

نقاشات

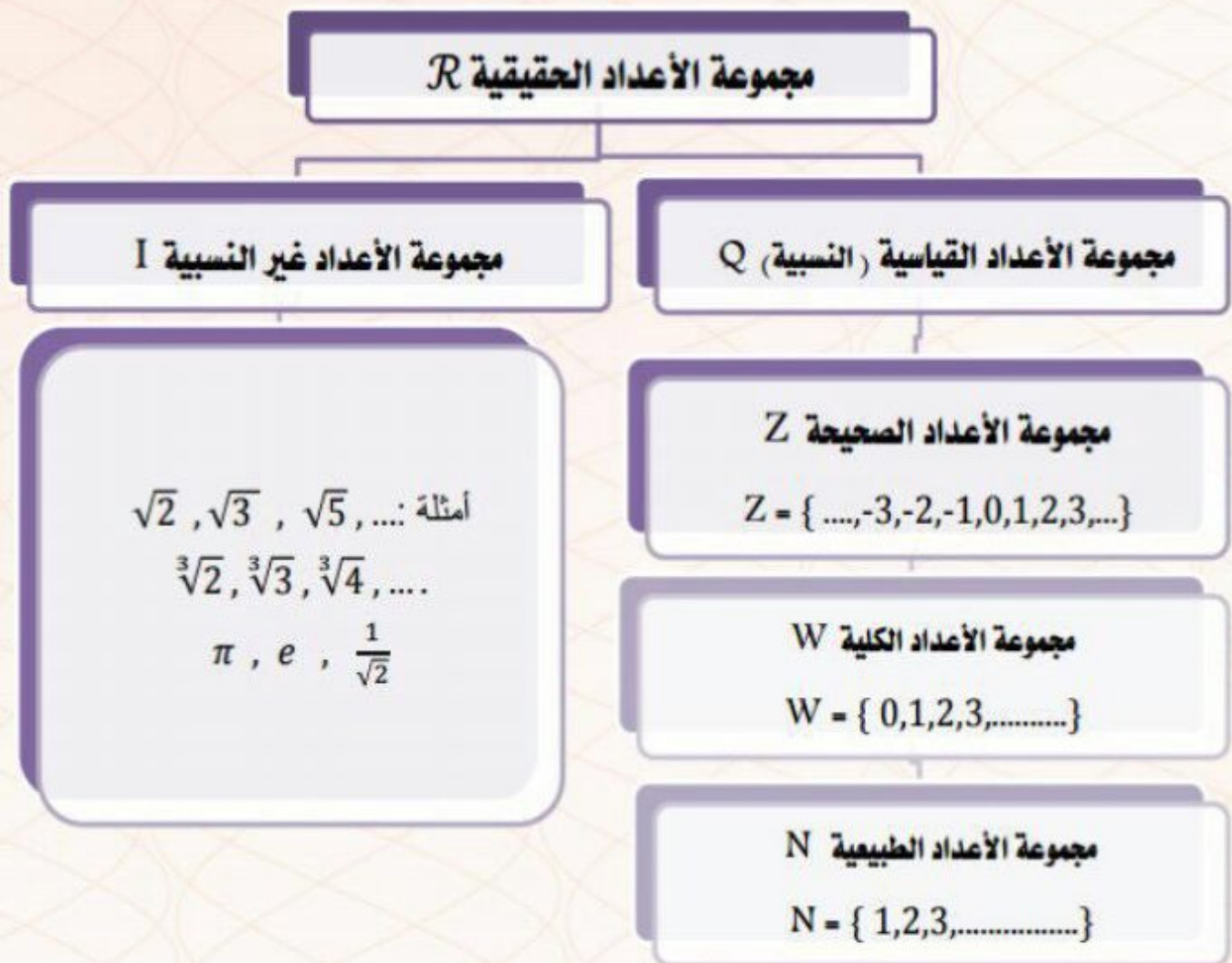
المعيار

الأول

نقاش اليوم

الأول

١) مجموعات الأعداد :



❖ الأعداد الغير نسبية هي أعداد غير منتهية.

نعم أعداد غير منتهية

و لصوره العشرية للأعداد^{الغير} النسبية تكونه
غير منتهية وغير دورية، و عدد الاصله على
الباي، الجذور البعد

ملاحظة:

الأعداد الصيغه (N) جزئيه من الأعداد
الكليه (N)، والكليه جزئيه من الصيغه (Z)
والصيغه جزئيه من الصيغه الجزئيه
من الحقيقي، و الحقيقي جزئيه من المركب.

❖ هل العدد 11 جذر أهم أم لا؟ لا

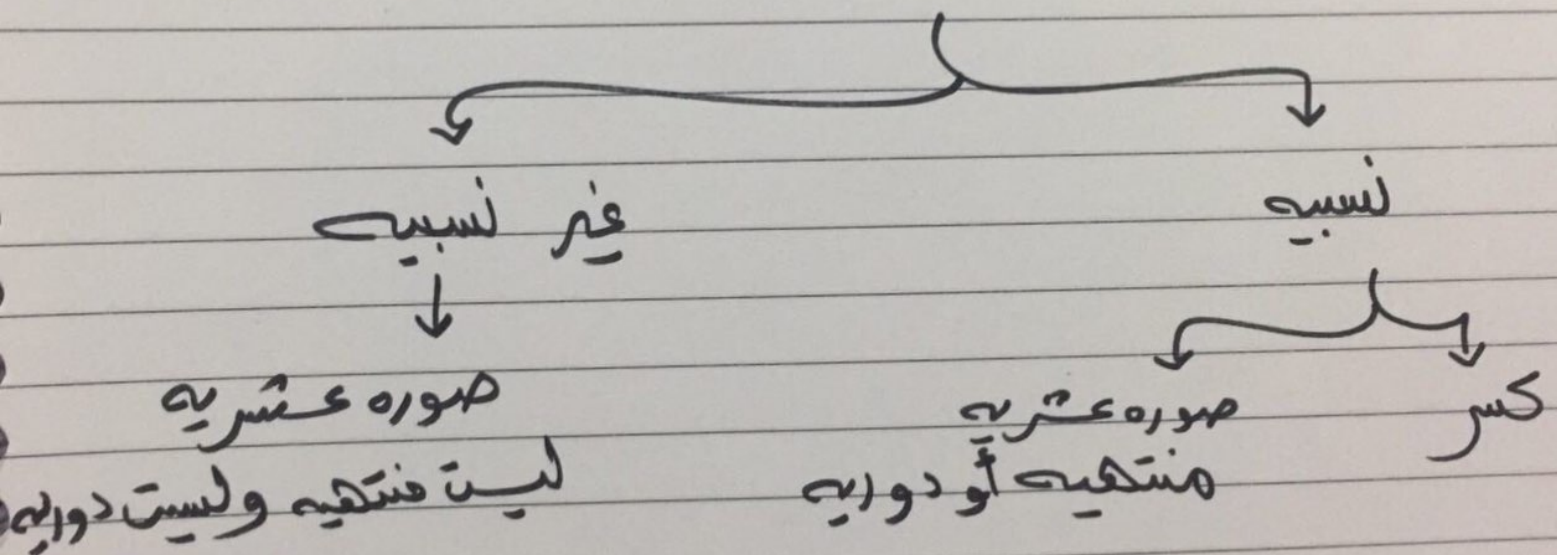
الجذر لأهم هو جذر عدد ليس مربع كامل

مثل 11 أهم لأنه 11 ليس مربع كامل

(عني لا يوجد عدد يقرب في نفسه لشيء 11)

(الجذور البعد تقير غير نسبية)

الأعداد الحقيقية



■ العدد النسبي :

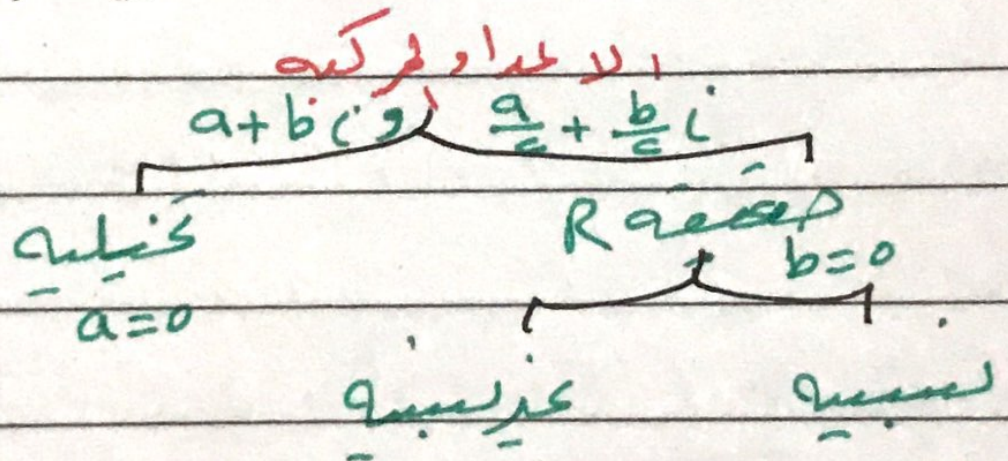
هو العدد الذي يمكن كتابته على صورة بسط ومقام كلاهما عدد صحيح والمقام لا يساوي صفر ويمكن تمثيله ككسر عشري منته أو دوري.

أمثلة :

$\frac{1}{2}$	$\frac{34}{6} = 5\frac{4}{6}$	$\frac{6}{1} = 6$	$\frac{13}{10} = 1.3$
$\frac{0}{1} = 0$	$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3} = 0.33333 \dots \dots = 0.\overline{3}$	

الصحيبي : بحيث على صورة كسر
الغير صحيبي : لا بحيث على صورة كسر

هل بعد الجبري والغير صحيبي هو عدد مركب؟؟
نعم الحركة أكبر وتشمل الجميع



ما معنى كل عدد صفحي يكون مركب
لا به جزء تخيلي صياري صفري

هل بعد 7 عدد مركب؟
نعم لا به عكس كتابته على الصورة
 $7 + 0i$

1) 0

2) $\frac{2}{3}$

3) π

4) $\sqrt{2}$

5) $|-5|$

قسم (3)

سيفي الى أي مجموعة ؟

• الضميمة

• الكسرية

• المصممة

• المركبة

الباء = تقريباً 3.14

وتقريباً تعني أنه غير منتهى

ان اذنه ليس مبدئياً لا يعمل على أصابع اليد

وليس صحيح لانه لا يعمل على خط الأعداد

وليس كلي

اكيد مركب لانني اشغل

(1) الصفر عدد نسبي مقامه واحد C, R, Q

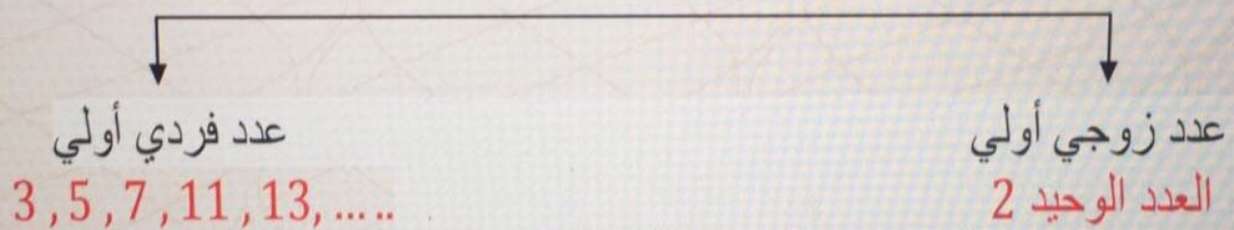
(2) C, R و Q

(4) I, R, C

(5) R, C

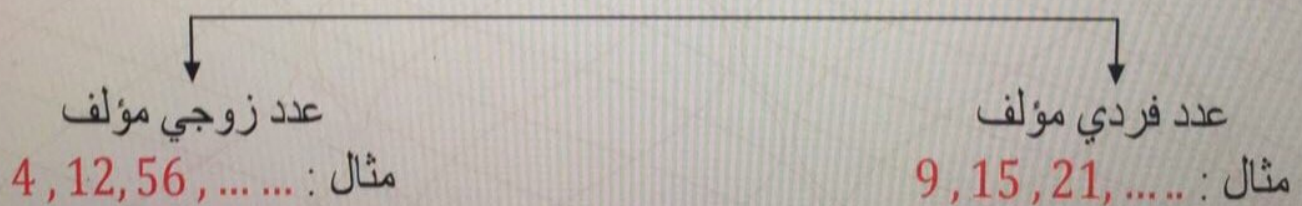
■ الأعداد الأولية :

هي الأعداد التي تقبل القسمة على نفسها والواحد الصحيح ، أي تتكون من حاصل ضرب عاملين فقط هما الواحد الصحيح والعدد نفسه .



■ الأعداد المولفة :

هي الأعداد التي لها أكثر من عاملان .



العدد الأولي :

هو العدد الذي له عاملان فقط
هو العدد ٢ هو العدد نفسه (و ليس عدد
غير مؤلف)

العدد غير الأولي :

هو العدد الذي له أكثر من عاملين (و ليس
عدد مؤلف)

ملاحظات :

هو عدد

غير متتالين

مجموع اي عددين فرديين
زوجي غير اولي (مؤلف)

هو عدد

غير متتالين

ناح طرح عددين فرديين
زوجي غير اولي (مؤلف)

الفردية

أولي

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17,

غير أولي

الزوجية

2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,

أولي

غير أولي

* هل العدد واحد أولي؟؟

لا ، لا أولي ولا غير أولي

الواحد هو العدد الطبيعي الوحيد الذي لا يضاف
منه فثمنه لا أولي ولا مؤلف

الأولي لصا قاسمان .
والعدد 1 له قاسم فقط

معلومه :- طرح عددين فرديين غير متتاليين
عدد غير أولي

$$7 - 3 = 4$$

فردية فردية زوجية

* هل يعتبر الصفر مؤلف؟ نعم

الصفر عدد زوجي

جميع الأعداد الزوجية مؤلفة عدا 2

✳ هل العدد 91 عدد أولي ؟

لا

91 غير أولي لأنه له أكثر من قاسم.

قواسمه 7, 13 و 1

(هو كل عدد جزوي أولي)

9 جزوي غير أولي

✳ هل العدد 221 عدد أولي ؟

لوجود اقرب منه

اقرب عدد مربع أكبر منه 221 هو $15^2 = 225$

$$221 < 225 = 15^2$$

$$\therefore 15 > \sqrt{221}$$

إذا كان العدد غير أولي فإنه يجب أنه يوجد

عدد أولي عم الاقل يقسمه العدد

الاعداد هي 2, 3, 5, 7, 11, 13

ملاحظاً 13 يقسم العدد 221

∴ العدد 221 هو مؤلف

الكسور العظمى الاعتيادية (الحقيقية) :
هي التي يكون بسطها أقل من مقامها .

الكسور غير العظمى (غير الحقيقية) :
هي التي يكون بسطها أكبر من مقامها .

الأعداد الكسرية : تكون مكونة من عدد
وكسر

الكسور العشرية : هي التي تكون مقامها 10
و مضاعفات 10 .

التحويل من كسر غير حقيقي إلى عدد كسري
نقسم البسط على المقام

کسر فغای
(اعتیادی)

$$\frac{2}{5}$$

کسر غیر فغای
(یکتعال صوره)
(عدد کسری)

$$\frac{9}{4} = 2 \frac{1}{4}$$

کسر عسری

$$\frac{7}{10}, \frac{15}{100}, \frac{125}{1000}$$

$$\textcircled{1} \quad 1 \frac{1}{4} =$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{28}{4} =$$

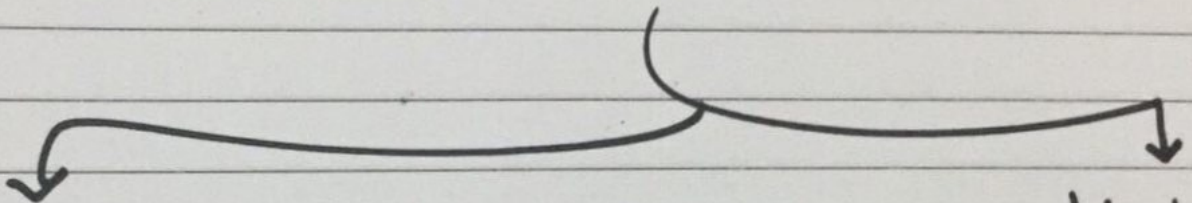
$$\textcircled{3} \quad \frac{3}{4} =$$

$$\textcircled{4} \quad 0,25 =$$

- ١ / حول عدد كسري الى كسر
- ٢ / حول عدد كسر عذ حقيقي الى عدد كسري
- ٣ / حول عدد كسر اعشاري الى كسر عشري
- ٤ / حول عدد كسر عشري الى كسر اعشاري

١) لتحويل من كسر حقيقي الى كسر
عشري انا بقسمه البسط \div المقام
بالقيمة المطولة او ضرب البسط
والمقام في عدد ليكون المقام ١٠٠
او مضاعفاً .

① $1\frac{1}{4}$ صورة عدد كسري



صورة كسر عشري

صورة كسر غير فعلي

$$\frac{5}{4} = \frac{5 \times 25}{4 \times 25} = \frac{125}{100} = 1,25$$

$$1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\textcircled{1} 1 \frac{1}{4} = \frac{(1 \times 4) + 1}{4} = \frac{5}{4}$$

تحويل من عدد كسري الى كسر

$$\textcircled{2} \frac{28}{4} = \begin{array}{r} 7 \\ 4 \overline{) 28} \\ \underline{28} \\ 00 \end{array} = 7$$

$$\textcircled{3} \frac{3}{4} = \begin{array}{r} ,75 \\ 4 \overline{) 30} \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{20} \\ 00 \end{array}$$

تحويل من كسر اعشاري الى كسر عشري
= ,75 →

$$\textcircled{4} 0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

تحويل من كسر عشري الى كسر اعشاري

②

$$\frac{29}{4}$$

صورة كسر غير فعلي

كسر كسري

$$4 \times 7 = 28$$

عدد كسري

$$7 \frac{1}{4} \times 25 = 7 \frac{25}{100}$$

$$= 7,25$$

$$\frac{29}{4} = 7 \frac{1}{4}$$

أعداد حقيقية

واذا كان a, b

$$\frac{a}{b}$$

هذه الصورة
تسمى كسر

نصف 3 و 7

$$\frac{3}{7}$$

كسر مغلي

$$\frac{7}{3} = 2 \frac{1}{3}$$

كسر غير
مغلي

لا يمكن تقسيم

الكتابة على صورة

عدد كسري

(عدد + كسر)

أسف هو ٥

$$0,25 = \frac{25 \div 25}{100 \div 25} = \frac{1}{4}$$

25 جزء من 100
تكتب على 100 مقلوب
25
—
100

$$0,5 = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0,25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$$

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$$

العمليات على الأعداد النسبية (الكسور) :

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}$$

(١) عمليتي الجمع والطرح :

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

(٢) عملية الضرب :

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

(٣) عملية القسمة :

$$\frac{2}{6} + \frac{5}{6} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{4}{3} - \frac{7}{9} =$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} =$$

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{9} =$$

$$\frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2+5}{6} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$$

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{4 \times 3}{3 \times 3} - \frac{7}{9} = \frac{12}{9} - \frac{7}{9} = \frac{12-7}{9} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{3}{5} \times \frac{2}{6} = \frac{3 \times 2}{5 \times 6} = \frac{\cancel{6}}{5 \times \cancel{6}} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{7} \div \frac{4}{9} = \frac{3}{7} \times \frac{9}{4} = \frac{27}{28}$$

يقلب يقلب

الكسور المتكافئة :

هي كسور لها نفس القيمة وحدودها مختلفه وذلك بضرب أو قسمة كل من البسط والمقام في أو على نفس العدد

$$\frac{16}{24} = \frac{16 \div 2}{24 \div 2} = \frac{8}{12}$$

أو

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \times 2}{3 \times 2} = \frac{4}{6}$$

مثال :

للمقارنة بين كسرين : توجد ثلاث حالات :

(١) إذا كان الكسران لهما نفس المقام : الكسر ذو البسط الأكبر هو الأكبر .

$$\text{مثال : } \frac{3}{5} < \frac{4}{5} \quad \text{لأن } 3 < 4$$

(٢) إذا كان الكسران لهما نفس البسط : الكسر الذي مقامه أكبر هو الأقل .

$$\text{مثال : } \frac{4}{3} > \frac{4}{5} \quad \text{لأن } 3 < 5$$

(٣) إذا كان كل من الكسرين مختلفين : نضرب مقام الأول في بسط الثاني ونضرب مقام الثاني في بسط الأول ونقارن الناتجين .

$$2 \times 10 = 20 \quad \leftarrow \frac{2}{5} \quad \frac{7}{10} \quad \rightarrow 7 \times 5 = 35$$

$$\frac{2}{5} < \frac{7}{10} \quad \text{فإن } 20 < 35 \quad \text{ولأن}$$

◆ حل ذهني سريع ◆

لحالة من حالات المقارنة بين الكسور

إذا كانت الكسور حقيقية أي بسطها أقل من مقامها
والفرق بين البسط والمقام في جميع الكسور عدد
ثابت

يكون ترتيبها تصاعديا ابتداء من صاحب البسط
والمقام الأصغر ثم الأكبر

مثال 1

$3/4, 2/3, 6/7, 5/6$
يكون ترتيبها تصاعديا كالتالي :
 $2/3, 3/4, 5/6, 6/7$

مثال (2)

$5/8, 2/5, 4/7, 7/10$
يكون ترتيبها تصاعديا :
 $2/5, 4/7, 5/8, 7/10$

● إذا كان الكسر غير حقيقي أي (بسطه أكبر من مقامه)
وكان الفرق بين البسط والمقام في جميع الكسور عدد ثابت
فيكون الترتيب تصاعديا نبدأ بالكسر صاحب البسط والمقام الأكبر فيكون هو أصغر الأعداد ثم الذي يليه

مثال (3)

$7/6, 9/8, 8/7, 10/9$
يكون الترتيب تصاعديا :
 $10/9, 9/8, 8/7, 7/6$

4:26

مثال

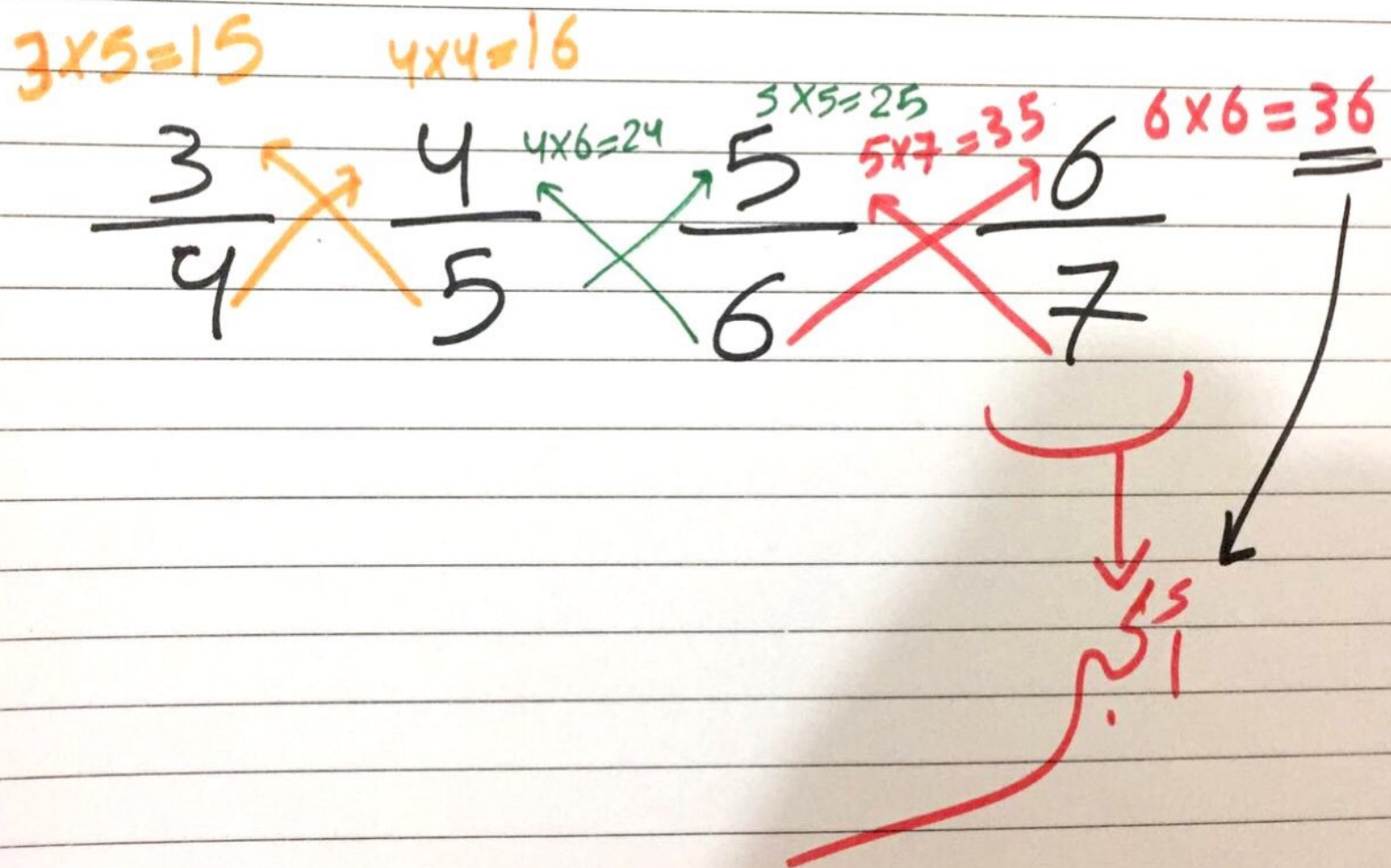
(١٢) أي الاعداد الآتية أكبر ؟

(ب) $\frac{4}{5}$

(أ) $\frac{3}{4}$

(د) $\frac{6}{7}$

(ج) $\frac{5}{6}$



٩) رتب الكسور التالية تصاعدياً

$$\frac{1}{2}, \frac{9}{14}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}$$

(تصاعدي اي من الاصغر للاكبر)

نصف المقام

$$\frac{1}{2}$$

0

1

2

منتصف
المقام

$$\frac{9}{14}$$

0

7

14

أكبر عدد يقسم
المقام

$$\frac{3}{4}$$

0

2

3

4

ثلاثة ارباع المقام

$$\frac{5}{7}$$

0

3.5

5

7

قريب من ثلاث ارباع
المقام

$$7 \times 1 = 7$$

$$2 \times 5 = 10$$

$$\frac{1}{2} \times \frac{5}{7}$$

الشيء

نروح نقارنه بالكسر اللي بعده

$$5 \times 4 = 20$$

$$7 \times 3 = 21$$

$$\frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$$

الشيء

نروح نقارنه بالكسر اللي بعده

$$3 \times 14 = 42$$

$$4 \times 9 = 36$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{9}{14}$$

الشيء



نقاش اليوم

الثاني

2

بعض الكلمات الي نستدل بها في صيغة السؤال
على أن المطلوب هو القاسم أو المضاعف :

