## أهم نماذج المتتاليات

**مثال :** نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ كما يأتي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12+u_n}$

1) أثبت أن $0 \leq u_n \leq 4$ أياً كان العدد الطبيعي n
2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متزايدة . واستنتج أنها متقاربة

**الحل :**

1) لنبرهن أن المتراجحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 4$ بالتدريج كما يلي :
لنبرهن صحة القضية $E(0)$ محققة لأن $0 \leq u_0 = 1 \leq 4$
لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $0 \leq u_n \leq 4$ صحيحة
لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :
$$0 \leq u_n \leq 4 \Rightarrow 0+12 \leq u_n+12 \leq 4+12$$
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12} \leq \sqrt{u_n+12} \leq \sqrt{16}$$
$$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{12+u_n} \leq 4 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 4$$
فالقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي بالتدريج وجدنا: $0 \leq u_n \leq 4$
محققة و ذلك أياً كان العدد الطبيعي n

2) سنبرهن بالتدريج أن $E(n): u_n \leq u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n
لنثبت صحة العلاقة $E(0)$ كما يلي :
$$u_0 = 1 \quad ، \quad u_1 = \sqrt{12+1} = \sqrt{13} \Rightarrow u_0 \leq u_1$$
لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_n \leq u_{n+1}$
لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :
$$u_n \leq u_{n+1} \Rightarrow u_n+12 \leq u_{n+1}+12$$
$$\sqrt{u_n+12} \leq \sqrt{u_{n+1}+12} \Rightarrow u_{n+1} \leq u_{n+2}$$
وبما أنها متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة ..

### قاعدة

لبرهان متتالية هندسية نبرهن أن $u_{n+1} = q.u_n$ حيث $q$: عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = const$$

### تطبيق هام

لتكن المتتالية :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 \end{cases} \quad , \quad v_n = u_n + 3$$

1) برهن $v_n$ متتالية هندسية و عيّن أساسها .
2) اكتب عبارة $v_n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$
3) إذا كانت $s_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ احسب $\lim_{n\to+\infty} s_n$

الحـــل

1) $v_n = u_n + 3$

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 3) + 1 \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n - 1 + 1$$

$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n \Leftarrow$ $v_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$

$v_n = q^n\, v_0$ حيث $v_0 = u_0 + 3 \Rightarrow v_0 = 4$

$$\Rightarrow v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

$$\Rightarrow u_n = v_n - 3$$

$$\Rightarrow u_n = \frac{4}{3^n} - 3$$

2) $s_n = v_0 + \ldots + v_n$

$s_n$ هي مجموع متتالية هندسية حدها الأول $v_0$ و أساسها $q = 3$

و عدد حدودها $n+1$

$$s = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 6 - \frac{2}{3^n}$$

بما أن : $q = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 6 - 0 = 6$$

**قاعدة**

لبرهان متتالية حسابية نبرهن أن $u_{n+1} = u_n + r$ حيث $r$ : عدد ثابت هو أساس المتتالية أو نبرهن أن

$$u_{n+1} - u_n = const$$

**مثال**

أيُّ المتتاليتين $(U_n)_{n\geq0}$ و $(v_n)_{n\geq0}$ الآتيتين حسابية

1) $u_n = 3n + 1$

2) $v_n = n^2 + 1$

الحـــل

1) $u_{n+1} - u_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3 \in \mathcal{R}$

فالمتتالية $(U_n)_{n\geq0}$ حسابية حدها الأول 1 و أساسها 3

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 1 - (n^2+1) = 2n + 1$ ( ليس ثابت)

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ ليست متتالية حسابية

| قواعد المتتالية الحسابية | قواعد المتتالية الهندسية |
|---|---|
| • $S = (\text{عدد الحدود}) \times \frac{\text{آخر حدّ+أول حدّ}}{2}$ | • $S = (\text{الحد الأول}) \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$ |
| • $u_{\star} - u_{\heartsuit} = (\star - \heartsuit)r$ | • $\frac{u^{\star}}{u_{\heartsuit}} = q^{\star - \heartsuit}$ |

## تطبيق امتحاني هام

لتكن المتتاليتين $(y_n)_{n\geq0}$ ،$(x_n)_{n\geq0}$ المعرفتين وفق $y_n = \frac{4n+1}{n+2}$ ، $x_n = \frac{4n+5}{n+1}$ برهن أنهما متجاورتين .

**الحــــل**

دراسة اطراد المتتالية $(x_n)_{n\geq0}$:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{4n+5}{n+1}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

فالمتتالية $(x_n)_{n\geq0}$ متناقصة .

دراسة اطراد المتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ :

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4(n+1)+1}{(n+1)+2} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{7}{(n+3)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(y_n)_{n\geq0}$ متزايدة .

$$x_n - y_n = \frac{4n+5}{n+1} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{8n+9}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{x\to+\infty}\frac{8n+9}{(n+1)(n+2)} =$$

إذاً المتتاليتان $(y_n)_{n\geq0}$ ،$(x_n)_{n\geq0}$ متجاورتان .

## تطبيق هام


أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة تدريجياً بالعلاقات :

$u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$ متزايدة تماماً .

