ $g(x)=ln(2-x)-ln(x+2)=ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)=-ln\left(\frac{x+2}{2-x}\right)\Longrightarrow g(x)=-f(x)$

C' نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

او $g(x)=f(-x)$ **و C' نظير C بالنسبة لمحور التراتيب**

المسألة 3

في معلمٍ متجانس، C_f و C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرّفين على المجال $I =]-1\,,+\infty[$ وفق $f(x) = ln(x+1)$ و $g(x) = \frac{x}{x+1}$

❶ أثبت أنّ $g(x) \le f(x)$ أيّاً يكن x من I .

❷ أثبت أنّ C_f و C_g يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x = 0$.

❸ ادرس تغيّرات كلٍ من f و g وارسم الخطّين C_f و C_g مستفيداً من رسم المماس المشترك.

الحل :

① $g(x) \le f(x) \Rightarrow f(x) - g(x) \ge 0$

لنفرض التابع $h(x) = f(x) - g(x)$ **المعرّف والاشتقاقي على** $I =]-1\,,+\infty[$

$$h(x) = ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

$$h'(x) = \frac{1}{x+1} - \left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

إشارة h' **من إشارة** x **الذي ينعدم عند** $x = 0$ **و يكون** $h(0) = 0$ **ومنه جدول الاطّراد:**

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$h(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه نلاحظ أنّ أيّاً كان $x \in I$ **فإن:** $h(x) \ge 0 \Rightarrow f(x) - g(x) \Rightarrow f(x) \ge g(x)$

② **ونستنتج من جدول الاطّراد السابق أنّ** $h(0) = 0 \Rightarrow f(0) = g(0) = \frac{0}{0+1} = 0$

وأنّ $h'(0) = 0 \Rightarrow f'(0) = g'(0) = \frac{1}{0+1} = 1$

وبالتالي أنّ C_f **و** C_g **يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة** $(0\,,0)$ **ومعادلته** $y = x$

③ **دراسة تغيّرات** f **:** $x = -1$ **مقارب شاقولي** $\lim_{x\to-1^+} f(x) = \lim_{x\to-1^+} ln(x+1) = -\infty \Rightarrow$

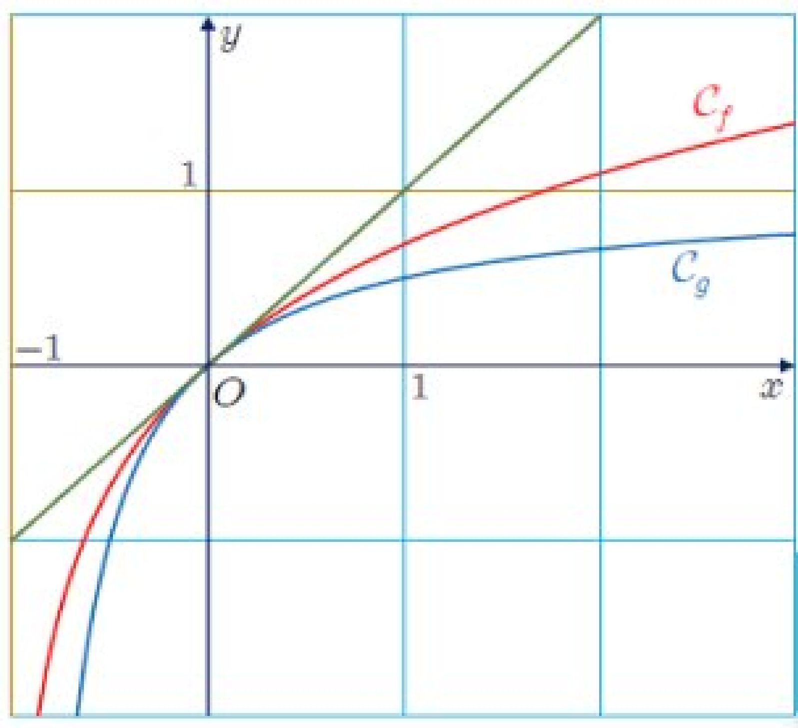
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} [ln(x+1)] = +\infty \quad , \quad f'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$		$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

دراسة تغيّرات g **:** $x = -1$ **مقارب شاقولي** $\lim_{x\to-1^+} g(x) = \lim_{x\to-1^+} \frac{x}{x+1} = -\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \quad , \quad g'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$		$+$	
$g(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



المسألة 4 : النموذج الوزاري 2019

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ بالعلاقة : $f(x)=ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)$

و ليكن C' الخط البياني للتابع g مقصور f على $]1,+\infty[$

❶ أثبت أن f تابع فردي واستنتج الصفة التناظرية للخط C

❷ ادرس تغيّرات التابع g ونظّم جدولاً بها. واكتب معادلة كل مقارب للخط C'

❸ ارسم كل مقارب وجدته وارسم C' واستنتج رسم C

❹ احسب مساحة السطح المحصور بين (C') ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2$ و $x=3$

الحل :

❶ $\forall\, x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$f(-x)=ln\left(\frac{1-x}{-x-1}\right)=ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=-\,ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=-f(x)$$

بالتالي التابع f فردي وخطه البياني C متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ $g(x)=ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\quad,\ D_g=]1,+\infty[$

التابع g معرف ومستمر واشتقاقي على المجال $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=+\infty \Rightarrow$ $x=1$ مقارب شاقولي للخط C'

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)=0 \Rightarrow$ $y=0$ مقارب أفقي للخط C' في جوار $+\infty$

$$f(x)=ln(1+x)-ln(x-1)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x-1}=\frac{-2}{(1+x)(x-1)}<0$$

x	1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0

❸ الخط C هو اجتماع الخط C' ونظيره بالنسبة للمبدأ

❹ المساحة : $S=\int_a^b f(x)dx=\int_2^3 ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)dx$

$$u(x)=ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\Rightarrow u'(x)=\frac{-2}{x^2-1}$$

$$V'(x)=1\Rightarrow V(x)=x$$

$$S=\left[x\,ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3+\int_2^3\frac{2x}{x^2-1}dx$$

$$S=\left[x\,ln\left(\frac{1+x}{x-1}\right)\right]_2^3+[ln(x^2-1)]_2^3=(3\ln 2-2\ln 3)+(\ln 8-\ln 3)$$

$$S=3\ln 2-2\ln 3+3\ln 2-\ln 3=6\ln 2-3\ln 3$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

المسألة 5 : الاختبار 1

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق:

$$f(x) = 2x - 1 + ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$$

❶ أثبت أن المستقيم $\Delta: y = 2x - 1$ مقارب للخط C، وادرس الوضع النسبي لـ C و Δ.

❷ ادرس التابع f، وعيّن المقارب الشاقولي لـ C وارسم كل مقارب وجدته، ثمّ ارسم C.

❸ أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ، واحصره في مجال طوله 0.5

الحل:

❶ $g(x) = f(x) - y_\Delta = ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} ln\left(\frac{x}{1+x}\right) = 0$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

في حالة $x > 0$ فإنّ $0 < 1 + x \Rightarrow$ ... $x < 1 + x \Rightarrow \frac{x}{1+x} < 1 \Rightarrow ln\left(\frac{x}{1+x}\right) < 0 \Rightarrow g(x) < 0$

وينتج أنّ C تحت Δ على المجال $]0,+\infty[$

❷ $f(x) = 2x - 1 + ln\left(\frac{x}{1+x}\right) \quad x \in]0,+\infty[$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x\to0^+} f(x) = -\infty \Rightarrow$ $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

$$f'(x) = 2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2x^2 + 2x + 1}{x(x+1)} > 0$$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

❸ من جدول التغيّرات نلاحظ أنّ

التابع مستمر ومتزايد تماماً على $]0,+\infty[$ وأنّ:

$0 \in]-\infty,+\infty[= f(]0,+\infty[)$

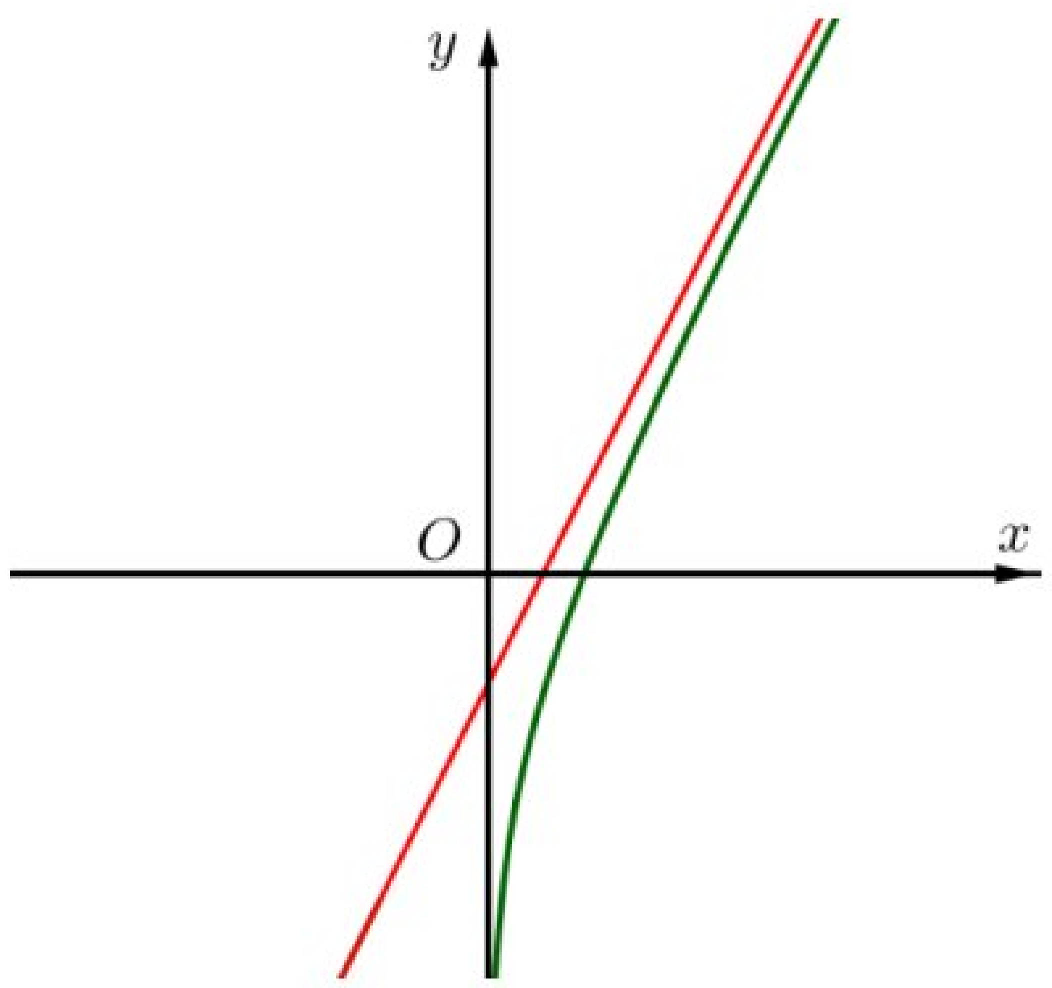
وبالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحل وحيد α

$$f(0.5) = 1 - 1 + ln\left(\frac{1}{3}\right) = -ln(3) < 0$$

$$f(1) = 1 + ln\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - ln(2) > 0$$

$$f(0.5) < 0 < f(1)$$

وبالتالي $0,5 < \alpha < 1$



المسألة 6 : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ وفق:

$$f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

❶ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل للخط البياني C_f في جوار $+\infty$ وفي جوار $-\infty$, وادرس الوضع النسبي للخط C_f بالسنبة للمقارب d.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها, واكتب معادلات المقاربات الشاقولية للخط C_f.

❸ أثبت أن $f(x)+f(-x)=-2$.

❹ استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$.

❺ ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f.