◆ اذا كان في السؤال كلمة أكبر عدد ، أو فهم
من صيغة السؤال تقسيم الأشياء أو ترتيبها
فالمطلوب القاسم المشترك الأكبر

مثال :

صندوق يحتوي على عدة صفحات ويراد وضع
صور فيه

ما أكبر عدد من الصور يمكن وضعها في
الصفحة الواحدة اذا كانت الصور 8 صور كبيرة
و 12 صورة متوسطة و 16 صور صغيرة ؟

الحل :

نحلل العدد 8 و 12 و 16
ونأخذ فقط العوامل المشتركة ذات الأس الأصغر

أو بطريقة ثانية أسرع
نأخذ اصغر الاعداد وهو 8

1

● القاسم المشترك الأكبر :

هو حاصل ضرب العوامل المشتركة فقط الأقل
تكرار أو ذات الأس الأصغر

● المضاعف المشترك الأصغر

هو حاصل العوامل المشتركة الأكثر تكرارا أو ذات
الأس الأكبر ، والعوامل غير المشتركة

وليجاد القاسم المشترك الأكبر أو المضاعف
المشترك الأصغر لا بد من تحليل الأعداد إلى
عواملها الأولية

3

ونشوف قواسمه وهي 8 ، 4 ، 2 ، 1 بشكل سريع
بالذهن

فسنجد ان ٤ هو العدد الذي يقسم جميع الأعداد
8 و 12 و 16 هو ق.م.أ

◆ اذا كان في السؤال كلمة أقل أو اصغر عدد
، أو ما يدل على تكرار الحدث يكون المطلوب
المضاعف المشترك الأصغر

مثال

ما قواسم العددين 14 , 36

مثال

ما قواسم العددين 14 , 36

بالتحليل
نوجد أي عددين مضروبهم يساوي 14
ثم نخلصهم للعوامل الأولية

$$\begin{array}{c} 14 \\ \wedge \\ 2 \times 7 \end{array}$$

كلاهما أولي

وأيضا 36

$$\begin{array}{c} 36 \\ \wedge \\ 4 \times 9 \\ \wedge \quad \wedge \\ 2 \times 2 \times 3 \times 3 \end{array}$$

القاسم المشترك

$$\underline{\underline{2}}$$

مثال

هل يوجد قاسم مشترك للعددين 27 و 16

مثال

هل يوجد قاسم مشترك للعددين 27 و 16

$$\begin{array}{c} 27 \\ \swarrow \searrow \\ 3 \times 9 \\ | \quad \swarrow \searrow \\ 3 \times 3 \times 3 \\ \boxed{3^3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 16 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \times 8 \\ | \quad \swarrow \searrow \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \\ \boxed{2^4} \end{array}$$

لا يوجد

ملاحظه مهمه

القاسم المشترك هنا 1

4:42 م 2

الاعداد التي ليس بينها قاسم مشترك تكون
اوليان نسبيا فيما بينهما

مثلا

$$\gcd(4,9)=1$$

هذا يعني أنهما اوليان نسبيا فيما بينهما

Photo
Studio

١٥) قط يستطيع ان يصعد درج ستة ستة بدون باق.
 وثمانية ثمانية بدون باق . وعشرة عشرة بدون باق .
 فما اقل عدد من السلالم يحتوي الدرج

- أ) 30 ب) 60
 ج) 120 د) 240

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} 6 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 3 \\ 2 \times 3 \end{array} &
 \begin{array}{c} 8 \\ \swarrow \downarrow \searrow \\ 2 \quad 2 \quad 2 \\ 2^3 \end{array} &
 \begin{array}{c} 10 \\ \swarrow \searrow \\ 2 \quad 5 \\ 2 \times 5 \end{array} \\
 & & \\
 & = 2^3 \times 3 \times 5 & \\
 & = 120 &
 \end{array}$$

حاصل ضرب العددين = حاصل ضرب
المضاعف والقاسم

(٧) إذا كان القاسم المشترك الأكبر للعددين $x, 14$
يساوي 7 ، والمضاعف المشترك الأصغر لهما 42
فإن $x = \dots$

أ) 7 ب) 14
ج) 21 د) 42

القاسم الأكبر \times المضاعف الأصغر = العدد \times العدد الثاني

$$x \times 14 = 42 \times 7$$

$$x = 21 \frac{42 \times 7}{14}$$
$$x = 21 \times 2$$

ولاً : الأسس

القاعدة	مثال
$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n$	$a^3 = \underbrace{a \cdot a \cdot a}_3$
$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$	$x^5 \cdot x^2 = x^{5+2} = x^7$ في حالة ضرب الأساسات المتشابهة نجمع الأسس
$x^m \div x^n = x^{m-n}$	$x^5 \div x^2 = x^{5-2} = x^3$ في حالة قسمة الأساسات المتشابهة نطرح الأسس
$(x^m)^n = x^{m \times n}$	$(x^5)^2 = x^{5 \times 2} = x^{10}$ ضرب القوى
$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$	$x^{-5} = \frac{1}{x^5}$ في حالة الأس سالب نقلب الكسر و نغير إشارة الأس
$\left(\frac{x}{y}\right)^{-m} = \left(\frac{y}{x}\right)^m, \quad x, y \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
$\left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}, \quad y \neq 0$	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5}$
$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m$	$(2 \cdot 3)^2 = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$
$x^0 = 1, \quad x \neq 0$	$7^0 = 1$

(١) نصف العدد 2^{10} هو

(ب) 2^9
(د) 4^{10}

(أ) 2^5
(ج) 1^{10}

(٢) أربع أمثال العدد 4^{100} هو

(ب) 4^{99}
(د) 4^{101}

(أ) 4^{25}
(ج) 1^{100}

أربع أمثال العدد 4^{100} هو؟
نضرب في 4
(ولأنه أساس نفسه)
نضرب في 4
الأسس
 $4 \cdot 4^{100} = 4^{100+1} = 4^{101}$

نصف عدد
نقسم على 2
نضرب في $\frac{1}{2}$
 $2^{10} \div 2 = 2^{10} \times \frac{1}{2}$
هو نفسه
 $= \frac{2^{10}}{2}$
الأسس
 $= 2^{10-1} = 2^9$

مثال

$$3^5 + 3^5 + 3^5 = \dots$$

(ب) 9^5

(د) 3^{15}

(أ) 3^5

(ج) 3^6

$$3^5 + 3^5 + 3^5$$

لا تجمع الأساسات
لأنهما كانت متماثلتين

في قوانين الأسس

هنا ستخرج القاسم المشترك

$$\underline{3^5} \times 1 + \underline{3^5} \times 1 + \underline{3^5} \times 1$$

$$= 3^5 (1+1+1) = 3^5 \times 3^1$$
$$= 3^6$$

(١٣) إذا كان $100^{x+3} = 10^{y+6}$ ، أوجد y بدلالة x

(ب) $x = 2y$

(أ) $x = y$

(د) $y = 2x$

(ج) $y = x + 2$

بند
في العرف
الأسر

$$100 = 10^2$$

$$100^{(x+3)} = 10^{2(x+3)}$$

$$= 10^{2x+6}$$

$$\underline{\underline{= 10^{2x+6}}}$$

الأسر
نكتب المعادلة
بشكل جديد

$$10^{\underline{2x+6}} = 10^{\underline{y+6}}$$

$$2x = y$$

$$\frac{(7^2)^6 - 7^9}{7^9} = \dots$$

342 (ب)
340 (د)

343 (ا)
341 (ج)

سوال 6

$$(7^2)^6 = 7^{12} = 7^9 \times 7^3$$

لاہ بالقرن بجمع الاس

$$\Rightarrow \frac{7^{12} - 7^9}{7^9} = \frac{7^9 \times 7^3 - 7^9}{7^9}$$

ناخذ مشترک

$$= \frac{\cancel{7^9} (7^3 - 1)}{\cancel{7^9}}$$

$$= 7^3 - 1$$

$$= 343 - 1$$

$$= 342$$

١٨) إذا كان $2^x = 6$ فأوجد قيمة 2^{2x} .

(أ) 2

(ب) 6

(ج) 12

(د) 36

١٨

$$2^x = 6$$

$$2^{2x} = 6^2$$

$$2^{2x} = 36$$

/ ١٨

$$2^{2x} \quad 2^x = 6 \quad \text{فأوجد قيمة}$$

نجعل 2^{2x} على نفس الطينة
حتى نتمكن من التبسيط

$$2^{2x} = (2^x)^2 \quad \text{نجعلها متوة القوة}$$

↓

$$(6)^2 = 36$$

١٥) إذا كان $100^3 + x = 10^6 + y$ أوجد قيمة x

(أ) $x = y$ (ب) $x = y + 10$

(ج) $x = y - 100$ (د) $x = 100$

(15)

معروف $100 = 10^2$

واذ ان $100^3 = 10^{2 \times 3}$

$$100^3 + x = 10^6 + y$$

أكيد $\boxed{x = y}$

١٦) إذا كان $2^{x+1} = 256$ فأوجد قيمة x .

(أ) 5

(ب) 3

(ج) 7

(د) 9

$$256 = 2^8$$

$$2^{x+1} = 2^8$$

الأساسات متساوية

∴ الأس متساوي

$$x + 1 = 8$$

$$x = 7$$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 256 \\ \hline 2 & 128 \\ 2 & 64 \\ 2 & 32 \\ 2 & 16 \\ 2 & 8 \\ 2 & 4 \\ 2 & 2 \end{array}$$

ثانياً: الجذور

القاعدة	مثال
$\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m = x^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{x^5} = (\sqrt[3]{x})^5 = x^{\frac{5}{3}}$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$
$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}, x \geq 0, y > 0$	$\sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$
$\sqrt{xy} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0$	$\sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$
$a\sqrt{x} + b\sqrt{x} = (a + b)\sqrt{x}$	$3\sqrt{7} + \sqrt{7} = (3 + 1)\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$
$(a\sqrt{x})(b\sqrt{y}) = ab\sqrt{xy}$	$(2\sqrt{5})(3\sqrt{20}) = 6\sqrt{100} = 6 \times 10 = 60$

$$1) \sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5} =$$

$$2) \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} =$$

$$3) \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{18} =$$

$$4) \sqrt{5} (\sqrt{2} + 4\sqrt{2})$$

$$5) \frac{\sqrt{6y}}{\sqrt{12}} =$$

$$1) \sqrt{\frac{1}{5}} - \sqrt{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} - \sqrt{5}$$

$$\frac{1 - \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4\sqrt{5}}{5}$$

$$2) \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{4\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$3) \sqrt{5}(\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) \Rightarrow \sqrt{5}(5\sqrt{2}) = 5\sqrt{10}$$

$$4) \frac{\sqrt{6y}}{\sqrt{12}} \Rightarrow \sqrt{\frac{6y}{12}} \Rightarrow \sqrt{\frac{6 \cdot y}{6 \cdot 2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{y}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{y}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{2y}}{2}$$

$$\textcircled{4} \quad \sqrt{5} \left(\sqrt{2} + 4\sqrt{2} \right)$$

نوجد
ماد اخذ القوس
 $\sqrt{2}$ هو عامل مشترك

$$= \sqrt{5} \left(\sqrt{2} (1+4) \right)$$

$$= \sqrt{5} \left(5\sqrt{2} \right)$$

$$= 5 \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}$$

$$= 5 \sqrt{10}$$

$$\textcircled{2} \quad \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{6} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

للتوحيد
المقامات

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2} \sqrt{3} \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

$$1) \frac{\sqrt{12}}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\frac{\sqrt{12}}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

$$\frac{2\sqrt{36}}{3} = \frac{12}{3} = 4$$

$$3) \sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{18} =$$

$$\sqrt{8} + \sqrt{32} + \sqrt{18}$$

$$= \sqrt{4 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} + \sqrt{9 \times 2}$$

$$= 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$$

$$= (2 + 4 + 3)\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$$

عاطل متر

Photo
Grid

مثال : تنتج مزرعة 2160 لتر من الحليب يومياً
وتنتج مزرعة أخرى 2240 لتر من الحليب يومياً
فما هي أكبر سعة برميل يمكن استخدامه لنقل
الحليب من المزرعتين؟

أ) 40 لتر

ب) 60 لتر

ج) 80 لتر ✓

د) 100 لتر

الحل:

نشير الازفار اشان يسهل التحليل
تحليل 216

$$2^3 \times 3^3$$

تحليل 224

$$2^5 \times 7$$

القاسم المشترك الاكبر $8 = 2^3$

ونضع لها الصف سطله 80

مثال : غرفة مستطيلة الشكل أبعادها 240سم،
2.1 متر يراد تبليطها ببلاط مربع الشكل فما هو
أكبر ضلع لبلاطة يمكن استخدامها؟

أ) 10سم

ب) 20سم

✓ ج) 30سم

د) 40سم

الحل :

حل هالسؤال بعد التحويل من متر لسم

$$210 = 100 \times 2.1$$

نشير الاعداد عشان يسهل علينا التحليل

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$21 = 3 \times 7$$

القاسم المشترك الاكبر 3 ونرجع الصفر 30

مثال : اذا كان عدد يقبل القسمة على 12 ويقبل
القسمة على 14 فإنه يقبل القسمة على؟

أ) 28

ب) 84 ✓

ج) 140

د) 144

الحل:

ملاحظه :

يقبل القسمة = المضاعف المشترك الاصغر

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$14 = 2 \times 7$$

المضاعف

$$2^2 \times 7 \times 3 = 84$$

12:36 ص 1

مثال: لوحتا نيون تضيء احدهما كل 10 ثواني
وتضيء الاخرى كل 6 ثواني، فكم مره تضيء
اللوحتان معا خلال دقيقه اذا تم تشغيلهما في
نفس اللحظه؟

1 (أ)

✓ 2 (ب)

3 (ج)

4 (د)

الحل:

$$6=3*2$$

$$10=5*2$$

المضاعف هو $30 = 5*3*2$ ثانيه

يلتقو كل 30 ثانيه اذن في الدقيقه يلتقو مرتين

$$60=30+30 \text{ ثانيه يعني دقيقه التقتو مرتين}$$

مثال: يستغرق محمد ربع ساعه للدوران حول
سور المدرسه بينما يستغرق زميلة احمد ثلث
ساعه للدوران دورة واحدة حول السور نفسه،
فاذا انطلق الاثنان معاً في نفس اللحظة ، فبعد
كم ساعه يلتقي الاثنان ؟

أ) 0.5

ب) 1 ✓

ج) 1.5

د) 2

الحل:

ثلث ساعه 20 دقيقه $5 \times 2^2 =$

وربع ساعه 15 دقيقه $5 \times 3 =$

المضاعف المشترك الاصغر

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 60 دقيقه تعتبر ساعه

12:36 ص 1

مثال : عددان قاسمهما المشترك 3 ومضاعفهما المشترك 12 وكان احد العددين X فما هو العدد الاخر؟

أ) $3x$

ب) $12x$

ج) $36x$

د) $x/36$ ✓

الحل:

القاسم المشترك الاكبر X المضاعف المشترك
الاصغر = العدد الاول X العدد الثاني

$$3 \times 12 = X \times Y$$

$$XY = 36$$

$$Y = 36/x$$

12:36 ص 1

نقاش اليوم

الثالث

◆ العدد الدوري ◆

هو تكرار عشري للعدد ، مثل 0.3333333
وهو عدد نسبي ، يمكن كتابته على صورة
بسط ومقام .

ولإختصار يوضع خط فوق الجزء المتكرر

■ تحويل الكسر العادي إلى كسر عشري : بقسمة البسط على المقام

■ تحويل العدد العشري إلى كسر عادي :
إن الأعداد العشرية التي نستطيع تحويلها هي الكسور العشرية المنتهية والدورية فقط

$$1) 0.\bar{a} = \frac{a}{10 - 1} = \frac{a}{9}$$

$$2) 0.\overline{ab} = \frac{ab}{100 - 1} = \frac{ab}{99}$$

$$3) 0.ab\overline{cd} = \frac{abcd - ab}{10000 - 100} = \frac{abcd - ab}{9900}$$

9:0 م

أمثلة : حول كل من الأعداد العشرية التالية إلى الصورة $\frac{a}{b}$:

(1) 0.2791

(2) $0.\bar{3}$

(3) $0.\overline{21}$

(4) $0.37\overline{52}$

الحل :

$$(1) 0.2791 = \frac{2791}{10000}$$

$$(2) 0.\bar{3} = 0.333333 \dots = \frac{3}{10 - 1} = \frac{3}{9}$$

$$(3) 0.\overline{21} = 0.21212121 \dots = \frac{21}{100 - 1} = \frac{21}{99}$$

$$(4) 0.37\overline{52} = \frac{3752 - 37}{10000 - 100} = \frac{3715}{9900}$$

قانون العدد الدوري

في البسط نضع العدد كامل اجزاء الدوري
والغير دوري مطروحا منه الجزء غير الدوري

في المقام راح نختصر اول خطوة بالكتاب

يعني مايحتاج نكتب 100 ناقص 10

على طول نضع الرقم 9 على عدد خانات
الجزء الدوري

واصفار على يمين العدد 9 بعدد خانت الجزء
غير الدوري

في الصورة توضيح لأكثر حالات العدد
الدوري 🙏

العدد الدوري ...

* إذا كانه جميع الأعداد دورية أي مكرر خط
ولا يوجد عدد صحيح : فنضع العدد كامل بالبسط
والمقام نضع 9 بعد خانة العدد الدوري .

$$1) 0, \overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$2) 0, \overline{33} = \frac{33}{99} = \frac{1}{3}$$

$$3) 0, \overline{333} = \frac{333}{999} = \frac{1}{3}$$

* إذا كانه عدد صحيح وعدد دوري ..

فنضع العدد كامل في البسط ونطرح منه الجزء غير الدوري
في مقام يكون 9 بعد العلامة الخانات الدورية .

$$1) 1, \overline{3} = \frac{13-1}{9} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

$$2) 1, \overline{33} = \frac{133-1}{99} = \frac{132}{99}$$

$$3) 1, \overline{333} = \frac{1333-1}{999} = \frac{1332}{999}$$

إذا كانا عدد دوري وغير دوري

فنضع بالبسط العدد كامل - الجزء

غير الدوري ... وبالمقام 9 بعد خانة العدد غير الدوري
و صفر بعد خانة العدد غير الدوري

$$1) 0, \overline{33} = \frac{33-3}{90} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$$

$$2) 0, \overline{333} = \frac{333-3}{990} = \frac{330}{990} = \frac{1}{3}$$

$$3) 1, \overline{33} = \frac{133-13}{90} = \frac{120}{90} = \frac{4}{3}$$

$$4) 1, \overline{333} = \frac{1333-13}{990} = \frac{1320}{990} = \frac{4}{3}$$



اقصد بالمقام في الكتاب موجود 10-100 و
100-10000

يمدي مانطرح على طول نكتب الاعداد
اذا كان العدد الدوري بس عدد واحد حطي
9 ، لو عديين يكون 99 ، يعني نكتب رقم 9
على عدد الجزء الدوري ، وبالمثل اذا كان فيه
جزء غير دوري نضع صفر عن كل عدد غير
دوري ، ويعدها نبسط الكسر

وهذا موضح في الصورة اللي قبل

٨) التطابقات :

ليكن n عدد طبيعي ، إذا كان العددين a, b نفس الباقي عند قسمتهما على n فإن $(a - b) \mid n$ وفي هذه الحالة تكتب

$$a \equiv b \pmod{n} \iff a - b = kn$$

1

في التطابق الرياضي كي نحسبه يلزمنا 3 أشياء

1- العدد الأول x

2- العدد الثاني y

3- المقياس (modulo m) (وراثيًا موووجب)

إن x يُطابق y بالمقياس m

في حالة واحدة فقط فقط فقط

ما هي ؟؟؟

عندما يكون ناتج $x-y$

يقبل القسمة على المقياس وهو رمزنا له m

2

الآن نقول الشهر 13 يُطابق الشهر 1 بالمقياس 12 شهر

لو أخذنا

$$x=13$$

$$y=1$$

$$x-y=13-1=12$$

وناتج طرحهما 12 يقبل القسمة على المقياس وهو 12 شهر إذا فإن الشهر 13 فعلاً يُطابق الشهر 1

طيب أريد تجربة عدد آخر أحدهم يقول لي أن الشهر 13 يُطابق الشهر فبراير وهو 2 لنجرب

$$13-2=11$$

هل 11 يقبل القسمة على العدد 12 إذا هذا الخيار خاطيء والعدد 13 لن يُطابق غير الشهر واحد

لنتأكد بالرياضيات ؟

هل طرح ال10 من ال40 ، يأتي بناتج يقبل القسمة على 30 ؟؟؟

$$40-10=30$$

إذا فاليوم 40 يُطابق اليوم العاشر في نظام الأيام ال30 يومًا

يأتي أحد يقول لي ... اليوم ال70 ماذا يُطابق بمقياس ال30 يوم ؟؟؟ نسأل أنفسنا ما العدد الذي أطرحه من ال70 ليعطينا ناتج يقسم ال30 ؟؟؟

سنجد أن العدد هو أيضًا 10

$$60=10-70$$

و60 يقبل القسمة على 30

إذا اليوم 70 يُطابق اليوم العاشر بمقيا ال30 يوم .

4

لو قلنا ماذا يُطابق اليوم 40 ؟؟؟

3

بالمقياس 30 يوم ؟؟؟؟؟؟؟

فنحن نعد الأيام 1.2.3.4.....30 وينتهي شهر ، ثم نبدأ العد مجددًا للشهر الثاني ، لكن لا نقول 31 .. 32 .. 40....

بل إن اليوم 40 له يوم يُطابقه بمقياس ال30 يوم (الشهر) هنا

$$x=40$$

$$y=????$$

$$m=30$$

بالنشاط العقلي سنجد أن $y=10$ أي أن اليوم العاشر هو الذي يُطابق اليوم 40 من الشهر الثاني !!

1
لنترك الآن
الأيام
السنوات
الشهور

ونتكلم ونتعامل مع الأرقام

لو سألت نفسي

العدد 7 ماذا يُطابق بالمقياس 5

أي نحول السؤال لصيغة
ما العدد

الذي لو طرحته من 7

سيكون الناتج يقبل القسمة على 5
بكل سهولة العدد 2

لأن $7-2=5$

و 5 تقبل القسمة على 5

إذا

7 يُطابق 2 بالمقياس 5

2

العدد 21 ماذا يُطابق بالمقياس 6

أي نحول السؤال لصيغة

ما العدد

الذي لو طرحته من 21

سيكون الناتج يقبل القسمة على 6

إنه بكل سهولة العدد 3

لأن $21-3=18$

و 18 تقبل القسمة على 6

4

$$13 \equiv 1 \pmod{12}$$

$$40 \equiv 10 \pmod{30}$$

$$70 \equiv 40 \equiv 10 \pmod{3}$$

$$7 \equiv 2 \pmod{5}$$

$$21 \equiv 3 \pmod{6}$$

3

امثله

س1 - العدد 21 ما العدد الذي يُطابق بالمقياس 9 .

س2 - العدد 24 ما العدد الذي يُطابق بالمقياس 12 .

س3 - العدد 3 ما العدد الذي يُطابقه بالمقياس 2 .

مثال :

إذا كان $15 \equiv 3 \pmod{n}$ فإن قيمة n تساوي :

- أ (2 ب (3 ج (4 د (5

الحل :

يلاحظ أن 3 تقبل القسمة مع باقي على 2 فقط هذا يعني أن $n = 2$

وللتأكد $1 = \frac{3}{2}$ والباقي 1 و $7 = \frac{15}{2}$ والباقي 1

مثلا السؤال اللي بالكتاب ، هو صيغته ماهي مفهومه صح لكن حسب اللي انا فاهمته يكون كذا الحل :

15 يطابق 3 مود n

اولا نطرح 3-15 والنتاج لابد أن يقبل القسمة على n

لو نلاحظ العدد 12 يقبل القسمة على 2 و 3 و 4

ولكن حسب القسمة المعروفة لدينا أن الباقي وهو 3 لا بد أن يكون أقل من n وهو المقسوم عليه (2، 3، 4)

لذا يكون الحل هو 4 لأن 3 اقل من 4 9:39 م

مثال :

إذا كان باقي قسمة العدد n على 7 يساوي 3 ، فإن باقي قسمة العدد $8n$ على 7 يساوي :

أ (2 ب (3 ج (4 د (5

الحل :

$$\text{نفرض } 8n - n = k \times 7$$

$$7n = 7k$$

$$n = k$$

$$\text{إذن } 8n \equiv n \pmod{7}$$

فإن باقي القسمة يساوي 3

القانون :

$$a \equiv b \pmod{n}$$

↓ ↓ ↓
المقسوم الباقي المقسوم عليه

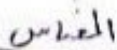
$$n \equiv 3 \pmod{7}$$

$$8n \equiv 24 \pmod{7}$$

لأنه الباقي أكبر من المقسوم عليه
نطرح حتى نصل إلى عدد أصغر منه

$$24 - 21 = \boxed{3}$$

ناجی لکھنؤ



$$a \equiv b \pmod{n}$$

باقسم

بافې
نمونه

Triangle
all

∴ مع مثلث الزوايا

في السؤال:

$$15 \equiv 3 \pmod{12}$$

$$15 - 3 = 12$$

العدد ١٢ بفيل لسته على

4, 3, 2

ولكن حسب إيمانه لا عقليته

لوبيه انه يكمه ١٢٥

في السؤال $\leftarrow b = 3$

$$4, 3, 2 \leftarrow n$$

$$15 \equiv 3 \pmod{2} \quad 3 > 2 \quad \times$$

$$5 \equiv 3 \pmod{3}, 3 = 3$$

$$15 \equiv 3 \pmod{4}$$

$3 < 4$

* حفظیات :

فإن الله لا يهدي القوم الظالمين

المؤمن عليه ..

$$b < n \leq \infty$$

مسائل:

$$\begin{array}{r} 4 \\ 17 \\ \underline{16} \\ 1 \end{array}$$

$$b = 1, \quad n = 4$$

$$b < 4$$

زرع مزارع 540 نخلة واثمر منها 420 نخلة، فما نسبة الشجر المثمر

أ) 25%

ب) 50%

ج) 75% ✓

د) 100%

الحل

(الجزء / الكل) $\times 100$

$$(420/540) \times 100$$

$$(7/9) \times 100 = 77.7$$

الحل الاقرب له 75%

11:02 م تعديل

بذكركم بشي

من ضمن من معايير قياس

التقريب والحل الذهني

11:12 م

Photo
Grid

٧) قابلية القسمة :

يقبل العدد القسمة على 2 إذا كان أحاده صفراً أو عدد زوجي

قابلية القسمة على 2

250 عدد يقبل القسمة على 2 لأن بأحاده العدد 0 وهو عدد زوجي
 72 عدد يقبل القسمة على 2 لأن بأحاده العدد 2 وهو عدد زوجي
 24 عدد يقبل القسمة على 2 لأن بأحاده العدد 4 وهو عدد زوجي
 76 عدد يقبل القسمة على 2 لأن بأحاده العدد 6 وهو عدد زوجي
 2458 عدد يقبل القسمة على 2 لأن بأحاده العدد 8 وهو عدد زوجي

يقبل العدد القسمة على 3 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 3

قابلية القسمة على 3

48 عدد يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه 12 ، $12 = 4 + 8$ و 12 من مضاعفات العدد 3
 3549 عدد يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه 21 ، $21 = 3 + 5 + 4 + 9$ و 21 من مضاعفات العدد 3
 780 عدد يقبل القسمة على 3 لأن مجموع أرقامه 15 ، $15 = 7 + 8 + 0$ و 15 من مضاعفات العدد 3

يقبل العدد القسمة على 4 إذا كان العدد المكون من الأحاد والعشرات يقبل القسمة على 4

قابلية القسمة على 4

80340 عدد يقبل القسمة على 4 لأن بأحاده وعشراته الرقم 40 وهو يقبل القسمة على 4
 55336 عدد يقبل القسمة على 4 لأن بأحاده وعشراته الرقم 36 وهو يقبل القسمة على 4

يقبل العدد القسمة على 5 إذا كان أحاده 0 أو 5

قابلية القسمة على 5

80450 عدد يقبل القسمة على 5 لأن بأحاده الرقم 0
 84785 عدد يقبل القسمة على 5 لأن بأحاده الرقم 5

أي عدد يقبل القسمة على 6 إذا كان يقبل القسمة على 2 و 3 هي أن واحد

قابلية القسمة على 6

30450 عدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 و 3 معا
 8532 عدد يقبل القسمة على 6 لأنه يقبل القسمة على 2 و 3 معا

أي عدد يقبل القسمة على 7 إذا كان ضعف رقم أحاده مطروح منه باقي الرقم من مضاعفات العدد 7

قابلية القسمة على 7

مضاعفات 7 هي ($\pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 28, \pm 35, \pm 42, \dots$)

343 عدد يقبل القسمة على 7 لأن $(-28 = 3 \times 2 - 34)$ و -28 هو من مضاعفات العدد 7
 196 عدد يقبل القسمة على 7 لأن $(-7 = 6 \times 2 - 19)$ و -7 هو من مضاعفات العدد 7

قابلية القسمة على 8

يقبل العدد القسمة على 8 إذا كان العدد نصف العدد يقبل القسمة على 4

56 عدد يقبل القسمة على 8 لأن عدد يقبل القسمة على 2 و 4 معا
786565120 يقبل القسمة على 8 لأن أحاده 0 وبالتالي يقبل القسمة على 2
أول رقمين به هما (الأحاد والعشرات) 20 وهو يقبل القسمة على 4

قابلية القسمة على 9

يقبل العدد القسمة على 9 إذا كان مجموع أرقامه يقبل القسمة على 9 أو من مضاعفات العدد 9

90450 عدد يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $18 = 9 + 0 + 4 + 5 + 0$ ، و 18 من مضاعفات العدد 9
42138 عدد يقبل القسمة على 9 لأن مجموع أرقامه $18 = 4 + 2 + 1 + 3 + 8$ ، و 18 من مضاعفات العدد 9

قابلية القسمة على 10

أي عدد يقبل القسمة على 10 إذا كان بأحاده العدد صفر

80450 عدد يقبل القسمة على 10 لأن بأحاده العدد 0

قابلية القسمة على 11 هناك 3 طرق لثلاثة أنواع من الأعداد :

إذا كانت أرقام العدد كلها متشابهة وكان عدد هذه الأرقام زوجي

مثال، العدد 333333 عدد أرقامه 6 وبالتالي يقبل القسمة على 11
بينما العدد 3333333 عدد أرقامه 7 فلا يقبل القسمة على 11

إذا كان العدد مكون من 3 أرقام مختلفة نجمع رقم الأحاد مع رقم المئات ونطرح منه رقم العشرات فينتج عدد يقبل القسمة على 11

مثال، العدد 913 يقبل القسمة على 11 لأن $(9 + 3 - 1 = 11)$ وهو يقبل القسمة على 11

أما إذا كانت الأرقام مختلفة وكثيرة نبدأ من اليمين بجمع الأرقام في الخانات الفردية وجمع الأرقام في الخانات الزوجية. ثم نطرح المجموع الأصغر من المجموع الأكبر إذا كان الناتج يقبل القسمة على 11 فإن العدد الأصلي يقبل القسمة على 11

مثال، العدد 181907 نجمع الخانات الفردية هي $24 = 8 + 9 + 7$

نجمع الخانات الزوجية $2 = 1 + 1 + 0$

نطرح الناتجين $22 = 24 - 2$ وهو يقبل القسمة على 11

وبالتالي العدد 181907 يقبل القسمة على 11

<p>(٢) ماهو العدد الذي إذا قسمناه على 21 كان الناتج 37 والباقي 11</p> <p>(أ) 37 (ب) 788 (ج) 268 (د) 777</p> <p>العدد المطلوب $788 = 11 + 37 \times 21$</p>	<p>(٣) عدد باقي قسمته على 11 يساوي 4 وباقي قسمته على 6 يساوي 2 هو</p> <p>(أ) 26 (ب) 25 (ج) 24 (د) 23</p>
<p>نحرب الخيارات بعد طرح الباقي من كل منها</p> <p>(أ) $22 = 26 - 4$ وَ 22 يقبل القسمة على 11 (ب) $21 = 25 - 4$ وَ 21 لا يقبل القسمة على 11 (ج) $20 = 24 - 4$ وَ 24 لا يقبل القسمة على 11 (د) $19 = 23 - 4$ وَ 19 لا يقبل القسمة على 11</p> <p>وبالمثل نطرح 2 من الخيارات ونحدد العدد الذي يقبل القسمة على 6 ويكون الحل هو أ</p>	<p>(٤) عدد إذا قسمته على 5 الباقي 4 وإذا قسمته على 4 الباقي 3 هو</p> <p>(أ) 37 (ب) 39 (ج) 40 (د) 42</p>
<p>نحرب الخيارات بعد طرح الباقي من كل منها</p> <p>(أ) $33 = 37 - 4$ وَ 33 لا يقبل القسمة على 5 (ب) $35 = 39 - 4$ وَ 35 يقبل القسمة على 5 (ج) $36 = 40 - 4$ وَ 36 لا يقبل القسمة على 5 (د) $38 = 42 - 4$ وَ 38 لا يقبل القسمة على 5</p> <p>وبالمثل نطرح 3 من الخيارات ونحدد العدد الذي يقبل القسمة على 4 ويكون الحل هو ب</p>	<p>(٥) ما هو العدد الذي إذا جمعنا أحاده وعشراتهما وضاعفنا جمعهما 5 مرات وقسم الناتج على 7 كان الناتج 10 ؟</p> <p>(أ) 86 (ب) 56 (ج) 75 (د) 98</p>
<p>نحرب الخيارات</p> <p>(أ) 86</p> <p>$8 + 6 = 14 \rightarrow 14 \times 70 = 5 \rightarrow 70 \div 7 = 10$</p>	

٤) إذا كان عُمر محمد نصف عُمر أحمد ، و عُمر أحمد ثلاثة أمثال عُمر سعيد ، فما نسبة عُمر محمد إلى عُمر سعيد؟ ~~حل~~

(ب) $\frac{1}{3}$

(أ) $\frac{1}{2}$

(د) $\frac{3}{2}$

(ج) $\frac{2}{3}$

محمد = $\frac{1}{2}$ أحمد

أحمد = 3 أمثال سعيد

نسبة عمر محمد إلى سعيد =

$\frac{1}{2} \cdot 3$

$= \frac{3}{2}$

١٢
(٣) مربع اذا جعلنا طول ضلعه 3 امثاله ، كم
نسبة الزيادة في المساحة

(ب) 400%
(د) 800%

(أ) 300%
(ج) 600%

طول ضلع المربع = 1
مساحته = 1

طول ضلع المربع 3
مساحته 9

$$9 - 1 = 8 \times 100\% \\ = 800\%$$

$$\begin{array}{r}
 50 \\
 \hline
 7 \overline{) 355} \\
 \underline{35} \\
 005
 \end{array}$$

سؤال: إذا كان اليوم هو الاثنين ، فما هو آخر يوم في السنة الهجرية .
(علماً بأن عدد أيام السنة 355 يوم)

الحل: نقسم عدد أيام السنة على 7
نعد خمس أيام بداية من يوم الاثنين يكون آخر يوم في السنة هو الجمعة .

$$\begin{array}{r}
 0 \\
 \hline
 7 \overline{) 355} \\
 \underline{35} \\
 0
 \end{array}$$

الباقى = ٥ يعني

١ = الاثنين
 ٢ = الثلاثاء
 ٣ = الأربعاء
 ٤ = الخميس
 ٥ = الجمعة

← آخر أيام السنة هو
 يوم الجمعة

نقاش اليوم

الرابع

◆◆ الأعداد المركبة ◆◆

تكون على الصورة $a+bi$
حيث a الجزء الحقيقي ، bi الجزء تخيلي

◆ ملاحظات ◆

- إذا كانت $b=0$ فإن العدد المركب يكون عددا حقيقيا
- إذا كانت b لا تساوي 0 فإن العدد المركب يكون عددا تخيليا
- إذا كانت b لا تساوي 0 و $a=0$ فإن العدد المركب يكون تخيليا بحتا

♠ الوحدة التخيلية i هي الجذر التربيعي
الموجب للعدد -1 ،

عند حل مسائل الجذور أي جذر يحتوي
داخله إشارة سالبة ، اول خطوة نعوض عن
قيمة السالب ب i ثم نكمل الحل

▼ لإيجاد قيمة قوى الوحدة التخيلية i ▼



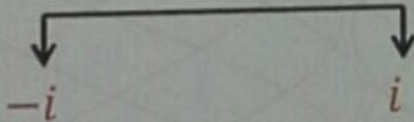
١٢) الأعداد المركبة :

من المعلوم أن :

- $i = \sqrt{-1} \rightarrow i^2 = -1$
- $i^3 = i^2 \cdot i = -i$
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$

من كتاب المفيد

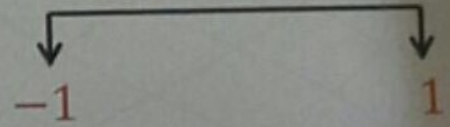
عدد فردي n
 i^n



إذا كان
عدد فردي $= \frac{n-1}{2}$

إذا كان
عدد زوجي $= \frac{n-1}{2}$

عدد زوجي n
 i^n



إذا كان
عدد فردي $= \frac{n}{2}$

إذا كان
عدد زوجي $= \frac{n}{2}$

اس اي رقم أ

اول خطوة بالنظر الى الاس ويتم حذف
اجابتان
اذا كان الاس عدد زوجي عندي اجابتان الي
هي 1-و-1
ثاني خطوه قسمة الاس على 2 لتحديد
الاجابه الصحيحه اذا كان ناتج قسمه عدد
زوجي الاجابه 1 واذا كان ناتج القسمه عدد
فردى الاجابه 1-

هذي بالنسبه اذا كانت الـ أ مرفوعه لاس
زوجي

بالنسبه اذا كانت الـ أ مرفوعه لاس فردى راح
يكون عندي اجابتين وهي أ و -أ

بنفس الطريقه السابقه بزياده خطوه
اطرح من الاس 1 واقسم ع 2 اذا كان ناتج
القسمه عدد زوجي الاجابه أ
واذا كان ناتج القسمه عدد فردى الاجابه -أ

هذي بالنسبه اذا كانت الـ أ مرفوعه لاس فردى

$$i^{15}$$

مثال 3

نظریه من 1 است و تقسیم علی 2

$$i^{\frac{15-1}{2}} = i^{\frac{14}{2}} = i^7 = -i$$

∴ عدد فردی

$$i^{33}$$

مثال 4

نظریه من 1 است و تقسیم علی 2

$$i^{33-1} = i^{\frac{32}{2}} = i^{16} = i$$

∴ 16 است و زوجی

1) $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} =$

a) 6

b) -6

c) $6i$

d) $-6i$



2) $i^{99} =$

a) i

b) $-i$

c) 1

d) -1

$$1) \sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4}$$

$$= \sqrt{9}i \cdot \sqrt{4}i$$

$$= 3i \times 2i$$

$$= 6i^2$$

$$= -6$$

$$2) i^{99}$$

اُسے فردی:
الحل کرنا یا اُسے فردی۔

$$\frac{99-1}{2} = \frac{98}{2} = 49$$

فردی
نہیں ہے۔
-i

تساوي عددين مركبين :

$$x = a$$

$$y = b$$

فإن إذا كان $x + yi = a + bi$

(الجزء الحقيقي = الجزء الحقيقي) (الجزء التخيلي = الجزء التخيلي)

يتساوى عددان مركبان اذا وإذا فقط تساوى
الجزأين الحقيقيين ، والجزأين التخيليين

أي نساوي الجزء الحقيقي مع الحقيقي
والتخيلي مع التخيلي

في حالة جمع أو طرح الأعداد المركبة : نجمع
الأجزاء الحقيقية معا
والأجزاء التخيلية معا

ما قيمتا x, y الحقيقيتان اللتان تجعلان القيمة صحيحة ؟

$$(5 + 4i) - (x + yi) = (-1 - 3i)$$

a) $x = 6, y = 7$

b) $x = 4, y = i$

c) $x = 4, y = -i$

d) $x = 4, y = 7$

الجزء الحقيقي :

$$5 - x = -1$$

$$-x = -6$$

$$x = 6$$

الجزء التخيلي :

~~8~~

$$4 - y = -3$$

$$-y = -7$$

$$y = 7$$

a

كل

$$x = 6, y = 7$$

1 ▼ مرافق العدد المركب ▼

يسمى العددان $a+bi$, $a-bi$ مركبين مترافقين
وناتج ضربهما هو عدد حقيقي دائماً

3

$$2+3i$$

عدد مركب تخيلي وحقيقي

لما نكتب فقط 2 يكون عدد مركب حقيقي بحت

عدد تخيلي بحت $3i$

⌚ 2:52 م

2

متى نضرب في i ؟

إذا كان موجود بالمقام ، عشان نتخلص منه ، لأن
المقام إذا كان يحتوي على جذر أو i لابد نتخلص
منهم ، وذلك بالضرب في المرافق

المرافق هو المقام قصدك؟

المرافق هو نفس المقدار ، مع تغير الإشارة اللي
بين الحدين
مثلاً $2i+3$ مرافقه $2i-3$

ولو كان المرافق نفس المثال الاخير تخيلي بحت
نضرب في i البسط والمقام ؟

نعم
⌚ 2:43 م

أوجد ناتج مايلي

1) $(1 + 2i)(1 - 2i)$

1) -3

2) 5

3) $-3i$

4) $5i$

2) $\frac{4 + i}{5i}$

$$2) \frac{4+i}{5i}$$

$$a) \frac{1}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$b) \frac{1}{5}i - \frac{4}{5}$$

$$c) \frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$$

$$3) \frac{3}{5}$$

$$(1+2i)(1-2i) = 1^2 + 2^2 = 5$$

$$\frac{4+i}{5i}$$

بالضرب في i

$$\frac{(4+i)i}{(5i)i} = \frac{4i + i^2}{5i^2} = \frac{-1 + 4i}{-5} = \frac{1}{5} - \frac{4i}{5}$$

العمليات على الأعداد المركبة :

$$1. (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$$

$$2. (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$$

$$3. (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$4. \frac{a + bi}{c + di} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$$

من كتاب المفيد

$$)(2 - 4i) - (1 - 2i) =$$

$$) 1 - 2i$$

$$) 1 + 2i$$

$$) 1 + 6i$$

$$) 1 - 6i$$

$$(2-4i) - (1-2i) = (2-1) - 4i + 2i \\ = 1 - 2i$$

$$\frac{2i}{1-i} = \frac{2i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i}$$

$$= \frac{2i - 2}{1+1} = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

5 5 \

5 5 \

5 5 \

تساوي

قيمة $\frac{2i}{1-i}$

(أ) $1 + i$

(ب) $-1 + i$

(ج) $-1 - i$

(د) $1 - i$

$$\frac{1 + 2i}{3 + 3i} =$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \frac{1+2i}{3+3i} &= \frac{1 \times 3 + 2 \times 3}{3^2 + 3^2} + \left(\frac{2 \times 3 - 1 \times 3}{3^2 + 3^2} \right) i \\ &= \frac{3+6}{18} + \left(\frac{6-3}{18} \right) i \\ &= \frac{9}{18} + \frac{3}{18} i \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{6} i \end{aligned}$$

الطريقة
المضرب

$$\frac{(1+2i) \times (3-3i)}{3+3i \quad (3-3i)}$$

$$\frac{1 \times 3 - 3i + 6i - 6i^2}{(3^2 - (3i)^2)}$$

$$= \frac{3 - 3i + 6i + 6}{9 + 9} = \frac{15 + 3i}{18}$$

$$\frac{3i + 9}{18} = \frac{3(i + 3)}{18}$$

$$= \frac{i + 3}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} i$$

نضرب
في المرافق
والمعمل

(١) قيمتي a, b على الترتيب التي تجعل المعادلة التالية

صحيحة هي $3a + (b + 2)i = 9 + 6i$

(أ) $3, 4$ (ب) $-3, 4$

(ج) $3, -4$ (د) $-3, -4$

$$\textcircled{3a} + (\textcircled{b+2})i = \textcircled{9} + \textcircled{6i}$$

$$3a = 9$$

$$\boxed{a = \frac{9}{3} = 3}$$

$$b + 2 = 6$$

$$\boxed{b = 6 - 2 = 4}$$

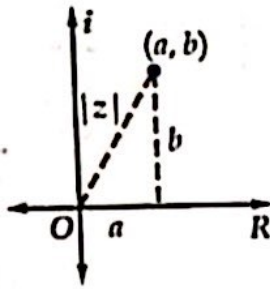
الجواب
 $3, 4$ (P)

مفهوم أساسي

القيمة المطلقة لعدد مركب

القيمة المطلقة للعدد المركب $z = a + bi$ هي:

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$



▼ مقياس العدد المركب ▼

وهي القيمة المطلقة للعدد المركب

وهو عبارة عن الجذر التربيعي لمجموع مربع
العددين عددين a و b

3:08 م 2

اوجد مقياس العدد المركب

$$z = 4 + 3i$$

$$\begin{aligned} |Z| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \end{aligned}$$

Handwritten signature or mark.

▼ الاحداثيات القطبيه والديكارتية ▼

الشرح بالصور

احداثيات النقطه (x, y) واقعہ على دائرہ الوحدة
ومقابلہ لزاویه θ

~~ديكارتية~~
قطبي

بعد النقطه
عنه المركز

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

زاوية

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

~~قطبي~~
ديكارتية

البعد الافقي

$$x = r \cos \theta$$

البعد الرأسي

$$y = r \sin \theta$$

العدد المركب
أو نكتبه بشكل
آخر

$$a + bi$$

$$x + yi$$

الصورة القطبية

إذا كانت

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

∴ $x + yi = r \cos \theta + r \sin \theta i$

$$= r (\cos \theta + i \sin \theta)$$

قطر: $r = 3$

↓

قانون: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$3 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$9 = x^2 + y^2$

نقطة: (3, 0)

$\theta = \frac{\pi}{6}$

↓

قانون: $\tan \theta = \frac{y}{x}$

$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$

⑤ الصورة القطبية للمعادلة

$x^2 + (y-2)^2 = 4$ هي

المطلوب الصورة القطبية

$r \cos \theta$ ← x بـ
 $r \sin \theta$ ← y بـ

الحل

$(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta - 2)^2 = 4$

$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta - 4r \sin \theta + 4 = 4$

$r^2 (\underbrace{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}_1) - 4r \sin \theta = 0$

$r^2 = 4r \sin \theta$

$r = 4 \sin \theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$3^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 9$

Photo Grid

$x^2 + y^2 = n$ \downarrow $r^2 = n$ $r = \sqrt{n}$	$(x-c)^2 + y^2 = n$ \downarrow $c^2 = n$ $r = 2c \cos \theta$	$x^2 + (y-c)^2 = n$ \downarrow $c^2 = n$ $r = 2c \sin \theta$	راديائي قطبي
--	---	---	-----------------

إذا كان عدد ناقص من x ← راح يكون الجواب
ضعف العدد في \cos

إذا كان عدد ناقص من y ← راح يكون
الجواب ضعف العدد في \sin

3:19 م 2

Photo
Grid

الفكره الحين

التحويل الى القطبي له ٣ انواع

التحويل الى الديكارتي له ٥ انواع

2 3:20

① $\theta = \frac{\pi}{6}$

$\tan \theta = \frac{y}{x}$ قانون

$\tan \frac{\pi}{6} = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{y}{x}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} x = y$

$r = 3$

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ قانون

$3 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$9 = x^2 + y^2$

قانون

②

③ $r = c \sin \theta$

$x^2 + y^2 - cy = 0$

$x^2 + (y - c)^2 = c^2$

④ $r = c \cos \theta$

$x^2 + y^2 - cx = 0$

$(x - c)^2 + y^2 = c^2$

⑤ $r = \frac{n}{c_1 \cos \theta - c_2 \sin \theta}$

$c_1 x - c_2 y = n$

32. اذا كان عددين مركبين مختلفين

$$z_1 = (2, 30^\circ)$$

$$z_2 = (3, 20^\circ) \text{ فما قيمة العدد المركب}$$

$z_1 z_2$

(أ) $(5, 50^\circ)$

(ب) $(6, 50^\circ)$

(ج) $(5, 60^\circ)$

(د) $(6, 60^\circ)$

اذا كان المطلوب ضرب ، نضرب قيم z ونجمع
الزاويتين

اذا كان قسمه ، نقسم قيم z ونطرح الزاويتين
يلتبقو هذا الكلام

2020

نقاشات

المعيار

الثاني

نقاش اليوم

السادس

▼ الإنتماء - الإحتواء ▼

● الإنتماء يكون بين عنصر ومجموعة ويرمز له

مثال $a = \{ 1, 2, 3 \}$

العنصر 2 ينتمي إلى المجموعة a

العنصر 4 لا ينتمي إلى المجموعة a

● الإحتواء يكون بين مجموعة ومجموعة
فنقول عن مجموعة أنها جزئية أو غير جزئية
من مجموعة ما

مثال :

$a = \{ 1, 2, 3 \}$ & $B = \{ 2, 3 \}$

نقول أن b جزئية من a , a غير جزئية من b

ملاحظات /

● مجموعة المجموعات عناصرها مجموعات

● أي مجموعة داخل مجموعة تعتبر عنصر

مثال :

$a = \{ 1, 2, \{ 3, 4, 5 \} \}$

$\{ 5, 4, 3 \}$ يعتبر عنصر واحد داخل

المجموعة a

بالتالي يكون عدد عناصر المجموعة a هو 3
عناصر

وهي 1، 2، $\{ 5, 4, 3 \}$

Photo
Grid

أي الخيارات الآتية صحيح :

$$1) a = \{3, 4, 15, \{1, 2\}, \{6\}\}$$

$$a) 6 \in a$$

$$b) 3, 4 \subset a$$

$$c) \{1, 2\} \subset a$$

$$d) \{\{6\}\} \subset a$$

$$e) 1 \in a$$

$a = \{ \underbrace{3}_{\text{عنصر}}, \underbrace{4}_{\text{عنصر}}, \underbrace{15}_{\text{عنصر}}, \underbrace{\{1, 2\}}_{\text{عنصر}}, \underbrace{\{6\}}_{\text{عنصر}} \}$

a) $6 \in a$ لا يوجد العنصر 6 في المجموعة a

b) $3, 4 \subset a$ الاحتواء \supset يكون للمجموعة جزئية وليست لعناصر

c) $\{1, 2\} \subset a$ بما أنه $\{1, 2\}$ تعتبر عنصر فإلّا يفترض \supset التواء وليس \supset احتواء

d) $\{\{6\}\} \subset a$ المجموعة التي هي العنصر $\{6\}$ محتواه في a صحيحه

e) $1 \in a$ لهذا غير صحيح
لأنه يوجد العنصر 1

اي مجموعة داخل مجموعة نعتبرها عنصر

حتى لو فيها اقواس المجموعة { ١ ، ٢ } تعتبر
عنصر واحد فقط ولازم نكتبه بهذا الشكل

ويكون ينتمي للمجموعة a وليس جزئي

٩٠١١

{ 6 } عنصر ينتمي الى a ، ولكن ما نقدر

نقول ان { 6 } جزئية من a

{ { 6 } } مجموعة جزئية من a ، ونفس

الشي ما نقدر نقول ان { { 6 } } ينتمي الى a

لو من ضمن الخيارات { 6 } ينتمي الى a

بعتبر صح ،

عشان كذا الخيار الاول 6 بدون اقواس غلط

لأنه جاء تمثيلها في قوس داخل مجموعة

وأي مجموعة داخل مجموعة تعتبر عنصر

٩٠٢٢

أي الخيارات الآتية صحيح :

1) $a = \{3, 4, 15, \{1, 2\}, \{6\}\}$

a) $6 \in a$

b) $3, 4 \subset a$

c) $\{1, 2\} \subset a$

d) $\{\{6\}\} \subset a$

e) $1 \in a$

$\{6\} \in a \checkmark$

$6 \in a \times$

$\{\{6\}\} \subset a \checkmark$

$\{6\} \subset a \times$

$3, 4 \in a \checkmark$

$3, 4 \subset a \times$

$\{\{1, 2\}\} \subset a \checkmark$

$\{1, 2\} \subset a \times$

$\{\{6\}\} \subset a \checkmark$

$\{a\} \subset a \times$

$\{1, 2\} \in a \times$

$\{4, 2\} \in a \times$

Photo
Grid

عناصر المجموعة \emptyset هي :

$$2) A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$$

a) 1

b) -1

c) -1, 1

d) \emptyset

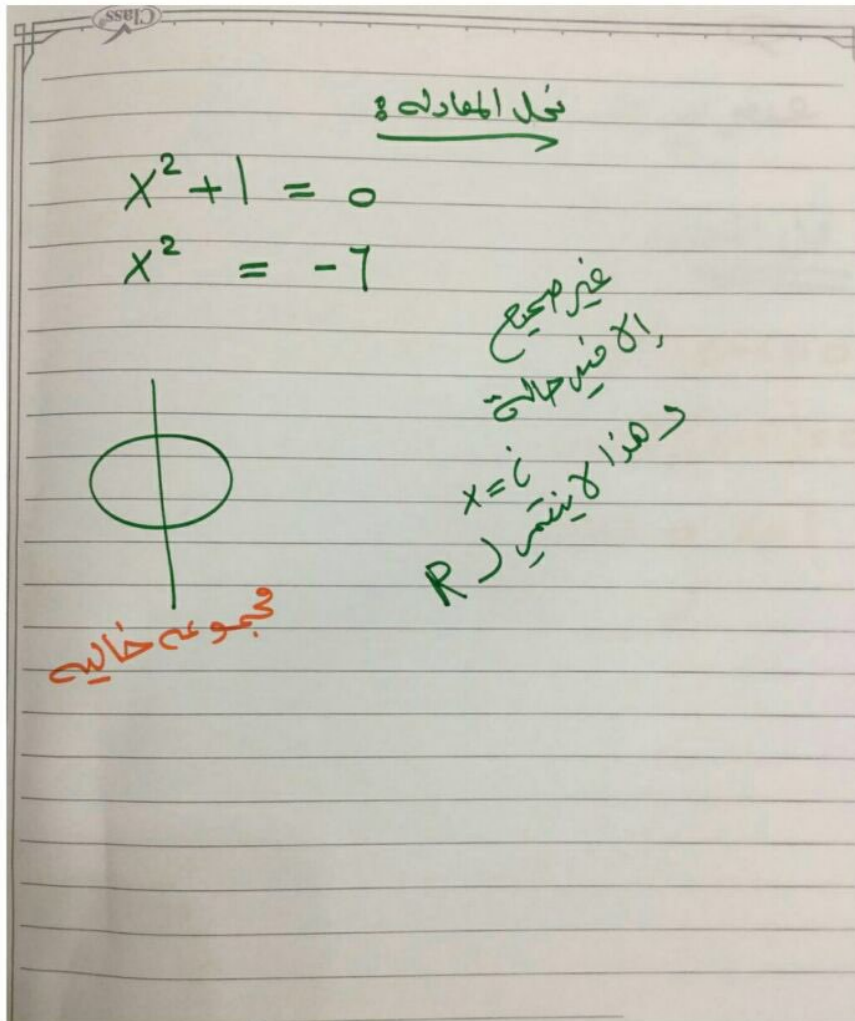


Photo
Grid

أي الخيارات الآتية صحيح :

$$3) A = \{1, 2\};$$

$$B = \{x \in R : x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$a) A \in B$$

$$b) A \subset B$$

$$c) A = B$$

Handwritten solution on lined paper:

- * $A = \{1, 2\}$ عنصرين
- * $B = \{1, 2\}$ حل المعادلة

Below set B, the following steps are written in red:

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$
$$(x-2)(x-1) = 0$$
$$x=2 \text{ or } x=1$$

An orange arrow points from the solutions $x=2$ and $x=1$ up to the elements 1 and 2 in the definition of set B.

At the bottom, the conclusion is written in green:

$$A = B$$

العمليات ع المجموعات
تقاطع المجموعتان A و B : هي العناصر
المشتركة بين المجموعتين A و B

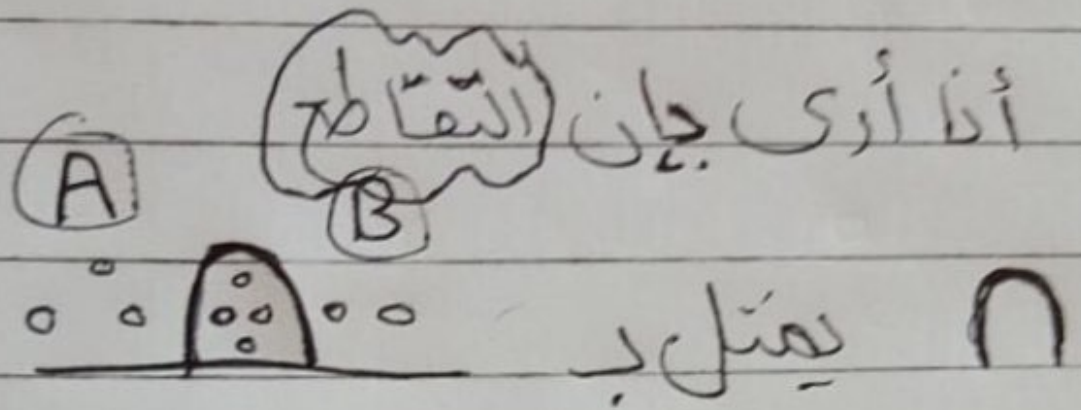
اتحاد المجموعتان A و B : هو المجموعة
المكونة من جميع العناصر التي في المجموعة
 A أو في المجموعة B

الفرق بين المجموعتان A و B : اذا كانت
المجموعتان A و B جزئية من المجموعة
الشاملة U . فإن الفرق بينهم هو العناصر
الموجودة في المجموعة الأولى وغير موجودة
في المجموعة الثانية

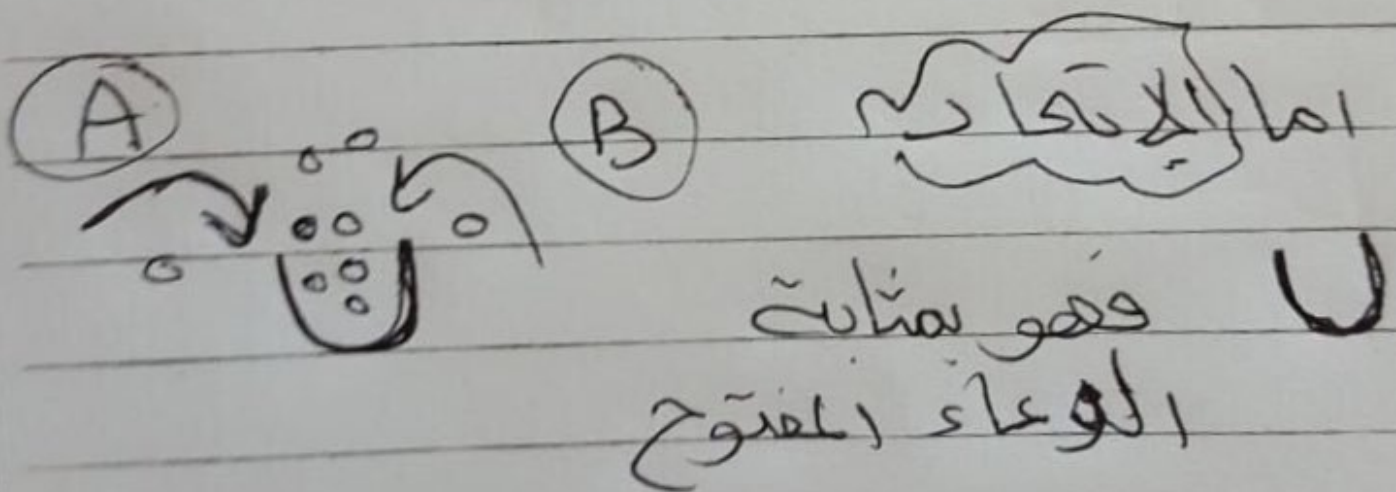
المجموعة الشاملة : هي المجموعة غي الخالية
والتي تحتوي على جميع المجموعات الجزئية
ويرمز لها بالرمز U

المكملة : العناصر المكملة للمجموعة a
والموجودة في المجموعة الشاملة
مجموعة القوى: هي مجموعة جميع
المجموعات الجزئية من المجموعة a

10:08



وعاء وكأنه أُغلق على شيء بداخله مشتركة
بين المجموعتين ولا يمكن
دخول غيرها.

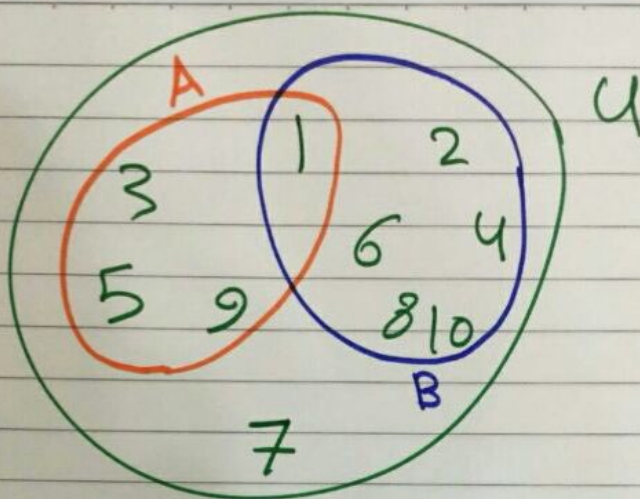


لحتوى جميع العناصر
المجموعتين

إذا كان : $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$
 $A = \{1, 3, 5, 9\}; B = \{1, 2, 4, 6, 8, 10\}$

فأوجد كلا مما يلي :

- a) $B^c =$
 b) $A \cap A^c =$
 c) $B \cup A^c =$
 d) $A - B =$
 e) $P(A) =$



$$B^c = \{ \text{3, 5, 9, 7} \}$$

$$A \cap A^c = \{ \} \quad \phi$$

$$B \cup A^c = \{1, 2, 4, 6, 8, 10, 7\}$$

$$A - B = \{3, 5, 9\}$$

لا تنسوا الـ 7 😊
 كل عناصر A
 باعدا المشترك مع B

مجموعة القوة للمجموعة A :

وهي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من المجموعة A ، ونرمز لها بالرمز $P(A)$
وعدد عناصرها $|P(A)| = 2^n$ حيث n عدد عناصر المجموعة A

مثال : إذا كانت $A = \{1,2,3\}$ فأوجد $P(A)$ موضحاً عدد عناصرها.
الحل:

تذكر العناصر

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

عدد عناصر $P(A)$ هو $|P(A)| = 2^3 = 8$

عدد العناصر

1. إذا كان $a = \{1, \{1, 2\}\}$ فأي العبارات الآتية خاطئة :
- (أ) عدد عناصر المجموعة a هي 2
- (ب) $\{1, 2\} \in a$
- (ج) $2 \in a$
- (د) $1 \in a$

① $a = \{ 1, \{1, 2\} \}$

المجموعة a

عنصر

عنصر

هنا عدد عناصر $\boxed{2}$ ✓

✓ $\{1, 2\} \in a$ لأنه عنصر ينتمي

$2 \in a$ لا يوجد في المجموعة عنصر 2 ✗

$1 \in a$ نعم 1 من عناصر المجموعة ✓

2. اذا كان $A = \{2, 3, \{5\}, 7\}$ فأي الآتي صحيح:

(أ) $2 \in A$

(ب) $\{5\} \subseteq A$

(ج) $5 \in A$

(د) $2, 5 \in A$

$$2) A = \{ \underbrace{2}_{\text{عنصر}}, \underbrace{3}_{\text{عنصر}}, \underbrace{\{5\}}_{\text{عنصر}}, \underbrace{7}_{\text{عنصر}} \}$$

$$2 \in A$$

✓ عنصر ينتمي للمجموعة

$$\{5\} \subseteq A$$

✗ عنصر ينتمي وليس محتواه
لأنه ليس مجموعة

$$5 \in A$$

✗ لا يوجد عنصر 5 في المجموعة

$$2, 5 \in A$$

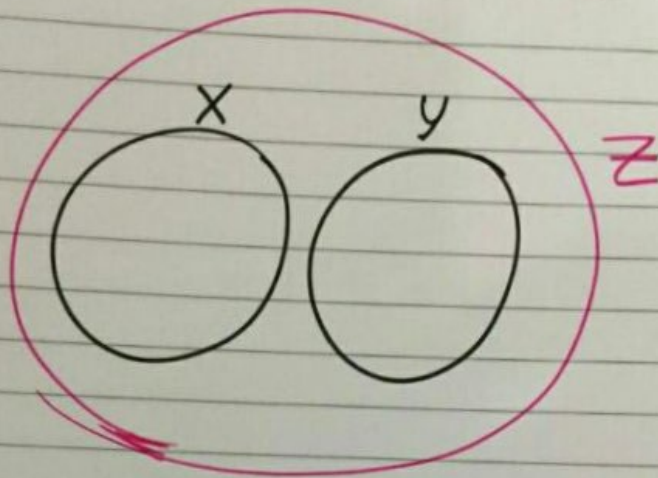
✗ يوجد 2 ولكن لا يوجد 5 كعنصر

Photo
Grid

3. إذا كانت المجموعات X, Y, Z تحقق
 $X \cup Y = Z$ و $X \cap Y = \emptyset$ فإن
 $(Z \cap X) \cup (Z \cap Y)$ يساوي :

- X (أ)
- Y (ب)
- Z (ج)
- \emptyset (د)

3



$$Z \cap Y = Y, \quad Z \cap X = X$$

$$\Rightarrow (Z \cap Y) \cup (Z \cap X)$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

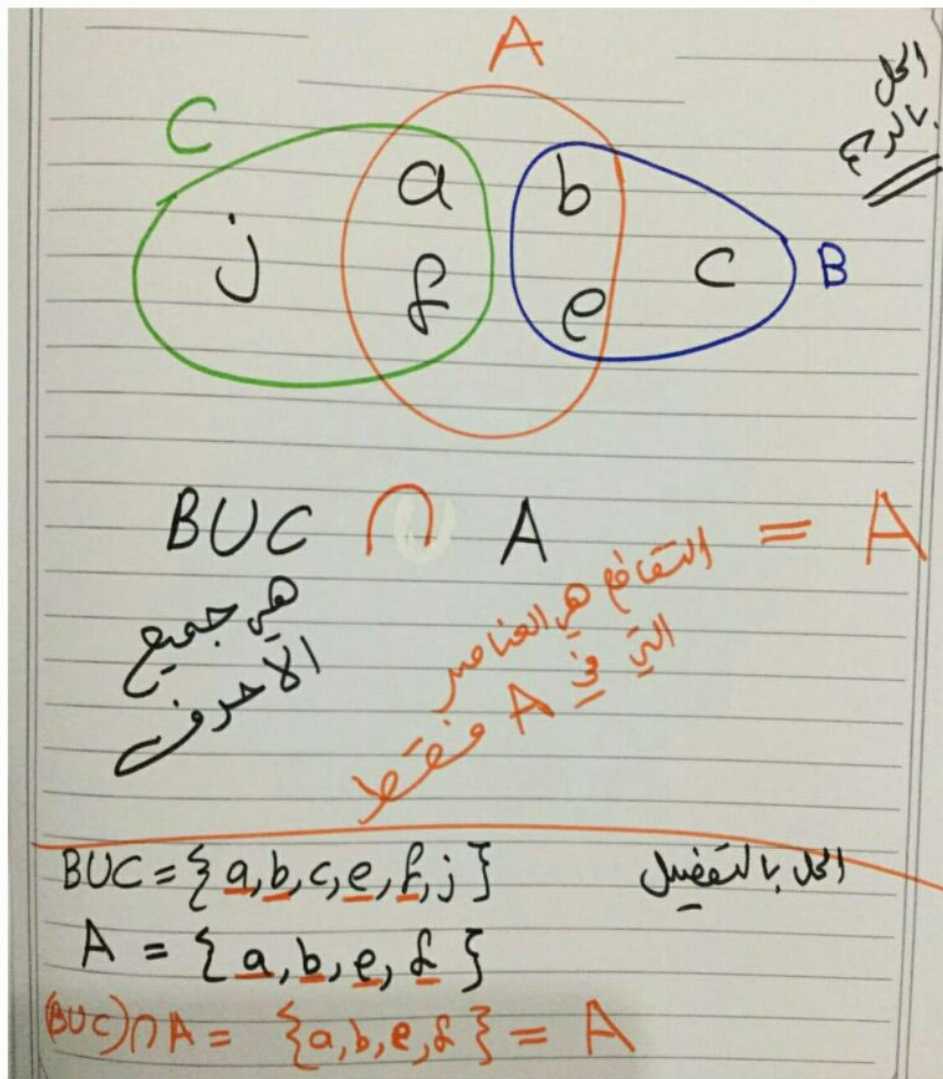
$$Y \cup X$$

$$= Z$$

4. إذا كانت $A = \{a, b, e, f\}$ فإن $(B \cup C) \cap A =$

$B = \{b, c, e\}$ $C = \{a, f, j\}$

(أ) $\{a, e, f\}$
 (ب) $\{a, e, f, j\}$
 (ج) $\{a, d, e, f\}$
 (د) $\{a, b, c, d, e, f, j\}$



6. اذا كان
 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x \in R: x^2 - 3x + 2 = 0\}$
 فإن :
 أ) $A \subset B$
 ب) $B \subset A$
 ج) $A \in B$
 د) $B \in A$

⑥ $A = \{1, 2, 3\}$
 $B = \{1, 2\}$
 حل المعادلة $x^2 - 3x + 2 = 0$
 عددان حاصل
 مفرعين +2
 وحاصل جمعها -3
 $(x-2)(x-1)$
 هما -1, -2
 $x-2=0$ أو $x-1=0$
 $x=2$ $x=1$
 $\Rightarrow B \subseteq A$
 مجموعة
 محتواة

الاحتواء بين مجموعة ومجموعة

اي مجموعة جزئية من مجموعة

سؤال رقم 6 يكون الاجابة دائما جزئي اوغير
 جزئي؟؟؟؟؟؟؟؟؟؟ حتى مع تغير الاسئلة

على حسب السؤال هنا لأنه بين مجموعة
 ومجموعة نختار جزئي وغير جزئي

1 16:57

الاحتواء هل يسمي ايضا جزئي ؟
 الاحتواء يكون

مجموعه محتواه في مجموعه
 10:56 م

Photo
 Grid

$$\left(\frac{-2a^5}{a^3b^2}\right)^3 .1$$

$$\frac{-2a^{15}}{b^6} \quad (ا)$$

$$\frac{-8a^4}{b^6} \quad (ب)$$

$$\frac{-8a^{15}}{b^5} \quad (ج)$$

$$① \left(\frac{-2 a^5}{a^3 b^2} \right)^3$$

قوة × قوة

$$\left(\frac{-2^3 a^{15}}{a^9 b^6} \right)$$

تختصر
 $\frac{a^9}{a^9}$

$$= \left(\frac{-8 a^6}{b^6} \right)$$

3. إذا كانت $xy=2$, $x+y=4$

فما قيمة $x^2 + y^2$ ؟

(أ) 10

(ب) 12

(ج) 14

(د) 16

③ $(x+y)^2 = (4)^2$ تربيع الطرفين

$\text{الحد الأول}^2 + 2 \times \text{الحد الأول} \times \text{الحد الثاني} + \text{الحد الثاني}^2 =$

$x^2 + 2xy + y^2 = 16$

عوض في السؤال

$x^2 + 2(2) + y^2 = 16$

$x^2 + 4 + y^2 = 16$

$x^2 + y^2 = 16 - 4$

$x^2 + y^2 = 12$

4. إذا كان $x \neq 2$, $x \neq -5$ فإن
المقدار

$$\frac{3x^2 - 6x}{x^2 + 3x - 16}$$

أ) $\frac{1}{2}$
ب) $\frac{3}{5}$
ج) $\frac{3x}{x+5}$
د) $\frac{3}{x-2}$

4

$$\frac{3x^2 - 6x}{x^2 + 3x - 10}$$

استخرج عامل مشترك
منه القسمة

$$\frac{3x(x-2)}{(x-2)(x+5)}$$

احل
العبارة
عدداً عاملاً
منها
-10
وجاملاً
جميعاً
x3

$$= \frac{3x}{x+5}$$

5. المقدار $(2x + 3)^2 - (x - 1)^2$ يساوي :

يساوي :

(أ) $x^2 + 14x + 8$

(ب) $3x^2 + 14x + 8$

(ج) $x^2 + 10x + 10$

(د) $3x^2 + 10x + 10$

5

$$(2x+3)^2 - (x-1)^2$$

$$4x^2 + 12x + 9 - (x^2 - 2x + 1)$$

نوجد ناتج كل حد مع ما يقابله من نفس الدرجة

$$4x^2 - x^2 + 12x + 2x + 9 - 1$$

$$= 3x^2 + 14x + 8$$

٥) ما هو العدد الذي إذا جمعنا أحاده وعشراته وضاعفنا جمعهما 5 مرات وقسم الناتج على 7 كان الناتج 10 ؟

56 (ب)

86 (أ)

98 (د)

75 (ج)

$$\frac{5(x+y)}{7} = 10$$

ضاعفناه ٥ مرات (أحاده عشراته)
 قسمناه على 7 (كان الناتج 10)

$$5(x+y) = 70$$

$$x+y = \frac{70}{5}$$

$$x+y = 14$$

من الخيارات

$$5+6 = 11$$

$$8+6 = 14 \checkmark$$

نقاش اليوم

السابع

$$1) 3(2x - 1) - 7 = 6x - 10$$

$$a) R$$

$$b) \frac{5}{3}$$

$$c) -\frac{5}{3}$$

$$d) \phi$$

$$1) 3(2x - 1) - 7 = 6x - 10$$

$$6x - 3 - 7 = 6x - 10$$

$$6x - 10 = 6x - 10$$

تسمى معادلة ،
ويكون مجموعة الحل هي مجموعة
الأعداد الحقيقية $\underline{\underline{R}}$.

$$2) |X - 2| = -4$$

$$a) -2$$

$$b) 6$$

$$c) \{-2, 6\}$$

$$d) \phi$$

$$2) |x - 2| = -4$$

مجموعة الحل ϕ لأن القيمة
المطلقة لا تساوي السالب ..

$$3) |6x - 3| = 9$$

$$a) \{2\}$$

$$b) \{-1\}$$

$$c) (-1, 2)$$

$$d) \{-1, 2\}$$

$$3) |6x - 3| = 9$$

$$6x - 3 = 9$$

$$, 6x - 3 = -9$$

$$6x = 12$$

$$6x = -6$$

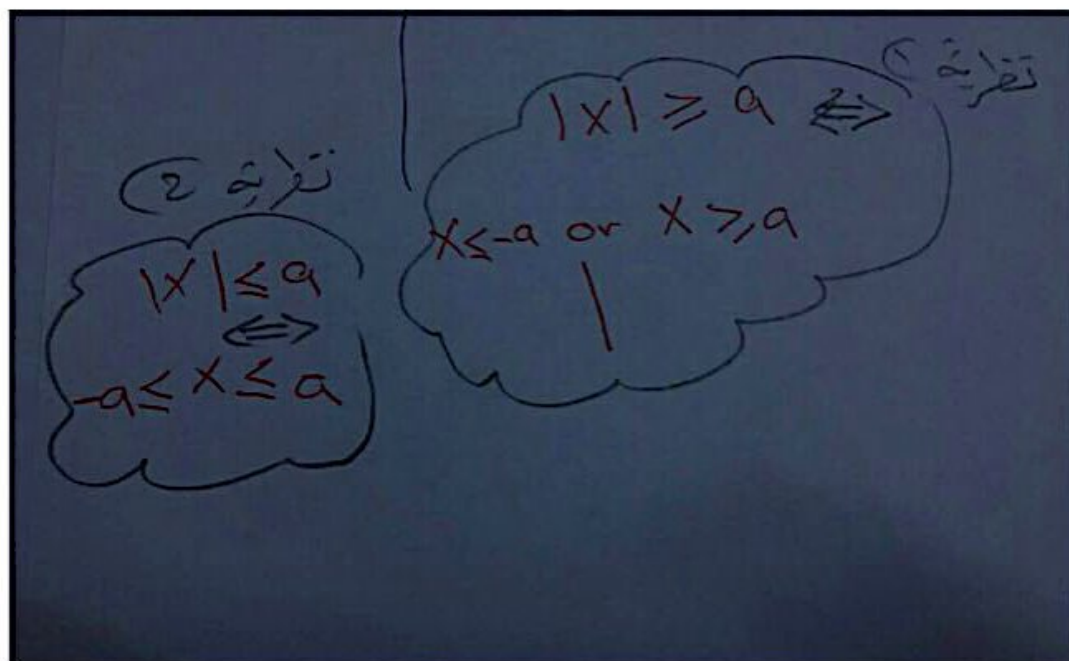
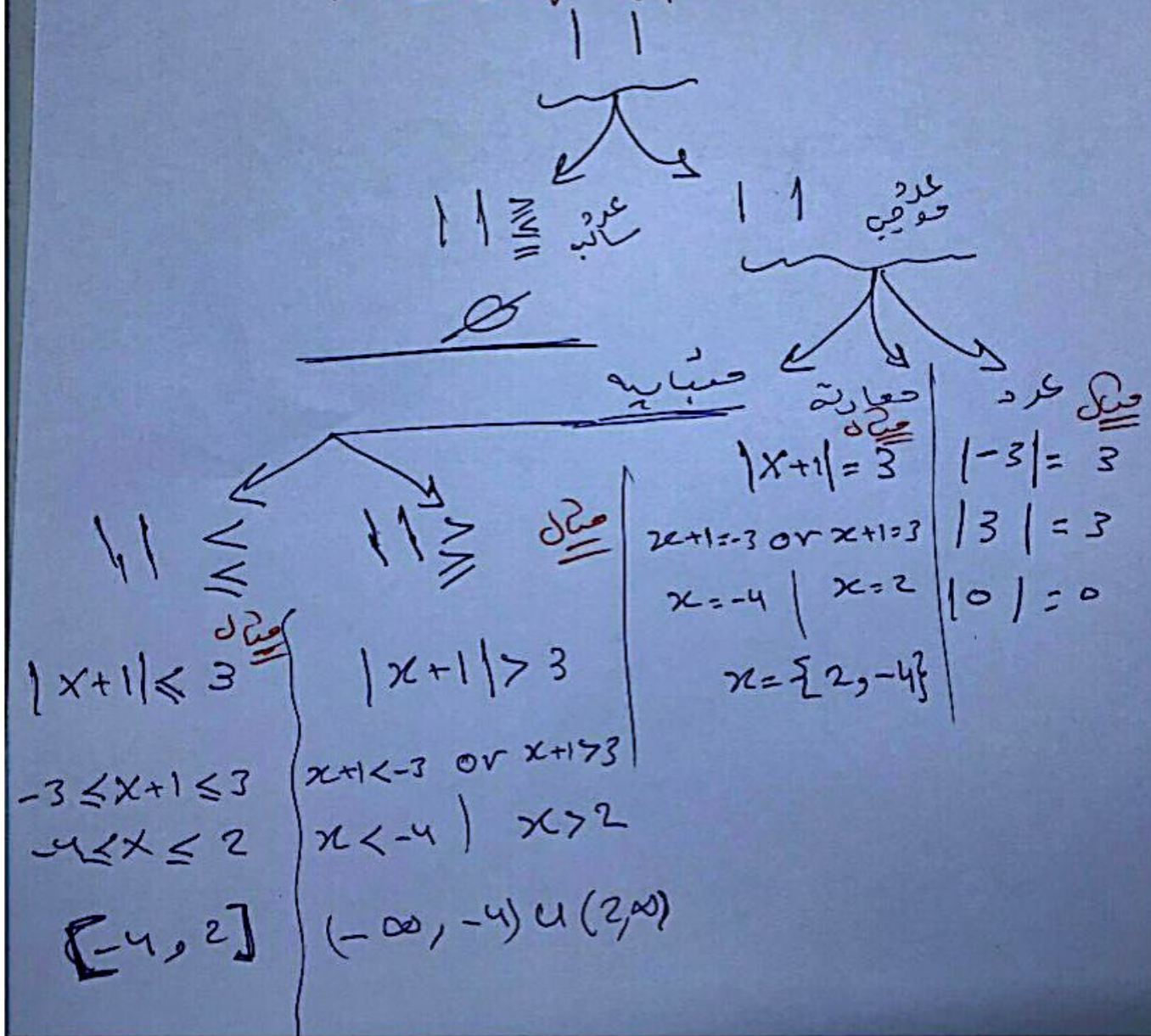
$$x = 2$$

$$x = -1$$

$$\{-1, 2\}$$

Photo
Egypt

* درسیقه طقلعه *



$$4) 7 + x < 5$$

$$a) \{x \mid x < 2\}$$

$$b) \{x \mid x > 2\}$$

$$c) \{x \mid x < -2\}$$

$$d) \{x \mid x > -2\}$$

Handwritten solution for the inequality $7 + x < 5$:

$$\begin{aligned} 7 + x &< 5 \\ x &< 5 - 7 \\ x &< -2 \end{aligned}$$

الحل: $x < -2$

✓ $\{x \mid x < -2\}$

✓ $x < -2$ أو

✓ $(-\infty, -2)$ أو

تغير إشارة المتباينة يكون في حال ضرب أو
قسمة المتباينة في سالب

يعني لو مثلا لو كانت لدينا المتباينة

$$-2x < 4$$

هنا نقسم المتباينه على عدد سالب 2 فنتغير
اشارة المتباينه

$$x > -2$$

لكن لو كانت المتباينة بهذا الشكل

$$4+x < 2$$

$$x < -2$$

هنا لا تتغير اشارة المتباينة حتى لو كان
الناتج سالب

لأننا لم نضرب في سالب ولم نقسم على
سالب

حل المتباينة

$$6) -3 \leq 4 - 7x < 18$$

$$a) \{2, 1\}$$

$$b) (-2, 1]$$

$$c) [-2, 1)$$

$$d) [-2, 1]$$

حل المتباينة المركبة / هذه المتباينة المركبة لا بد أن تأخذ تقاطع الفترتين .

$$-3 \leq 4 - 7x \quad \text{و} \quad 4 - 7x < 18$$

$$\frac{-7}{-7} \leq \frac{-7x}{-7} \quad \frac{-7x}{-7} < \frac{14}{-7}$$

$$1 \geq x \quad x > -2$$

$$(-\infty, 1] \quad (-2, \infty)$$

نأخذ تقاطع الفترتين

$$(-2, 1]$$

يعني تحتوي على أكثر من إشارة متباينه في نفس السؤال

يعني اكس تكون محصورة بين متباينتين

10:16

هذي تسمى متباينة مركبة

والحل يكون تقاطع الفترتين

10:12

مجموعة حل المعادلة الآتية :

$$7) n(3 + 2) + 6 = 5n(10 - 3)$$

a) R

b) 0

c) $\{-\frac{7}{5}, -\frac{6}{5}\}$

d) ϕ

$$7) n(3 + 2) + 6 = 5n + (10 - 3)$$

$$5n + 6 = 5n + 7$$

لا يمكن أن يحقق الشرط
لذلك مجموعة الحل ϕ .

1. مجموعة حل المتباينة

هي : $\frac{2}{x^2+2x-3} < 0$

(أ) $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

(ب) $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$

(ج) $(3, 1)$

(د) $(-3, 1)$

2) $\frac{2}{x^2+2x-3} < 0$

نطلع أصفار المقام :

$(x+3)(x-1)$
 $x = -3, x = 1$

الطريقة الأولى :

نأخذ أعداد ممكنة ونجربها :

-3	1	
$\frac{2}{(-4)^2+2(-4)-3}$	$\frac{2}{(0)^2+2(0)-3}$	$\frac{2}{(2)^2+2(2)-3}$
الناقص موجب	الناقص سالب	الناقص موجب
$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{5}$
+	-	+

∴ الفترة السالبة هي :

$(-3, 1)$

الطريقة الثانية :

-3	1	
$(x-1)$	مثل إشارة x^2	عكس إشارة x^2
+	-	-
$(x+3)$	مثل إشارة x^2	عكس إشارة x^2
+	+	-
إشارة إجماع	$(+)(+) = +$	$(-)(-) = +$
كامل	+	+

∴ الفترة السالبة هي $(-3, 1)$

2. مجموعة حل المتباينة

$$\frac{1-x^2}{2} \leq 0 \text{ هي :}$$

(أ) $[-1, 1]$

(ب) $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

(ج) $[1, \infty)$

(د) $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

$$\frac{1-x^2}{2} \leq 0$$

بالضرب في 2

$$1-x^2 \leq 0$$

$$-x^2 \leq -1$$

بالضرب في سال

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{1}$$

$$|x| \geq 1$$

$$x \leq -1 \text{ or } x \geq 1$$



$$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$$

أسئلة الأعضاء !?

ليش ماقلنا [1,1]

في حل المتباينات :

متباينات من الدرجة الاولى تحل كمعادلة
اما المتباينات الكسرية والجذرية ومن الدرجة
الثانية نساويها بالصفر وندرس اشارتها وناخذ
الفترة على حسب اشارة المتباينة الموجودة ف
السؤال

اذا كانت من الدرجة الثانية تحل

11:22 م

لو اخترنا مثلا 0 وهو ينتمي للفترة اللي قلتيها
وعوضنا راح يطلع الناتج ب $1/2$ وهالقيمة اكبر
من صفر

فالفترة خطأ + بالسؤال المتباينة اقل من او
تساوي فلا بد تكون مغلقة وليست مفتوحة

مجموعة الحل هنا x اكبر من او يساوي 1
و x اقل من او يساوي -1 نختار اعداد منها
ونجرب

راح يكون الحل اتحاد فترتين

11:22 م

JD's
Library

3. إذا كانت x عددا حقيقيا فما العبارة المكافئة للعبارة

$$1 \leq |x - 2| \leq 7$$

(أ) $3 \leq x \leq 9$ or $-5 \leq x \leq 1$

(ب) $x \geq 3$ or $x \leq 1$

(ج) $1 \leq x \leq 3$

(د) $-5 \leq x \leq 9$

3) $1 \leq |x - 2| \leq 7$

$$1 \leq |x - 2|$$

$$1 \leq x - 2 \text{ or } x - 2 \leq -1$$

$$3 \leq x \text{ or } x \leq 1$$

$$[3, \infty) \text{ or } (-\infty, 1]$$

$$|x - 2| \leq 7$$

$$-7 \leq x - 2 \leq 7$$

$$-5 \leq x \leq 9$$

$$[-5, 9]$$



$$-5 \leq x \leq -1 \text{ or } 3 \leq x \leq 9$$

لكن مدري متي احط اتحاد وتقاطع ومتي اختار
ار ماعدا اصفار الداله ؟

● اتحاد اذا كانت القيمة المطلقة أكبر
تقاطع اذا كانت القيمة المطلقة أقل
اما R ناقص اصفار الداله فهذي للمتباينة
الكسرية

كيف اخليه محصور بين عددين ومرة اضع or
اتوقع اذا صارت اقل محصوره واذا اكبر نضع
 or

● محصور بين عددين اذا كانت القيمة المطلقة
أقل وهي عبارة عن التقاطع
وإذا أكبر نكتب or أو - وهي عبارة عن الاتحاد
11:31 م 1

4. مجموعة حل المعادلة

$$\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2-n} \text{ هي :}$$

(أ) $\{0, \frac{1}{2}\}$

(ب) $\{-1\}$

(ج) $\{2\}$

(د) \emptyset

نستبعد كل الخيارات التي فيها اصفار المقام

يبقى فقط ج نجربه

ويكون الحل فاي

$$\textcircled{4} \quad \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n^2-n}$$

بنجرب الجواب
التي لا تحتوي على اصفار
المقام ..

$$\frac{1}{2+1} = \frac{2}{4-2}$$

$$\frac{1}{3} \neq 1$$

3. إذا كانت x عددا حقيقيا فما الفترة المكافئة للمعادلة

$$1 \leq |x - 2| \leq 7$$

(أ) $3 \leq x \leq 9$ or $-5 \leq x \leq 1$

(ب) $x \geq 3$ or $x \leq 1$

(ج) $1 \leq x \leq 3$

(د) $-5 \leq x \leq 9$

متبايات من الدرجة الاولى تحل كمعادلة

اما المتباينات الكسرية والجذرية ومن الدرجة

الثانية نساويها بالصفر وندرس اشارتها وناخذ

الفترة على حسب اشارة المتباينة الموجودة ف

السؤال

3) $1 \leq |x - 2| \leq 7$

$$1 \leq |x - 2|$$

$$1 \leq x - 2 \text{ or } x - 2 \leq -1$$

$$3 \leq x$$

$$x \leq 1$$

$$[3, \infty)$$

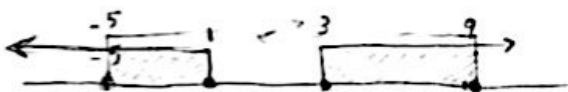
$$\text{or } (-\infty, 1]$$

$$|x - 2| \leq 7$$

$$-7 \leq x - 2 \leq 7$$

$$-5 \leq x \leq 9$$

$$[-5, 9]$$



$$-5 \leq x \leq 1 \text{ or } 3 \leq x \leq 9$$

3. اذا كانت x عددا حقيقيا فما الفترة المكافئة

للمعادلة

$$1 \leq |x - 2| \leq 7$$

(أ) $3 \leq x \leq 9$ or $-5 \leq x \leq 1$

(ب) $x \geq 3$ or $x \leq 1$

(ج) $1 \leq x \leq 3$

(د) $-5 \leq x \leq 9$

متباينات من الدرجة الاولى تحل كمعادلة
اما المتباينات الكسرية والجذرية ومن الدرجة
الثانية نساويها بالصفر وندرس اشارتها وناخذ
الفترة على حسب اشارة المتباينة الموجودة ف
السؤال

③ $1 \leq |x - 2| \leq 7$

$$1 \leq |x - 2|$$

$$1 \leq x - 2 \text{ or } x - 2 \leq -1$$

$$3 \leq x$$

$$x \leq 1$$

$$[3, \infty)$$

$$\text{or } (-\infty, 1]$$

$$|x - 2| \leq 7$$

$$-7 \leq x - 2 \leq 7$$

$$-5 \leq x \leq 9$$

$$[-5, 9]$$



$$-5 \leq x \leq 1 \text{ or } 3 \leq x \leq 9$$

7. ما أصفار كثيرة الحدود

$$x^4 - 2x^2 + 1$$

(أ) ± 1

(ب) ± 2

(ج) ± 1 ، ± 2

أصفار كثيرة الحدود

مجموعة الحل

جذور الدالة

كلها تعني مجموعة الحل التي تجعل المعادلة

تساوي صفر

11:52 م

الحل بالتجريب أ

8. مجموعة حل المعادلة
 $12x^2 - 7x + 1 = 0$ هي :

(أ) $\left\{\frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right\}$

(ب) $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$

(ج) $\left\{-\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right\}$

(د) $\left\{\frac{4}{3}, -\frac{3}{4}\right\}$

$$8) 12x^2 - 7x + 1 = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2 \cdot 12}$$

$$= \frac{7 \pm \sqrt{1}}{24}$$

$$= \frac{7+1}{24}, \frac{7-1}{24}$$

$$= \frac{8}{24}, \frac{6}{24}$$

$$= \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right\}$$

$$\begin{aligned} b^2 - 4ac \\ (-7)^2 - 4 \times 12 \times 1 \\ = 49 - 48 \\ = 1 \end{aligned}$$

9. مجموعة حل المتباينة

$$|x| + 6 < 0 \text{ هي :}$$

(أ) \emptyset

(ب) R

(ج) $(-6, 6)$

(د) $R/[-6, 6]$

حل بالنظر

على طول فاي

لأننا لو نقلنا ال 6 للطرف الثاني تصير سالب

والقيمة المطلقة لاتساوي السالب ابدا

11:53 م تعديل

	<p>10. مجموعة حل المعادلة</p> <p>$x^2 - 49 = 0$ في R هي :</p> <p>(أ) $\{-49, 49\}$</p> <p>(ب) $\{-7, 7\}$</p> <p>(ج) $\{-7, 7\}$</p> <p>(د) $[-7, 7]$</p>
--	---

بالنظر

نستبعد ج و د لأنها فترات

يبقى أ و ب

11:56 م نأخذ جذر 49 يطلع موجب وسالب 7

11. حل المتباينة التالية

$$|2x - 3| \leq 1$$

(أ) $[1, 2]$

(ب) $(1, 2)$

(ج) $\{1, 2\}$

(د) $\mathbb{R}/[-1, 2]$

نستبعد الخيار ب لأنها فترة مفتوحة والسؤال
فترة مغلقة

نستبعد ج لأنها اقواس مجموعة
نستبعد د لأنها مو كسريه

يبقى أ

11:58 م

12. مجموعة حل المتباينة

$|x - 3| > 1$ هي :

(أ) $(1, 3)$

(ب) $(2, 4)$

(ج) $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

(د) $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$

12) $|x - 3| > 1$

$x - 3 < -1$ or $x - 3 > 1$

$x < 2$ or $x > 4$

$(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$

نقاش اليوم

الثامن

وش المصفوفة المتماثلة نبي تعريف لها
● المصفوفة المتماثلة يعني عناصر المصفوفة
تكون متماثلة حول القطر

بمعنى كل عددين حول القطر يكونو مثل
بعض

ولو تم تدويرها وقلبنا كل صف لعمود او كل
عمود لصف تعطينا نفس المصفوفة الأصلية

ملاحظة / دائما المصفوفة المتماثلة = منقولها
أو مدورها (نقل او تدوير عناصر كل صف
الى عمود والعكس)

أما المعكوس فهو عبارة عن النظير الضربي
للمصفوفة ، وحتى يكون للمصفوفة نظير
ضربي او معكوس يجب أن لا يكون قيمة
المحدد يساوي صفرا

وخطوات ايجاد النظير الضربي موجودة
صورتها في الأعلى ضمن الشرح

مثال 1: هل المصفوفات التالية متماثلة أم لا ولماذا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 7 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A^T = A \rightarrow \text{متماثلة}$$

مثل هالمثال

ال 7 و 3 و 4

متماثلة حول عناصر القطر الرئيس

Photo
Grid

منقول

السؤال ١٥

١) كل مصفوفة قطرية لها معكوس \times

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

مصفوفة قطرية عناصرها
الرئيسي أعداداً حقيقية
مركلة إذا أصغر من صفر فإنها
ليس لها معكوس .

٢) كل مصفوفة متماثلة لها معكوس \times

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

مصفوفة متماثلة
مصفوفة قطرية تماثلها يسوي
عناصر القطر الرئيس هي
صفر .
لذلك ليس لها معكوس .

٣) كل مصفوفة متماثلة هي مصفوفة
قطرية \times

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

مصفوفة متماثلة
وليس قطرية .

٤) كل مصفوفة قطرية هي
مصفوفة متماثلة ✓

المصفوفات

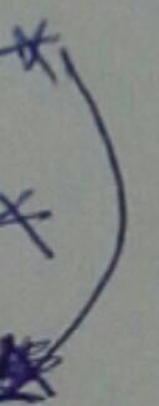
السؤال

- أي العبارات الآتية صحيحة :
 (أ) كل مصفوفة قطرية لها معكوس .
 (ب) كل مصفوفة قطرية متماثلة لها معكوس .
 (ج) كل مصفوفة متماثلة مصفوفة قطرية
 (د) كل مصفوفة قطرية هي مصفوفة متماثلة

④ المصفوفة المتماثلة:

مصفوفة مربعة $n \times n$ لا يوجد لها

مثال:


$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

* كل مصفوفة $n \times n$ قطرية مربعة هي
مصفوفة متماثلة

2. قيم x التي تجعل محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & 1+x & 6 \\ 0 & 0 & \frac{2x-1}{3} \end{vmatrix}$$

تساوي صفراً هي :

(أ) $0, 1, \frac{1}{2}$

(ب) $0, -1, \frac{1}{2}$

(ج) $0, -1, \frac{1}{2}$

(د) $0, -\frac{1}{2}, 1$

قيمة x التي تجعل محدد المصفوفة تساوي صفراً هي :

x	5	7
0	$1+x$	6
0	0	$\frac{2x-1}{3}$

هنا القيم التي تجعل المحدد يساوي صفراً هي :

- (1) $x=0$
- (2) $1+x=0 \Rightarrow x=-1$
- (3) $\frac{2x-1}{3}=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

∴ الحل : $(0, -1, \frac{1}{2})$

المصفوفة بهذا الشكل تسمى مصفوفة مثلثية

إذا وجدنا أصفار على شكل مثلث أسفل أو أعلى المصفوفة

9:56 م

Photo
Grid

$$\begin{vmatrix} 2 & 36 & 77 \\ 0 & 2 & 20 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

أو مصدر ؟

ممکن تكون اعلى او اسفل القطر الرئيس
وممكن تكون اعلى او اسفل القطر الثاني
وبالحالة الثانية نسوي نفس الخطوات لكن
نضرب في سالب

المحددة بالشكل قلنا تسمى مثلثية صح

وهذي على طول نضرب عناصر القطر الرئيس

نضرب $3 \times 2 \times 2$

Photo
Grid

4. قيمة $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ تساوي

(أ) 55

(ب) 60

(ج) 66

(د) 76

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$3(3 + 7) - 4(0 - 14) +$$

$$5(0 - 2) =$$

$$30 + 56 - 10 = 76$$

← مصفوفة مثلثية القطر الرئيس

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 0 & 6 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 6 \times 3 = 18$$

إذا كان تمت القطر الرئيس

أرفوقه أصفاء، يسمى

محدد مثلثية وقيمته تكون

بضرب عناصر القطر الرئيس

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 8 \\ 2 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

القطر الآخر

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 10 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}$$

قيمة المحدر =

-(عناصر القطر

الآخر)

$$= 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -(8 \times 6 \times 2)$$

$$= -96$$

أشبهه مع المصفوفة المثلثية .

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \times 2 = 2, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -(2 \times 3) = -6$$

عناصر القطر الآخر

3. النظام التالي $x - y + z = a$
 $2x - y + z = a$
 $-x - 2y + 2z$ إذا علمت أن:
 وأن $x=3$ ، فإن قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

تساوي.

(أ) $\frac{3}{6}$
 (ب) $\frac{6}{3}$
 (ج) 6^2
 (د) 3×6

وأن $x=3$ فإن قيمة

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 6$$

بالقوة

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

$$3 = \frac{\Delta x}{6} \Rightarrow \Delta x = 3 \cdot 6$$

$$= 18$$

٢١
٢٢
٢٣
٢٤
٢٥
٢٦
٢٧
٢٨
٢٩
٣٠
٣١
٣٢
٣٣
٣٤
٣٥
٣٦
٣٧
٣٨
٣٩
٤٠
٤١
٤٢
٤٣
٤٤
٤٥
٤٦
٤٧
٤٨
٤٩
٥٠
٥١
٥٢
٥٣
٥٤
٥٥
٥٦
٥٧
٥٨
٥٩
٦٠
٦١
٦٢
٦٣
٦٤
٦٥
٦٦
٦٧
٦٨
٦٩
٧٠
٧١
٧٢
٧٣
٧٤
٧٥
٧٦
٧٧
٧٨
٧٩
٨٠
٨١
٨٢
٨٣
٨٤
٨٥
٨٦
٨٧
٨٨
٨٩
٩٠
٩١
٩٢
٩٣
٩٤
٩٥
٩٦
٩٧
٩٨
٩٩
١٠٠
١٠١
١٠٢
١٠٣
١٠٤
١٠٥
١٠٦
١٠٧
١٠٨
١٠٩
١١٠
١١١
١١٢
١١٣
١١٤
١١٥
١١٦
١١٧
١١٨
١١٩
١٢٠
١٢١
١٢٢
١٢٣
١٢٤
١٢٥
١٢٦
١٢٧
١٢٨
١٢٩
١٣٠
١٣١
١٣٢
١٣٣
١٣٤
١٣٥
١٣٦
١٣٧
١٣٨
١٣٩
١٤٠
١٤١
١٤٢
١٤٣
١٤٤
١٤٥
١٤٦
١٤٧
١٤٨
١٤٩
١٥٠
١٥١
١٥٢
١٥٣
١٥٤
١٥٥
١٥٦
١٥٧
١٥٨
١٥٩
١٦٠
١٦١
١٦٢
١٦٣
١٦٤
١٦٥
١٦٦
١٦٧
١٦٨
١٦٩
١٧٠
١٧١
١٧٢
١٧٣
١٧٤
١٧٥
١٧٦
١٧٧
١٧٨
١٧٩
١٨٠
١٨١
١٨٢
١٨٣
١٨٤
١٨٥
١٨٦
١٨٧
١٨٨
١٨٩
١٩٠
١٩١
١٩٢
١٩٣
١٩٤
١٩٥
١٩٦
١٩٧
١٩٨
١٩٩
٢٠٠
٢٠١
٢٠٢
٢٠٣
٢٠٤
٢٠٥
٢٠٦
٢٠٧
٢٠٨
٢٠٩
٢١٠
٢١١
٢١٢
٢١٣
٢١٤
٢١٥
٢١٦
٢١٧
٢١٨
٢١٩
٢٢٠
٢٢١
٢٢٢
٢٢٣
٢٢٤
٢٢٥
٢٢٦
٢٢٧
٢٢٨
٢٢٩
٢٣٠
٢٣١
٢٣٢
٢٣٣
٢٣٤
٢٣٥
٢٣٦
٢٣٧
٢٣٨
٢٣٩
٢٤٠
٢٤١
٢٤٢
٢٤٣
٢٤٤
٢٤٥
٢٤٦
٢٤٧
٢٤٨
٢٤٩
٢٥٠
٢٥١
٢٥٢
٢٥٣
٢٥٤
٢٥٥
٢٥٦
٢٥٧
٢٥٨
٢٥٩
٢٦٠
٢٦١
٢٦٢
٢٦٣
٢٦٤
٢٦٥
٢٦٦
٢٦٧
٢٦٨
٢٦٩
٢٧٠
٢٧١
٢٧٢
٢٧٣
٢٧٤
٢٧٥
٢٧٦
٢٧٧
٢٧٨
٢٧٩
٢٨٠
٢٨١
٢٨٢
٢٨٣
٢٨٤
٢٨٥
٢٨٦
٢٨٧
٢٨٨
٢٨٩
٢٩٠
٢٩١
٢٩٢
٢٩٣
٢٩٤
٢٩٥
٢٩٦
٢٩٧
٢٩٨
٢٩٩
٣٠٠
٣٠١
٣٠٢
٣٠٣
٣٠٤
٣٠٥
٣٠٦
٣٠٧
٣٠٨
٣٠٩
٣١٠
٣١١
٣١٢
٣١٣
٣١٤
٣١٥
٣١٦
٣١٧
٣١٨
٣١٩
٣٢٠
٣٢١
٣٢٢
٣٢٣
٣٢٤
٣٢٥
٣٢٦
٣٢٧
٣٢٨
٣٢٩
٣٣٠
٣٣١
٣٣٢
٣٣٣
٣٣٤
٣٣٥
٣٣٦
٣٣٧
٣٣٨
٣٣٩
٣٤٠
٣٤١
٣٤٢
٣٤٣
٣٤٤
٣٤٥
٣٤٦
٣٤٧
٣٤٨
٣٤٩
٣٥٠
٣٥١
٣٥٢
٣٥٣
٣٥٤
٣٥٥
٣٥٦
٣٥٧
٣٥٨
٣٥٩
٣٦٠
٣٦١
٣٦٢
٣٦٣
٣٦٤
٣٦٥
٣٦٦
٣٦٧
٣٦٨
٣٦٩
٣٧٠
٣٧١
٣٧٢
٣٧٣
٣٧٤
٣٧٥
٣٧٦
٣٧٧
٣٧٨
٣٧٩
٣٨٠
٣٨١
٣٨٢
٣٨٣
٣٨٤
٣٨٥
٣٨٦
٣٨٧
٣٨٨
٣٨٩
٣٩٠
٣٩١
٣٩٢
٣٩٣
٣٩٤
٣٩٥
٣٩٦
٣٩٧
٣٩٨
٣٩٩
٤٠٠
٤٠١
٤٠٢
٤٠٣
٤٠٤
٤٠٥
٤٠٦
٤٠٧
٤٠٨
٤٠٩
٤١٠
٤١١
٤١٢
٤١٣
٤١٤
٤١٥
٤١٦
٤١٧
٤١٨
٤١٩
٤٢٠
٤٢١
٤٢٢
٤٢٣
٤٢٤
٤٢٥
٤٢٦
٤٢٧
٤٢٨
٤٢٩
٤٣٠
٤٣١
٤٣٢
٤٣٣
٤٣٤
٤٣٥
٤٣٦
٤٣٧
٤٣٨
٤٣٩
٤٤٠
٤٤١
٤٤٢
٤٤٣
٤٤٤
٤٤٥
٤٤٦
٤٤٧
٤٤٨
٤٤٩
٤٥٠
٤٥١
٤٥٢
٤٥٣
٤٥٤
٤٥٥
٤٥٦
٤٥٧
٤٥٨
٤٥٩
٤٦٠
٤٦١
٤٦٢
٤٦٣
٤٦٤
٤٦٥
٤٦٦
٤٦٧
٤٦٨
٤٦٩
٤٧٠
٤٧١
٤٧٢
٤٧٣
٤٧٤
٤٧٥
٤٧٦
٤٧٧
٤٧٨
٤٧٩
٤٨٠
٤٨١
٤٨٢
٤٨٣
٤٨٤
٤٨٥
٤٨٦
٤٨٧
٤٨٨
٤٨٩
٤٩٠
٤٩١
٤٩٢
٤٩٣
٤٩٤
٤٩٥
٤٩٦
٤٩٧
٤٩٨
٤٩٩
٥٠٠
٥٠١
٥٠٢
٥٠٣
٥٠٤
٥٠٥
٥٠٦
٥٠٧
٥٠٨
٥٠٩
٥١٠
٥١١
٥١٢
٥١٣
٥١٤
٥١٥
٥١٦
٥١٧
٥١٨
٥١٩
٥٢٠
٥٢١
٥٢٢
٥٢٣
٥٢٤
٥٢٥
٥٢٦
٥٢٧
٥٢٨
٥٢٩
٥٣٠
٥٣١
٥٣٢
٥٣٣
٥٣٤
٥٣٥
٥٣٦
٥٣٧
٥٣٨
٥٣٩
٥٤٠
٥٤١
٥٤٢
٥٤٣
٥٤٤
٥٤٥
٥٤٦
٥٤٧
٥٤٨
٥٤٩
٥٥٠
٥٥١
٥٥٢
٥٥٣
٥٥٤
٥٥٥
٥٥٦
٥٥٧
٥٥٨
٥٥٩
٥٦٠
٥٦١
٥٦٢
٥٦٣
٥٦٤
٥٦٥
٥٦٦
٥٦٧
٥٦٨
٥٦٩
٥٧٠
٥٧١
٥٧٢
٥٧٣
٥٧٤
٥٧٥
٥٧٦
٥٧٧
٥٧٨
٥٧٩
٥٨٠
٥٨١
٥٨٢
٥٨٣
٥٨٤
٥٨٥
٥٨٦
٥٨٧
٥٨٨
٥٨٩
٥٩٠
٥٩١
٥٩٢
٥٩٣
٥٩٤
٥٩٥
٥٩٦
٥٩٧
٥٩٨
٥٩٩
٦٠٠
٦٠١
٦٠٢
٦٠٣
٦٠٤
٦٠٥
٦٠٦
٦٠٧
٦٠٨
٦٠٩
٦١٠
٦١١
٦١٢
٦١٣
٦١٤
٦١٥
٦١٦
٦١٧
٦١٨
٦١٩
٦٢٠
٦٢١
٦٢٢
٦٢٣
٦٢٤
٦٢٥
٦٢٦
٦٢٧
٦٢٨
٦٢٩
٦٣٠
٦٣١
٦٣٢
٦٣٣
٦٣٤
٦٣٥
٦٣٦
٦٣٧
٦٣٨
٦٣٩
٦٤٠
٦٤١
٦٤٢
٦٤٣
٦٤٤
٦٤٥
٦٤٦
٦٤٧
٦٤٨
٦٤٩
٦٥٠
٦٥١
٦٥٢
٦٥٣
٦٥٤
٦٥٥
٦٥٦
٦٥٧
٦٥٨
٦٥٩
٦٦٠
٦٦١
٦٦٢
٦٦٣
٦٦٤
٦٦٥
٦٦٦
٦٦٧
٦٦٨
٦٦٩
٦٧٠
٦٧١
٦٧٢
٦٧٣
٦٧٤
٦٧٥
٦٧٦
٦٧٧
٦٧٨
٦٧٩
٦٨٠
٦٨١
٦٨٢
٦٨٣
٦٨٤
٦٨٥
٦٨٦
٦٨٧
٦٨٨
٦٨٩
٦٩٠
٦٩١
٦٩٢
٦٩٣
٦٩٤
٦٩٥
٦٩٦
٦٩٧
٦٩٨
٦٩٩
٧٠٠
٧٠١
٧٠٢
٧٠٣
٧٠٤
٧٠٥
٧٠٦
٧٠٧
٧٠٨
٧٠٩
٧١٠
٧١١
٧١٢
٧١٣
٧١٤
٧١٥
٧١٦
٧١٧
٧١٨
٧١٩
٧٢٠
٧٢١
٧٢٢
٧٢٣
٧٢٤
٧٢٥
٧٢٦
٧٢٧
٧٢٨
٧٢٩
٧٣٠
٧٣١
٧٣٢
٧٣٣
٧٣٤
٧٣٥
٧٣٦
٧٣٧
٧٣٨
٧٣٩
٧٤٠
٧٤١
٧٤٢
٧٤٣
٧٤٤
٧٤٥
٧٤٦
٧٤٧
٧٤٨
٧٤٩
٧٥٠
٧٥١
٧٥٢
٧٥٣
٧٥٤
٧٥٥
٧٥٦
٧٥٧
٧٥٨
٧٥٩
٧٦٠
٧٦١
٧٦٢
٧٦٣
٧٦٤
٧٦٥
٧٦٦
٧٦٧
٧٦٨
٧٦٩
٧٧٠
٧٧١
٧٧٢
٧٧٣
٧٧٤
٧٧٥
٧٧٦
٧٧٧
٧٧٨
٧٧٩
٧٨٠
٧٨١
٧٨٢
٧٨٣
٧٨٤
٧٨٥
٧٨٦
٧٨٧
٧٨٨
٧٨٩
٧٩٠
٧٩١
٧٩٢
٧٩٣
٧٩٤
٧٩٥
٧٩٦
٧٩٧
٧٩٨
٧٩٩
٨٠٠
٨٠١
٨٠٢
٨٠٣
٨٠٤
٨٠٥
٨٠٦
٨٠٧
٨٠٨
٨٠٩
٨١٠
٨١١
٨١٢
٨١٣
٨١٤
٨١٥
٨١٦
٨١٧
٨١٨
٨١٩
٨٢٠
٨٢١
٨٢٢
٨٢٣
٨٢٤
٨٢٥
٨٢٦
٨٢٧
٨٢٨
٨٢٩
٨٣٠
٨٣١
٨٣٢
٨٣٣
٨٣٤
٨٣٥
٨٣٦
٨٣٧
٨٣٨
٨٣٩
٨٤٠
٨٤١
٨٤٢
٨٤٣
٨٤٤
٨٤٥
٨٤٦
٨٤٧
٨٤٨
٨٤٩
٨٥٠
٨٥١
٨٥٢
٨٥٣
٨٥٤
٨٥٥
٨٥٦
٨٥٧
٨٥٨
٨٥٩
٨٦٠
٨٦١
٨٦٢
٨٦٣
٨٦٤
٨٦٥
٨٦٦
٨٦٧
٨٦٨
٨٦٩
٨٧٠
٨٧١
٨٧٢
٨٧٣
٨٧٤
٨٧٥
٨٧٦
٨٧٧
٨٧٨
٨٧٩
٨٨٠
٨٨١
٨٨٢
٨٨٣
٨٨٤
٨٨٥
٨٨٦
٨٨٧
٨٨٨
٨٨٩
٨٩٠
٨٩١
٨٩٢
٨٩٣
٨٩٤
٨٩٥
٨٩٦
٨٩٧
٨٩٨
٨٩٩
٩٠٠
٩٠١
٩٠٢
٩٠٣
٩٠٤
٩٠٥
٩٠٦
٩٠٧
٩٠٨
٩٠٩
٩١٠
٩١١
٩١٢
٩١٣
٩١٤
٩١٥
٩١٦
٩١٧
٩١٨
٩١٩
٩٢٠
٩٢١
٩٢٢
٩٢٣
٩٢٤
٩٢٥
٩٢٦
٩٢٧
٩٢٨
٩٢٩
٩٣٠
٩٣١
٩٣٢
٩٣٣
٩٣٤
٩٣٥
٩٣٦
٩٣٧
٩٣٨
٩٣٩
٩٤٠
٩٤١
٩٤٢
٩٤٣
٩٤٤
٩٤٥
٩٤٦
٩٤٧
٩٤٨
٩٤٩
٩٥٠
٩٥١
٩٥٢
٩٥٣
٩٥٤
٩٥٥
٩٥٦
٩٥٧
٩٥٨
٩٥٩
٩٦٠
٩٦١
٩٦٢
٩٦٣
٩٦٤
٩٦٥
٩٦٦
٩٦٧
٩٦٨
٩٦٩
٩٧٠
٩٧١
٩٧٢
٩٧٣
٩٧٤
٩٧٥
٩٧٦
٩٧٧
٩٧٨
٩٧٩
٩٨٠
٩٨١
٩٨٢
٩٨٣
٩٨٤
٩٨٥
٩٨٦
٩٨٧
٩٨٨
٩٨٩
٩٩٠
٩٩١
٩٩٢
٩٩٣
٩٩٤
٩٩٥
٩٩٦
٩٩٧
٩٩٨
٩٩٩
١٠٠٠

مصفوفة مربعة يعني 2×2 او 3×3 اي مصفوفة مربعة

فلما نضرب عدد حقيقي في محدد مصفوفة يعني نضربه في جميع العناصر

وهنا نطلع العدد عامل مشترك ويكون اسه نفس بعد المصفوفة

يعني اذا 2×2 يكون العدد اس 2

اذا 3×3 يكون العدد اس 3

وهكذا

$$|kA| = k^n |A|$$

$$|2A| = 2^3 |A|$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

5/ تغییر اساساً در محور مصفوفه اذا بدلنا
ببین ای مصفوفه از محور بین
میشود.

مثال:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2$$

16

مصفوفات المربعان:

10/ اذا كانت A مصفوفة مربعة
و تتكون من صف واحد و محور صفي
فانها قيمة واحد = 1

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0$$

11/ اذا كانت A مصفوفة مربعة

و تتكون من صفين او محور بين
مستاربين فانها واحد و محور صفي

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 3 \\ 4 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0$$

12/ اذا كانت A مصفوفة مثلثية علوية

علوية او سفلية ته له قيمة 1
فانها الواحد = حاصل ضرب
عناصر القطر الرئيس.

13/ اذا كانت A مصفوفة المثلثية

المصفوفة A مصفوفة لاصف
آخر (او محور آخر اقلية
الحدود سيادي مصفوفة)

مثال:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 0$$

$$|2A| = 2^3 |A| \quad |kA| = k^n |A| \quad : \text{JL}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \underline{2^3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2^3 (1(4-2) - 3(8-3) + 1(4-3))$$

$$= 2^3 (2 - 15 + 1)$$

$$= 2^3 (-12)$$

$$= 8(-12) = -96$$

ملحوظات مهمة :

١- المعكوس أو لنظير الضرب:

$$I^{-1} = I \quad *$$

$$(A^{-1})^{-1} = A \quad *$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad *$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad *$$

2- المصفوفة المتماثلة :

* لتكن A مصفوفة مربعة

وليك $K \in R$ عندها :

* $A A^T$ مصفوفة متماثلة
أي حاصل ضرب المصفوفة A في
منقولتها A^T يعطينا مصفوفة
متماثلة .

مثال : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A A^T = \begin{bmatrix} 1+1 & 0+2 \\ 0+2 & 0+4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ مصفوفة متماثلة

* $A + A^T$ مصفوفة متماثلة
حاصل مجموع المصفوفة A
مع منقولتها هي مصفوفة
متماثلة .

مثال : $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, A + A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
 الناتج مصفوفة متماثلة .

* إذا كان A متماثلة فإن
 KA متماثلة .

مثال : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, K = 2, KA = 2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ مصفوفة متماثلة

ملاحظات :

$$AB \neq BA \quad ①$$

أي عملية ضرب لمصفوفات ليست ابدالية .

② من الممكن ان يكون حاصل ضرب مصفوفتين $A \neq 0, B \neq 0$

حيث يكون $AB = 0$

مثال :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A(B + C) = AB + AC \quad ③$$

$$A(BC) = A(BC)$$

1A

يمكن ضرب مصفوفتين إذا وفقط إذا كان:
أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ae + bg & af + bh \\ ce + dg & cf + dh \end{bmatrix}$$

مثال 1 حدد رتبة كل مصفوفة فيما يأتي:

$$\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix} \quad (10) \quad \begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix} \quad (13) \quad [115] \quad (14)$$

إذا كانت $\underline{A} = \begin{bmatrix} 6 & y \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$ ، $\underline{B} = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$ فحدد كل عنصر فيما يأتي:

$$b_{13} \quad (17)$$

$$a_{21} \quad (15)$$

9) $\begin{bmatrix} -9 & 6 \end{bmatrix}$

أعمده \times صفوف

1 \times 2

10) $\begin{bmatrix} 15 & y \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$

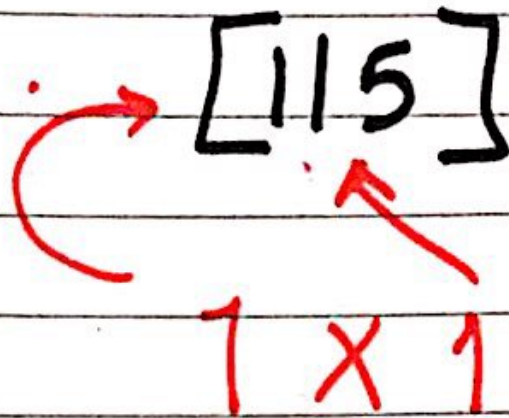
أعمده \times صفوف

2 \times 2

14)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

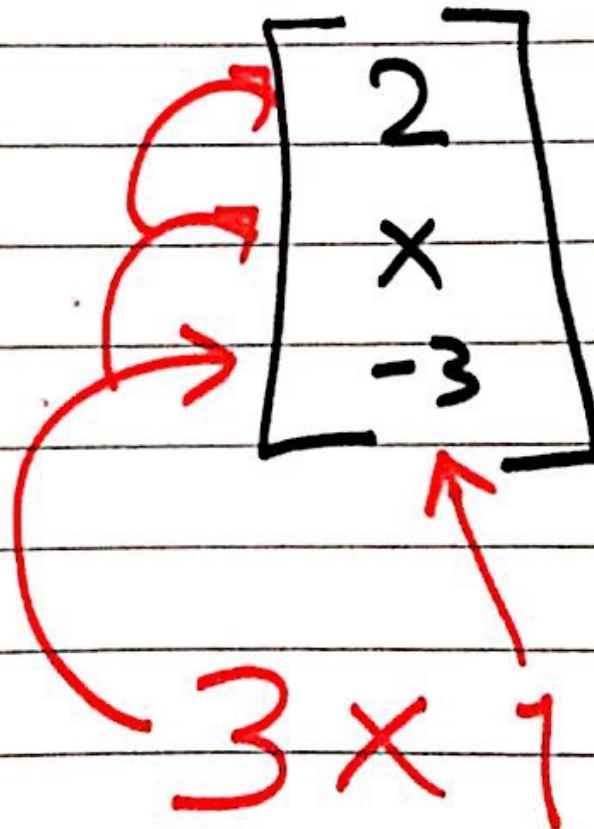
1×1



13)

$$\begin{bmatrix} 2 \\ x \\ -3 \end{bmatrix}$$

3×1



$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & 31 \\ 11 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 10 & -8 & 2x \\ -2 & 19 & 4 \end{bmatrix}$$

6

13

= 2x

العنصر
موجود
في المصفوفة
حذفه
بمقدار 13

عند الجمع او الطرح لازم المصفوفة نفس الرتب
والناتج نفس الرتب

5.50

(33) رتبة المصفوفة : إذا كانت A, B مصفوفتين من الرتبة 5×3 ، فإن رتبة المصفوفة $A - B$ هي:

3×2 (c

3×5 (a

3×3 (d

5×3 (b)

(49) ما رتبة المصفوفة الناتجة عن عملية الضرب الآتية؟

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Handwritten analysis of matrix dimensions:

The first matrix is 4×3 (4 rows, 3 columns).
The second matrix is 3×1 (3 rows, 1 column).
The resulting matrix dimensions are 4×1 .

Options:

- A 1×4
- B 3×3
- C 4×1 (Correct, marked with a green checkmark)
- D 4×3

$n \times m$ A $n \times m$

$n \times m$ B $n \times m$

$n \times m$ $A + B$ $n \times m$ $A - B$

$n \times m$ A $n \times m$

$m \times r$ B $m \times r$

$n \times r$ AB $n \times m$ $m \times r$

BA $n \times m$ $m \times r$

8. إذا كانت A و B مصفوفتين من الدرجة 3×3 فأي
العبارات صحيحة

(أ) $|A - B| = |B - A|$

(ب) إذا كان $AB = A^2$ فإن $A = B$

(ج) إذا كان $AB = 0$ فإن $A = 0$ أو $B = 0$

(د) إذا كان $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ فإن $AB = BA$

مود صد لنظر متبعه
د خاصيه الصرب ليس ابداليه .
ج ليس شرط انو A او B تساوي صفر فنستبعده
∴ حل (د)

إذا كان $AB = A^2$

$AB = AA$

$B = A$

9. ما ناتج جمع قيم k التي تجعل للنظام حلاً غير تافهة

$$(k + 1)x + (k + 3)y = 0$$

$$2x + ky = 0$$

(أ) -1

(ب) 1

(ج) 2

(د) 3

نظام المعادلات الخطية :

$$(k+1)x + (k+3)y = 0$$

$$2x + ky = 0$$

حلاً "غير تافه" ← المحدد = صفر

$$\begin{vmatrix} k+1 & k+3 \\ 2 & k \end{vmatrix} = 0$$

$$(k+1)k - 2(k+3) = 0$$

$$k^2 + k - 2k - 6 = 0$$

$$k^2 - k - 6 = 0$$

$$(k-3)(k+2) = 0$$

$$k=3 \text{ or } k=-2 \Rightarrow 3-2=1$$

Awael

* فلا حظ: أفيز: واره:

مدا/ ماذا نشتي الحمد لأتيه

(أ) غير قابلة للانفكاك

(ب) ليس له نقل

(ج) عدد لا نهائي من الحلول

(د) نظام غير متسق

$$\Delta = 0$$

الجواب /

10. اذا كانت A مصفوفة متماثلة ($A^T = A$) فإن

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{أ})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{د})$$

إذا كانت $A = A^T$

فإن

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$
$$A + A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

11. إذا كانت $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة X تساوي:

(أ) $\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} -7 & -3 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Rightarrow x = A^{-1}b$$

$$A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

Photo

إذا كانت A مصفوفة من الدرجة 3×3
 وكان $|A| = -2$ فما قيمة $|2A^T(A^{-1})^2|$
 $\frac{1}{8} - 4 - \frac{1}{2} - 4$

قوانين:

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

$$|A| = |A^T|$$

$$|kA| = k^n |A|$$

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

السؤال: A مصفوفة من الرتبة 3×3
 $|A| = -2$ فما قيمة $|2A^T(A^{-1})^2|$

$$|2A^T A^{-1} A^{-1}|$$

$$|2A^T| \cdot |A^{-1}| \cdot |A^{-1}|$$

$$2^3 |A^T| \cdot \frac{1}{|A|} \cdot \frac{1}{|A|}$$

$$8 \times -2 \times \frac{1}{-2} \times \frac{1}{-2} = (-4)$$

Awael

تكون غير قابلة للانعكاس عندما تكون قيمة المحدد تساوي صفر

$$\Delta = 0$$

$$[1 \times 0 - 1 \times 1] - 0[0 - 1] + a[-1] = 0$$

$$-1 - a = 0$$

$$a = -1$$

5. قيمة a التي تجعل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

غير قابلة للانعكاس هي:

(أ) -1

(ب) 0

(ج) 1

(د) -2

قيمة a التي تجعل المصفوفة

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

الزيتية

أولاً: نضيف العمود الأول والثاني

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

ثانياً: منب الأعداد الواقعة على الخط الأحمر
ثم منب الخط الأسود.

$$(0 + 0 + 0) - (a + 1 + 0) = 0$$

$$-a + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$$

ان كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ فإن A^2 سيأوي

X
A) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$

B) $\begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$

C) $\begin{bmatrix} 5 & 20 \\ 20 & 10 \end{bmatrix}$

D) $\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix}$

$A^2 = A \cdot A$ وليس
تربيع

فقرة A محذوف

$$A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1 + 2 \times 2 & 1 \times 2 + 2 \times 4 \\ 2 \times 1 + 4 \times 2 & 2 \times 2 + 4 \times 4 \end{bmatrix}$$

فقرة d محذوف $= \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 20 \end{bmatrix} \rightarrow$ الإجابة مقرة B

الإجابة C و B

نقاش اليوم

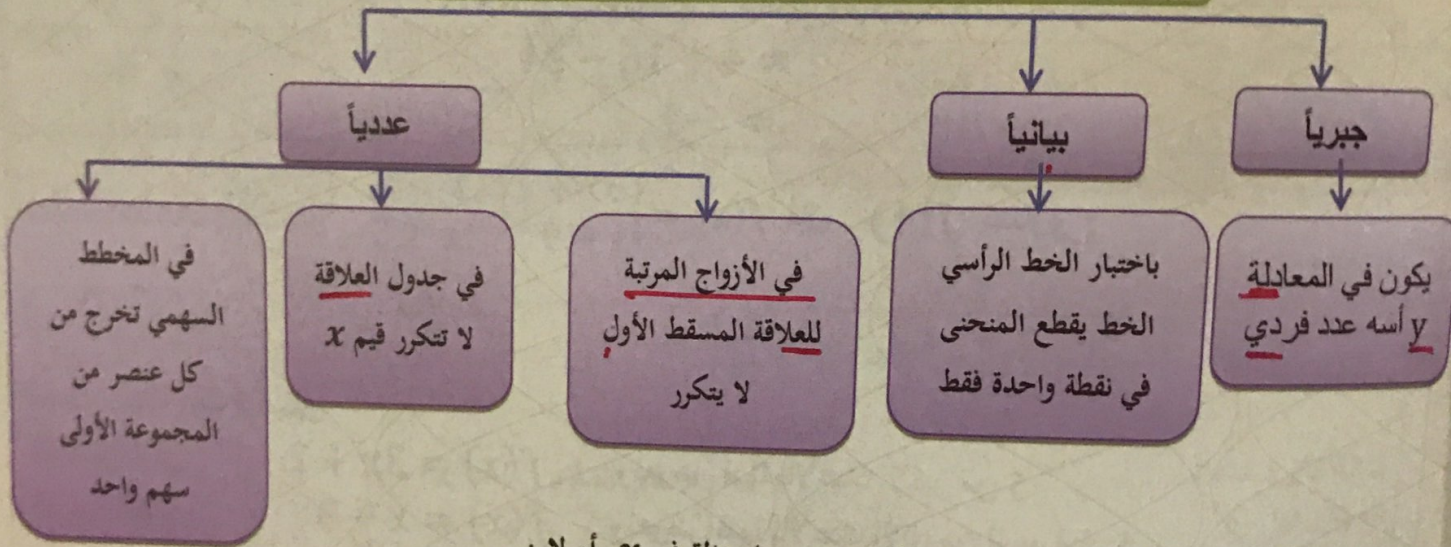
التاسع

٧ الدوال :

ملاحظة : هي قاعدة للربط بين كميتين ، بحيث ترتبط عناصر مجموعة مثل A مع عناصر مجموعة مثل B ، حيث تسمى A **مجال العلاقة** ، أما B فتتضمن عناصر **المدى** جميعها ، وهناك أربع طرق :

- (١) لفظياً : جملة تصف كيفية ارتباط عناصر المجال بعناصر المدى .
- (٢) عددياً : جدول من القيم أو مجموعة من الأزواج المرتبة تربط عنصراً من المجال (قيمة x) بعنصر من المدى (قيمة y) .
- (٣) بيانياً : تحديد نقاط في المستوى الاحداثي تمثل الأزواج المرتبة .
- (٤) جبرياً : معادلة جبرية تربط بين الاحداثيين x, y لكل زوج من الأزواج المرتبة . مثلاً $y = x + 1$

تصبح العلاقة **دالة** في إحدى الحالات التالية :



مثال : في كل علاقة مما يأتي ، حدد ما إذا كانت y تمثل دالة في x أم لا :

مثال: في كل علاقة مما يأتي ، حدد ما إذا كانت y دالة في x أم لا

جبرية بيانياً

x	y
1	-1
1	1
4	-2
4	2
9	-3

y ليست دالة في x
لأن قيم x بها تكرار

x	y
2	-1
1	1
3	-2
4	2
9	-3

y دالة في x
لأن قيم x ليس بها تكرار

بيانياً

y دالة في x
باختبار الخط الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في نقطة واحدة

y ليست دالة في x
باختبار الخط الرأسي نجد أنه يقطع المنحنى في أكثر من نقطة

جبرية

$$x = 3y^2$$

y ليست دالة في x
لأن y أسها عدد زوجي

$$3x - 4y = 10$$

y دالة في x
لأن y أسها عدد فردي

اولا

العلاقة هي ارتباط بين كميتين

اي ارتباط مجمعة بمجموعة اخرى

اي علاقه عشان نحددها اذا هي داله او لا ،
لازم نشوف المجال ، ونحدده عن طريق المجال

لكن الدالة عشان نحدد نوعها لازم نشوف
عناصر المجال المقابل او المدى

Photo
Grid

عددياً

أزواج مرتبة، الوعوضنا في الدالة جبرياً

(1, 2)

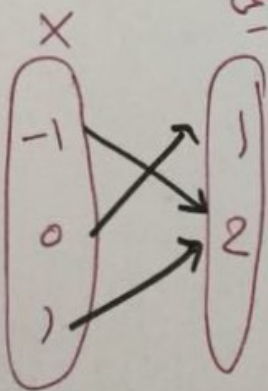
(0, 1)

(-1, 2)

جدول العلاقات

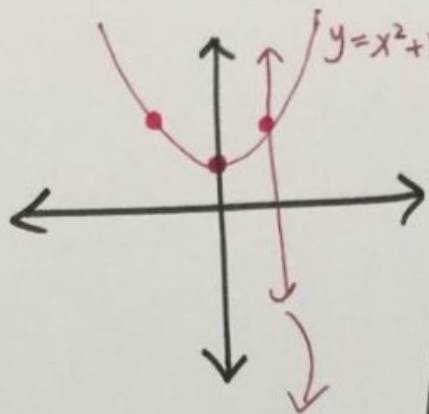
x	-1	0	1
y	2	1	2

المخطط السهمي



دالة؟

بيانياً



هذا المخطط الرأسي
يقطع التمثيل البياني
في نقطة واحدة

جبرياً

مثال

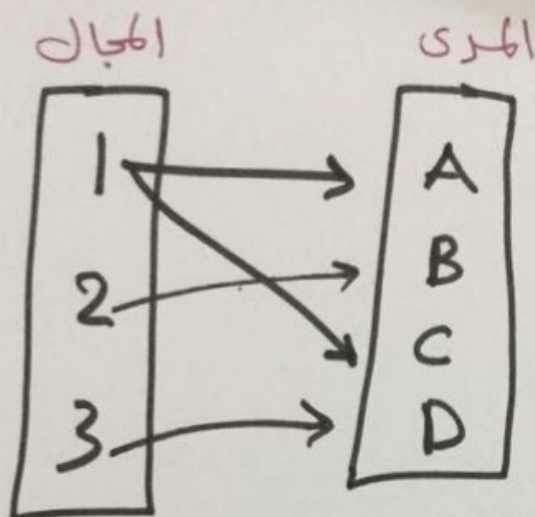
$$y = x^2 + 1$$

y ليس لها أس
هو فقط
الدالة في x
التي تكتب بالشكل
 $f(x)$
function
دالة

شرط واحد

فإن تكون العلاقة

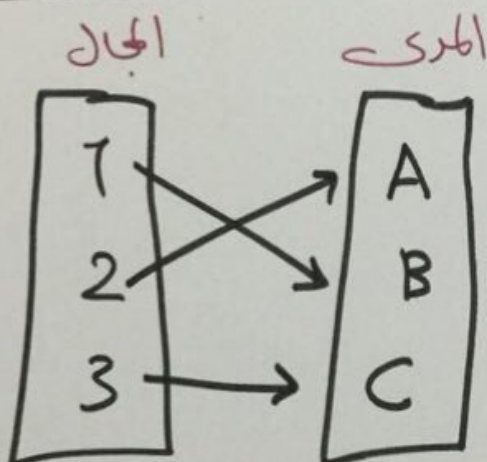
①



لأنه في المجال
عنصر خرج منه
→ همتين
أو له علاقة مع
عنصرين في المدى

هذه علاقة فقط (ليست دالة)

②

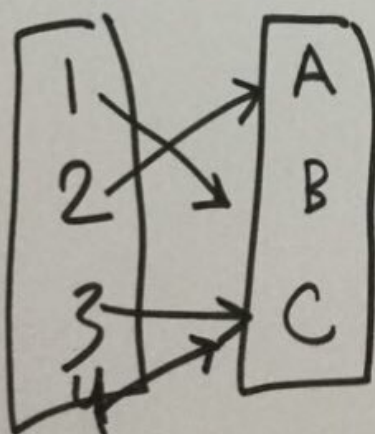


كل عنصر في المجال
يرتبط بعنصر في المدى

الدالة متباينة

← المهم المجال

③



كل عناصر المدى
مرتبطه بعنصر في المجال

~~الدالة~~

تضييع شامل

← المهم المدى

شامل تعني تشمل جميع العناصر من اسمها
شامل

متباين اختلفوا في الوصول اليها وصول او
عدم الوصول

تقابل كل عنصر مقابل لعنصر من المجموعه
الثانية

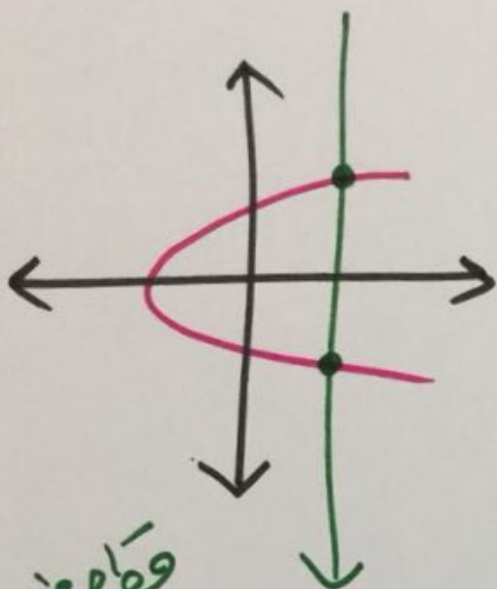
داله متباينه :

يجب ان تكون عناصر المجال مرتبطه جميعها
(بعنصر فقط)

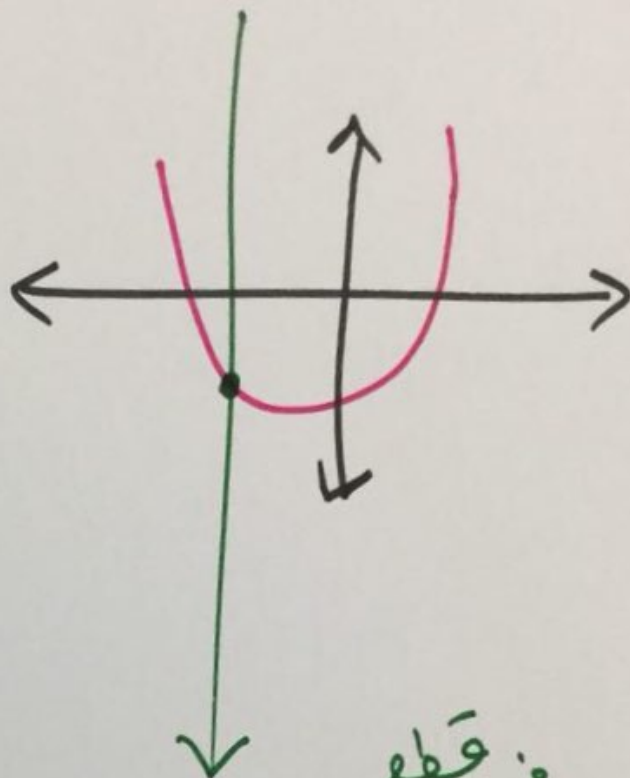
الشامل :

يجب ان تكون عناصر المدى مرتبطه جميعها

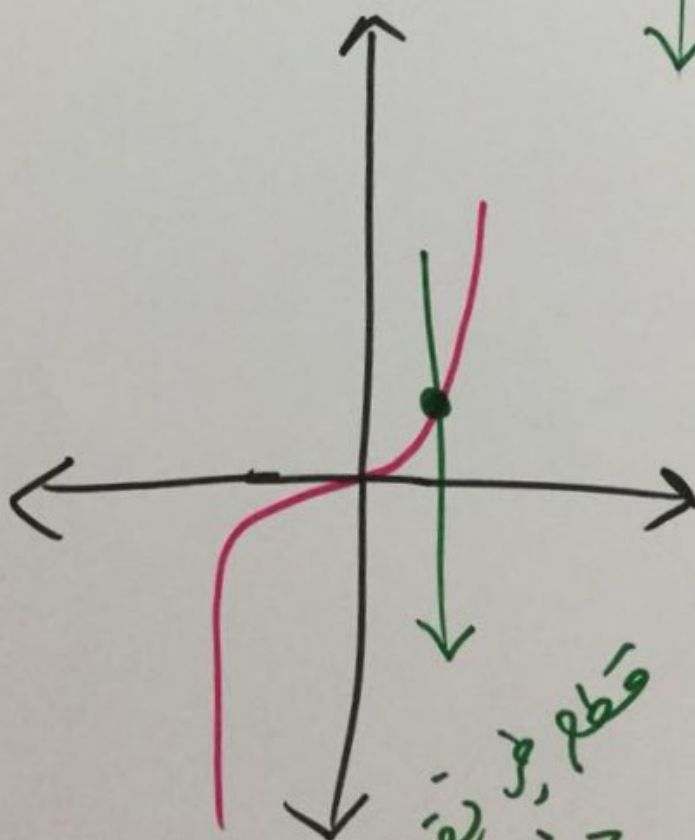
Photo
Grid



قطع من نقطتين
ليست دالة ✗



قطع
من نقطة
دالة ✓



قطع من نقطة
دالة ✓

السؤال

1. إذا كانت $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، $B = \{5, 6, 7\}$ فإن

التطبيق F من A إلى B المعروف كما يلي :

$$F = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$$

- (أ) ليس متبايناً.
- (ب) متبايناً وليس شاملاً .
- (ج) شاملاً وليس متبايناً.
- (د) متبايناً وشاملاً .

① التطبيق من A إلى B

يفنى عناصر A هي المجال

عناصر B هي المدى

$$B = \{5, 6, 7\}$$

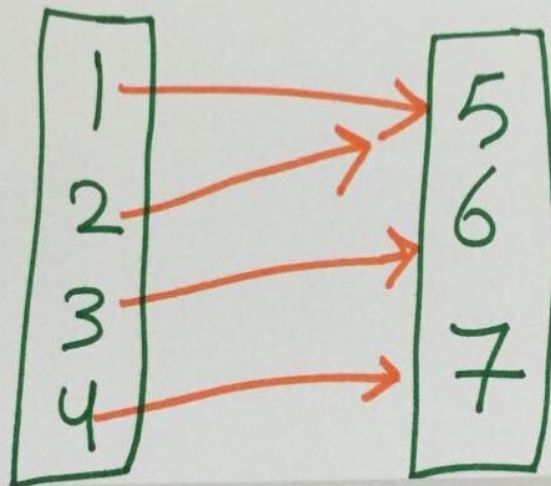
$$F = \{(1, 5), (2, 5), (3, 6), (4, 7)\}$$

نركز على عناصر B ، إذا كانت ~~جميعها~~ جميعها موجودة حتى لو مكررة فهو تطبيق شافل
* إذا كان بعض منها موجود وغير مكرر فهو
شافل .

* إذا كان جميع عناصر B موجودة وغير
مكررة فهو تطبيق متباين وشامل .

Function F التعيين

$A \rightarrow B$



كل عناصر المجال مرتبطة دالة

لكل فيه عنصرين مرتبطين في واحد

كل عناصر المدى مرتبطة شامل

غير متباين

هي قاعدة

عشان تكون دالة بالاصل لازم عناصر المجال
ينطلق منها سهم واحد فقط

لو انطلق من نفس العنصر سهمين هنا
ما تكون دالة

لو احد عناصر المجال لم ينطلق منه اي سهم
هنا برضو نقول ليست داله

بعدها نحدد اذا هي شاملة او متباينه

3. أي العلاقات التالية تمثل بوصفها دالة حقيقية في x ؟

(أ) $x^2 = 5y^2$

(ب) $\frac{x}{y} = y - 6$

(ج) $y^2 - 3x = 6$

(د) $2y^3 + 3x^2 = 5$

$$\frac{x}{y} = y - 6$$

$$x = y(y - 6)$$

$$x = y^2 - 6y$$

ليست دالة

$$x^2 = 5y^2$$

$$\frac{x}{y} = y - 6$$

ليست دالة

$$y^2 - 3x = 6$$

$$2y^3 + 3x^2 = 5$$

ليست دالة

المجال والمدى

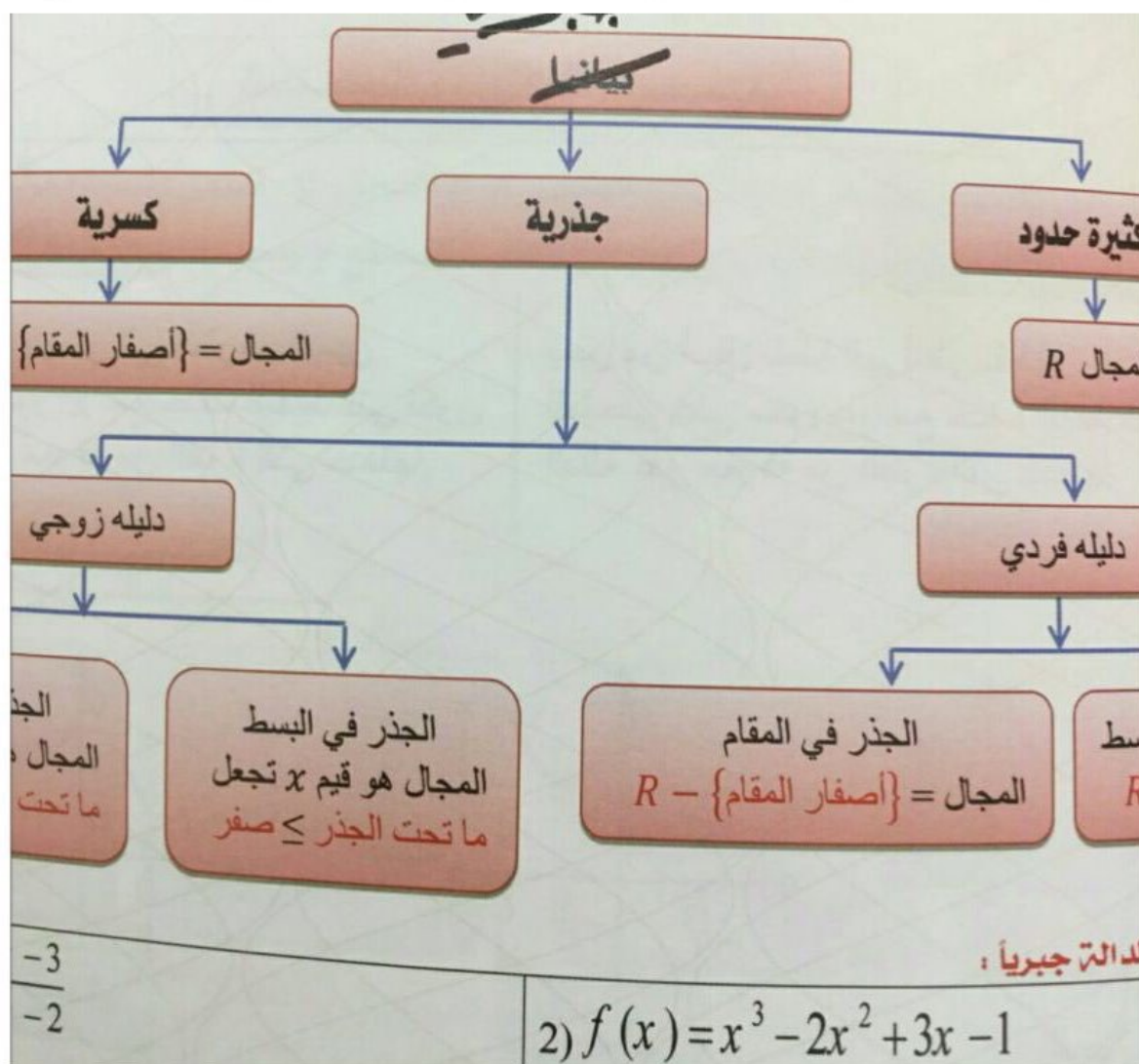
المجال ببساطه هو القيم اللي ممكن اني
اضعها

المدى هو ناتج هذه القيم

عناصر المجال — قيم x من المحور الافقي

عناصر المدى — قيم y من المحور الرأسى

Photo
Grid



$\sqrt{x-1}$
 $\sqrt[3]{x-1}$

↓
 ↓

دليل زوجي 2
 دليل فردي 3

بيان

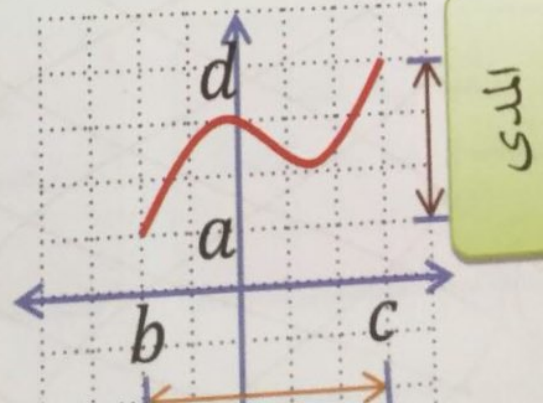
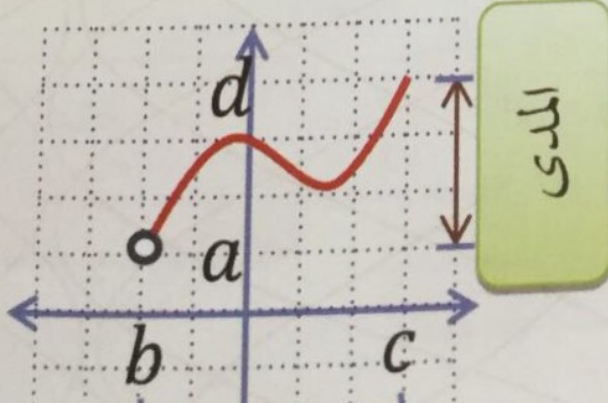
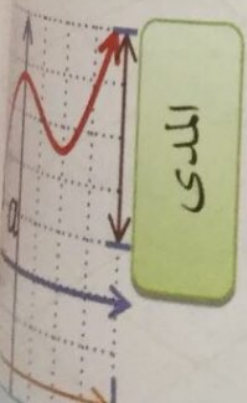
تحديد مجال ومدى الدالة الحقيقية

المدى

المجال

يُعيّن من أسفل نقطة إلى أعلى نقطة
للمنحني على محور y مع حذف النقاط التي
الدالة غير معرفة من الفترة التي حددتها.

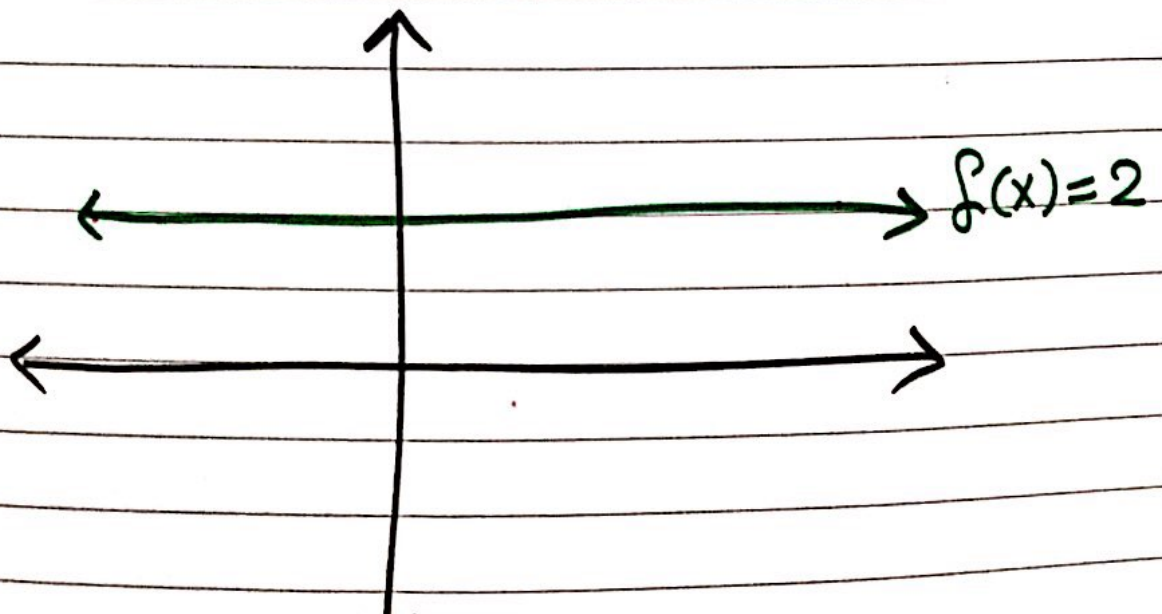
من الطرف اليسار إلى الطرف اليمين
حنى على محور x مع حذف النقاط التي تكون
ها الدالة غير معرفة من الفترة التي حددتها.

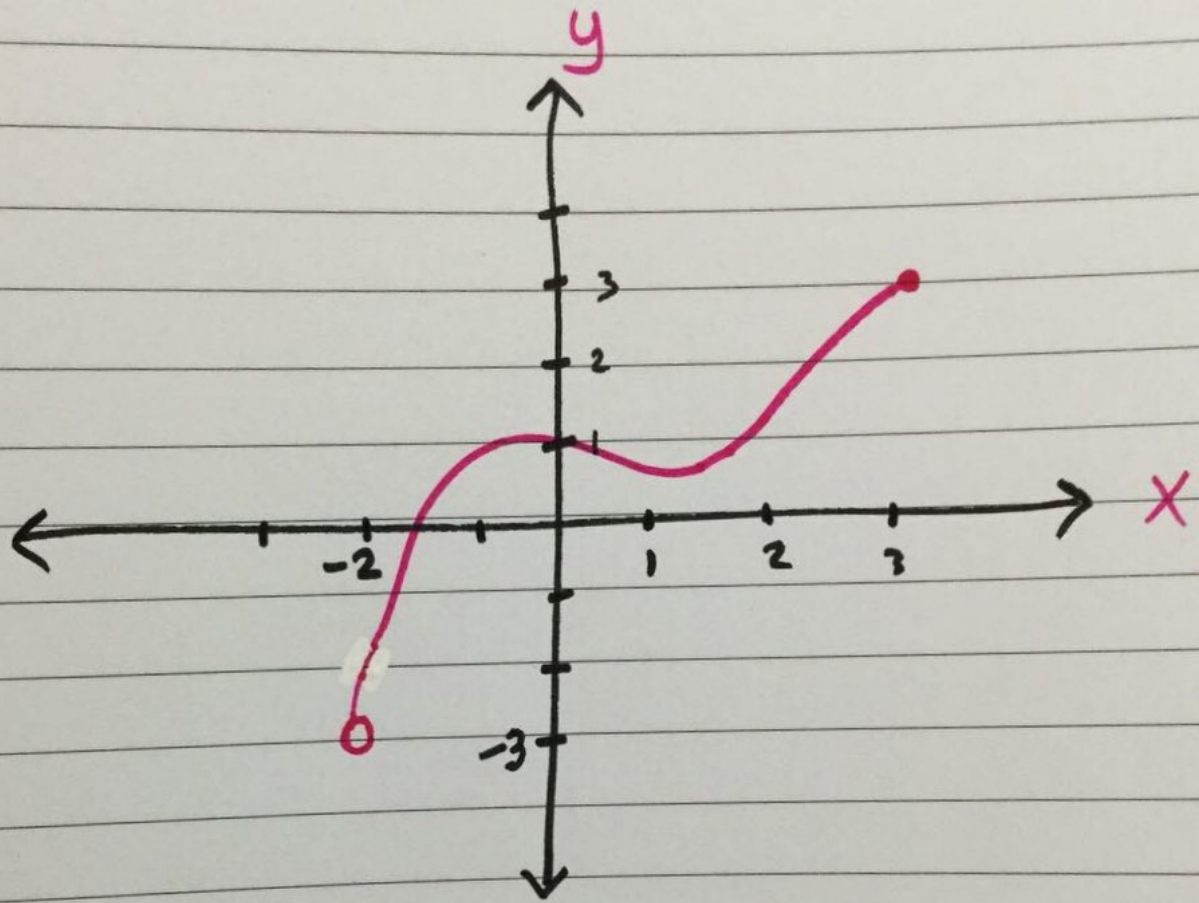


$$f(x) = 2$$

رابطه ثابت $y = 2$ x مستقیم مستقیم $y = 2$

اثبات \mathbb{R} مستقیم مستقیم $y = 2$





المجال : نشوف من اليسار لليمين على محور x

عقله $[-2, 3]$ مفتوح

المداى : نشوف من تحت لفرق على محور y

عقله $[-3, 3]$ مفتوح

4. الفترة $[-\infty, 0]$ هي مدى الدالة :

(أ) $f(x) = -|x - 1|, x \in R$

(ب) $f(x) = |x| - 1, x \in R$

(ج) $f(x) = |-x|, x \in R$

أي عدد موجب أو سالب، راح يتكبر بناخ سالب

ساعة 1 يعطينا 0. $f(x) = -|x - 1|$ ①

المدى : $[-\infty, 0]$ ← كل (أ)

② $f(x) = |x| - 1$

أي عدد نخوض فيه راح يعطينا عدد من 0 إلى ∞

$[0, \infty)$

③ $f(x) = |-x|,$

$[0, \infty)$

Photo
Grid

... سالب برا القيمة المطلقة اذا ما لانهاثيه سالبه

قلنا نعوض باي قيمه من قيم R

لو اخذنا 1 بيعطي صفر

لو اخذنا اي قيم اخرى بتطلع موجبة
ونضربها في سالب راح تعطي سالبة

7. مجال الدالة $f(x) = \sqrt{x-4}$ هو:

(أ) $[4, \infty)$

(ب) $[-4, 4]$

(ج) $(-\infty, 4]$

(د) $[-4, \infty)$

$$(4) \sqrt{x-4} \geq 0$$

$$x - 4 \geq 0$$

$$x \geq 4$$

$$[4, \infty)$$

الذي $\underline{\underline{P}}$

لـ طلب المدى :

أخذت 4، أعوض بها .

$$[4, \infty)$$

بـ

Photo
Grid

14. أي مما يلي يمثل مجال الدالة $f(x) = \frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$

- (أ) $(0, \infty)$
 (ب) $(3, \infty)$
 (ج) $(9, \infty)$
 (د) $(-\infty, \infty)$

14) $\frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$

$x^2 + 9 > 0$

$x^2 > -9$

$x > \pm 3i$

في هذه الحالة المجال R

لأنه لو عوضنا بموجب أو سالب التربيع، راح
 يلغى السالب ويعطينا مقداره موجب
 : المجال R أو $(-\infty, \infty)$

$\frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$

في القاعدة
 يجب أنه يكون ما تحت الجذر أكبر من صفر
 (أي موجب)

$x^2 + 9$
 ↓ ↓ ↓
 أي أنه لو عوضنا بها
 هنا مع
 التربيع تطلع موجب
 موجب موجب
 Photo
 Sydia
 R

كيف نطلع المدى
بطريقة أبسط

خذي العدد اللي خارج الجذر الى ما لانهاية

15. ما مدى الدالة $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + 1$

(أ) $[0, \infty)$

(ب) $[1, \infty)$

(ج) $[2, \infty)$

(د) $(-\infty, \infty)$

أما الحل:

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1$$

$[1, \infty)$

أو

$$x^2 - 1 \geq 0$$

$$x^2 \geq 1$$

$$x \geq \pm 1$$

ن عوض بقيمة ± 1

$$\sqrt{1 - 1} + 1$$

$$= 0 + 1 = 1$$

$$\sqrt{(-1)^2 - 1} + 1$$

$$= 0 + 1$$

$$= 1$$

$$[1, \infty)$$

مدى الدالة الجذرية

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1 \geq 0 + 1$$

$$\sqrt{x^2 - 1} + 1 \geq 1$$

$$[1, \infty)$$

$$\frac{5}{\sqrt{x^2+9}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{x^2-9}}$$

$$\frac{5}{\sqrt{9-x^2}}$$

مجال الدالة الكسرية والجذرية .

ما تحت الجذور أكبر من الصفر

$$x^2 + 9 > 0$$

$$x^2 - 9 > 0$$

$$9 - x^2 > 0$$

$$-x^2 > -9$$

$$x^2 > -9$$

$$x^2 > 9$$

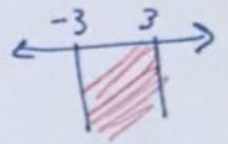
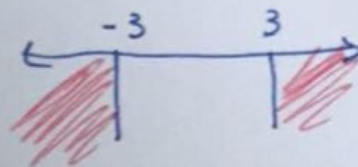
$$x^2 < 9$$

$$|x| > 3$$

$$|x| < 3$$

$$x > 3 \text{ or } x < -3$$

$$-3 < x < 3$$



حرفوصه لانه الحد المربع ليس أكبر من الصفر .