## الحـــل

سنبرهن بالتدريج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً كما يلي :

$E(n): u_n < u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n

لنثبت صحة القضية $E(0)$ كما يلي :

محققة $u_0 = 0$ ، $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \Rightarrow u_1 > u_0$

لنفرض صحة القضية $E(n)$ أي : $u_{n+1} > u_n$ ... (*)

و لنثبت صحة القضية $E(n+1)$ كما يلي :

$u_{n+1} > u_n$ (حسب *)

نربّع الطرفين : $u_{n+1}^2 > u_n^2$

نضيف 1 للطرفين: $u_{n+1}^2 + 1 > u_n^2 + 1$

نجذر الطرفين: $\sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$

فحسب البرهان بالتدريج فإن $u_{n+2} > u_{n+1}$ أياً كان العدد الطبيعي n



## تمرين

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n} \end{cases}$

1) أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n

2) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة: $v_n = \frac{1}{U_n}$ متتالية حسابية واكتب عبارة $v_n$ بدلالة $n$ واستنتج عبارة $u_n$

## الحـــــل

$$u_0 = 1 \ , u_n + 1 = \frac{u_n}{1 + u_n}$$


① إثبات ان $u_n > 0$ :

1- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n = 0$:

$u_0 > 0 \Rightarrow 1 > 0$ محققة

2- نفرض صحة العلاقة من أجل $n$ أي:

$\boxed{u_n > 0}$ ⋆

3- نبرهن صحة العلاقة من اجل $n + 1$ :

$u_{n+1} > 0$

نقسم البسط على المقام:

سنبرهن : $1 + \frac{-1}{1 + u_n} > 0$

نشطلق من ⋆: $u_n > 0$

نضيف (1): $1 + u_n > 1$

نقلب: $\frac{1}{1+u_n} < 1$

نضرب بـ (-1) : $\frac{-1}{1+u_n} > -1$

نضيف (1) : $1 + \frac{-1}{1+u_n} > 0$

$\Rightarrow u_{n+1} > 0$

② $v_n = \frac{1}{u_n}$

لاثبات أن المتتالية حسابية يجب أن يكون:

$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n$ = عدد ثابت

$$\vartheta_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{\frac{u_n}{1 + u_n}} = 1 \,.\frac{1 + u_n}{u_n}$$

$$\vartheta_{n+1} - \vartheta_n = \frac{1 + u_n}{u_n} - \frac{1}{u_n} = \frac{u_n}{u_n} = 1 = const$$

⇐ **المتتالية حسابية أساسها** $r = 1$

كتابة $\vartheta_n$ بدلالة n :

$$\vartheta_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\Rightarrow \ \vartheta_n = \vartheta_0 + (n - 0)1$$

$$\Rightarrow \boxed{\vartheta_n = 1 + n}$$

ستنتاج عبارة $u_n$ :

$$\vartheta_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow u_n = \frac{1}{\vartheta_n} = \frac{1}{n + 1}$$

# بنك التمارين الهامة

## التمرين الأول :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق .. $u_0 = 2$ ، $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$ عند كل $n \geq 0$

أثبت بالتدريج أن $0 \leq u_n \leq 5$ أياً كان $n$ و أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً ثم استنتج تقاربها و حدد نهايتها

## التمرين الثاني :

لتكن المتتاليتان المعرّفتان وفق : $u_n = 1 + \frac{1}{n^2}$ ، $t_n = 1 - \frac{1}{n}$

أثبت أنهما متجاورتان ثم عيّن نهايتهما المشتركة .

## التمرين الثالث :

ليكن التابع $f$ المعرف على $R/\{-1\}$ وفق : $f(x) = \frac{2x}{x+1}$

1) أوجد النهاية على أطراف مجموعة التعريف و اكتب معادلة كل مقارب لخطه $C_f$

2) أثبت أن التابع متزايد تماماً ونظم جدول التغيرات

3) لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالصيغة : $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{2u_n}{u_n+1}$ ، $u_0 = 2$

I ) أثبت أن المتتالية متناقصة تماماً و أن $2 \geq u_n \geq 0$ II) استنتج تقارب المتتالية و أوجد نهايتها .

## التمرين الرابع :

نعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ كما يأتي: $v_0 = \frac{1}{2}$ و $v_{n+1} = \frac{5v_n+4}{v_n+2}$ والمطلوب :

1) ادرس جهة اطراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$.

2) نعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $u_n = \frac{v_n-4}{v_n+1}$

I) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ هندسية ثم عيّن حدها الأول وأساسها

II) أوجد عبارة $u_n$ بدلالة n ، ثم أستنتج عبارة $v_n$ بدلالة n وعيّن نهاية $(v_n)_{n\geq 0}$ .

## التمرين الخامس :

لتكن المتتالية $u_{n+1} = e(u_n)^{\frac{1}{2}}$ ، $u_0 = e^3$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة بالشكل : $v_n = \ln(u_n) - 2$

1) أثبت أن $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية و عين $v_0 . q$

2) اكتب $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة $n$ ثم استنتج $u_n$ بدلالة $n$

3) أثبت أن المتتالية $u_n$ متقاربة

## التمرين السادس :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة وفق : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{2u_n+6}$ عند كل $n \geq 0$

1) أثبت أن التابع $x \to \frac{3x+2}{2x+6}$ متزايد تماماً واستنتج أن $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$ أياً كان العدد الطبيعي $n$

2) أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً