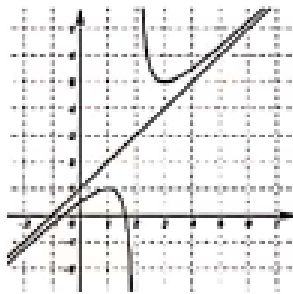


أولاً: أجب عن سوالين من الأسئلة الثلاثة الآتية (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: في الشكل المرسوم جنباً، ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ ، والمطلوب:



1- جذ  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$  و  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ .

2- دلّ على قيم الحفظة للتابع وبين نوعها.

3- ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$ .

4- اكتب معادلة المقارب المائل.

5- اذكر إحداثيات النقطة  $I$  مركز تناظر الخط البياني  $C_f$ .

السؤال الثاني: ليكن  $f$  التابع المعرف على  $\mathbb{R}$  وفق:  $f(x) = \cos x$

1- جذ  $f(\frac{\pi}{4})$  و  $f'(x)$  و  $f'(\frac{\pi}{4})$ .

2- استنتج قيمة النهاية  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{4}}$ .

السؤال الثالث: حلّ المتراجحة  $e^x - 1 \leq 6e^{-x}$ .

ثانياً: أجب عن سوالين من الأسئلة الثلاثة الآتية (45° درجة لكل سؤال)

السؤال الأول: ادرس وضع المستقيمين  $d$  و  $d'$  المعرفين كما يأتي:

$$d' : \begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} ; s \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d : \begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$$

السؤال الثاني: جذ الجذرين التربيعين للعدد العقدي  $z = 8 - 6i$ .

السؤال الثالث: عيّن قيمة  $n$  في المعادلة الآتية:  $P_{n+2}^1 = 45P_{n+1}^1$ .

ثالثاً: حلّ التصارين الثلاثة الآتية (80° درجة لأول - 70° درجة لثاني - 70° درجة لثالث).

التصارين الأول: في الشكل المجاور  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  هي القواسم الأساسية للزوايا الموجهة  $(\overline{OC}, \overline{OE})$  و  $(\overline{AC}, \overline{AE})$  و  $(\overline{BC}, \overline{BD})$  بالتوازي، والمطلوب:



1- اكتب كلّاً من الأعداد العنقودية الآتية بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي:  $z_{\overline{OC}}$  و  $z_{\overline{AC}}$  و  $z_{\overline{BC}}$ .

2- اكتب العدد العقدي  $z_{\overline{OE}}$ ،  $z_{\overline{AE}}$ ،  $z_{\overline{BE}}$  بالشكل الجبري ثم بالشكل الأسّي.

3- استنتج المجموع  $\alpha + \beta + \gamma$ .

التمرين الثاني: ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرّف على  $]-2, 2[$  وفق  $f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{-x+2}\right)$  والمطلوب:

1- أثبت أنّ التابع  $f$  هو تابع فردية ثم ادرس تغيرات التابع على المجال  $]-2, 2[$ .

2- اكتب معادلة المماس  $T$  للخط البياني  $C_f$  في نقطة منه لاصليتها  $x = 0$ .

3- ادرس الوضع النسبي بين  $C_f$  و  $T$ .

التمرين الثالث: ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرّف على  $\mathbb{R}$  وفق  $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 5}$  والمطلوب:

1- ادرس تغيرات  $f$  ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ للمعادلة  $f(x) = 0$  تقبل حلاً وحيداً  $\alpha$  يقع في المجال  $]-2, 2[$ ، ثم جد هذا الحل جبرياً.

3- استنتج مشتق التابع  $g$  المعرّف على  $\mathbb{R}$  وفق  $g(x) = 2\sin x - \sqrt{\sin^2 x + 5}$ .

رابعاً: حل المسألتين الآتيتين ( $100^\circ$  درجة لكل مسألة).

المسألة الأولى: ليكن  $C_f$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرّف على  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$  والمطلوب:

1- ادرس تغيرات  $f$  ونظّم جدولاً بها.

2- أثبت أنّ المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = \frac{1}{2}x$  يقارب مثل الخط  $C_f$ ، ثم ادرس الوضع النسبي.

3- حل المعادلة  $f(x) = x$ .

4- امكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية معرّفة تدرجياً بالشكل  $u_0 = 4$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$  عند كل  $n \in \mathbb{N}$ ، والمطلوب:

a- احسب  $u_1$  و  $u_2$ .

b- استنتج من تزايد التابع  $f$  على المجال  $]2, +\infty[$  صحة الخاصية  $2 < u_{n+1} < u_n$  وذلك من أجل  $n \in \mathbb{N}$ .

c- استنتج أنّ المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة، واحسب نهايتها.

d- ارسم مقاربات  $C_f$  وارسم المستقيم  $\Delta: y = x$ ، ثم ارسم  $C_f$  ومثل الحدود الأولى للمتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  على الرسم نفسه.

المسألة الثانية: ليكن  $ABCDEFGH$  مكعباً طول حرفه يساوي 4، وتكون النقطة  $I$  منتصف  $[AB]$  والنقطة  $J$  تحقق العلاقة  $4\overline{AJ} = 3\overline{AD}$ .  
تأمل المعلم المتجانس  $(A, \frac{1}{3}\overline{AB}, \frac{1}{3}\overline{AD}, \frac{1}{3}\overline{AE})$ ، والمطلوب:

1- جد إحداثيات رؤوس المكعب والتقطين  $I$  و  $J$ .

2- أثبت أنّ معادلة المستوي  $(EIJ)$  هي  $6x + 4y + 3z - 12 = 0$ .

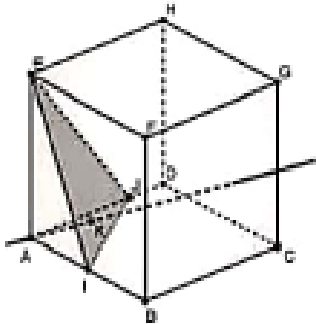
3- اكتب التمثيل الوسيط للمستقيم  $d$  المار من  $A$  وصورياً على المستوي  $(EIJ)$ ، ثم جد

إحداثيات النقطة  $K$  نقطة تقاطع  $d$  مع  $(EIJ)$ .

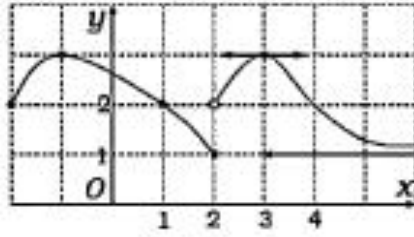
4- احسب مساحة المثلث  $A EJ$  ثم استنتج حجم رباعي الوجود  $I - A E J$ .

5- احسب بُعد  $A$  عن المستوي  $(EIJ)$  واستنتج مساحة المثلث  $EIJ$ .

انتهت الأسئلة



أولاً اجب عن سوالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المرسوم جانباً

1. جد  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(f(x))$

2. هل  $f$  اشتقاقي عند 2؟

3. جد  $f(3)$ ,  $f'(3)$  وجد معادلة للمماس عند 3.

4. ما عدد القيم الحدية للتابع  $f$ ؟

السؤال الثاني. لتكن المتتاليتين  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  المعرفتين وفق العلاقتين:  $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$  و  $v_n = -\frac{1}{n}$ 

1. ادرس اطراد كل من  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$

2. أثبت أن المتتاليتين  $(u_n)_{n \geq 1}$  و  $(v_n)_{n \geq 1}$  متجاورتان .

السؤال الثالث. حل المعادلة  $(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) = 0$  ثم حل المتراجحة  $(e^x - 1)\left(e^x - \frac{1}{2}\right) \leq 0$

ثانياً اجب عن سوالين من بين الأسئلة الثلاثة الآتية. (45° لكل سؤال)

السؤال الأول. ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4. فيه  $I$  منتصف  $[CD]$ .