❻ استنتج رسم C_g للتابع C_g المعرف وفق: $g(x)=-2x+1-ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

الحل:

❶ $g(x)=f(x)-y_d=-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$

إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0$ إذاً Δ مقارب مائل للخط C في جوار الـ $-\infty$

في حالة $x>1$ فإنّ $x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0\Rightarrow -ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0$

بالتالي $g(x)<0$ وينتج أنّ C يقع تحت d على المجال $]0,+\infty[$

في حالة $x<-1$ فإنّ $x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)<0\Rightarrow -ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)>0$

بالتالي $g(x)>0$ وينتج أنّ C يقع فوق d على المجال $]0,+\infty[$

❷ $f(x)=2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\quad x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty\Rightarrow\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=+\infty$$

$x=-1$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x\to1^+}-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}2x-1-ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=-\infty$$

$x=1$ مقارب شاقولي للخط C

$$\lim_{x\to+\infty}ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$$

$$f(x) = 2x - 1 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{-2}{(x-1)^2}}{\frac{x+1}{x-1}} = 2 + \frac{2}{(x-1)(x+1)} = 2 + \frac{2}{x^2-1} = \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin D$$

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖ ‖		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ ‖ $-\infty$		$\nearrow$	$+\infty$

❸ $$f(x) + f(-x) = 2x - 1 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - 2x - 1 - ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) \Rightarrow$$

$$f(x) + f(-x) = -2 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) - ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \Rightarrow$$

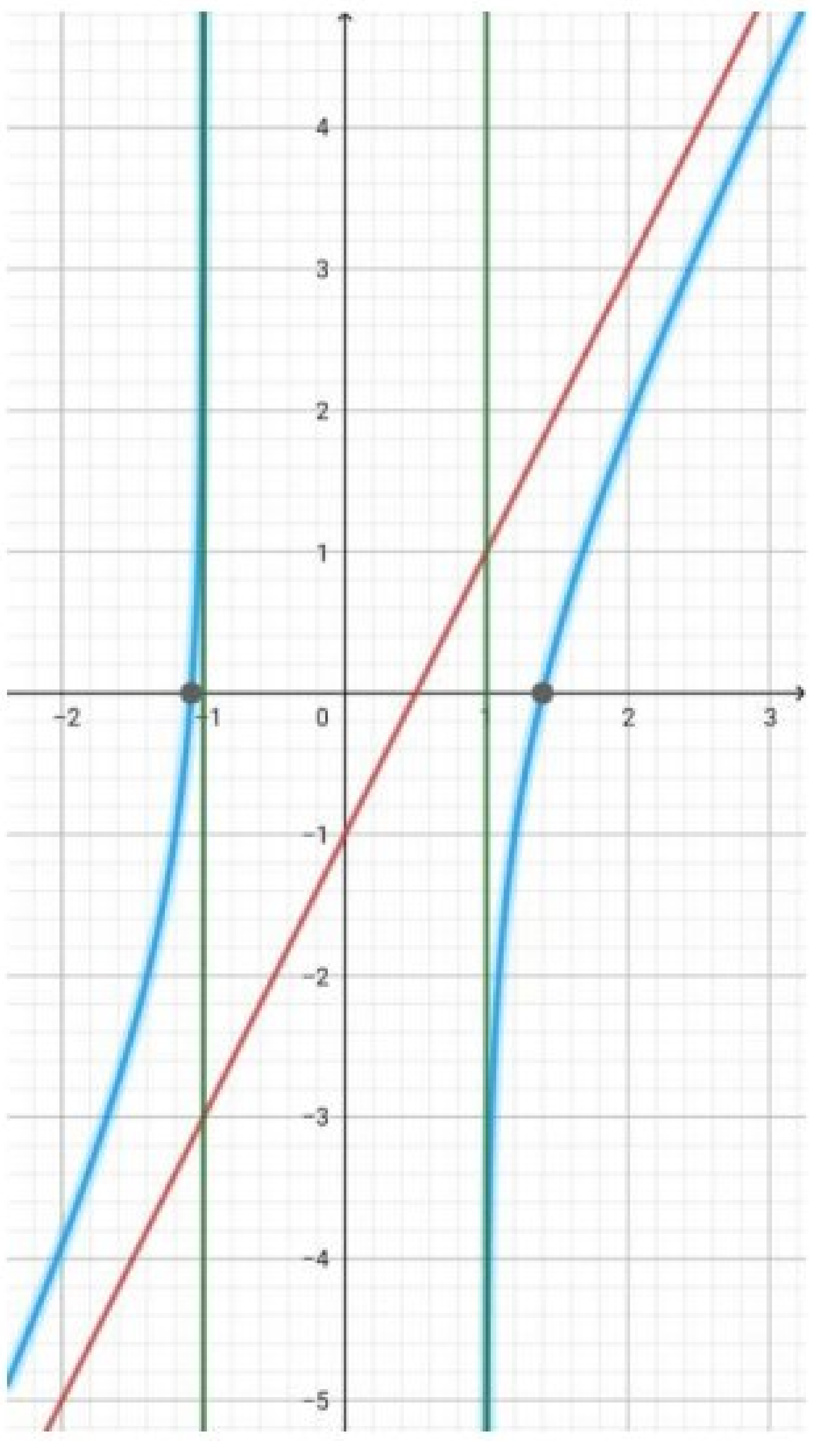
$$f(x) + f(-x) = -2 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -2$$

❹ **استنتج أن C_f متناظر بالنسبة للنقطة $I(0,-1)$**

$$\forall x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\Rightarrow -x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$$

و $f(x) + f(-x) = -2$ **بالتالي** C_f **متناظر بالنسبة للنقطة** $I(0,-1)$

❺ **ارسم ما وجدته من مقاربات ثم ارسم C_f.**



❻

$$g(x) = -2x + 1 + ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \Rightarrow$$

$$g(x) = -\left(2x - 1 - ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right) = -f(x)$$

بالتالي C_g هو نظير C بالنسبة لمحور الفواصل

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 7 :

ليكن التابع f كما يلي : $f(x)=\frac{1}{4}x-ln\frac{x-1}{x+1}$

❶ أوجد مجموعة تعريف التابع f .

❷ لأجل التابع f المعرف على $]-\infty,-1[\cup]1+\infty[$

ادرس تغيرات لتابع f ونظم جدولاً بها ودل على كل قيمة حدية وبيّن نوعها ,

❸ أثبت أن المستقيم $y=\frac{1}{4}x$ مقارب مائل للخط البياني للتابع f

وادرس الوضع النسبي للخط البياني للتابع ومقاربه

❹ احسب $f(x)+f(-x)$, ماذا تستنتج ؟

❺ ارسم ما وجدته من مقاربات ,ثم ارسم C اخط البياني للتابع f .

الحل :

❶ التابع معرف بشرط : $\frac{x-1}{x+1}>0$ وبالتالي

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$	‖	$-$ 0	$+$

التابع معرف على $]-\infty,-1[\cup]1+\infty[$

❷

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

المستقيم $x=-1$ مقارب شاقولي للخط البياني للتابع $\lim_{x\to-1^-} f(x)=-\infty$

المستقيم $x=+1$ مقارب شاقولي للخط البياني للتابع $\lim_{x\to+1^+} f(x)=+\infty$

$$f'(x)=\frac{1}{4}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{(x^2-1)-4(x+1)+4(x-1)}{4(x-1)(x+1)}=\frac{x^2-9}{4(x^2-1)}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=-3\Rightarrow f(-3)=-\frac{3}{4}-ln\,2 \quad , \quad x=3\Rightarrow f(3)=\frac{3}{4}+ln\,2$$

x	$-\infty$	-3	-1	1	3	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$ ‖	‖ $-$	0	$+$
f	$-\infty\nearrow$	$-\frac{3}{4}-ln\,2$	$\searrow-\infty$ ‖	‖ $+\infty\searrow$	$\frac{3}{4}+ln\,2$	$\nearrow+\infty$

من جدول التغيرات نجد أن

$f(-3)=-\frac{3}{4}-ln\,2$ قيمة حدية كبرى

$f(3)=\frac{3}{4}+ln\,2$ قيمة حدية صغرى

❸ لنضع $h(x)=f(x)-\frac{1}{4}x=-ln\frac{x-1}{x+1}$

بما أن $\lim_{x\to\pm\infty} h(x)=-\ln(1)=0$ فإن $y=\frac{1}{4}x$ مقارب مائل لـ C بجوار $\pm\infty$

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)=-ln\frac{x-1}{x+1}=ln\frac{x+1}{x-1}$

طريقة أولى :

مستحيلة $ln\frac{x+1}{x-1}=0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=1\Rightarrow x+1=x-1$

$x=-2\Rightarrow ln\frac{-2+1}{-2-1}=ln\frac{1}{3}<0\ ,\ x=2\Rightarrow ln\frac{2+1}{2-1}=ln\,3>0$

x	$-\infty$ $\qquad$ -1		1 $\qquad$ $+\infty$
اشارة $ln\frac{x+1}{x-1}$	$-$		$+$
	C يقع تحت المقارب		C يقع فوق المقارب

طريقة ثانية :

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة $h(x)=-ln\frac{x-1}{x+1}=ln\frac{x+1}{x-1}$

$$\frac{x+1}{x-1}-1=\frac{2}{x-1}$$

$x<-1\Rightarrow x-1<0\Rightarrow\frac{2}{x-1}<0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}-1<0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow h(x)<0$

والخط C يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty,-1[$

$x>1\Rightarrow x-1>0\Rightarrow\frac{2}{x-1}>0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}-1>0\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow h(x)>0$

والخط C يقع فوق المقارب على المجال $]1,+\infty[$

طريقة ثالثة :

$x<-1\Rightarrow x-1<-2\Rightarrow x-1<0$

$x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}<1\Rightarrow ln\frac{x+1}{x-1}<0\Rightarrow h(x)<0$

والخط C يقع تحت المقارب على المجال $]-\infty,-1[$

$x>1\Rightarrow x-1>0$

$x+1>x-1\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}>1\Rightarrow ln\frac{x+1}{x-1}>0\Rightarrow h(x)>0$

والخط C يقع فوق المقارب على المجال $]1,+\infty[$

❹

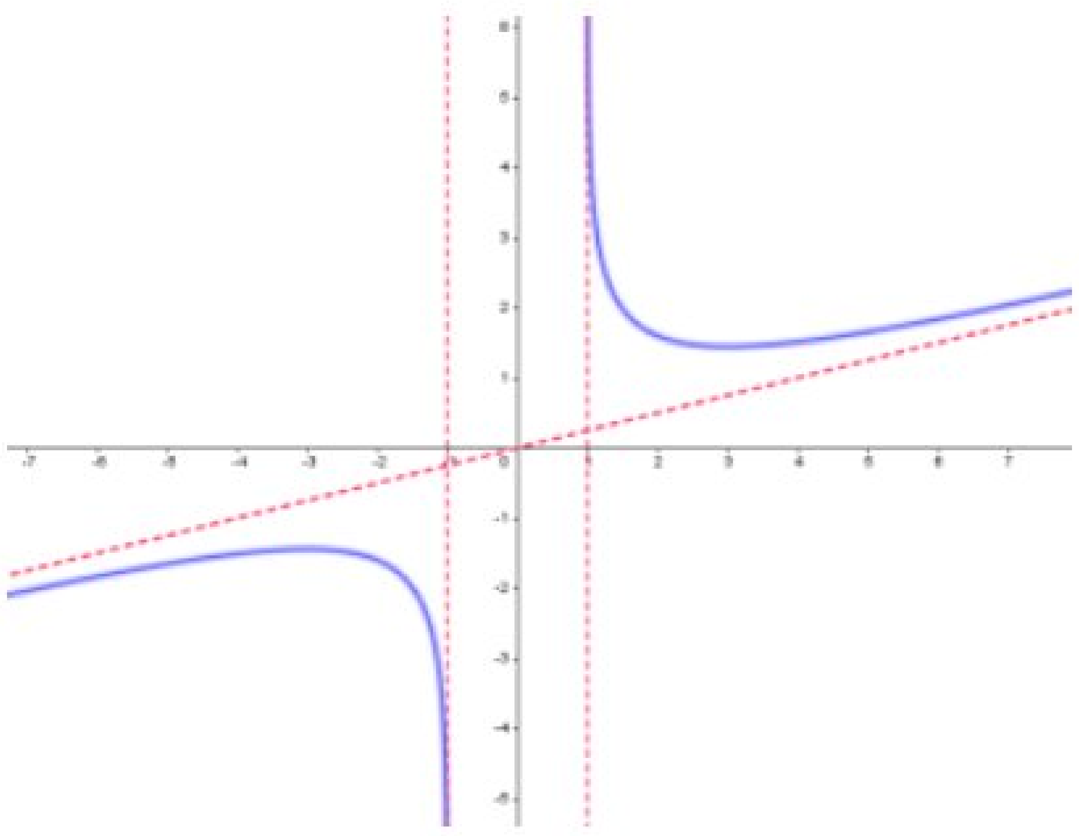
$f(x)+f(-x)=\frac{1}{4}x-ln\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{4}x-ln\frac{-x-1}{-x+1}=-ln\frac{x-1}{x+1}+ln\frac{x-1}{x+1}=0\Rightarrow$
$f(-x)=-f(x)$

و $\forall x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[\;\Rightarrow -x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$

فالتابع f فردي وخطه البياني C متناظر بالنسبة للمبدأ O

❺

الرسم



وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 8 :

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)=ax+b+\frac{1}{x}lnx$ المعرف على $]0,+\infty[$ والمطلوب :

❶ أوجد قيمة كل من $a\,,b$ اذا علمت أن :

المماس للخط C في النقطة $A(1,0)$ يوازي المستقيم $y=3x+2$

❷ بفرض $a=2\,,b=-2$ والمطلوب :

a – أثبت أن المستقيم $d: y=2x-2$ مقارب مائل للخط C في جوار $+\infty$

b – أدرس تغيرات التابع f ونظم جدولا بذلك ثم أرسم الخط C مع المقارب d

c – أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=1\,,x=e$

الحل :

❶ بما أن النقطة $A(1,0)$ هي نقطة تماس الخط C مع المستقيم $y=3x+2$ فهذا يعني :

$$f(1)=0\Rightarrow a+b=0\Rightarrow b=-a$$

$$f'(1)=3\Rightarrow f'(x)=a-\frac{1}{x^2}lnx+\frac{1}{x^2}\Rightarrow a+1=3\Rightarrow a=2\Rightarrow b=-2$$

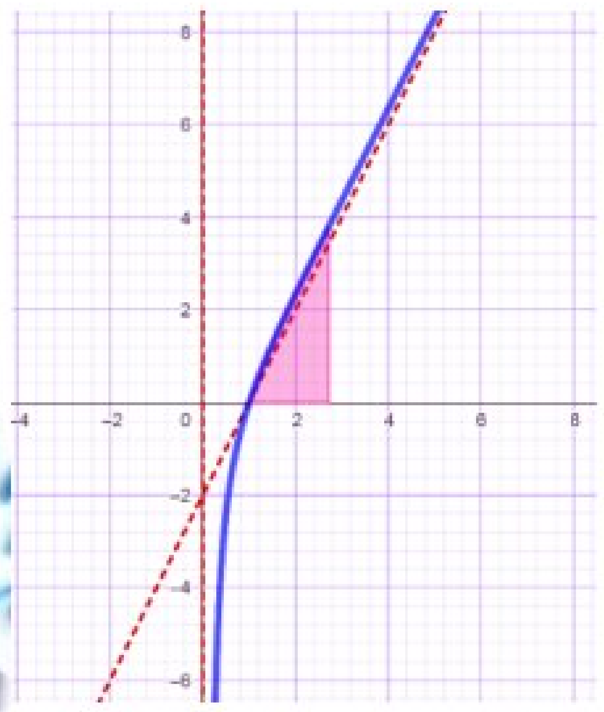
❷ $a=2\,,b=-2\Rightarrow f(x)=2x-2+\frac{1}{x}lnx$

a– اثبات المقارب المائل $f(x)-(2x-2)=2x-2+\frac{1}{x}lnx-2x+2=\frac{1}{x}lnx$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2x-2)\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}lnx=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-(2x-2)\big)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}lnx=0\Rightarrow$ إذاً d مقارب مائل في جوار $+\infty$

b – $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(2x-2+\frac{1}{x}lnx\right)=-\infty$ والمستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للخط C



$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(2x-2+\frac{1}{x}lnx\right)=+\infty$$

$$f'(x)=2-\frac{1}{x^2}lnx+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^2+1-lnx}{x^2}$$

نفرض التابع $g(x)=2x^2+1-lnx$ المعرف على المجال $]0,+\infty[$

$$g'(x)=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}\Rightarrow g'(x)=0\Rightarrow$$

$4x^2-1=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}\ \Rightarrow g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}+ln2>0\,,x=\frac{-1}{2}$ مرفوض

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
g'	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	

x	0		$+\infty$
f'	‖	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

من جدول تغيرات g نجد أن $g(x)>0$ وهذا يعني أن $f'(x)>0$

$$S=\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(2x-2+\frac{1}{x}lnx\right)dx=\left[x^2-2x+\frac{1}{2}(lnx)^2\right]_1^e$$

$$S=\left(e^2-2e+\frac{1}{2}\right)-(1-2)=e^2-2e+\frac{3}{2}$$

المسألة 9 : دورة 2020 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0, +\infty[$ وفق:

$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}$ **والمطلوب:**

❶ **احسب نهايات التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه واكتب معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي.**

❷ **ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.**

❸ **أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً في المجال $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.**

❹ **في معلم متجانس ارسم الخط C.**

❺ **استنتج رسم الخط البياني للتابع C_f $g(x) = \frac{1-x+\ln x}{x}$**

الحل :

1

$\lim_{x\to0} f(x) = -\infty$ **فيكون** $x = 0$ **مقارب شاقولي**

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ **فيكون** $y = 0$ **مقارب أفقي**

2

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1 - n\,x}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$$

x	0		1		$+\infty$
f'	|	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	1	↘	0

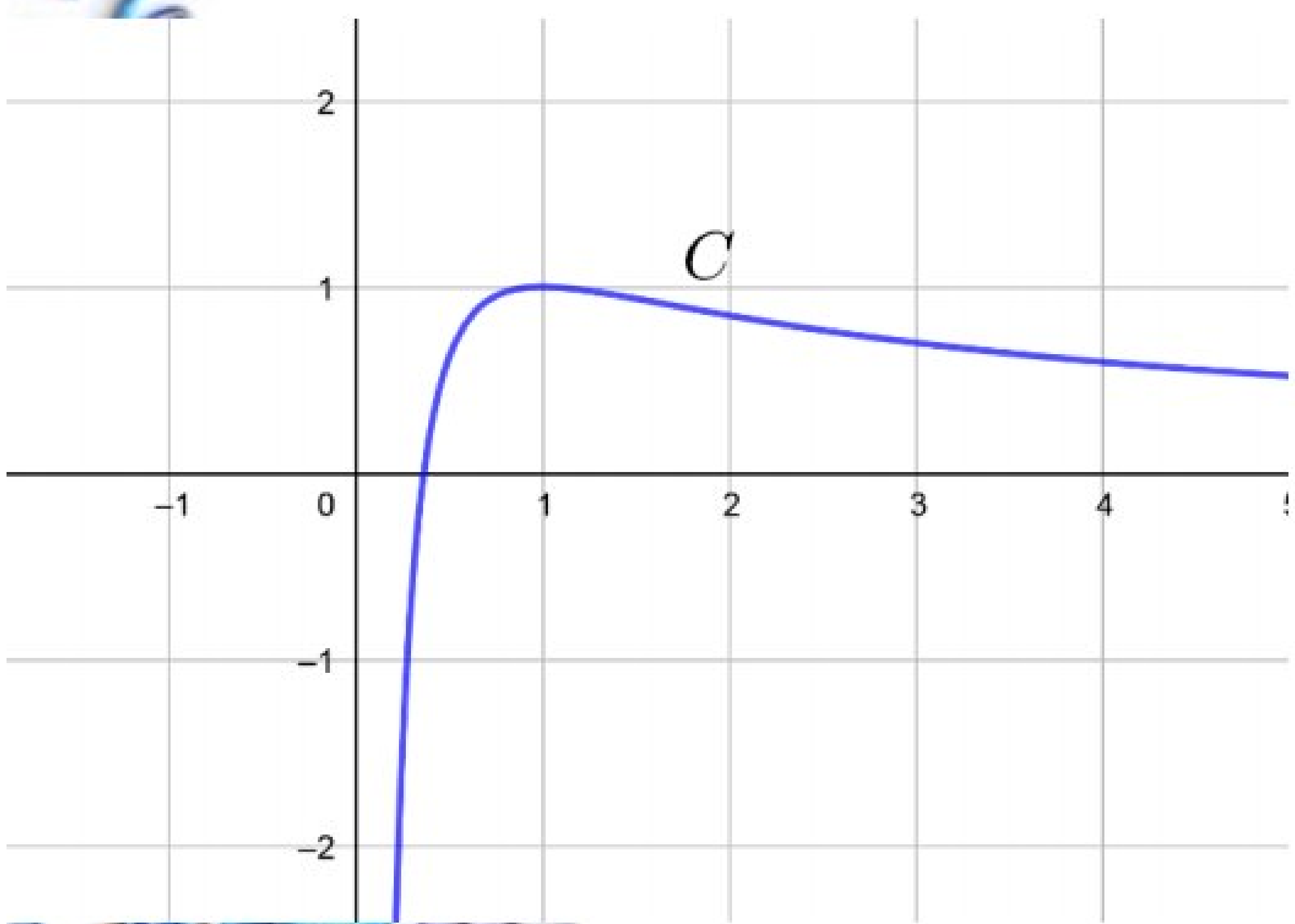
3 **التابع مستمر ومتزايد تماما على المجال** $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 2\ln 2 > 0$ **و** $f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 - 3\ln 3 < 0$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \times f\left(\frac{1}{3}\right) < 0$$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ **حلاً وحيداً في المجال** $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$.

4



5

$$g(x) = \frac{1}{x} - 1 + \frac{\ln x}{x} = f(x) + 1$$

c' **هو انسحاب للخط** C **بمقدار واحد للأسفل**

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

المسألة 10 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $R/\{0\}$ كما يلي : $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{lnx^2}{x}$

❶ أثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني

❷ ادرس تغيرات التابع f على $]0,+\infty[$ ونظم جدولاً بها و دل على كل قيمة حدية وبيّن نوعها وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية

❸ أدرس تقاطع الخط البياني مع محور الفواصل

❹استفد من الصفة التناظرية للخط البياني للتابع في رسم C الخط البياني للتابع f

الحل :

❶

أياً يكن $x \in R/\{0\}$ **فإنّ** $-x \in R/\{0\}$

أياً يكن x **من** D_f **فإن :** $f(-x) = -\frac{2}{x} - \frac{lnx^2}{x} = -f(x)$

فالتابع فردي و خطه البياني متناظر بالنسبة للمبدأ

❷ دراسة التغيرات

حالة عدم تعيين من الشكل : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{2}{x} + \frac{lnx^2}{x}\right) = +\infty - \infty$

والمستقيم $x = 0$ **مقارب شاقولي للخط** $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\left(2 + lnx^2\right) = +\infty \times -\infty = -\infty \Rightarrow C$

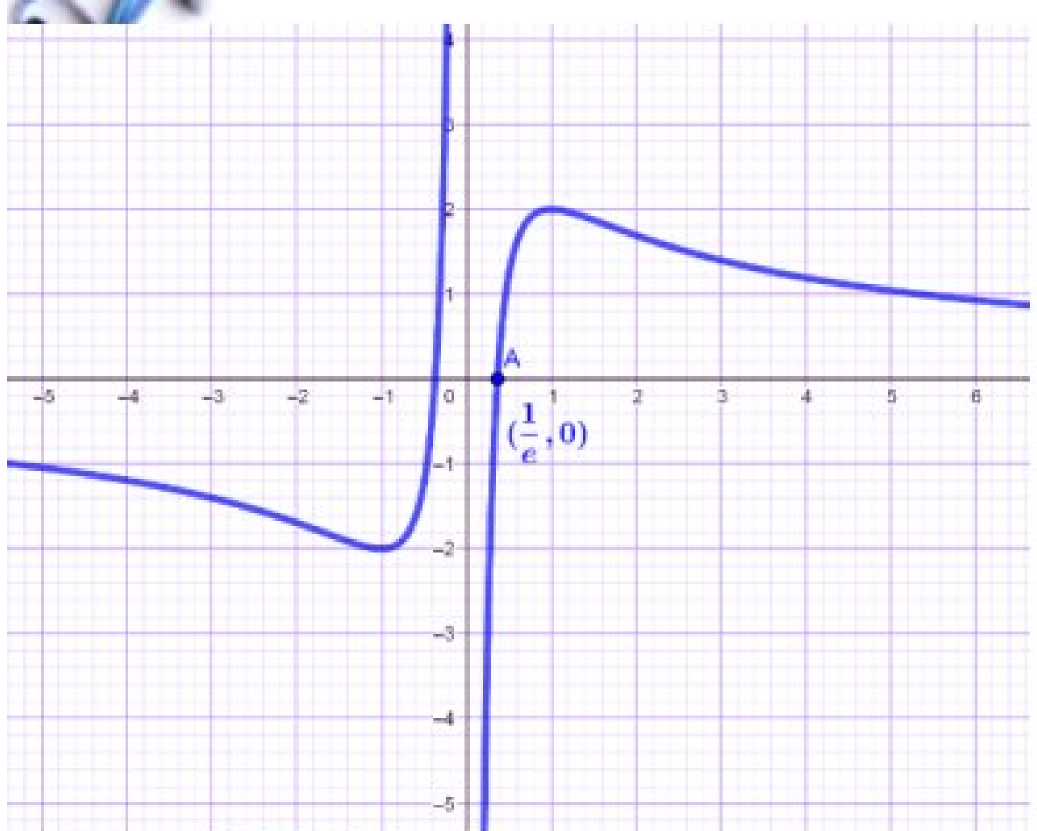
والمستقيم $y = 0$ **مقارب للخط** $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{lnx^2}{x}\right) = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{2}{x} + 2\frac{lnx}{x}\right) = 0 \Longrightarrow \quad C$

$$f'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{\frac{2x}{x^2}x - lnx^2}{x^2} = \frac{-2 + 2 - lnx^2}{x^2} = \frac{-lnx^2}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow lnx^2 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = 1$$

على المجال المدروس

x	0		1		$+\infty$
f'	||	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0



من جدول التغيرات نجد $f(1) = 2$ **قيمة حدية كبرى محلية**

❸ التقاطع مع محور الفواصل

$$f(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2 + lnx^2}{x} = 0 \Longrightarrow lnx^2 = -2 \Longrightarrow x^2 = e^{-2}$$

$$\Longrightarrow x = -\frac{1}{e}, \quad x = \frac{1}{e}$$

❹ الرسم

المسألة 11 : دورة 2017 الأولى

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I=]0,+\infty[$ وفق : $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

❶ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ واستنتج معادلة المقارب الأفقي والشاقولي .

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها ثم دل على القيمة الحدية محلياً .

❸ جد معادلة المماس Δ في النقطة A من الخط C التي فاصلتها $x=1$.

❹ ارسم كل مقارب وجدته , وارسم المماس Δ ثم ارسم C .

❺ احسب مساحة السطح المحور بين C والمحور $\grave{x}x$ والمستقيم الذي معادلته $x=e$

الحل ❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\times\frac{\ln x}{x}\right)=0$

المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للخط C في جوار $+\infty$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\times \ln x\right)=-\infty$$

المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للخط C

❷ التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه: $f'(x)=\frac{\frac{1}{x}(x^2)-2x(\ln x)}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

المقام موجب تماماً على مجموعة التعريف فإشارة المشتق تماثل إشارة البسط:

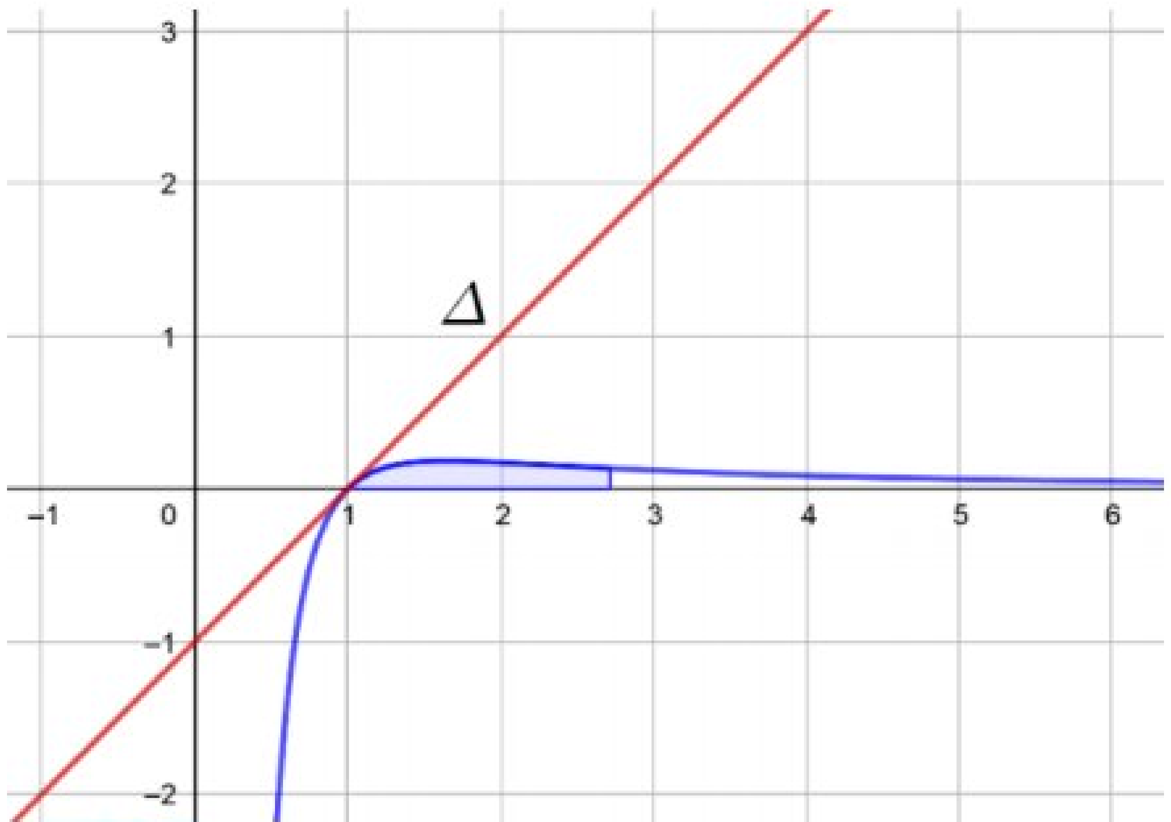
ينعدم المشتق عندما: $1-2\ln x=0$ ومنه $\ln x=\frac{1}{2}$ وبالتالي $x=\sqrt{2}$ حيث $f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2e}$	↘	0

❸ لدينا: $f(1)=0$ و $f'(1)=1$

صيغة معادلة المماس : $y=f(1)+f'(1)(x-1)$

إذن معادلة المماس Δ هي: $y=x-1$



❹ الرسم : $(0,-1)$ نقطة مساعدة لرسم المماس

❺ المساحة: $S=\int_a^b f(x)dx=\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$

$$u(x)=\ln x \Longrightarrow u'(x)=\frac{1}{x}$$

$$V'(x)=\frac{1}{x^2}\Longrightarrow V(x)=-\frac{1}{x}$$

$$S=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e+\int_1^e\frac{1}{x^2}dx$$

$$S=\left[-\frac{1}{x}\ln x\right]_1^e+\left[-\frac{1}{x}\right]_1^e=\left[-\frac{1}{x}\ln x-\frac{1}{x}\right]_1^e$$

$$S=\left(-\frac{1}{e}-\frac{1}{e}\right)-(0-1)=1-\frac{2}{e}$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

المسألة 12 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=\frac{1}{xlnx}$

❶ ادرس تغيرات التابع f على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ ونظم جدولاً بها ودل على كل قيمة حدية إن وجدت وبيّن نوعها وبين ما له من مقاربات أفقية أو شاقولية

❷ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في النقطة التي فاصلتها $x=e$

❸ أثبت أن التابع $g(x)=ln(ln(x))$ المعرف على $]1,+\infty[$ هو تابع أصلي للتابع f على هذا المجال

❹ أرسم كل مقارب وجدته ثم ارسم الخط C

❺ أحسب مساحة السطح المحصور بين الخط C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=2\,,x=e$

❻ استنتج من الخط البياني C للتابع f الخط البياني للتابع $h(x)=\frac{1}{|xlnx|}$

الحل :

❶ دراسة التغيرات

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=-\infty\Rightarrow$ المستقيم الذي معادلته $x=0$ مقارب للخط C

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=-\infty\Rightarrow$ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=+\infty\Rightarrow$ المستقيم الذي معادلته $x=1$ مقارب للخط C

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{xlnx}\right)=0\Rightarrow$ المستقيم الذي معادلته $y=0$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$$f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{(xlnx)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow-1-\ln(x)=0\Rightarrow\ln(x)=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}\Rightarrow f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$-e$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

من جدول التغيرات نجد $f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$ قيمة حدية كبرى محلية

❷ **المماس عند** $x = e$ $m_T = f'(e) = \frac{-2}{e^2}$, $f(e) = \frac{1}{e}$ $\Longrightarrow y - 0 = \frac{-2}{e^2}(x - e) + \frac{1}{e}$

$$\Longrightarrow T\ : y = \frac{-2}{e^2}x + \frac{3}{e}$$

❸

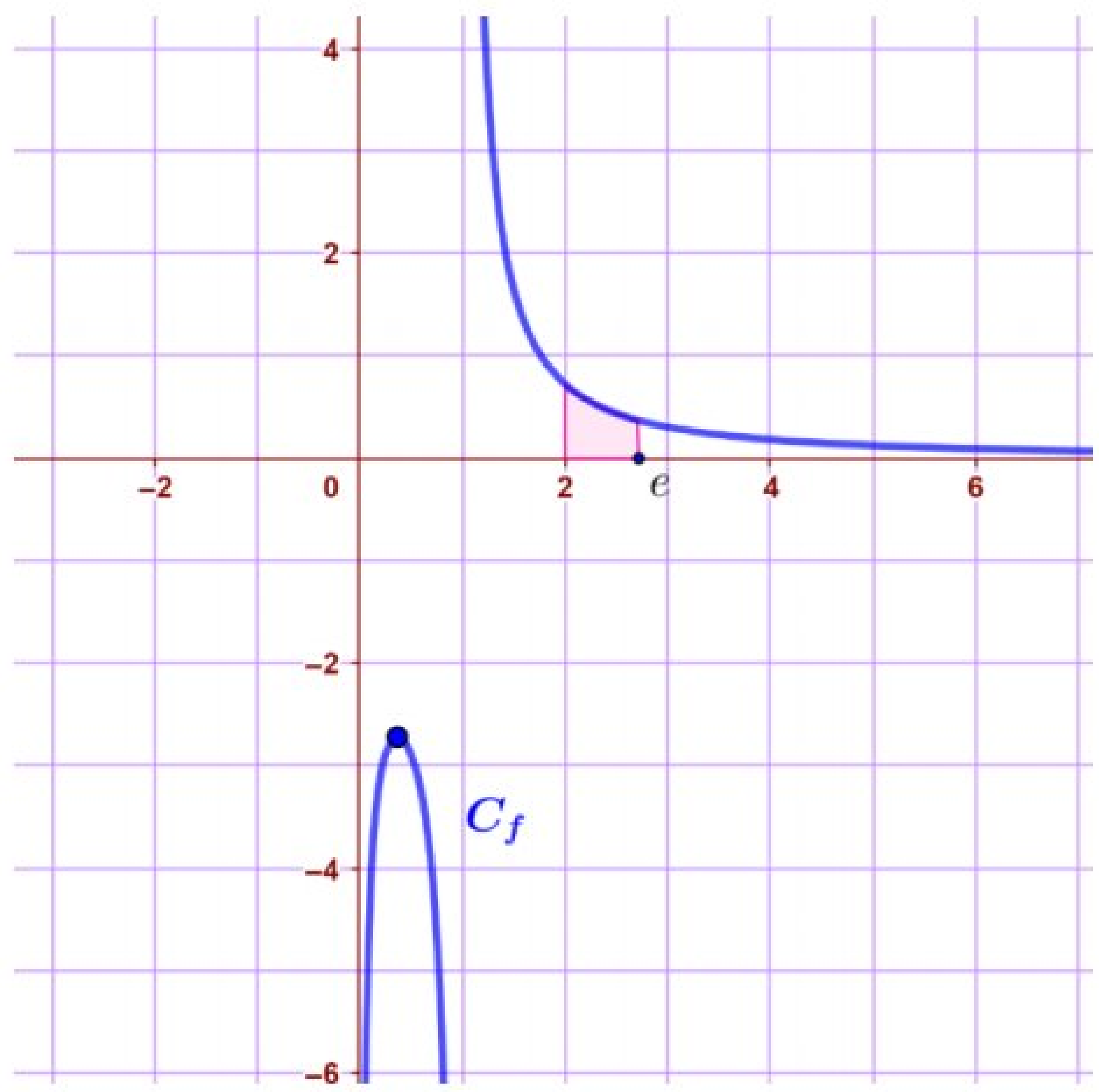
التابع $g(x) = ln(ln(x))$ **المعرف على** $]1, +\infty[$ **هو اشتقاقي على** $]1, +\infty[$

