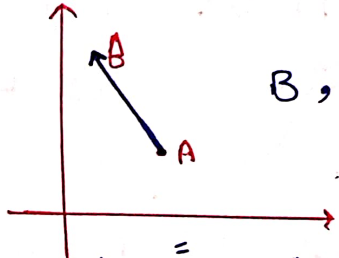
الأشعة (1)

بسم الله الرحمن الرحيم

الأشعة في الفراغ :

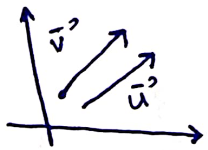
تذكرة :



لتكن النقطتان A و B في الفراغ، إن الإنسحاب الذي ينقل A إلى B يسمى شعاعاً ونرمز له بالرمز $\vec{V}$

مكونات الشعاع :

إن لكل شعاع منحى - طويلة - جهة



المنحى : هو التوازي

فالشعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ لهما نفس المنحى أي متوازيان

النظيم : نظيم الشعاع $\vec{AB}$ يعني المسافة بين A و B ونرمز له بالرمز $\|\vec{AB}\|$ ويكون

$$\|\vec{AB}\| = \|\vec{BA}\| = AB = BA$$

الجهة : من بداية الشعاع إلى نهايته

مثال : إن الشعاع $\vec{AB}$ يختلف عن الشعاع $\vec{BA}$

ثانياً

الشعاع الصفري :

هو شعاع له نفس البداية والنهاية

أي بدايته تنطبق على نهايته

مثال : $\vec{AA} = \vec{0}$

الشعاعان المرتبطان خطياً

بفرض لدينا شعاعين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نقول عن الشعاعان أنهما مرتبطان خطياً إذا :

1 مركبات متناسبة

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'}$$

2 أحدهما ناتج عن الآخر بضربه بعدد

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

حيث $k \neq 0$

مثال : لتكن لدينا

$$\begin{array}{cccc} & x & y & z \\ \vec{u} & (2, & 2, & 2) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \vec{v} & (1, & 1, & 1) \\ & x' & y' & z' \end{array}$$

ادرس الارتباط الخطي للشعاعين :

طريقة 1 - : $\frac{2}{1} = \frac{2}{1} = \frac{2}{1}$

مركبات متناسبة الشعاعان مرتبطان خطياً

طريقة 2 : نلاحظ أن

$$\vec{u} = 2\vec{v}$$

أحدهما ناتج عن الآخر بضربه بعدد

الارتباط الخطي لثلاث أشعة

تعريف: نقول عن ثلاث أشعة أنها مرتبطة خطياً إذا وفقط إذا وجدت نقطة O تقع مع هي والنقاط A، B، C في مستوي واحد بحيث: $\vec{OC}=\vec{w}$ ، $\vec{OB}=\vec{v}$
$\vec{OA}=\vec{u}$

استخدامات الارتباط الخطي لثلاث أشعة:

1- إثبات أربع نقاط تقع في مستوي واحد

2- إثبات مستقيم يوازي مستوي

3- إثبات تقاطع مستقيمين

EXP: لتكن لدينا النقاط $A(2,0,1)$ ، $B(1,-2,1)$ ، $C(5,5,0)$
$D(-3,-5,6)$

أثبت أنتماء A وB ، C ، D إلى مستوي واحد.

خطوات الحل:

1- نشكل ثلاث أشعة (نفس البداية)

2- نأخذ شعاعين ونثبت أنهما غير مرتبطان خطياً

3- نشكل العلاقة:

شعاع = α شعاع + β شعاع

4- نوجد α و β ونتحقق.