1. وضع النقطة  $M$  المحققة للعلاقة  $\overline{AM} = \frac{1}{2}\overline{AD} + \frac{1}{2}\overline{AC} - \overline{BI}$

2. احسب العدد  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

السؤال الثاني.

1. جد المجموع  $S = 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6$  بدلالة  $\alpha$

2. ليكن  $\alpha = e^{2i\pi/7}$ . أثبت أن  $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^6 = 0$

السؤال الثالث. يريد طالب أن يدرس مواد السبعة بشكل متتابع.

1. بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد لدرستها.

2. بكم طريقة يمكن أن يرتب المواد إذا كانت المادة الأولى هي الرياضيات والأخيرة هي الفيزياء.

ثالثاً حل التعارين الثلاثة الآتية. (70° لأول، 70° للثاني، 80° للثالث)

التعريف الأول. ليكن التابع  $f$  المعرفة على  $[0, +\infty[$  والمعطى بالعلاقة  $f(x) = \sqrt{x} \ln(1+x)$ 

1. أثبت أن  $f$  اشتقاقي عند 0 ثم استنتج مجموعة تعريف  $f'$

2. جد  $f'(x)$  على  $]0, +\infty[$

3. استنتج مشتق التابع  $g$  المعرفة على المجال  $]0, \frac{\pi}{2}[$  وفق  $g(x) = \sqrt{\cos x} \ln(1 + \cos x)$

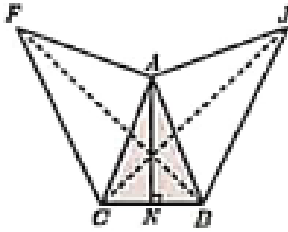
تابع في الصفحة الثانية.

**المعبرون الثاني:** لنكن النقاط  $A(1,-1,2)$  و  $B(2,1,0)$  و  $C(2,3,-1)$  و  $D(0,0,2)$  والمطلوب:

1. عين إحداثيات  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتتلة  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(C,2)$  و  $(D,1)$ .

2. حدد  $S$  مجموعة النقاط  $M$  التي تحقق:  $\|\overline{MA} + 2\overline{MB} + 2\overline{MC} + \overline{MD}\| = 6$

3. جد معادلة المجموعة  $S$ .



**المعبرون الثالث:** ليكن  $ABC$  مثلثاً متساوي الساقين، رأسه  $A$ . ننتش خارجه

متثلين قائمين ومتساوي الساقين  $ABJ$  و  $ACF$ . لنكن الأعداد العتية

$a, b, c, j, f$  المسئلة للنقاط  $A, B, C, J, F$  بالتقريب.

1. جد بدلالة  $b$  و  $c$  العتدين  $j$  و  $f$ .

2. اكتب العدد  $\frac{f-b}{c-j}$  بالشكل الجبري.

3. أثبت أن  $JC = BF$ ، وأن المستقيمين  $(CJ)$  و  $(BF)$  متعامدان.

4. نفترض أن  $A$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المتتلة  $(B,1), (C,1), (F,3), (J,2)$  احص  $\frac{c}{b}$ .

**إيضاً** حل المسائل الآتية. (100 لكل مسألة)

**المسألة الأولى:**

ليكن لدينا المكعب  $ABCDEFGH$  طول حرفه 1. و  $T$  نقطة من  $[AB]$  وتحقق  $\overline{AT} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ ، و  $N$  نقطة

من  $[AD]$  وتحقق  $\overline{AN} = \frac{2}{3}\overline{AD}$ .

1. في المعلم المتجانس  $(A; \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE})$  جد إحداثيات النقاط  $H, F, N, T$ .

2. جد الشعاعين  $\overline{NT}, \overline{NH}$  ثم جد معادلة المستوي  $(HNT)$ .

3. جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم  $(EF)$ .

4. استتج نقطة تقاطع المستقيم  $(EF)$  مع المستوي  $(HNT)$ .

5. انكر مقطع المكعب بالمستوي  $(HNT)$ . ما طبيعته؟

**المسألة الثانية:**

ليكن  $f$  التابع المعروف على المجال  $I = ]-\infty, -1[ \cup ]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)$ . لنكن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية

معرفة على  $\mathbb{N}^*$  وفق  $u_n = g(n)$ . حيث  $g$  مقصور التابع  $f$  على  $]1, +\infty[$ .

1. ادرس تغيرات  $f$  على  $]0, +\infty[$  ونظّم جدولاً بها واكتب معادلة كل مقارب.

2. ارسم الخط  $C$  على  $]0, +\infty[$ .

3. أثبت أن النقطة  $A(-\frac{1}{2}, 0)$  هي مركز تناظر للخط  $C$ ، ثم استتج رسم الخط البياني للتابع  $f$ .

4. نضع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$  أثبت أن  $S_n = -\ln(n+1)$ .

5. جد نهاية هذه المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ، وما نهاية  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ؟

## انتهت الاسئلة



### التحليل الرياضي

**السؤال الخامس** احسب نهاية الدايغ  $f$  في كل مما يلي عند  $a$  الموافقة:

- ①  $|f(x) + 3| < \frac{\sin x}{1 - \sqrt{x+1}} + 2 \quad ; a = 0$
- ②  $|f(x) - 2| < x \cdot \sin \frac{1}{x} - 1 \quad ; a = +\infty$

**السؤال السادس** ليكن الدايغ  $f$  المعرفة وفق:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos 6x - \cos 2x}{x^2} & ; x > 0 \\ \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x+1}}{\sin 2x} + A & ; -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ B & ; x = 0 \end{cases}$$

أوجد  $A$  ،  $B$  ليكون  $f$  مستمراً عند  $(0)$

**السؤال السابع** ليكن الدايغ  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$$

- ① ادرس تغيرات  $f$  ونظم جدولاً لها.
- ② أثبت أن للمعادلة  $f(x) + 3 = 0$  جملتين مختلفتين أوجد كلا منهما ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة  $f(x) \leq -3$

**السؤال الثامن** ليما الدايغ  $f$  المعرفة وفق  $f(x) = \frac{3x+4}{x+1}$

- ① أوجد نهايته عند  $+\infty$  ثم عين عدداً حقيقياً  $A$  يحقق  $\{A\}$  كان  $x > A$  وكان  $f(x) \in ]2, 9, 3, 1[$
- ② تعرف الدايغ  $g(x) = f(\cos^2 x)$

أوجد مجموعة تعريف  $g$  ثم أثبت أنه محدود

**السؤال التاسع** ليما المتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  معرفة بالعلاقة:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}, \quad u_0 = 0$$

① ادرس اطراف الدايغ  $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$  المعرفة على

$]-2, +\infty[$  - لم أثبت أن  $0 \leq u_n < 1$  ليأ كانت  $n \in \mathbb{N}$

② أثبت أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة تماماً

③ لعرف المتالية  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  وفق  $V_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$  أثبت أن:

$(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  هندسية واحسب أساسها وعبر عن  $V_n$  بدلالة  $n$ . ثم

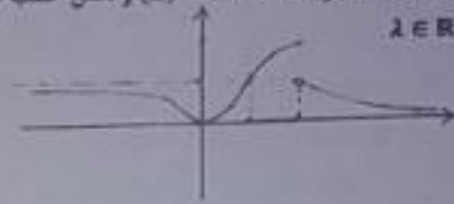
استنتج عبارة  $V_n$  بدلالة  $n$

**السؤال العاشر** ليكن  $C$  المحط البياني للدايغ  $f$  المرسوم في الشكل أدناه.

- ① أوجد  $D_f$  ،  $f(D_f)$  واستنتج القيم الحدية للدايغ  $f$
- ② أوجد معادلة كل مقارب أفقي للمخط  $C$  ودرس وضع  $C$  بالنسبة لكل منها.

③ هل  $f$  مستمر عند  $(2)$  ولماذا؟ حدد مجالات استمرار  $f$

④ أوجد عدد حلول المعادلة  $\lambda = f(x)$  ناقش حسب قيم  $\lambda \in \mathbb{R}$



**السؤال الحادي عشر** ليما دايغ  $f$  جدول تعريفه:

$x$	$-\infty$	$2$	$3$	$5$	$+\infty$
$f(x)$	—	—	$+$	$+$	—
$f(x)$	$2$	$3$	$4$	$1$	

- ① أوجد معادلة كل مقارب شاقولي أو أفقي.
- ② هل  $f(3) = 3$  قيمة حدية للدايغ ولماذا؟
- ③ عين القيم الحدية للدايغ
- ④ أثبت أن للمعادلة  $f(x) = 0$  حلين مختلفين في  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$
- ⑤ اكتب معادلة كل مماس أفقي لـ  $C_f$ .

**السؤال الثاني عشر** برهن ليأ كان العدد الطبيعي  $n \geq 1$  فإن:

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \dots + \frac{n}{(n+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$4^{2n} - 3^n \text{ مضاعف للعدد } 13$$

**السؤال الثالث عشر** ليكن المتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بالشكل:

$$u_{n+1} = 3u_n - 2, \quad u_0 = 4$$

- ① احسب الحدود الأربعة الأولى لهذه المتالية.
- ② عين  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم برهن صحة هذا التخمين
- ③ احسب بدلالة  $n$  المجموع

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

### المختصر

المسألة الأولى: ليكن  $Z$  عدداً عقدياً، وليكن  $z$  عدداً عقدياً طولته تساوي الواحد وهو مختلف عن الواحد.

أثبت أن  $\frac{z+iz}{1-z}$  عدد تخيلي بحت.

المسألة الثانية: لدينا العددين العقديين

$$Z_1 = 1 + i, \quad Z_2 = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}i}{2}$$

أكتب  $Z_1, Z_2$  بالشكل القطبي.

أكتب  $\frac{Z_1}{Z_2}$  بالشكل القطبي وبالشكل الجبري.

أوضح  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right), \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ .

### المسألة الثالثة:

أكتب بالشكل القطبي وبالشكل الأسّي الأعداد العقدية التالية:

$$Z_1 = (\sqrt{2} - \sqrt{3})(-\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6})^5$$

$$Z_2 = (1 - \sqrt{3}i)(\cos\theta - i\sin\theta)^3$$

$$Z_3 = \frac{(1+i)^{2016}}{(-1-\sqrt{3}i)^{1008}}$$

$$Z_4 = \sin\theta + (1 + \cos\theta)i \quad ; \theta \in ]\pi, 3\pi[$$

$$Z_5 = 1 + e^{i(2\theta)} \quad ; \theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

### المسألة الرابعة:

عن مجموعة النقاط  $M(Z)$  في الحالات التالية:

$$\textcircled{1} \left| \frac{z}{-1-i} \right| = \sqrt{2}$$

$$\textcircled{2} \arg(z(-\sqrt{3}-i)) = \frac{\pi}{6}$$

$$\textcircled{3} z = \cos\theta + i\sin\theta \quad ; \theta \in ]0, \pi[$$

$$\textcircled{4} z = \sin^2\theta + i\sin^3\theta$$

$$\textcircled{5} z = 3 + a^2i \quad ; a \in \mathbb{R}$$

المسألة الخامسة: أثبت باستخدام الأعداد العقدية أن:

$$\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

$$\sin(3\theta) = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

### المسألة السادسة:

المسألة الأولى: في معلم متجانس  $(O, i, j, k)$  لدينا النقاط  $D(0, -1, 4), C(0, -1, 2), B(2, 1, 0), A(1, 2, 0)$ .

أثبت أن النقاط  $A, B, C$  تقع على استقامة واحدة.

جد إحداثيات  $K$  التي تجعل  $ABCK$  متوازي الأضلاع.

أثبت أن النقاط  $A, B, C, D$  تقع في مسو واحد  $P$ .

أثبت أنه أيًا كانت  $L(x, y, z)$  في المستوي  $P$  فإنها تحقق

$$x + y + z - 3 = 0$$

جد على محور الترتيب قطعة  $H$  مساوية البعد عن النقطتين  $A, B$ .

جد العدد الحقيقي  $\lambda$  الذي يجعل النقطه  $Q(0, \lambda, 1)$

في المستوي المحوري  $L[BA]$ .

جد إحداثيات النقطه  $G$  مركز الأبعاد المتساوية لنقاط المثلث

$$(C, 2), (B, -1), (A, 1)$$

لتكن النقطه  $F(1, 2)$  في المعلم  $(A, \overline{AB}, \overline{AC})$

أوجد إحداثيات  $F$  في المعلم المتجانس  $(O, i, j, k)$ .

المسألة الثانية: في الشكل التالي أوجد:

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$  لتكون  $G$  مركز الأبعاد المتساوية للنقاط المثلث

$$(D, \delta), (C, \gamma), (B, \beta), (A, \alpha)$$



المسألة الثالثة:  $ABCDEFGH$  مكعب في

$N, L, K, J, I$  هي على الترتيب منتصفات

$$[BC], [AD], [FG], [FH], [BD]$$

أثبت صحة العلاقة:  $\vec{IJ} = \vec{AI} + \frac{1}{2}\vec{AF} + \frac{1}{2}\vec{AH}$ .

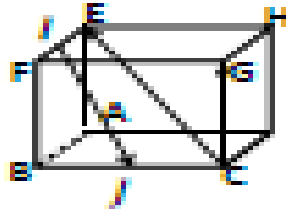
عن موقع النقطه  $M$  التي تحقق:

$$\vec{AM} = \vec{AB} - \vec{FB} + \frac{1}{2}\vec{GH}$$

أثبت أن الأضلاع  $HN, HL, AK$  مرتبطة عقدياً.

أولاً : اجب عن الأسئلة الآتية : (كل سؤال 82 درجة)

السؤال الأول : في الشكل المجاور مكعب  $ABCD - EFGH$  و  $I$  منتصف  $[BC]$  و  $J$  منتصف  $[EF]$ .



(1) أثبت أن  $\vec{CE} - \vec{CG} = 2(\vec{CI} + \vec{JE})$ .

(2) أثبت أن الأشعة  $\vec{CE}, \vec{CG}, \vec{IJ}$  مرتبطة خطياً.

السؤال الثاني : ليكن  $C$  الخط البياني لتابع  $f$  المعرفة

على  $]0, +\infty[$  وفق :

$$f(x) = \frac{3 \cos x - 3 + x^2}{x^2}$$

(1) أوجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

(2) أثبت أن المستقيم  $y = x$  مقرب للخط  $C$ .

ثانياً : حل الصارين الآتية : (كل صارين 48 درجة)

الصارين الأول : ليكن المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ترميزاً وفق :

$$U_0 = 1, U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n, \dots, (\text{*)}$$

(1) حين كلر حدود من الدرجة الأولى  $P$  بحيث تُحقق المتتالية  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  التي حددها

العام  $U_n = P(n)$  العلاقة التكرارية  $(\text{*)}$  نفسها أي  $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 2n$  أيًا كانت  $n$ .

(2) أثبت أن المتتالية  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  التي حددها العام  $V_n = U_n - 2n$  هي متتالية هندسية.

(3) لكب حيلة  $V_n$  ثم  $U_n$  بدلالة  $n$  و  $s$ .

الصارين الثاني : ليكن  $C$  الخط البياني لتابع  $f(x) = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x - 4}$  المعرفة على  $B \setminus \{4\}$ .

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$  ثم احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ .

(2) استنتج معادلة المقارب  $(\text{*)}$  المائل ل  $C$  في حوران  $+\infty$ .

ثم ارسم الوضع النسبي ل  $C$  والمقربة  $(\text{*)}$ .

ثالثاً : حل المسئلة الآتية : (80 درجة)

تأمل في معلم متجهين  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  القاطنين  $A(1, -1, 2)$  و  $B(2, 0, 4)$

والمسوي  $P$  التي معادلته  $0 = x - y + 3z - 4$  والمطلوب :

(1) جد معادلة المسوي  $Q$  العمودي على المسوي  $P$  ويمر بالنقطتين  $A$  و  $B$ .

(2) جد معادلاً وسيطياً للمستقيم  $d$  المار بالنقطة  $A$  ويمتد المسوي  $P$ .

(3) حين إحداثيات السقط القائم  $H$  للنقطة  $A$  على المسوي  $P$ .

(4) احط معادلة المجموعة  $E$  المكونة من النقاط  $M(x, y, z)$  التي تحقق

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$$

وما طبيعة المجموعة  $E$ .

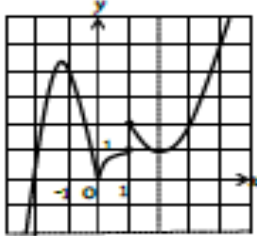
انتهت الإجابة

مترس المادة : حسن شجاج



أولاً : أجب عن الأسئلة الآتية : (لكل سؤال 16 درجة )

السؤال الأول : نجد جاتياً الخط البياني لتابع  $f$  المعرفة على  $R$  والمطلوب :



- أوجد نهاية  $f$  عند  $\pm\infty$  .
- ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 5$  ؟
- ما مجموعة حلول المتراجحة  $f(x) \geq 5$  ؟
- هل  $f(1)$  قيمة حدية كبرى أو صغرى للتابع . علل ذلك
- ما عدد القيم الحدية لتابع  $f$  ؟
- ما قيمة المشتق في النقطة التي فاصلتها  $x = 2$  ؟
- أ يكون التابع  $f$  استتقافياً عند  $x = 1$  ؟

السؤال الثاني :  $ABCD$  رباعي وجوه. و  $E$  و  $F$  معرفتين وفق :  $\vec{AF} = \frac{2}{3}\vec{AD}$  و  $\vec{BE} = \frac{1}{4}\vec{BC}$  .

ولتكن  $G$  مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط  $(A,1)$  و  $(B,3)$  و  $(C,1)$  و  $(D,2)$  .

1) أثبت أن  $G$  يقع على  $[EF]$  ثم عيّن النقطة  $G$  على  $[EF]$  .

2) جد مجموعة نقاط الفراغ  $M$  التي تحقق :

$$\|\vec{MA} + 3\vec{MB} + \vec{MC} + 2\vec{MD}\| = \|\vec{7ME} - \vec{MA} - 3\vec{MB} - \vec{MC} - 2\vec{MD}\|$$

السؤال الثالث : ليكن التابع المعرفة على  $R$  وفق :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} & : x \neq \frac{\pi}{2} \\ 2A + 2 & : x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

1) احسب نهاية  $f$  عند  $\frac{\pi}{2}$  .

2) احسب قيمة  $A$  التي تجعل  $f$  مستمر على  $R$  .

السؤال الرابع : جد على محور الترتيب نقطة  $C$  متساوية البعد عن النقطتين  $A(2,-1,3)$  و  $B(0,5,-1)$  .

ثانياً : حل التمرينات الأربعة الآتية : (لكل تمرين 24 درجة )

التمرين الأول : لتكن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  المعرفة تدرجياً وفق :  $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2U_n+6}$  و  $U_0=1$  .

- أثبت أن التابع  $f(x) = \frac{3x+2}{2x+6}$  متزايد تماماً واستنتج أن  $\frac{1}{2} \leq U_n \leq 1$  ، أي كان الحد  $n$  .
- أثبت أن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  متناقصة تماماً .
- أثبت أن  $(U_n)_{n \geq 0}$  متقاربة واحسب نهايتها .

التمرين الثاني : في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لتكن النقط :  $A(1,4,-3)$  ،  $B(-1,-3,4)$  .

- اكتب معادلة  $P$  المستوى المحوري للقطعة المستقيمة  $[AB]$  .
- اكتب معادلة الكرة التي مركزها  $A$  وتمس المستوى  $P$  .
- اكتب معادلة المخروط الذي رأسه  $O$  وقاعدته تمر من منتصف  $[AB]$  ومركزها  $A$  .

يتبع في الصفحة التالية ...



التمرين الثالث : ليكن  $C$  الخط البياني لتابع  $f$  المعرفة على  $R \setminus \{1\}$  وفق الصيغة  $f(x) = \frac{1}{1-x}$

- (1) أثبت أن المشتق من المرتبة  $n$  لتابع  $f$  يعطى بالصيغة :  $f^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$  في حالة  $x \neq 1$ .
- (2) احسب مشتق  $f$  من المرتبة السادسة .
- (3) اكتب معادلة المماس  $d$  للخط  $C$  في النقطة التي فصلتها  $x = -1$ .

التمرين الرابع : في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المستقيم  $d$  مار بالنقطة  $A(2,0,5)$  والموجه بالشعاع  $\vec{u}(2,5,-1)$  والمستقيم  $d'$  المار بالنقطة  $B(2,2,-1)$  والموجه بالشعاع  $\vec{v}(1,2,1)$ .

المطلوب : أثبت أن  $d$  و  $d'$  متقاطعان في النقطة  $I$ , ثم أوجد إحداثيات نقطة التقاطع  $I$ .

نلتاً : حل المسألتين الآتيتين : (لكل مسألة 40 درجة)

المسألة الأولى : في المعلم  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  لتكن النقاط :  $A(1,0,-1), B(2,2,3), C(3,1,-2), D(-4,2,1)$

- (1) أثبت أن المثلث  $ABC$  قائم واحسب مساحته .
- (2) أثبت أن الشعاع  $\vec{n}(2,-3,1)$  ناظم على المستوى  $(ABC)$  واستنتج معادلة المستوى  $(ABC)$ .
- (3) احسب بعد النقطة  $D$  عن المستوى  $(ABC)$  ثم احسب حجم رباعي الوجوه  $DABC$ .
- (4) اكتب المعادلات الوسيطة للمستقيم  $d$  المار من  $D$  وعمودي على  $(ABC)$ .
- (5) استنتج إحداثيات النقطة  $D'$  المسقط القائم للنقطة  $D$  على  $(ABC)$ .
- (6) اكتب معادلة المستوى  $P$  العمودي على  $(ABC)$  ويمر بالنقطتين  $E(2,0,4)$  و  $F(1,-1,2)$ .
- (7) استنتج بعد  $D$  عن الفصل المشترك للمستويين  $P$  و  $(ABC)$ .
- (8) اعط معادلة للمجموعة  $E$  المكونة من النقاط  $M(x,y,z)$  التي تحقق  $\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$  وما طبيعة المجموعة  $E$ .

المسألة الثانية : في معلم متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  هو الخط البياني لتابع  $f$  المعرفة على  $R$  وفق :

$$f(x) = x - \sqrt{x^2 + 8}$$

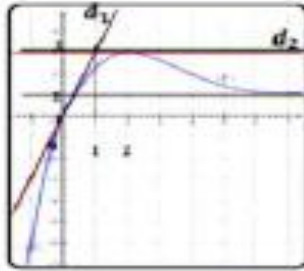
- (1) احسب نهاية  $f$  عند  $-\infty$  و  $+\infty$ . هل يقبل  $C$  مقارباً أفقياً؟
- (2) أثبت أن المستقيم  $d$  الذي معادلته  $y = 2x$  مقارب مائل للخط  $C$ .
- (3) نظم جدولاً بتغيرات  $f$ .
- (4) ارسم مقاربات  $C$  ثم ارسم  $C$ .
- (5) حدد هندسياً عدد حلول المعادلة :  $mx + m\sqrt{x^2 + 8} + 8 = 0$ .

مدرّس المادة :

حسن غجاج

...انتهت الأسئلة...

اولاً : اجب عن الاسئلة الاربعة الآتية : (40 لكل سؤال )



السؤال الأول : ليكن الشكل  $C_f$  القطع البياني لتابع  $f$  المعرفة على  $R$  والمطلوب :

1.  $f(]2, +\infty[)$  و  $f(]-\infty, +\infty[)$  ؟
2.  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  ماذا ينتج ؟
3. حدد القيمة العتبية ونوعها . جد  $f'(2)$  واكتب معادلة المماس  $d_2$
4. جد  $f'(0)$  واكتب معادلة المماس  $d_1$

السؤال الثاني : ليكن التابع  $f$  المعرفة على  $R$  وفق :  $f(x) = \begin{cases} 2 - x \cos \frac{1}{x} & ; x \neq 0 \\ a & ; x = 0 \end{cases}$  ما قيمة  $a$  التي تجعل  $f$  مستمرة على  $R$

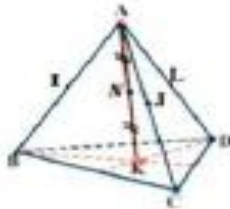
السؤال الثالث : حل في  $C$  المعادلة :  $Z^2 + (1 + 4i)Z - 5 - i = 0$

السؤال الرابع : ادرس الوضع النسبي للمستقيمين  $d_1$  و  $d_2$  حيث :  $d_1 \begin{cases} x - 2y + z = 6 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$  و  $d_2 \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t - 2 \\ z = t - 4 \end{cases}$

ثانياً : حل التمارين الاربعة الآتية : (60 درجة لكل سؤال )

السؤال الخامس : ليكن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بالتحالة التكريرية  $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3} \end{cases}$

- 1- اثبت ان  $u_n < 3$  ايا كانت  $n$  عدد طبيعي .
- 2- اثبت ان المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة لانهما
- 3-  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$  متقاربة المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ثم جد  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n)$



السؤال السادس :  $ABCD$  رباعي وجود فيه  $K$  مركز ثقل الوجه  $BCD$  و  $N$  منتصف  $AK$  و  $I$  منتصف  $AB$  و  $J$  منتصف  $AC$  و  $L$  منتصف  $AD$  والمطلوب :

- اعر عن  $N$  بصفتها مركز ابعاد متشعبة تتقاطع  $(A, \alpha)$   $(B, \beta)$   $(C, \gamma)$   $(D, \delta)$  بانقلاب يثبت تعيينها
- اثبت ان التقاطع  $N$  و  $I$  و  $J$  و  $L$  تقع في مستو واحد
- عين  $G$  موضع مركز ثقل رباعي الوجود  $ABCD$

السؤال السابع : ليكن العددين العقليين  $Z_1 = \sqrt{6} + \sqrt{2}i$  و  $Z_2 = 2 - 2i$  والمطلوب :

1. اكتب بالشكل المثلثي  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $\frac{Z_1}{Z_2}$
2. اكتب بالشكل الجبري  $\frac{Z_1}{Z_2}$  واستنتج  $\cos \frac{5\pi}{12}$  و  $\sin \frac{5\pi}{12}$

السؤال الثامن : ليكن التابع المعرفة على  $R$  بالشكل  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  اثبت انه يمكن مقارب مثل بجوار  $+\infty$  واكتب معادلته و ادرس الوضع النسبي بينهما

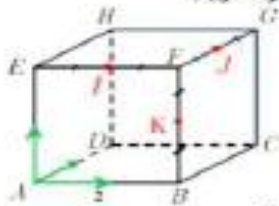
ثالثاً : حل المسئلتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة )

السؤال التاسع : ليكن الشكل البياني لتابع  $f$  المعرفة بالشكل :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2}$

- 1- اوجد الاعداد  $a, b, c$  اذا علمت ان التابع  $f$  يعطى العائلتين :  
 -هـ- لتتابع  $f$  قيمة حدية عند النقطة التي قاسمتها (3)  
 -و-  $C_f$  مقارب مثل معادلته  $y = x - 3$
- 2- بفرض :  $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 7}{x - 2}$   
 a. اثبت ان  $C_f$  متوازية بالنسبة للنقطة  $(2, -1)$   
 b. اثبت ان  $x - 3 = y$  مقارب مثل ل  $C_f$   
 c. ادرس لحيوات التابع ونظم جدولاً بها، وعين نوع ماله من مقاربات وقيم حدية معينة .  
 d. ارسم كل مقارب وجدته وارسم  $C_f$   
 e. ناقش بيانياً وبحسب قيم الوسيط العقلي  $m$  عدد حلول المعادلة :  $x^2 - (5 + m)x + 7 + 2m = 0$

السؤال العاشر :  $ABCDEFGH$  مكعب طول حرفه 2 فيه  $K$  منتصف  $FB$  و  $J$  منتصف  $FG$  و  $I$  منتصف  $FE$  والمطلوب :

- 1- جد إحداثيات رؤوس المكعب وإحداثيات  $K$  و  $J$  و  $I$  في المعظم  $(A, \frac{1}{2}\overline{AB}, \frac{1}{2}\overline{AD}, \frac{1}{2}\overline{AE})$
- 2- اوجد معادلة المستوى  $(KIJ)$  .
- 3- اكتب التمثيل الوسيطى للمستقيم  $d$  المار من  $F$  وعمودي على المستوى  $(KIJ)$
- 4- اثبت ان مسقط  $F$  على المستوى  $(KIJ)$  و ليكن  $N$  هو مركز ثقل المثلث  $KIJ$
- 5- احسب بعد  $F$  عن المستوى  $(KIJ)$
- 6- اثبت ان المثلث  $KIJ$  متساوي الاضلاع احسب مساحته ثم احسب حجم رباعي الوجود  $F - KIJ$



.....م. لغاز أبو الحسن.....

أولاً: أجب عن الأسئلة الأربعة التالية: (40 درجة لكل سؤال)

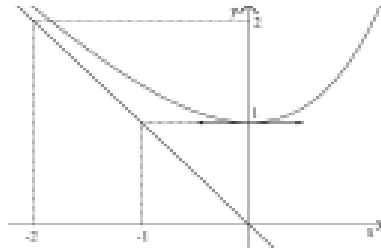
السؤال الأول: نجد جانياً الخط البياني لتابع  $f$  معرف على  $R$  و المطلوب:

1- ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 2$

2- أوجد  $f(0), f'(0)$  ثم اكتب معادلة العماس لمنحني التابع في النقطة التي فصلتها 0

3- أوجد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

4- اكتب معادلة المقارب العماس للخط  $C$  في جوار  $-\infty$



السؤال الثاني: ABCDEFGH مكعب يحقق  $2\vec{AK} = \vec{CB} + \vec{CA} + 3\vec{AG}$

أثبت ان النقطة  $K$  تقع في المستوي  $(BCG)$

السؤال الثالث: ليكن التابع  $f(x) = \sin(\pi\sqrt{x})$

أوجد  $f'(x)$  و احسب  $f(1), f'(1)$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{(x-1)}$

السؤال الرابع: انطلاقاً من الشكل المجاور حد  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

لتكون  $K$  مركز الأبعاد المتسوية للنقاط  $(A, \alpha)$  و  $(B, \beta)$  و  $(C, \gamma)$  و  $(D, \delta)$

تحقق  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 24$

ثانياً: حل التمارين الأربعة التالية: (60 درجة لكل سؤال)

التصديق الأول: تكون المتتالية  $U_n$  حيث  $n \geq 0$  معرفة وفق:

$$U_n \begin{cases} U_0 = 2 & ; n = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n - 3 & ; n > 0 \end{cases}$$

نفترض ان  $V_n = \frac{1}{U_n - 3}$  و المطلوب:

1- أثبت ان  $V_n$  هندسية و اوجد  $V_0, V_1$  2- اكتب  $V_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $U_n$  بدلالة  $n$ .

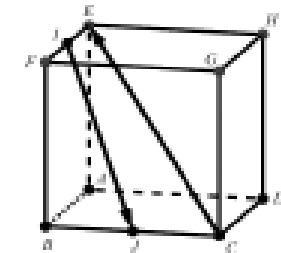
3- احسب قيمة المجموع  $S = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2 + 4 + \dots + 256$

التصديق الثاني: ABCDEFGH متوازي سطوح لهما  $I, J$  منتصفا  $[BC], [EF]$

1- أثبت ان:  $2(\vec{CJ} + \vec{IE}) = \vec{CE} - \vec{CG}$

2- أثبت ان الأشعة  $(\vec{CE}, \vec{CG}, \vec{IJ})$  مرتبطة خطياً.

3- ابرن تقع النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة:  $\vec{BM} = \vec{BH} + \vec{CG}$



التعريف الثالث: ليكن التابع  $f$  المعرفة على  $[0,2]$  وفق:  $f(x) = 2x + E(x)$   
 1- اكتب  $f(x)$  بجعلها مستقلة عن  $E(x)$  و ارسم الخط البياني  $C_f$  على المجال  $[0,2]$

2- جد  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{(x^2+1)}$

3- ليكن التابع  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق:  $g(x) = 2x + \frac{E(x)}{(x^2+1)}$  , اثبت ان المستقيم  $\Delta$  المعطاه  $y = 2x$  مقارب مائل ل  $C_g$  في جوار  $+\infty$

التعريف الرابع: في معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  امكن لنا النقطة  $A(6,1,1)$

والمستويين  $p_1: y + z = 4$  ,  $p_2: x - 2y = 5$  والمطلوب:

1- اثبت ان المستويين متقاطعين ثم جد مماساً وسيطاً للفصل المشترك  $d$

2- اكتب معادلة المستوي  $Q$  المار من  $A$  وبعامد للفصل المشترك لهما

3- احسب إحداثيات  $B$  نقطة تقاطع  $Q$  مع الفصل المشترك  $d$  ثم استخرج بُعد  $A$  عن الفصل المشترك  $d$

ثالثاً: حل المسألتين الآتيتين: (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى: نامل معلم متجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقاط  $A(2,2,0)$  ,  $B(0,-2,2)$  ,  $C(1,1,3)$  والمطلوب:

1- اثبت ان النقاط  $A, B, C$  تشكل مستوي  $(ABC)$  وارجد معادلته .

2- ندرس ان المعادلات الوسطية لمستقيم  $d$ :  $t \in \mathbb{R}$   $\begin{cases} x = 5t - 1 \\ y = -2t + 8 \\ z = t \end{cases}$

اثبت ان  $\Delta$  يتقاطع مع المستوي  $(ABC)$  ثم ارجد نقطة التقاطع.

3- اثبت ان  $G$  مركز الابعاد المناسبة للنقاط  $(A, I)$  ,  $(B, J)$  ,  $(C, -J/2)$  هي نقطة تقاطع المستقيم  $d$  مع المستوي  $(ABC)$  .

4- حين مجموعة النقاط  $M$  في الفراغ التي تحقق:  $\|\overline{MA}\| + \|\overline{MB}\| - 12\|\overline{MC}\| = 10\|\overline{OA}\|$

المسألة الثانية: ليكن  $C$  الخط البياني لتابع  $f$  معرف على  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  وفق:

والمطلوب:  $f(x) = ax + b + \frac{1}{x^2}$

أولاً: حين قيمة كل من المعنمين  $a, b$  ليكن لتابع  $f$  قيمة حدية هي (2) عند  $x = 1$

ثانياً: من اجل  $a = 2$  ,  $b = -1$  فإن التابع  $f$  يكتب بالشكل:  $f(x) = 2x - 1 + \frac{1}{x^2}$

1- اثبت ان المستقيم  $\Delta: y = 2x - 1$  مقارب مائل ل  $C_f$  في جوار  $-\infty, +\infty$

2- ارسم تغيرات  $f$  وادّل على القيمة الصغرى محلياً واستخرج المقاربات الشاذة.

3- استخرج ان المعادلة  $f(x) = 0$  جذر وحيد.

4- ارجد معادلة المماس للخط  $C$  في نقطة منه فاصلتها (-1) . 5- ارسم كل مقارب وجنته ثم ارسم  $C$ .

6- نأخذ بيانياً وبحسب قيم الوسيط عند حلول المعادلة  $2x^3 - (1+m)x^2 + 1 = 0$

ندرس المعاداة والعلام محصور

حل الأسئلة الأربعة التالية : ( 40 لكل سؤال )

السؤال الأول : فيما يلي جدول تغيرات التتابع  $f$  والذي خطه البياني  $C$  والمطلوب :

$x$	$-\infty$	-1	+1	$+\infty$
$f(x)$	-	-	-	-
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	2

- 1- اكتب معادلة كل مقارب رأسي أو أفقي للخط البياني  $C$ .
- 2- هل يوجد للخط البياني  $C$  مسلمات أفقية ؟
- 3- هل يوجد مقاربات مائلة للخط البياني  $C$  ؟
- 4- ما عدد حلول المعادلة  $f(x) = 0$  ؟

# التجمع التعليمي

السؤال الثاني :

- 1- اكتب معادلة المستوى العمودي للقطعة المستقيمة  $[AB]$  حيث  $A(0, 3, -4)$  ،  $B(-2, 1, 2)$
- 2- اكتب معادلة المخروط التي رأسه  $O$  ومحوره  $(O, \vec{k})$  وقدمته المثلثية التي مركزها  $C(0, 0, 7)$  ونصف قطرها 3

السؤال الثالث :

ليكن  $g(x) = \sin \frac{\pi}{2} x$  المعروف على  $\mathbb{R}^+$  أوجد  $g(2) \cdot g(x) \cdot g(2)$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin \frac{\pi}{2} x - 1}{x - 2}$

السؤال الرابع : ليكن  $f$  التتابع المعروف على  $\mathbb{R}$  وفق  $f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x}{x^2} + m & x \neq 0 \\ 2x + 1 & x = 0 \end{cases}$  ليكن  $f$  مستمراً على  $\mathbb{R}$  أوجد قيمة  $m$

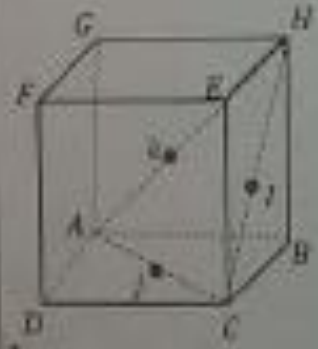
حل التمارين الأربعة التالية : ( 60 لكل تمرين )

- التمرين الأول : ليكن التتابع  $f$  المعطى بالمعادلة  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$  المعروف على  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  خطه البياني  $C$
- 1) احسب نهاية التتابع  $f$  عند  $+\infty$  واستنتج المقارب الأفقي ، واشرح الوضع النسبي لتتابع  $f$  مع الخط البياني  $C$ .
  - 2) استنتج  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$
  - 3) أوجد حتماً حقيقياً  $A$  يحقق الشروط إذا كان  $x > A$  كل  $f(x)$  في المجال  $[2.9, 3.1]$
  - 4) أثبت أن النقطة  $M(-1, 3)$  مركز تماثل للخط  $C$ .

التمرين الثاني :  $(U_n)_{n \geq 0}$  متتالية حسابية تسلسلها  $U_0 = -11$  و  $U_2 = -21$ .

- 1) احسب  $n$  أساس المتتالية ، ثم اوجد  $(U_n)$  بدلالة  $n$ .
- 2) ليكن  $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n-1}$  أثبت أن :  $S_n = \frac{1}{2}(-15n^2 - 7n)$

التمرين الثالث : في الشكل المعين مكعب .



أولاً : جرد  $N$  مركز ثقل المثلث  $AHC$  ولكن  $M$  نقطة  $B$  بنسبة  $1/3$   $N$  عبر  $M$  ينصفها مركز أبعاد متتالية لرباعي الوجوه  $A, C, B, H$  ثانياً : باء  $J$  و  $K$  منتصف التتابع  $[CH]$  و  $[AC]$  و  $[AH]$  على الترتيب : عن موقع النقطة  $J$  المعينة والمعلقة

$$\vec{CS} = \vec{CJ} + \frac{1}{2} \vec{DF} + \frac{1}{2} \vec{EH}$$

### التمرين الرابع :

ليكن  $C$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  وفق :  $f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  والمطلوب :

(1) احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أثبت ان المستقيم  $\Delta$  الذي معادلته  $y = x + 1$  مقارب مائل للخط  $C$  عند  $+\infty$

وادرس الوضع النسبي للمقارب  $\Delta$  والخط  $C$

**حل المسالتين التاليتين : ( 100 لكل مسألة )**

### المسألة الأولى :

في معلم متجانس  $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  النقط  $A(1,0,-1)$  و  $B(2,2,3)$  و  $C(3,1,-2)$  و  $D(-4,2,1)$

والمستويين  $P: x + y - 2z = 0$

$Q: -y + 2z - 3 = 0$

1- اكتب المعادلات الوسيطة للمستقيم  $d$  الفصل المشترك للمستويين  $P, Q$ .

2- اكتب معادلة المستوي  $R$  العمودي على المستويين  $P, Q$  والمار من النقطة  $D$ .

3- اوجد  $l$  نقطة تقاطع المستقيم  $d$  مع المستوي  $R$ .

4- استنتج بعد النقطة  $D$  عن المستقيم  $d$ .

5- استنتج نقطة تقاطع المستويات  $P, Q, R$ .

6- أثبت ان الشعاع  $\vec{n}(2, -3, 1)$  عمودي على المستوي  $ABC$  واستنتج معادلة المستوي  $ABC$ .

7- أثبت ان المثلث  $ABC$  قائم واحسب مساحته.

8- احسب بعد  $D$  عن المستوي  $ABC$  ثم احسب حجم رباعي الوجوه  $DABC$ .

### المسألة الثانية :

ليكن  $f(x) = x + a\sqrt{x-1}$  المعرفة على المجال  $[1, +\infty[$  . خطه البياني  $C$

1- عين  $a$  ليكون للتابع قيمة حدية في نقطة فاصلتها 2

2- ليكن  $f(x) = x - 2\sqrt{x-1}$  . ادرس قابلية الاشتقاق عند النقطة التي فاصلتها (1) واكتب معادلة المماس في تلك

النقطة

3- احسب نهاية  $f(x)$  عند  $+\infty$

4- ادرس لغزوات  $f(x)$  ونظم جدولاً لها . يدل على كل قيمة حدية وبين نوعها

5- ارسم الخط البياني  $C$

6- استنتج بياناً حلول المعادلة  $x - 2\sqrt{x-1} - m = 0$



التعبئة : (التاسعة)

الجمهورية العربية السورية  
مديرية التربية باللاذقية  
ثانوية محمد شكري حليم المحدثه  
الفصل الأول 2019  
اسم الطالب :  
الدرجة : 600  
المدة : ساعتان ونصف

السؤال الأول (80 درجة):

- لتكن النقاط  $A(-1,0,1)$ ,  $B(-1,3,2)$ ,  $C(2,1,1)$  والمطلوب :
- 1- برهن أن النقاط  $A, B, C$  تشكل مستوى وأوجد معادلاته
  - 2- أوجد بعد النقطة  $D(1,0,2)$  عن المستوى  $ABC$
  - 3- أوجد بعد النقطة  $D(1,0,2)$  عن المستقيم  $AB$

السؤال الثاني (60 درجة):

- مستوى معادلته  $Q: x-2y+3z+5=0$  ولتكن النقطتان  $P(0,1,-1)$ ,  $N(1,0,2)$  والمطلوب :
- 1- أوجد معادلة التمثيل الوسيطي للمستقيم  $NP$
  - 2- برهن أن المستقيم  $NP$  يقطع المستوى  $Q$  في النقطة  $M$  وأوجدها

السؤال الثالث (100 درجة):

- $ABCD$  رباعي وجوه فيه  $|\vec{AB}| = \frac{1}{2} |\vec{AB}|$  و  $|\vec{AC}| = \frac{3}{4} |\vec{CD}|$  و  $F$  منتصف  $AD$  و  $E$  منتصف  $BC$  و  $G$  مركز أبعاده المتكافئة والمطلوب :
- 1- برهن أن  $E, F, G$  على استقامة واحدة
  - 2- عين موضع  $G$  على  $EF$
  - 3- أوجد مجموعة النقاط  $M$  من الفراغ والتي تحقق :

$$= \|\vec{MB} + \vec{MA} + \vec{MC} - 3\vec{MD}\| = \|\vec{MB} + \vec{MA} + \vec{MC}\|$$

السؤال الرابع (60 درجة):

- ليكن العددين العقديان  $Z_1 = \frac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$  و  $Z_2 = -1-i$
- اكتب  $Z_1$  و  $Z_2$  و  $Z_1 Z_2$  بالشكل المتكافئ ثم  $\frac{Z_2}{Z_1}$  بالشكل الجبري
- ثم استنتج نسب المتكافئة للزاوية  $\frac{\pi}{12}$

السؤال الخامس (40 درجة):

- ليكن  $\theta$  عدد حقيقي معرف على المجال  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  تعرف المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  :  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ ,  $U_0 = 2 \cos \theta$
- 1- احسب  $U_1$  و  $U_2$
  - 2- أثبت بالتدريج أن  $U_n = 2 \cos \left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$\frac{1}{2} + \frac{6}{2}$$

الصفحة الأولى



السؤال السابع (40 درجة):

برهن أن المتتاليتين  $(x_n)_{n \geq 1}$ ،  $(y_n)_{n \geq 1}$  متعاورتان حيث :

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n+1}$$

$$y_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$$

السؤال السابع (40 درجة):

ثبت أن المتتالية  $U_n = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots - \frac{1}{3^n}$  متقاربة واحسب نهايتها

السؤال الثامن (100 درجة):

ليكن التابع  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x-1}$  والمطلوب

1- أوجد ما للتابع من مقاربات أفقية لم شاقولية لو مائلة

2- برهن أن  $(1,0)$  مركز تناظر للتابع

3- ادرس تغيرات التابع ونظم جدولاً بها وارسمه

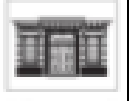
السؤال التاسع (80 درجة):

هل التابع  $f(x) = x\sqrt{x}$  قابل للاشتقاق عند الصفر

هل يقبل مماساً موازياً للمستقيم  $y=x$

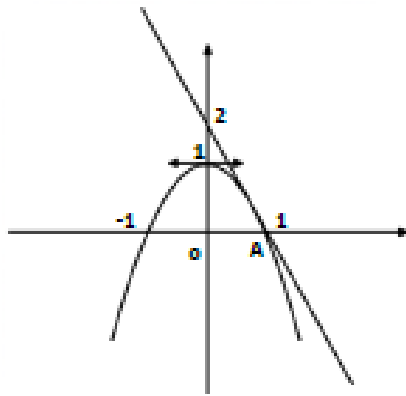
لوجد معادلة المماس للتابع عند النقطة  $x=1$

انتهت الأسئلة



أولاً : أجب عن كل مما يأتي :

السؤال الأول : (٤٠ درجة)



في الشكل المرسوم جانباً (C) هو الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $R$

$T$  مماس للخط (C) في النقطة  $A$  :

١ حساب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ،  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

٢ ما هي حلول المعادلة :  $f(x) = 0$  ؟

٣ أوجد  $f(0)$  ،  $f'(1)$  ثم استنتج معادلة المماس  $T$ .

٤ أوجد  $f([-1, 1])$ .

السؤال الثاني : (٤٠ درجة)

$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DC}$  ،  $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$  : نقطتان مختلفتان العارتين

و ليكن  $G$  مركز الأبعاد المتساوية للنقاط  $(A, 1)$  ،  $(B, 3)$  ،  $(C, 1)$  ،  $(D, 3)$

أثبت أن  $G$  يقع على  $[FE]$  ثم حدد موضع  $G$  على  $[FE]$ .

السؤال الثالث : (٤٠ درجة)

$(U_n)_{n \geq 0}$  متتابعة معرفة وفق  $U_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$

١ ادرس أطوار المتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$ .

٢ أثبت أن  $0 < U_n \leq 1$  ، ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

السؤال الرابع : (٤٠ درجة)

١ في المستوى العقدي ، عرّف مجموعة النقاط  $M(Z)$  ليكون  $|iZ - 3| = 2$ .

ثانياً : حل كلًا من التمارين الآتية :

التمرين الأول : (٦٠ درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على المجال  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$

١ احسب  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  ثم استنتج  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(f(x))$

٢ احسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ثم أوجد عدداً حقيقياً  $A$  يحقق الشرط : إذا كان  $x > A$  كان  $f(x) \in ]0.99, 1.01[$

٣ اكتب معادلة المماس للخط (C) الموازي للمستقيم الذي معادته  $\Delta: y = -2x + 1$ .

التمرين الثاني : (٦٠ درجة)

حل في  $C$  المعادلة  $Z^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$  و اكتب كلًا من جذريها بالشكل الأسّي.

التمرين الثالث : (٦٠ درجة)

ليكن (C) الخط البياني للتابع  $f$  المعرفة على  $R$  وفق  $f(x) = \frac{2x}{|x-2|+1}$

١ ادرس قابلية انشقاق  $f$  عند (2) من اليسار ، ثم اكتب معادته نصف المماس من اليسار لخطه البياني في النقطة  $A(2, 4)$

٢ أوجد  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

التعبير الرابع، (٦٠ درجة)

$c = -1 + 3i$  ،  $b = 2 + 4i$  ،  $a = 3 + i$  ثلاث نقاط في المستوى العقدي ممثلة بالأعداد

- ① وضع النقاط في المستوى .
- ② لتكن  $I$  نقطة بالعدد العقدي  $e = 1 + 2i$  ، احسب العدد العقدي للمقل للشعاع  $\vec{AC} - 2\vec{AI}$
- ③ احسب  $\frac{a-b}{c-b}$  وعن طبيعة المثلث  $ABC$ .

حل كلا من المسائلين الآتيتين:

المسألة الأولى، (١٠٠ درجة)

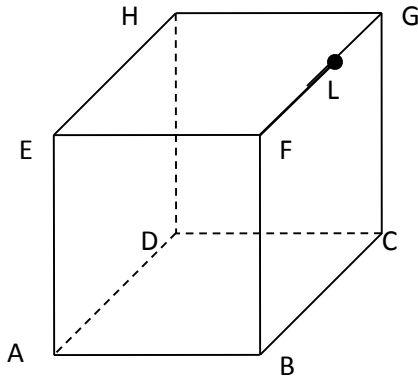
- ليكن  $(C)$  الخط البياني للتابع  $f$  المعرف على  $]0, +\infty[$  وفق  $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$
- ① أثبت أن المستقيم  $d: y = \frac{1}{2}x$  مقارب مائل لـ  $(C)$  ثم ادرس وضع  $(C)$  مع  $d$ .
  - ② ادرس تغيرات  $f$  و نظم جدولاً بما و دل على قيمة الحدية .
  - ③ أثبت أن للمعادلة  $f(x) = 3$  حلين في المجال  $]0, +\infty[$  .
  - ④ ارسـم كل مقارب وجدتـه ثم ارسـم  $(C)$  .
  - ⑤ تعرف المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  بالعلاقة : 
$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2} + \frac{2}{U_n} \end{cases}$$
  - ⑥ أثبت بالتدريج أن  $2 \leq U_{n+1} \leq U_n$  ثم استنتج أن المتتالية  $(U_n)_{n \geq 0}$  متقاربة .

المسألة الثانية، (١٠٠ درجة)

- في معلم متجانس  $(0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  لدينا النقطتان  $A(2, 1, -2)$  ،  $B(7, -2, 0)$  والشعاعان  $\vec{u}(2, -1, 0)$  ،  $\vec{v}(-3, 1, 2)$
- ① أثبت أن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مرتبطين خطياً .
  - ② أثبت أن الأشعة :  $\vec{u}$  ،  $\vec{v}$  ،  $\vec{AB}$  مرتبطة خطياً .
  - ③ إذا كان  $d$  مستقيماً ماراً من  $A$  و يقبل  $\vec{u}$  شعاعاً موجهاً له .  
و إذا كان  $\tilde{d}$  مستقيماً ماراً من  $B$  و يقبل  $\vec{v}$  شعاعاً موجهاً له .  
استنتج أن  $d$  و  $\tilde{d}$  متقاطعان في نقطة  $I$
  - ④ اعطِ المعادلة الديكارتية للمستوي المموري للقطعة المستقيمة  $[AB]$
  - ⑤ اعطِ التمثيل الوسيطى للمستقيم  $(AB)$  .

\* انذالك الامتلاء \*

اجب عن الأسئلة التالية : ( الأول 60 درجة الثاني 80 درجة الثالث 140 درجة )  
**السؤال الأول :** ليكن  $ABCDEFGH$  مكعب



$L$  منتصف الحرف  $[FG]$  والمطلوب  
 1 - عين النقطة  $M$  التي تحقق العلاقة

$$\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{AE} + \vec{FL}$$

2 - اثبت صحة العلاقة

$$\vec{AB} + \vec{CF} = \vec{AF} + \vec{CB}$$

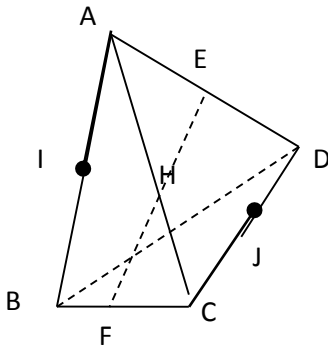
**السؤال الثاني** ليكن  $ABCD$  رباعي وجوه

النقطة  $N$  منتصف  $AB$   
 والنقطة  $M$  منتصف  $CD$   
 نقطتان تحققان

$$\vec{BC} = 3\vec{BE}, \quad \vec{AD} = 3\vec{AF}$$

وأخيرا  $H$  منتصف  $EF$

اثبت أن  $N, M, H$  تقع على استقامة واحدة



**السؤال الثالث:** نتأمل في معلم متجانس  $(O, I, J, K)$  النقاط

$$C(2, -1, 0), B(3, 2, 3), A(1, 2, 3)$$

والمطلوب

- 1 - اثبت أن النقاط  $A, B, C$  لا تقع على استقامة واحدة
- 2 - عين إحداثيات  $I$  منتصف  $BC$
- 3 - عين مركز ثقل المثلث  $ABC$  واستنتج أن  $AIG$  تقع على استقامة واحدة
- 4 - عين قيمه  $K$  التي تجعل  $N(K, 0, 1)$  تقع على المستوي المحوري للقطعة المستقيمة  $AB$
- 5 - عين  $Q$  مركز أبعاد متناسبة للنقاط المثقلة  $(A, 1), (B, -1), (C, 1)$
- 6 - جد معادلة الكرة التي مركزها  $A$  وتمر من  $B$

أ. نصر أبو حوية

مع التمنيات لكم بالنجاح والتوفيق \*\*\*\*