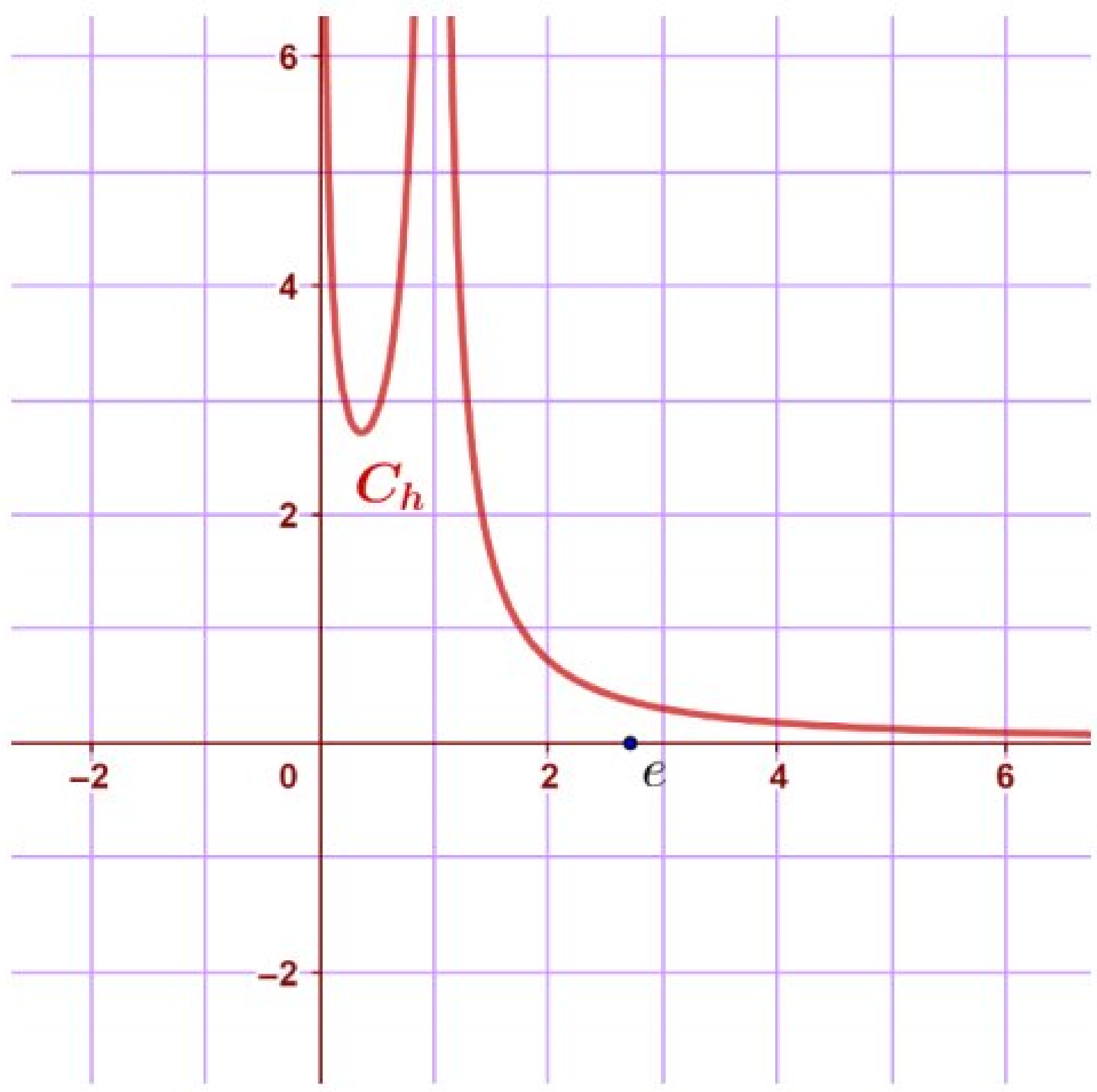
$$g'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{ln(x)} = \frac{1}{xlnx} = f(x)$$

فالتابع $g(x)$ **هو تابع أصلي للتابع** $f(x)$ **على المجال** $]1, +\infty[$

❹

الرسم:





❺

المساحة

$$S = \int_2^e f(x)dx = \int_2^e \left(\frac{1}{xlnx}\right)dx = [ln(ln(x))]_2^e = -lnln(2) = 0.36$$

❻

رسم h

ينتج C_h **من** C **بالحفاظ على النقاط ذات الترتيب الموجب**

وأخذ نظائر النقاط ذات الترتيب السالب بالنسبة لمحور الفواصل

المسألة 13 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]0, +\infty[$ وفق :

$$f(x) = x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$$

❶ **ادرس تغيّرات f ونظّم جدولاً بها.**

❷ **أثبت أنّ المستقيم $y = x - ln2$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$.**

❸ **ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d .**

❹ **أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$**

❺ **ارسم في معلمٍ واحد المستقيم d ثم الخط البياني C .**

فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$

الحل :

❶ **دراسة تغيّرات f**

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) = -\infty \Rightarrow$$ $x = 0$ **مقارب يوازي yy' للمنحني C**

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(x - ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)\right) = +\infty$$

$$f(x) = x - ln(2x+1) + ln(x) \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{2x+1} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x + 1}{x(2x+1)} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$
$f(x)$	||	$-\infty \nearrow +\infty$

❷ **إثبات المقارب المائل:**

$$f(x) - (x - ln2) = x - ln\left(\frac{2x+1}{x}\right) - x + ln2 = ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to +\infty}(f(x) - (x - ln2)) = \lim_{x\to +\infty} ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) = 0$$

إذاً d مقارب مائل في جوار $+\infty$

❸ لدراسة الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d ندرس إشارة الفرق

$$2x < 2x+1 \Rightarrow \frac{2x}{2x+1} < 1 \Rightarrow ln\left(\frac{2x}{2x+1}\right) < 0 \Rightarrow$$

$f(x)-(x-ln2) < 0 \Rightarrow$ و C يقع تحت المقارب d

❹ بما أنّ التابع مستمر ومتزايد تماماً

و $f(x)=0 \in]-\infty,+\infty[= f(]0,+\infty[)$

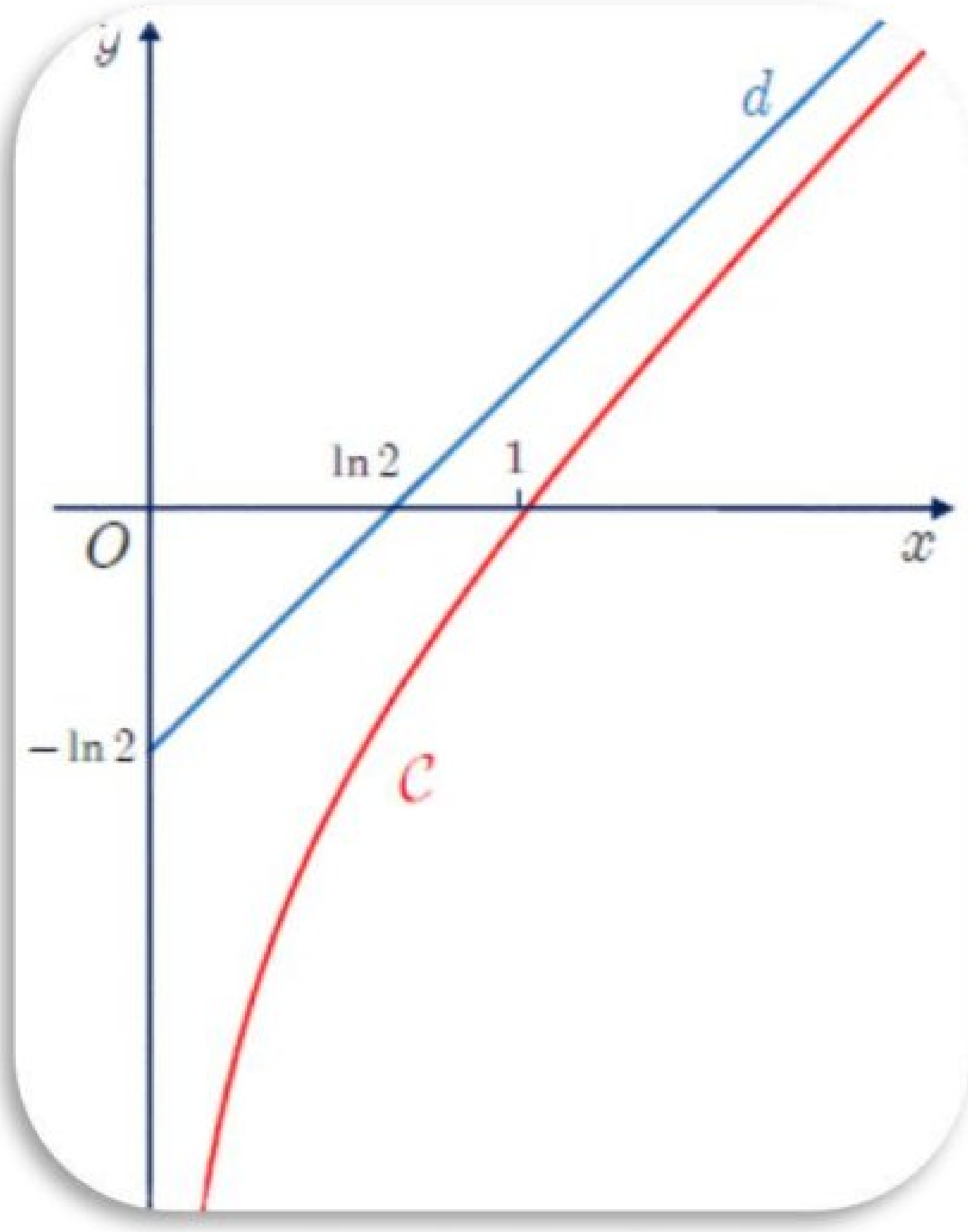
فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α

$$f(1) = 1 - ln3 = lne - ln3 < 0$$

$$f(2) = 2 - ln\left(\frac{5}{2}\right) > 2 - lne > 0$$

$$f(1)\times f(2) < 0$$

فإن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي إلى المجال $]1,2[$



وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

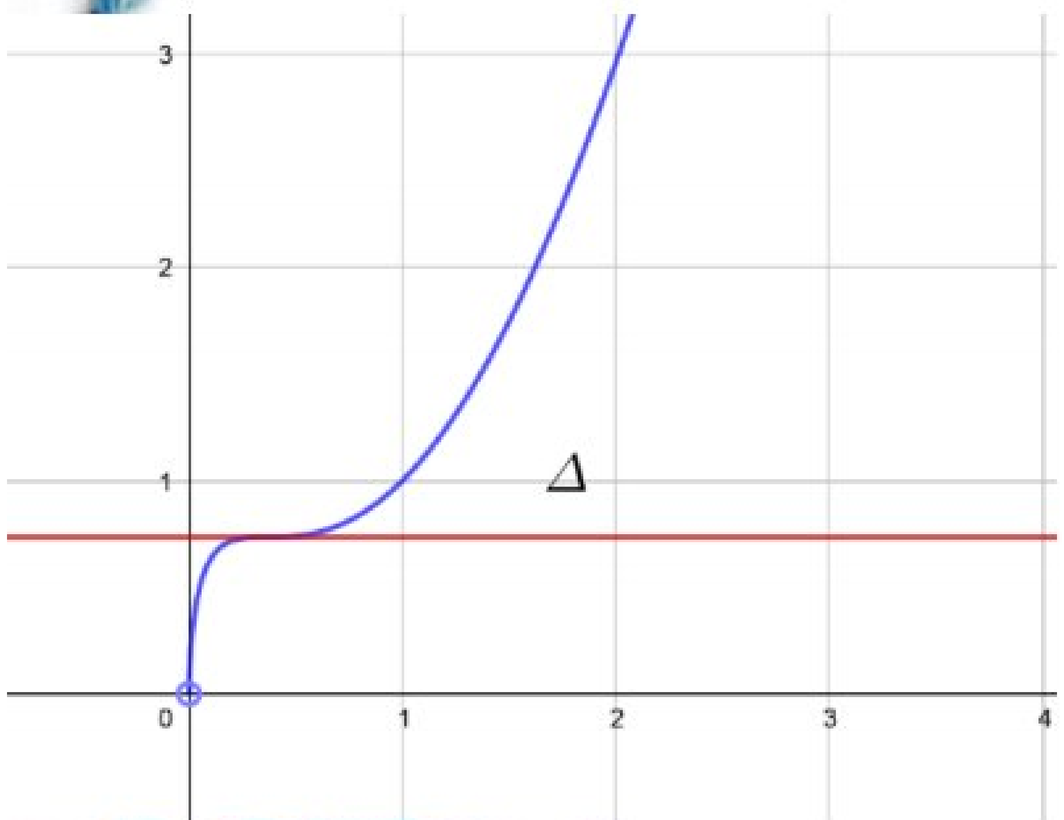
المسألة 14 : دورة 2017 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق :
$f(x) = x + x(\ln x)^2$
وليكن $g(x) = (\ln(x)+1)^2$ والمطلوب :
❶ أوجد نهاية التابع f عند الصفر وعند $+\infty$.
❷ أثبت أن $f'(x) = g(x)$.
❸ حل المعادلة $g(x) = 0$.
❹ نظم جدول تغيرات f .
❺ اكتب معادلة المماس Δ للخط C في نقطة فاصلتها $x = \frac{1}{e}$
وارسم المماس Δ وارسم C

الحل

❶ $f(x) = x + \left(\sqrt{x}\right)^2\left[\ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right]^2 = x + \left[2\sqrt{x}\ln\sqrt{x}^2\right]^2$
بما أن $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x}\ln\sqrt{x}\right) = \lim\limits_{u\to 0}(u\ln u) = 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 + 0 = 0$
و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
❷ التابع f معرف واشتقاقي على $I =]0,+\infty[$
$$f'(x) = 1 + (\ln x)^2 + 2(\ln x)\times\frac{1}{x}\times x = (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1$$
$$f'(x) = (\ln(x)+1)^2 = g(x)$$
❸ $g(x) = 0$ ومنه $\ln x = -1$ وبالتالي $x = \frac{1}{e}$
❹ $f'(x) = 0$ يقتضي $g(x) = 0$ ومنه $x = \frac{1}{e}$ وبالتالي $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{2}{e}\right)$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
f'	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ 0	↗	$\frac{2}{e}$	↗	$+\infty$



❺ من الجدول $f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{2}{e}\right)$ و $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, $(0,0)$نقطة مقاربة
معادلة المماس: $y = f\left(\frac{1}{e}\right) + f'\left(\frac{1}{e}\right)\left(x - \frac{1}{e}\right)$ ومنه $y = \frac{2}{e}$
$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x) - y_\Delta] = 0$

المسألة 15 : دورة 2018 الثانية

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x^2 - lnx$ والمطلوب :

❶ جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه.

❷ ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها .

❸ اكتب معادلة المماس T للخط البياني C في نقطة منه فاصلتها $x = 1$.

❹ في معلم متجانس ارسم المماس T والخط البياني C.

❺ احسب مساحة السطح المحصور بالخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيمين $x = e$, $x = 1$.

❻ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ حيث : $u_n = n^2 - ln(n)$. أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متزايدة

الحل

❶ المستقيم الذي معادلته $x = 0$ مقارب شاقولي للخط C

لدينا حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$$f(x) = x^2 - lnx = x^2\left(1 - \frac{lnx}{x^2}\right) = x^2\left(1 - \frac{1}{x}\frac{lnx}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

حيث $\left(\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{lnx}{x} = 0\right)$

❷ التابع f اشتقاقي على $]0,+\infty[$ ومشتقه:

$$f'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - 1}{x}$$

$$f'^{(x)} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}$$

إما $x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \notin]0,+\infty[$ مرفوض

أو $x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} - ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} - \left(ln1 - ln\sqrt{2}\right)$

$$= \frac{1}{2} + ln\frac{1}{\sqrt{2}}$$

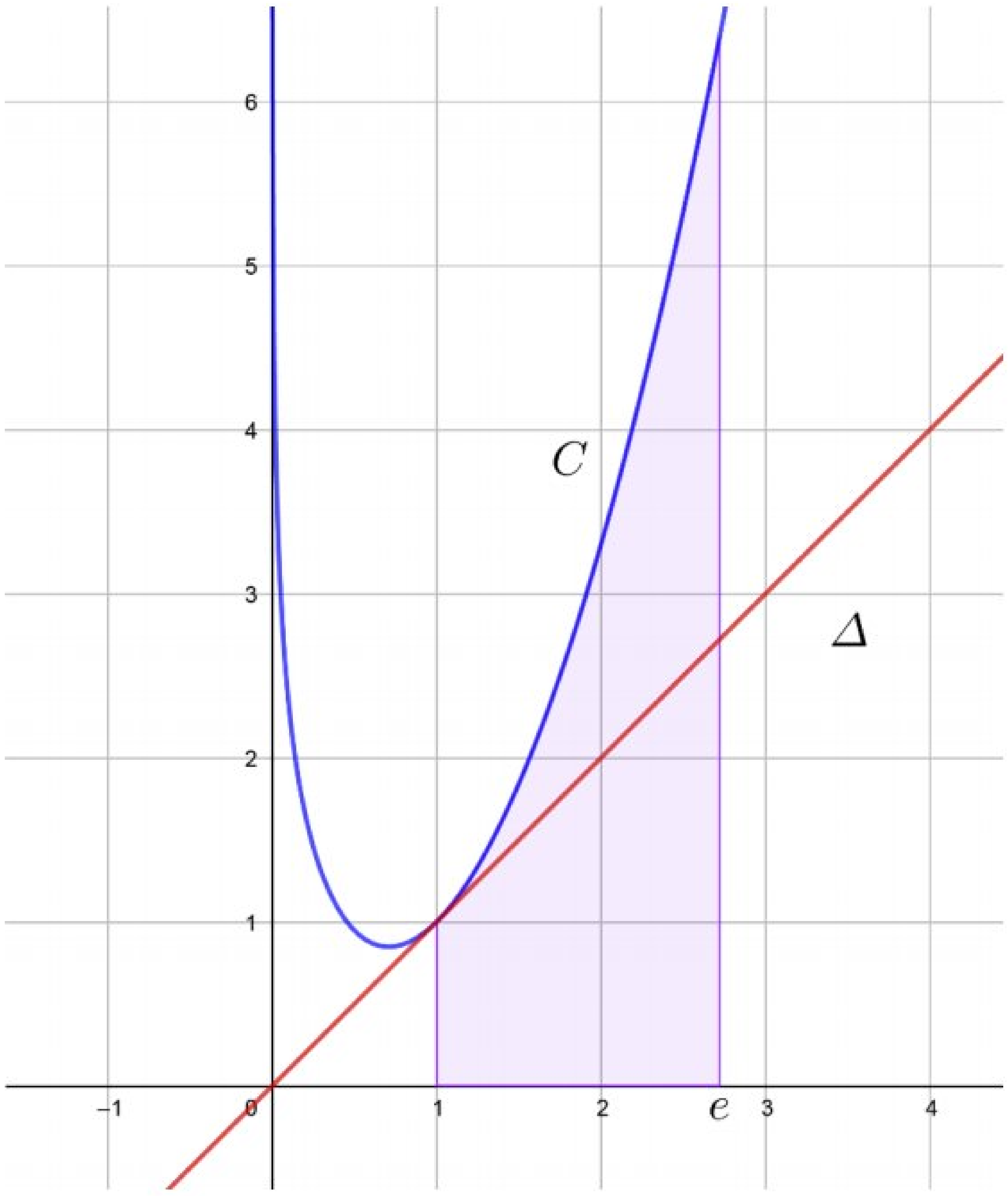
❸ $f(x) = x^2 - lnx \Rightarrow f(1)^2 - ln1 = 1$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x} \Rightarrow f'(1) = \frac{2(1)^2 - 1}{1} = 1$$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = 1(x-1) + 1 \Rightarrow y = x$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828



4 الرسم البياني:

5 حساب المساحة:

$$S=\int_1^e f(x)dx$$

$$S=\int_1^e (x^2-lnx)dx$$

$$S=\int_1^e x^2dx-\int_1^e lnxdx$$

$$S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-\int_1^e lnxdx$$

$$I=\int_a^b (u.v')=[u,v']_a^b-\int_a^b (u'.v)$$

$$u=lnx\ \to u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1\to\ v=x$$

$$I=[xlnx]_1^e-\int_1^e 1dx=[xlnx]_1^e-[xl]_1^e=[xlnx-x]_1^e$$

$$I=(elne-e)-(1ln1-1)=1$$

$$S=\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e-1=\left(\frac{e^3}{3}\right)-\left(\frac{1}{3}\right)-1=\frac{e^3-1-3}{3}=\frac{e^3-4}{3}$$

6 نلاحظ أن $u_n=f(n)$ **حيث** $f(x)=x^2-lnx$

ومن جدول التغيرات نلاحظ أن التابع f **مستمر ومتزايد على** $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right[$ **فهو متزايد على** $[1,+\infty[$ **وبالتالي فالمتتالية** $(u_n)_{n\geq1}$ **متزايدة .**

وسيم فاطمة	زياد داوود	أحمد الشيخ عيسى	مروان بجور
اللاذقية 0936497038	سلمية 0936834268	الرقة 0988024183	حمص 0930170828

المسألة 16 : الاختبار 3

ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ وفق: $f(x)=\frac{1}{x(1-lnx)}$

❶ ادرس تغيّرت التابع f ونظّم جدولاً بها واستنتج ما للخط (C) من مقاربات موازية للمحورين الإحداثيين. وعيّن قيمته الحدّيّة مبيّناً نوعها.

❷ ارسم ما وجدّته من مستقيمات مقاربة ثمّ ارسم (C).

❸ احسب مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين $x=\frac{1}{e}$ و $x=\frac{1}{e^2}$

الحل:

$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x-xlnx}=\frac{1}{0^+-0^-}=+\infty$ والمستقيم $x=0$ مقارب منطبق على yy' عند $+\infty$

$\lim_{x\to e^-} f(x)=\lim_{x\to e^-}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ والمستقيم $x=e$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

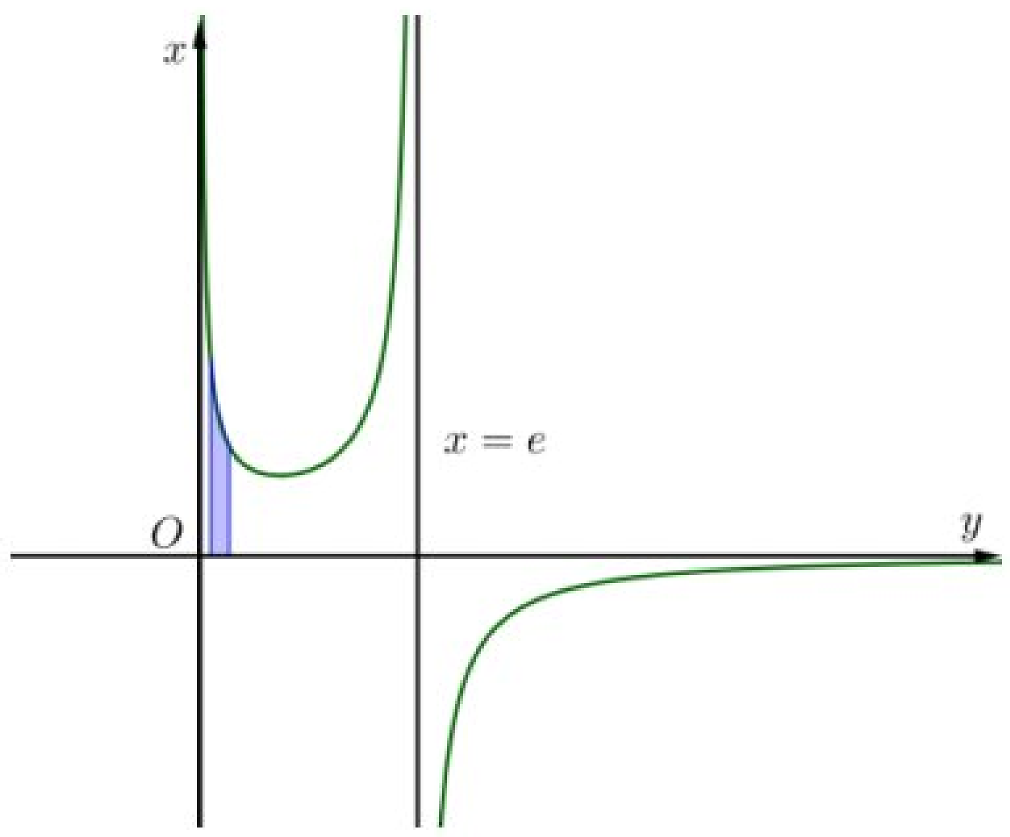
$\lim_{x\to e^+} f(x)=\lim_{x\to e^+}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{0^-}=-\infty$ والمستقيم $x=e$ مقارب يوازي yy' عند $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x(1-lnx)}=\frac{1}{+\infty}=0$ والمستقيم $y=0$ مقارب منطبق على xx' في جوار $+\infty$.

$$f'(x)=\frac{0-(1-lnx)+1}{x^2(1-lnx)^2}=\frac{lnx}{x^2(1-lnx)^2}$$

إشارة f' من إشارة lnx الذي ينعدم عند $x=1$ ويكون $f(1)=1$

x	0			1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	‖	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	0



$$S=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}} f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{1}{x(1-lnx)}dx=-\int_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}\frac{-\frac{1}{x}}{1-lnx}dx=-[\ln(1-lnx)]_{\frac{1}{e^2}}^{\frac{1}{e}}$$

$$=-(ln2-ln3)=ln\frac{3}{2}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 17 : الاختبار 4

أولاً: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $f(x) = x.(lnx)^2$

❶ أثبت أن $f(x)$ يُكتب بالشكل : $f(x) = 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2$

❷ ادرس تغيّرات التابع f ونظّم جدولاً بها.

ثانياً: ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرّف على $]0,+\infty[$ وفق: $g(x) = -2xlnx$

أثبت أنّه عند $x > 1$ يكون $f(x) - g(x) = xf'(x)$ واستنتج الوضع النسبي للخطّين C_f و C_g .

ثالثاً: ليكن x_0 من $]0,+\infty[$.

❶ بيّن أنّ معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة التي فاصلتها x_0 هي

$$y = xf'(x_0) + g(x_0)$$

❷ ادرس تقاطع المماس T مع محور التراتيب،

ثمّ استنتج طريقة لإنشاء المماس للمنحني C_f عند النقطة التي فاصلتها x_0.

الحل:

أولاً:

$$f(x) = x.(lnx)^2$$

❶ $f(x) = x.(lnx)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(ln\left(\sqrt{x}\right)^2\right)^2 = \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2ln\sqrt{x}\right)^2$

$$= 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2$$

❷ $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} 4\left(\sqrt{x}.ln\sqrt{x}\right)^2 = 0$

$(0,0)$ **نقطة مقاربة.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}[x.(lnx)^2] = +\infty$$

$$f'(x) = (lnx)^2 + 2x\frac{1}{x}lnx = (lnx)^2 + 2lnx = lnx(lnx+2)$$

إشارة f' من إشارة $(lnx)^2 + 2lnx$ الذي ينعدم عند:

$lnx = 0 \quad \Rightarrow x = 1 \qquad f(1) = 0$

$lnx = -2 \quad \Rightarrow x = \frac{1}{e^2} \qquad f\left(\frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2}$

x	0		$\frac{1}{e^2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

ثانياً: **ليكن** C_f **الخط البياني للتابع** f **المعرّف على** $]0,+\infty[$ **وفق:** $g(x) = -2xlnx$ **أثبت أنّه**

عند $x > 1$ **يكون** $f(x) - g(x) = xf'(x)$ **واستنتج الوضع النسبي للخطّين** C_f **و** C_g .

$$f(x) - g(x) = x.(lnx)^2 + 2xlnx = x[(lnx)^2 + 2lnx] = xf'(x)$$

نلاحظ أنّه عندما $0 < x < \frac{1}{e^2}$ **فإنّ** $f'(x) > 0$ **وبالتالي** C_f **فوق** C_g **وعندما** $\frac{1}{e^2} < x < 1$

فإنّ $f' < 0$ **وبالتالي** C_f **تحت** C_g **وعندما** $x > 1$ **فإنّ** $f' > 0$ **وبالتالي** C_f **فوق** C_g.

ثالثاً: **ليكن** x_0 **من** $]0,+\infty[$.

❶ $m = f'(x_0) = (lnx_0)^2 + 2lnx_0$

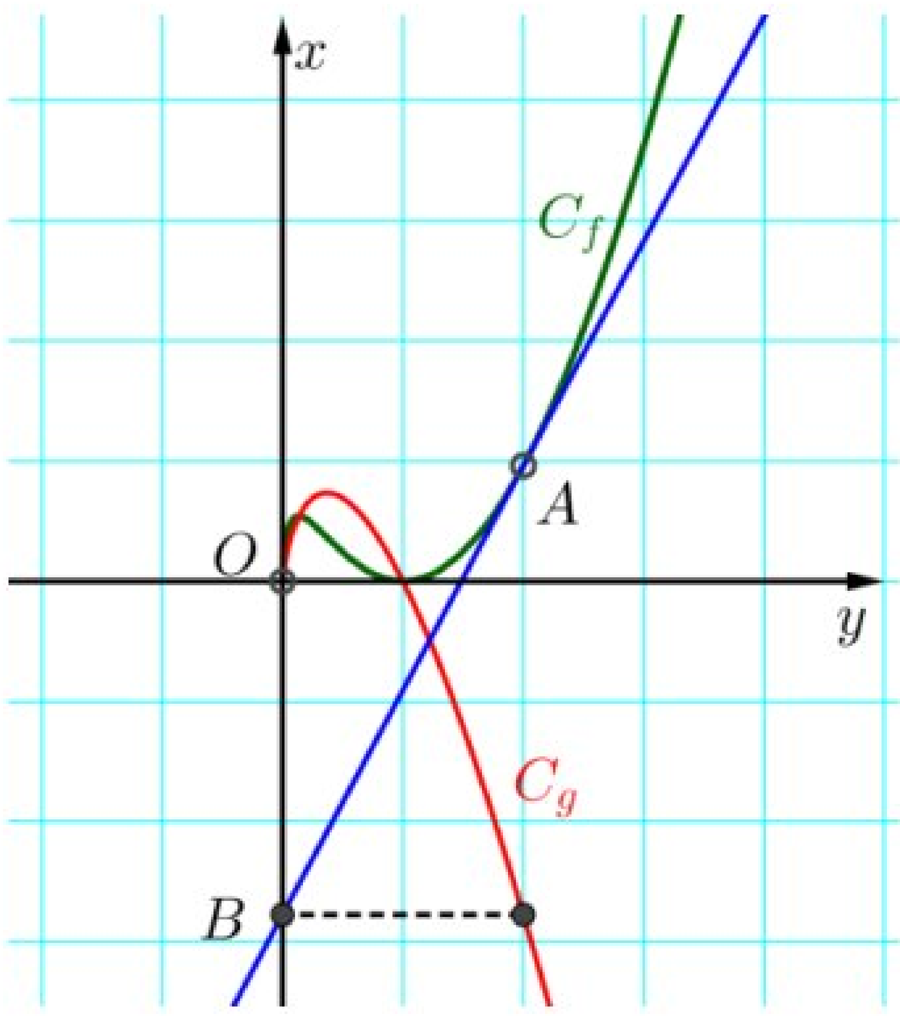
$$T: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = xf'(x_0) - x_0f'(x_0) + f(x_0)$$
$$= xf'(x_0) + g(x_0)$$

وذلك بالاستفادة من الطلب السابق

❷ $x = 0 \Longrightarrow y = g(x_0)$

ولإنشاء المماس في نقطة $A(x_0, f(x_0))$ **نعيّن على محور التراتيب النقطة** $B(0, g(x_0))$

ثمّ نصل بين النقطتين A **و** B **ونمدّد.**



المسألة 18 :

ليكن C الخط البياني للتابع f في معلم متجانس والمعرّف على $D_f = \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$ وفق :

$$f(x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right|$$

❶ a. أثبت انّ : $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$ أياً يكن x من D_f .

b. استنتج انّ النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ هي مركز تناظر الخط C .

❷ ادرس تغيرات f على مجموعة تعريفه .

❸ أثبت انّ المستقيم d الذي معادلته $y = -\frac{1}{2}x$ مقارب للخط C . وادرس الوضع النسبي للخط C بالنسبة إلى مقاربه d .

❹ ارسم في معلم واحد d ثم C .

الحل

❶ a . $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\} \Rightarrow 1-x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\} \Rightarrow x \in D_f \Rightarrow 1-x \in D_f$

$$f(x)+f(1-x) = -\frac{x}{2} + ln\left|\frac{x-1}{x}\right| - \frac{1-x}{2} + ln\left|\frac{1-x-1}{1-x}\right| = -\frac{1}{2} + ln\left(\left|\frac{x-1}{x}\right| . \left|\frac{x}{x-1}\right|\right) = -\frac{1}{2}$$

ومنه نستنتج أنّ $\frac{f(x)+f(1-x)}{2} = -\frac{1}{4}$

b . مما سبق وجدنا : $x_0 = \frac{1}{2}\ \ , y_0 = \frac{-1}{4}$

$x \in D_f \Rightarrow 1-x \in D_f$ وهذا يعطي تحقق الشرط $x \in D_f \Rightarrow 2x_0 - x \in D_f$

$f(x)+f(1-x) = \frac{-1}{2}$ وهذا يعطي تحقق الشرط $f(2x_0-x) - f(x) = 2y_0$

وبالتالي تكون النقطة $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ مركز تناظر للخط C

❷ نكتب التابع بدون قيمة مطلقة :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\frac{x-1}{x}$	+	‖	− 0 +	

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right) & x \in]-\infty, 0[\cup]+1, +\infty[\\ -\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x} & x \in]0, +1[\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = +\infty + 0 = +\infty$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = 0 + \infty = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = -\infty$$

وسيم فاطمة — زياد داوود — أحمد الشيخ عيسى — مروان بجور
اللاذقية 0936497038 — سلمية 0936834268 — الرقة 0988024183 — حمص 0930170828

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2} + ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right) = -\infty + 0 = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(-\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x}\right) = 0 + \infty = +\infty \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\left(-\frac{x}{2} + ln\frac{1-x}{x}\right) = -\infty$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{2} + \dfrac{1}{x(x-1)} = \dfrac{x^2-x-2}{2x(1-x)} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x(1-x)} & x \in]-\infty, 0[\cup]+1, +\infty[\\ \dfrac{-1}{2} - \dfrac{1}{x(1-x)} = \dfrac{x^2-x-2}{2x(1-x)} = \dfrac{(x-2)(x+1)}{2x(1-x)} & x \in]0, +1[\end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{1}{2} + \ln 2 \\ x = 2 \Rightarrow f(2) = -1 - \ln 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2} + \ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-1 - \ln 2$	$\searrow$	$-\infty$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = ln\left|\frac{x-1}{x}\right| \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to-\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to+\infty} ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0$$

المستقيم $y = -\frac{1}{2}x$ **مقارب مائل للخط البياني للتابع في جوار** $-\infty$ **و** $+\infty$

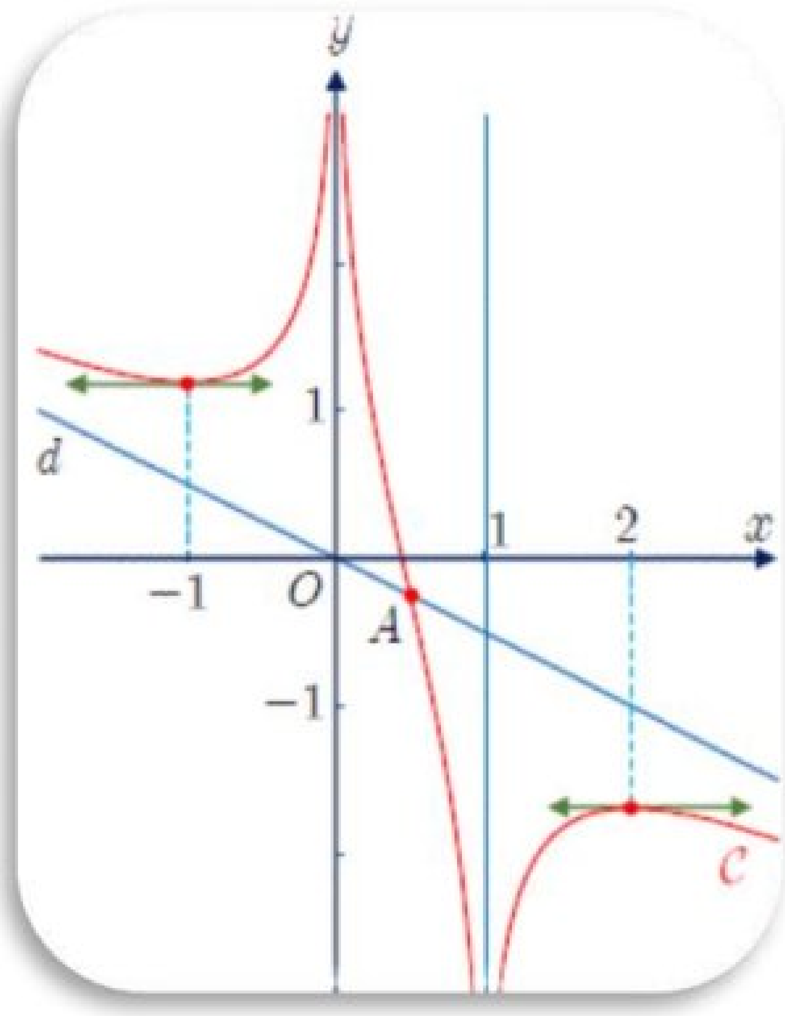
لدراسة الوضع النسبي بين المقارب المائل والخط البياني ندرس إشارة الفرق $f(x) - \frac{1}{2}x$

$$f(x) - x = 0 \Rightarrow ln\left|\frac{x-1}{x}\right| = 0 \Rightarrow \left|\frac{x-1}{x}\right| = 1$$

$\frac{x-1}{x} = 1 \Rightarrow x - 1 = x$ **مستحيلة الحل**

$\frac{x-1}{x} = -1 \Rightarrow x - 1 = -x \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	0		$\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f(x) - x$	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$
الوضع النسبي	**C فوق d**	‖	**C فوق d**		**C تحت d**	‖	**C تحت d**



وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 19 :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $I =]1, +\infty[$ وفق:

$$f(x) = x + ln(x^2 - 1)$$

❶ **أثبت أنّ f متزايد تماماً على I.**

❷ **أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α .**

❸ **أثبت أنّ $1 < \alpha < \sqrt{1 + e^{-1}}$.**

الحل:

① $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} = \frac{x^2+2x-1}{x^2-1}$

$x^2 + 2x - 1 = 0 \Longrightarrow \Delta = 4 - 4(1)(-1) = 8 \Longrightarrow \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \Longrightarrow$

$x_1 = \dfrac{-2 - 2\sqrt{2}}{2} = -1 - \sqrt{2} \notin I \quad , \quad x_2 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2} \notin I$

$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x_1 = -1 \notin I \quad , \quad x_2 = 1 \notin I$

بالتالي $f'(x)$ **من اشارة واحدة في المجال** $I =]1, +\infty[$ **وبتعويض قيمة من المجال نجد:**

والتابع f **متزايد تماماً على** I $\Longleftarrow$ $f'(2) = \frac{4+4-1}{4-1} = \frac{7}{3} > 0 \Longrightarrow$

طريقة ثانية : $f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1}$

بما أن $x > 1$ **فإن** $\frac{2x}{x^2-1} > 0$ **لأن كل من البسط والمقام موجب تماما على** $I =]1, +\infty[$

وبالتالي $1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0 \Longrightarrow f'(x) > 0$ **ومنه نجد أن التابع متزايد تماما على** $I =]1, +\infty[$

② $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 1 - \infty = -\infty \quad , \quad \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

وبما أنّ التابع متزايد تماماً فيصبح جدول التغيرات :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

$f(x)$ **مستمر ومتزايد تماما على** $I =]1, +\infty[$

$0 \in]-\infty, +\infty[= f(]1, +\infty[)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ **حل وحيد** $\alpha \in]1, +\infty[$

③ **أثبت أنّ** $1 < \alpha < \sqrt{1 + e^{-1}}$.

③ $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = -\infty < 0$ **و** $f\left(\sqrt{1 + e^{-1}}\right) = \sqrt{1 + e^{-1}} + lne^{-1} = \sqrt{1 + e^{-1}} - 1 > 0$

$f(x)$ **مستمر ومتزايد تماما على** $I = \left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[$

$0 \in \left]-\infty, \sqrt{1 + e^{-1}} - 1\right[= f\left(\left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[\right)$

بالتالي للمعادلة $f(x) = 0$ **حل وحيد** $\alpha \in \left]1, \sqrt{1 + e^{-1}}\right[$ **وبالتالي** $1 < \alpha < \sqrt{1 + e^{-1}}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 20 :

ليكن C الخط البياني للتابع g المعرّف على $[0\,,+\infty[$ وفق :

$g(0)=0$ و $g(x)=\frac{x}{x-\ln x}$ في حالة $x>0$

❶ تيقن أن $g(x)$ معرف في حالة $x>0$

❷ أثبت أن g مستمر عند الصفر

❸ أدرس قابلية اشتقاق g عند الصفر وعين ان أمكن المماس للخط عند مبدأ الاحداثيات

❹ جد نهاية g عند $+\infty$

❺ أحسب $g'(x)$ في حالة $x>0$ ثم أدرس g

❻ أعط معادلة للمماس $\mathcal{T}$ للخط C في النقطة التي فاصلتها 1

الحل :

❶ ليكن التابع f المعرّف على $]0\,,+\infty[$ وفق :

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=x-\ln x$$

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x-1}{x}=0\Rightarrow x=1\Rightarrow\boldsymbol{f}(\boldsymbol{1})=1$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	‖ $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ $\searrow$	1	$\nearrow$

من جدول اطراد f نجد في حالة $x>0$ يكون $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\geq 1$ ومنه, $x-\ln x\geq 1$

اذن مقام g لا ينعدم في حالة $x>0$ والتابع g معرف في هذه الحالة

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

طريقة ثانية

نعلم أن الخط البياني للتابع اللوغاريتمي يقع تحت مماساته

فهو يقع تحت مماسه في النقطة التي فاصلتها $x = 1$ أي تحت المستقيم $y = x - 1$

بالتالي في حالة $x > 0$ يكون $\ln x \leq x - 1 \Rightarrow x - \ln x \geq 1$

اذن مقام g لا ينعدم في حالة $x > 0$ والتابع g معرف في هذه الحالة

❷

$$\lim_{x\to 0^+}(x - \ln x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} g(x) = 0 \quad , \quad g(0) = 0$$

بالتالي $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ فالتابع g مستمر عند الصفر

❸

$$t(x) = \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\frac{x}{x - \ln x} - 0}{x} = \frac{1}{x - \ln x} \quad \Rightarrow \lim_{x\to 0} t(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x - \ln x} = 0$$

وبالتالي التابع g اشتقاقي عند الصفر و $g'(0) = 0$ ولدينا $g(0) = 0$

بالتالي $y = 0$ أي محور الفواصل هو مماس لخط التابع g في المبدأ

❹ $$\lim_{x\to +\infty} g(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x}{x - \ln x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\ln x}{x}} \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} g(x) = 1$$

❺ في حالة $x > 0$ يكون $g'(x) = \frac{x - \ln x - x\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{(x - \ln x)^2} = \frac{1 - \ln x}{(x - \ln x)^2}$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e \Rightarrow g(e) = \frac{e}{e - 1}$$

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{e}{e-1}$	$\searrow$	1

❻ $x = 1 \Rightarrow g(1) = \frac{1}{1-0} = 1 \quad , \quad g'(1) = 1$

معادلة المماس $y = g(1) + g'(1)(x - 1) \Rightarrow y = x$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

تمرين اضافي :

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرّف على $\mathbb{R}_+^*$ وفق: $f(x) = \ln x + 1 - x$

أولا :

❶ أثبت أن $\ln x \le x - 1$

❷ في حالة $t > -1$ أثبت أن $\frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$

❸ ليكن p عددا طبيعيا موجبا تماما أثبت أن $\frac{1}{p+1} \le \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$

❹ نعرف المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$ بالعلاقة : $u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$

أثبت أن $u_n \le \ln 2 \le u_n + \frac{1}{2n}$ ثم استنتج نهاية المتتالية $(u_n)_{n\ge1}$

الحل :

❶

$$\ln x \le x - 1 \Rightarrow \ln x + 1 - x \le 0 \Rightarrow f(x) \le 0$$

ندرس اطراد التابع $f(x) = \ln x + 1 - x$ المعرّف على $]0\,,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

إشارة f' من إشارة $1 - x$ الذي ينعدم عند $x = 1$ ويكون $f(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	$\nearrow$	0	$\searrow$	

نلاحظ من جدول الاطّراد أنّ $f(x) \le 0$ أيّاً كان $x \in]0,+\infty[$ بالتالي $\ln x \le x - 1$

❷ في حالة $t > -1$ نعوض في المتراجحة $\ln x \le x - 1$ مايلي :

$$x = 1 + t > 0 \Rightarrow \ln(1+t) \le t \quad ①$$

$$x = \frac{1}{1+t} > 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{1+t}\right) \le \frac{1}{1+t} - 1 \Rightarrow -\ln(1+t) \le -\frac{t}{1+t} \Rightarrow$$

$$\ln(1+t) \ge \frac{t}{1+t} \quad ②$$

من ① و ② نجد $\frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$

❸ ليكن $t = \frac{1}{p}$ ولنعوض في المتراجحة $\frac{t}{1+t} \le \ln(1+t) \le t$ فيكون

$$\frac{\frac{1}{p}}{1+\frac{1}{p}} \le \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \le \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \le \ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \le \frac{1}{p}$$

④ بالاستفادة من المتراجحة $\frac{1}{p+1} \leq ln\left(\frac{p+1}{p}\right) \leq \frac{1}{p}$

أولا بأخذ الطرف الايسر $\frac{1}{p+1} \leq ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ نجد :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{(n)+1} + \frac{1}{(n+1)+1} + \cdots + \frac{1}{(2n-1)+1}$$

$$u_n \leq ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) + \ldots + ln\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right) \Rightarrow$$

$$u_n \leq ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right) \Rightarrow u_n \leq ln\frac{2n}{n} \Rightarrow$$

$$u_n \leq ln\,2 \quad ①$$

ثانيا بأخذ الطرف الايمن $\frac{1}{p} \geq ln\left(\frac{p+1}{p}\right)$ نجد :

$$u_n + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_n + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

$$u_n + \frac{1}{2n} \geq ln\left(\frac{n+1}{n}\right) + ln\left(\frac{n+1+1}{n+1}\right) + \ldots + ln\left(\frac{2n-1+1}{2n-1}\right)$$

$$u_n + \frac{1}{2n} \geq ln\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) \times \ldots \times \left(\frac{2n}{2n-1}\right)\right) \Rightarrow u_n + \frac{1}{2n} \geq ln\frac{2n}{n} \Rightarrow$$

$$u_n + \frac{1}{2n} \geq ln\,2 \quad ②$$

من ① و ② نجد $u_n \leq ln\,2 \leq u_n + \frac{1}{2n}$ ومن ثم بإمكاننا أن نكتب

$$ln\,2 - \frac{1}{2n} \leq u_n \leq ln\,2$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(ln\,2 - \frac{1}{2n}\right) = ln\,2$ بالتالي حسب مبرهنة الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = ln\,2$