الحل:

$\vec{AB}(-1,-2,0)$

$\vec{AD}(-5,-5,5)$ ، $\vec{AC}(3,5,-1)$

نثبت $\vec{AB}$ و $\vec{AC}$

$$\left(\frac{-1}{3} \neq \frac{-2}{5} \neq \frac{0}{-1}\right)$$

المركبات غير متناسبة الشعاعان غير مرتبطان خطياً فالنقاط الثلاثة لا تقع على استقامة واحدة فهي تشكل مستوي وحيد

$$\vec{AD} = \alpha \vec{AB} + \beta \vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$-5 = -\alpha + 3\beta \quad \ldots (1)$

$-5 = -2\alpha + 5\beta \quad \ldots (2)$

$5 = 0 - \beta \quad \ldots (3)$

من (3) -- $\boxed{\beta = -5}$

نعوض في (1)

$-5 = -\alpha - 15$

$\Rightarrow \boxed{\alpha = -10}$

نتحقق في (2)

$-5 = -2\alpha + 5\beta$

$\Rightarrow -5 = -2(-10) + 5(-5)$

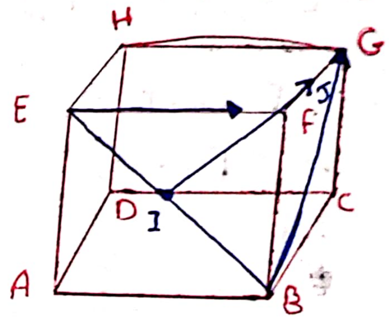
$\Rightarrow -5 = -5$ محققة

$\Leftarrow$ الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً النقاط الأربعة تقع مستوي واحد.

The end

Ahmad Assaah Al Hafiz

ليكن لدينا مكعب ABCDEFGH



في I منتصف [BE] و J منتصف [FG]

أثبت أن الأشعة $\vec{EF}$ و $\vec{BG}$ و $\vec{IJ}$ مرتبطة خطيا

الحل: طريقة الأولى وهي الأطول :

نأخذ معلما متجانسا $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$B(1,0,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$

$G(1,1,1)$, $I(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$

$J(\frac{2}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

نشكل الأشعة

$\vec{BG}(0,1,1)$

$\vec{EF}(1,0,0)$

$\vec{IJ}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

نحسب المستقامات $\vec{BG}$ و $\vec{EF}$

ونجد أنهما غير مرتبطان خطيا .

الآن نشكل العلاقة التي تربط بين الأشعة الثلاثة

$$\vec{IJ} = \alpha \vec{EF} + \beta \vec{BG}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2} = \alpha$ .. ①

$\frac{1}{2} = \beta$ .. ②

$\frac{1}{2} = \beta$ .. ③

من ① , ② نجد أن

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{2}}$$

نعوض

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{EF} + \frac{1}{2}\vec{BG}$$

ومنه نستنتج أن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

4

طريقة 2!

من الشكل :

$$\vec{IJ} = \vec{IB} + \vec{BG} + \vec{GJ}$$

$$\vec{IJ} = \vec{IE} + \vec{EF} + \vec{FG}$$

بالجمع ، شعاعان متعاكسان

$$2\vec{IJ} = 0 + \vec{BG} + \vec{EF} + 0$$

$$\Rightarrow 2\vec{IJ} = \vec{BG} + \vec{EF}$$

نقسم على 2

$$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BG} + \frac{1}{2}\vec{EF}$$

☺

ومن العلاقة نستنتج أن الأشعة الثلاثة مرتبطة خطياً.

The end

$\boxed{\frac{5}{37}}$ (إثبات تقاطع مستقيمين)

في معلم متجانس لدينا $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

النقطتان $A(3, -1, 1)$

$B(3, -3, -1)$

والشعاعان $\vec{U}(1, 0, -2)$ و $\vec{V}(2, 1, -3)$

d هو المستقيم المار بالنقطة A والموجه بالشعاع $\vec{U}$ و d' هو المستقيم المار بـ B وموجه بالشعاع $\vec{V}$ أثبت أن d و d' متقاطعان ثم عين I نقطة تقاطع.

الحل:

مستقيم = نقطة + شعاع توجيه

$\vec{AB}(0, -2, -2)$

1) نسب $\vec{U}$ و $\vec{V}$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-3}\right)$

المركبات غير متناسبة فإن d و d' إما متقاطعان أو متوازيان.

ملاحظة: إذا كان لدينا مستقيمين أشعة توجيههما غير مرتبطة خطياً فإن المستقيمان إما متقاطعان أو متوازيان.

لمعرفة ذلك نطبق:

$\vec{AB} = \alpha \vec{U} + \beta \vec{V}$

إذا تحققت العلاقة متقاطعان

إذا لم تتحقق فهما متوازيان

$$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$0 = \alpha + 2\beta \quad ... (1)$

$-2 = \beta \quad ... (2)$

$-2 = -2\alpha - 3\beta \quad ... (3)$

من (2) $\Leftarrow$ $\boxed{\beta = -2}$

نعوض في (1)

$0 = \alpha - 4 \Rightarrow \boxed{\alpha = 4}$

نتحقق في (3)

$-2 = -2(4) - 3(-2)$

$-2 = -8 + 6 \Rightarrow \boxed{-2 = -2}$

محققة إذاً d و d' متقاطعان في نقطة I

لحساب $I(x, y, z)$ نستفيد من انتماء I إلى d و d'

(1) $I \in d$ فإن $\vec{AI} = \alpha \vec{U}$

$I \in d'$

$\vec{BI} = \beta \vec{V}$

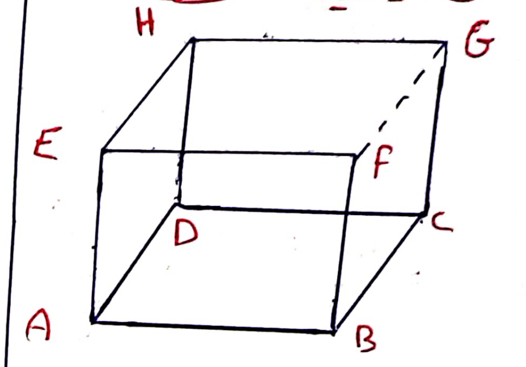
من (1) $\vec{AI} = 4\vec{U}$

$$\begin{bmatrix} x - 3 \\ y + 1 \\ z - 1 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$x = 7, \quad y = -1, \quad z = -7$

$I(7, -1, -7)$

التوازي في الفراغ:



نتأمل المكعب: ABCDEFGH

النقطة I من الحرف $[CD]$ تحقق $\vec{DI}=\frac{1}{4}\vec{DC}$

والنقطة J من $[BC]$ $\vec{BJ}=\frac{3}{4}\vec{BC}$

أثبت أن (HI) يوازي المستوي (EGJ)

الحل: (فكرة مستقيم يوازي مستوي)

نختار معلم متجانس $(A,\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

فتكون $H(0,1,1)$ ، $J(1,\frac{3}{4},0)$

$I(\frac{1}{4},1,0)$ ، $G(1,1,1)$

$E(0,0,1)$

نثبت أن الأشعة $\vec{HI}$ و $\vec{EG}$ ، $\vec{EJ}$ واقعة في مستوي واحد

$\vec{HI}(\frac{1}{4},0,-1)$ ، $\vec{EG}(1,1,0)$

$\vec{EJ}(1,\frac{3}{4},-1)$

نبين $\vec{EG}$ ، $\vec{EJ}$

$$\left(\frac{1}{1} \neq \frac{1}{\frac{3}{4}} \neq \frac{0}{-1}\right)$$

المركبات غير متناسبة الشعاعان غير مرتبطان خطياً فالنقاط الثلاث ليست على استقامة واحدة

فهي تعين مستوي

$$\vec{HI}=\alpha\vec{EG}+\beta\vec{EJ}$$

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\\0\\-1\end{bmatrix}=\alpha\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+\beta\begin{bmatrix}1\\\frac{3}{4}\\-1\end{bmatrix}$$

$\frac{1}{4}=\alpha+\beta$ --- ①

$0=\alpha+\frac{3}{4}\beta$ --- ②

$-1=-\beta$ --- ③

من ③ $\boxed{\beta=1}$

نعوض في ① $\frac{1}{4}=\alpha+1 \Rightarrow$

$\alpha=\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$

$\boxed{\alpha=\frac{-3}{4}}$

نتحقق في ②

$0=-\frac{3}{4}(1)+\frac{3}{4}(1)$

$\Rightarrow 0=0$ محقق

فالمستقيم $(HI) \parallel (EGJ)$

The end