16. ما مجال الدالة $f(x) = \frac{x^2-4x-5}{x^2-x-2}$

(أ) $(-\infty, -1) \cup (2, \infty)$

(ب) $(-\infty, -2) \cup (1, \infty)$

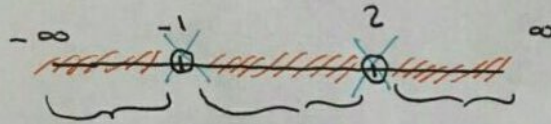
(ج) $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, \infty)$

(د) $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - x - 2}$$

$$(x+1)(x-2)$$

$$x = -1, x = 2$$



الحل هما $(-\infty, -1) \cup (-1, 2) \cup (2, \infty)$ ←

نستثني أصفاء المقام بحيث تكون مفتوحة

من عند 2, -1

ونأخذ جميع الفترات ←

أو يكون الحل :

أو $\mathbb{R} - \{-1, 2\}$ ←

إيجاد المدى

$$f(x) = +\sqrt{x^2+1} \quad (+1)$$

المدى :- جانان الدالة موجبة تبدأ

$$\text{المدى} = [1, \infty)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - 1$$

$$\text{المدى} = [-1, \infty)$$

$$f(x) = -\sqrt{x^2+1} + 1$$

:- جانان الدالة سالبة

$$1 \text{ و } -\infty = \text{المدى}$$

$$f(x) = -\sqrt{x^2+1} - 1$$

$$-1 \text{ و } -\infty = \text{المدى}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

لم يضاف العدد جنب الجذر

$$\text{المدى} = [0, \infty)$$

ايجاد المدى

مدى الدالة من الدرجة الاولى
والدالة الثالثة والدالة
اللوغاريتمية مداها R
في كل الاحوال.

مدى الدرجة الثانية ودالة لقياس.
والدالة الأسية $(0, \infty)$
والدالة الجذرية $[0, \infty)$
حفظ مدى دوال الأم.

لايجاد المدى ننظر الى
اشارة قبل الدالة
العدد المضاف

$$f(x) = -f(x) \pm \text{عدد}$$

اذا وجدت اشارة سالبة فقط المدى
اما $(-\infty, 0]$ او $(-\infty, 0)$
عكس مدى دوال الأم

اذا وجد عدد فقط
بدون اشارة $(-)$ قبل الدالة
المدى $= (\infty, \text{عدد}]$

اذا وجدت اشارة سالبة ومضاف إليها عدد

$$\text{المدى} = [-\infty, \pm \text{عدد}]$$

مثال

$$① f(x) = e^x + 3 \Rightarrow [3, \infty)$$

$$② f(x) = -\sqrt{x+1} \Rightarrow (-\infty, 0]$$

$$③ f(x) = -|x| + 2 \Rightarrow (-\infty, 2]$$

$$④ f(x) = (x-2)^2 - 3 \Rightarrow [-3, \infty)$$

2. النقطة $(1, \frac{1}{3})$ لا تقع على بيان الدالة:

أ) $F(x) = [x]$

ب) $F(x) = [3x]$

ج) $F(x) = 3x$

د) $F(x) = |-3x|$

② $(\frac{1}{3}, 1)$

لا تقع على بيان الدالة:

نقوم بتقييم x إذا طلعت
لنا قيمة y \therefore تقع على
بيان الدالة.

a) $f(x) = [x] = [\frac{1}{3}] = 0$ \times دالة
درجته

b) $f(x) = [3x] = [3 \cdot \frac{1}{3}] = 1$ \checkmark

c) $f(x) = 3x = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$ \checkmark

d) $f(x) = |-3x| = |-3 \cdot \frac{1}{3}| = 1$ \checkmark

بيان الدالة يعني تمثيل الدالة او رسمة الدالة
او منحني الدالة

اي دالة يعطينا تمثيلها عبارة عن مجموعة
نقاط من X و Y

او احنا نفترض قيمة ل X ونعوض بها في
الدالة وتطلع لنا قيمة Y

هنا بالسؤال اعطانا نقطة ومجموعة دوال

فالحل نأخذ قيمة X وهي $1/3$ ونعوض بها
في كل الخيارات اللي معطينا

لو الناتج اعطانا نفس قسمة Y وهي سالب
واحد.. نقول انها تقع في بيان الدالة

لو الناتج اعطانا قيمة ثانيه نقول انها لا تقع
في بيان الدالة

فالنقطة (1 ، $-1/3$) مثلا.. اذا مثلناها
بالرسم البياني لا تكون على نفس بيان الدالة
او منحني الدالة

$$\begin{matrix} x & y \\ \left(\frac{1}{3}, 1\right) \end{matrix}$$

$$f(x) = [x]$$

الدالة الدرجية

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left[\frac{1}{3}\right] = 0$$

أبزر عدد صحيح
أقل منه أو يساوي x

$$f(x) = [3x]$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left[3\left(\frac{1}{3}\right)\right] = [1] = 1$$

$$f(x) = 3x$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3\left(\frac{1}{3}\right) = 1$$

$$f(x) = |-3x|$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \left|-3\left(\frac{1}{3}\right)\right| = |-1| = 1$$

9. الدالة العكسية f^{-1} للدالة $f(x) = \sqrt{x-16}$ حيث $x \geq 16$ هي :

- (أ) $x-16$
 (ب) $x+16$
 (ج) $x^2 + 16$
 (د) $x^2 - 16$

9/ $f(x) = \sqrt{x-16}$

f^{-1} ← الدالة عكسية

الحل :

$$f(x) = \sqrt{x-16}$$

$$y = \sqrt{x-16}$$

نبدل بين $f(x)$ و y نحصل على

$$x = \sqrt{y-16}$$

نبدل بين x و y

$$x^2 = y - 16$$

نوزع الطرفين
التخلص من الجذر

$$y = \underline{x^2} + 16$$

ويمكن حله بالنظر ..

إذا كان فيه جذر يكونه x^2

إذاً الرسااره بين x و العدد الثاني موجب

تكونه بالحل سالبه والعكس

$$f(x) = \sqrt{x-16} \quad , \quad y = x^2 + 16$$

أي دالة هي عكسية للدالة

$$f(x) = \frac{3x - 5}{2}$$

$$g(x) = 2x + 5 \quad (c)$$

$$g(x) = \frac{2x + 5}{3} \quad (a)$$

$$g(x) = \frac{2x - 5}{3} \quad (d)$$

$$g(x) = \frac{3x + 5}{2} \quad (b)$$

الحل :

$$y = \frac{3x - 5}{2} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$x = \frac{3y - 5}{2} \rightarrow \textcircled{2}$$

$$2x = 3y - 5 \rightarrow \textcircled{3}$$

$$3y = 2x + 5$$

$$y = \frac{2x + 5}{3} \rightarrow \textcircled{4}$$

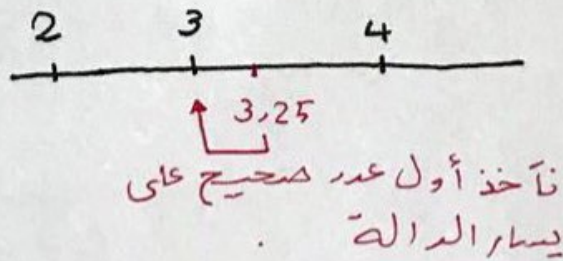
بالنظر :
معامل x يكون مطابقا
وسندل بين الإشارة في البسط

* دالة أكبر عدد صحيح :
 هي نوع من أنواع الدالة
 الدرجة .

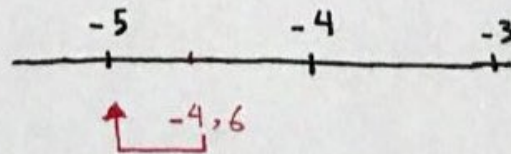
هي عبارة عن أكبر عدد صحيح أقل
 من أو يساوي
 أصله ..

دالة نأخذ لعدد الصحيح الذي على يسار
 الدالة ..

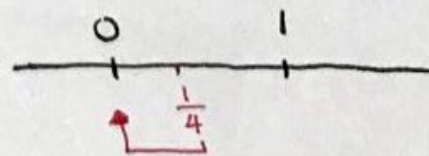
$$① [3, 25] = 3$$



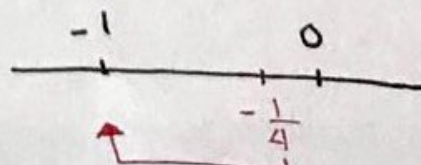
$$② [-4, 6] = -5$$



$$③ [\frac{1}{4}] = 0$$



$$④ [-\frac{1}{4}] = -1$$



$$f \circ g(x)$$

① حول ه إلى قوس

$$f(g(x))$$

$$\textcircled{2} \quad f\left(\text{نكتب دالة } \underline{g(x)}\right)$$

③ الآن ننقل إلى دالة

$$f(x)$$

ونضع دالة $g(x)$ بدلاً من x

العمليات على الدوال
الجمع
الطرح
الضرب
القسمه

للمستوى الاول

بالاضافه الى
التحصيل
معكوس الداله

للمستوى الثاني

5. لیکن

$$f(x) = \sqrt{2x}, g(x) = 2x^2$$

فان $(f \circ g)(x)$ مساوی :

(ا) $4x$

(ب) $4x^2$

(ج) $2|x|$

(د) $2|x|\sqrt{x}$

$$5) f(x) = \sqrt{2x}, g(x) = 2x^2$$
$$= (f \circ g)(x)$$

$$\sqrt{2(2x^2)} = \sqrt{4x^2} = 2|x|$$

ملاحظہ/ قیہ مطلقہ
لان اس فریجی، لہ لیل
ا، جی، لانا ج اس فری

Photo-
Grid

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

المساواة
 $x^2 \geq 4$
 في هذه الحالة لنرى ما هو المقصود

$$\sqrt{x^2} \geq \sqrt{4}$$

$$|x| \geq 2$$

Sultan

مهم

* إذا الأس داخل الجذر زوجي

و دليل الجذر زوجي يكون

والناجح اس فردي نضع قيمة

حطته

شال:

$$\sqrt[4]{x^4} = |x|$$

ز.و.ج. ز.و.ج. فردي

إذا كان الأس زوجي و دليل زوجي

والناجح زوجي لا نضع

$$\sqrt{x^4} = x^2$$

ز.و.ج. ز.و.ج. ز.و.ج.

6. اذا كانت $f(x) = \sqrt{x+1}$,

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

فإن $\left(\frac{f}{g}\right)(3)$ تساوي :

(أ) $\frac{1}{2}$

(ب) 1

(ج) 2

(د) 8

$$6) \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = (\sqrt{x+1} \times (x+1))(3)$$

$$= \sqrt{3+1} \cdot (3+1)$$

$$= 2 \cdot 4$$

$$= 8$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$g(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(3) \rightarrow$$

جاء

المطلوب مستقيم الدائرتين
ثم التوحيث عن $x=3$

أو كذا: نقسم الدائرتين f على g

ثم نفوض خارج مستقيم الدائرتين عن $x=3$

$$\frac{f}{g} = \frac{\sqrt{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \sqrt{x+1} \div \frac{1}{x+1}$$

تقلى
الكسر

$$\frac{f}{g} = \sqrt{x+1} \times (x+1)$$

$$\frac{f}{g}(3) = \sqrt{3+1} (3+1) = \sqrt{4}(4) = 2(4) = 8$$

نفوض عن
 $x=3$

التحصيل :

$$(f \circ g)$$

نأخذ قيمة g ونفوض بها

في كل x موجودة في f

لو مثلاً

$$(f \circ g)(3)$$

نأخذ 3 نفوض بها g

الناجى نفوض فيه في f

8. اذا كانت $f(x)=5x-6$, $g(x)=-3x-4$

فإن $(f \circ g)(-2)$ تساوي :

(أ) -4

(ب) -2

(ج) 2

(د) 4

$$(f \circ g)(-2)$$

هنا ليس، ننبد

$$g(x) = -3x - 4$$

$$g(-2) = -3(-2) - 4 = 2$$

$$f(2) = 5x - 6$$

$$= 5 \times 2 - 6$$

$$= \underline{4}$$

الكل

أسرع طريقة

نقاش اليوم

العاشر

مفهوم أساسي

خاصية المساواة للدوال الأسية

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 0, b \neq 1$ ، فإن $b^x = b^y$ إذا وفقط إذا كان $x = y$.

مثال: إذا كان $3^x = 3^5$ ، فإن $x = 5$. وإذا كان $x = 5$ ، فإن $3^x = 3^5$.

حل المتباينات الأسية: المتباينة الأسية هي متباينة تتضمن عبارة أسية أو أكثر.

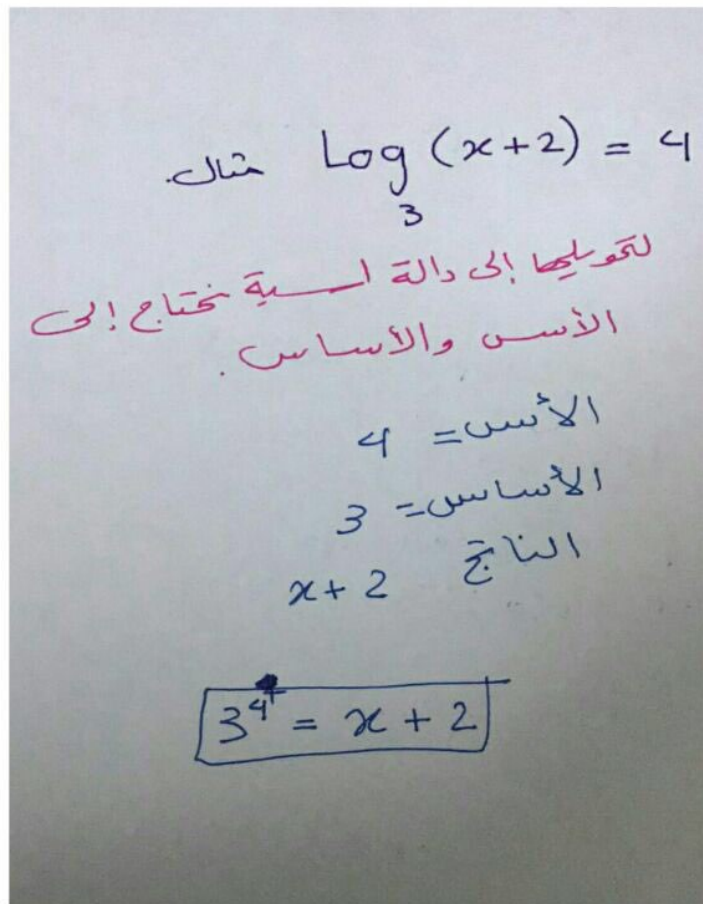
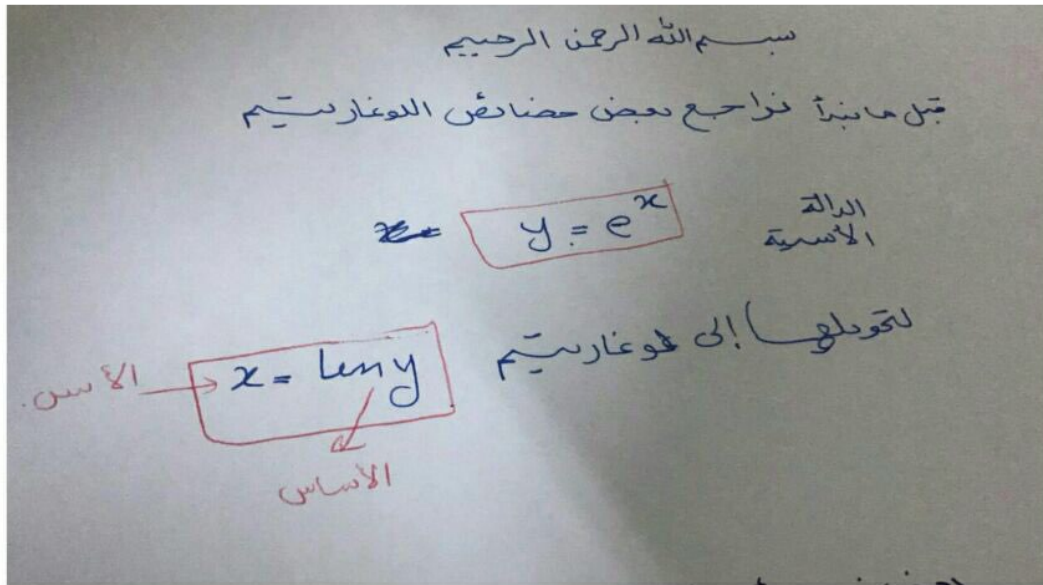
مفهوم أساسي

خاصية التباين لدالة النمو

التعبير اللفظي: إذا كان $b > 1$ ، فإن $b^x > b^y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$.

مثال: إذا كان $2^x > 2^6$ ، فإن $x > 6$ ، وإذا كان $x > 6$ ، فإن $2^x > 2^6$.

Photo
Grid



PhotoGrid

(48) أي مما يأتي يمثل حلاً للمعادلة $27 \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = 125$ ؟

-4 A

-2 B

2 C

4 D

$$\frac{27}{27} \left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{27}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{125}{27}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \frac{5^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{5}{3}\right)^3$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$$

تقلب الكسر وتقلب
الأساس = الأساس
الأساس = الأساس

$$x + 1 = -3 \Rightarrow x = -4$$

∴ الأس = الأس

4. اذا كانت $5^x = 10$, فان x تساوي

(أ) $\frac{\log 10}{\log 5}$

(ب) $\frac{-\log 10}{\log 5}$

(ج) $\frac{\log 5}{\log 10}$

(د) $\log \frac{1}{2}$

4) $5^x = 10$, فما x ؟

$$5^x = 10$$

* اذا كانه عدد , أسه معامل في هذه الحالة
نأخذ اللوغا , ثم للطرفين

قاعدة

$$\text{Log } 5^x = \text{Log } 10$$

$$x \text{Log } 5 = \text{Log } 10$$

نقسم على $\text{Log } 5$ للطرفين

$$x = \frac{\text{Log } 10}{\text{Log } 5}$$

الاجابة

اللوغاريتمات :

$$\log_a y = x \iff y = a^x, \quad a > 0, a \neq 1$$

$$\log_a y > x \iff y > a^x, \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

$$\log_2 8 = 3 \iff 2^3 = 8 \quad \text{مثال :}$$

خصائص اللوغاريتمات :

$\log_a 1 = 0$	$x = a^{\log_a x}$
$\log_a a = 1$	$\frac{1}{\log_a x} = \log_x a$
$\log_a 0 = \begin{cases} -\infty & \text{if } a > 1 \\ \infty & \text{if } a < 1 \end{cases}$	$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_b x \cdot \log_a b$
$\log_a xy = \log_a x + \log_a y$	إذا كان : $\log_a x = \log_a y$ فإن : $x = y$
$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$	لوغاريتم الأساس 10 يكتب على الشكل : $\log_{10} x = \log x$
$\log_a x^n = n \log_a x$	لوغاريتم الأساس الطبيعي e يكتب على الشكل : $\log_e x = \ln x$
$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$	$\ln e^x = x$
	$e^{\ln x} = x$

1. اذا كان

$$b = \log_3, \quad a = \log_2$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$b - a \quad (أ)$$

$$\frac{b}{a} \quad (ب)$$

$$\frac{5b}{6a} \quad (ج)$$

$$\frac{5}{6}(b - a) \quad (د)$$

①

$$\boxed{\log_a x^n = n \log_a x} \rightarrow \text{قانون}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$= \log\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log\sqrt{\frac{9}{4}}$$

$$= \log \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y} \rightarrow \text{خاصية}$$

$$b = \log_3$$

$$\log 3 - \log 2$$

$$a = \log_2$$

$$= b - a \leftarrow \text{الـ ب}$$

3. مجموعة حل المعادلة :

$$\log_2(x+2) = 3$$

(أ) {1}

(ب) {4}

(ج) {6}

(د) {8}

③

مجموعة حل :

$$\log_2(x+2) = 3$$

الحل :

$$\log_a y = x \Leftrightarrow y = a^x$$



تحويل الدالة اللوغاريتمية إلى أسية

$$\log_2(x+2) = 3$$

$$2^3 = x+2$$

∴
الأساس يكون
أساس

$$8 = x+2$$

$$\underline{\underline{6}} = x$$

* في التحويل / الأساس يكون هو الأساس
العدد الذي بعد = يكون هو الأساس .

$$\ln \left(\frac{e^a}{e^b} \right) = 2$$

$$\ln a - \ln b \quad (أ)$$

$$\frac{a}{b} \quad (ب)$$

$$a-b \quad (ج)$$

$$\ln(a-b) \quad (د)$$

$$2- \quad \ln \left(\frac{e^a}{e^b} \right) = ?$$

الأساس متشابهه
نطرح الأس

$$\ln \left(\frac{e^a}{e^b} \right) = \ln e^{a-b}$$

$$\boxed{\ln e^x = x} \Rightarrow \text{قانون}$$

$$\ln e^{a-b} = a-b \quad \therefore$$

كيف إذا سئنا نقس العدد كيف

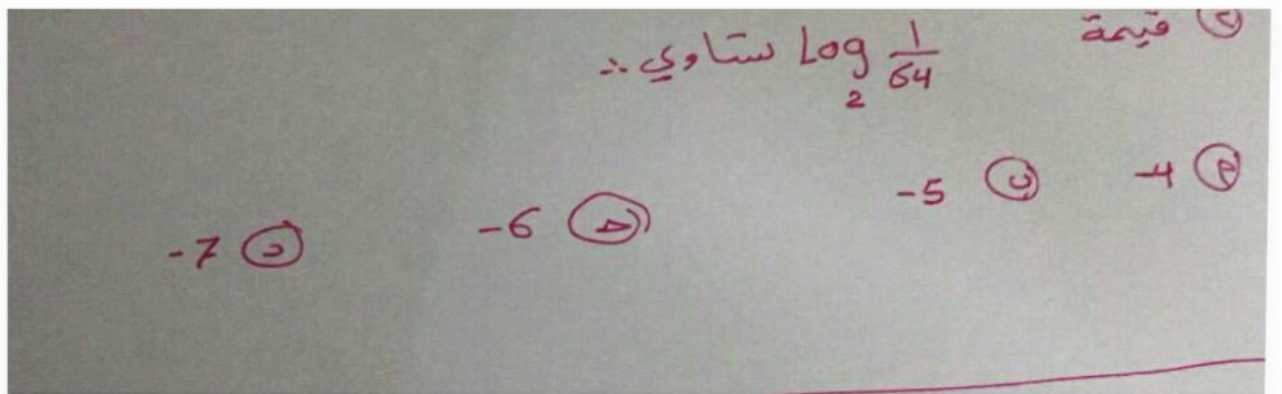
$\log_x x$

① قيمة $\log_3 27$ ستاوي -

2 (أ) 3 (ب) 4 (ج) 5 (د)

$\log_3 27 = \log_3 3^3 = 3 \log_3 3 = 3$

Photo



الاساس 2
 لازم نحل العدد 64 الى 2 اس 6
 وبما ان العدد في المقام الاس يصبح سالب

قيمة $\log_2 \frac{1}{64}$ ستاوي :-

☐ 4
☐ 5
☒ 6
☐ 7

$$\log_2 (64)^{-1} = \log_2 (2^6)^{-1} = \log_2 2^{-6} = -6$$

∴ ملأه ~~لا~~

$$\log_3 64$$
$$\log_3 2^6$$

لا نقل لدم لا أساس 3 وتحليل 64 الأساس 2
موصفا بصير لا نظيره الخاصية .

$$\log \frac{1}{64} = \log \frac{1}{2} - \log 64$$

$$0^4 - 6^4 = -6$$

القيمة تتحول إلى الضرب

(3) قيمة 0.001 \log_{10} مساوي :-
 (A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) 3

مثال 3

اي عدد فاصلة نحولها الى كسر عشري اي المقام
 من مضاعفات العشرة
 يقرأ العدد 1 من الف
 اي الكسر (واحد على 1000)

$$\begin{aligned}
 0.1 &= \frac{1}{10} \\
 0.01 &= \frac{1}{100} \\
 0.001 &= \frac{1}{1000} \\
 0.0001 &= \frac{1}{10000}
 \end{aligned}$$

(3) قيمة 0.001 \log_{10} مساوي :-
 (A) -2 (B) -3 (C) -4 (D) 3

$$\log 0.001 = \log \frac{1}{1000} = \log \frac{1}{10^3} = \log (10)^{-3} = -3$$

④ $\log_{10}(-10)$ ستاوي

⑤ -1

⑥ -10

⑦ 10

⑧ غير معرف

Log (العدد موجب دائماً)

الصورة الأسية $10^3 = 1000$ تكافئ الصورة اللوغاريتمية

⑨ $\log_3 1000 = 10$

⑩ $\log_2 10 = 1000$

⑪ $\log_{10} 1000 = 3$

⑫ $\log_{1000} 10 = 3$

$$\log_{10} 0.0003$$

$$\log_{10} \frac{3}{10000} \rightarrow \begin{array}{l} \text{قسمة} \\ \text{تقول} \\ \text{لخرج} \end{array}$$

$$= \log_{10} 3 - \log_{10} 10000$$

$$= \log_{10} 3 - \log_{10} (10)^4$$

$$\log_{10} 3 - 4 \log_{10} 10$$

$$= \log_{10} 3 - 4 \times 1 = \boxed{\log_{10} 3 - 4}$$

الصورة اللوغاريتمية $\log_2 8 = 3$ تكافئ الصورة الأسية

الأس \swarrow الأساس \nearrow

$2^3 = 8$ (أ) $3^2 = 8$ (ب) $8^2 = 3$ (ج) $2^3 = 8$ (د)

$2^3 = 8$

ما هي قيمة x في المعادلة $\log_8 64 = x$

الأس \swarrow الأساس \nearrow

2 (أ) 3 (ب) 4 (ج) 8 (د)

$8^x = 64$

$\Rightarrow 8^x = 8^2$

بما أن الأساس متساوية

\therefore الأسس متساوية

$\therefore x = 2$

PhotoGrid

ملاحظات

اول م تجي اوجد قيمة اكس
نحول الداله اللوغاريتمية الى الداله الاسية

في الداله اللوغاريتمية نحدد من الاساس ومن
الاس

$$\log_4 0 = \infty$$

$$\log_{-4} = -\infty$$

Photo
Grid

$$\text{Log}_6^3 \sqrt[3]{36} \text{ مساوی ہے۔}$$

۱) متیہ

۲) $\frac{3}{2}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{1}{3}$

۵) $\frac{1}{2}$

الأساس کا نکل 36 کی 6^2

~~حوالہ دیا گیا ہے۔~~

$$\text{Log}_6^3 \sqrt[3]{6^2} = \text{Log}_6 (6^2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \text{Log}_6 (6)^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3} \text{Log}_6 6$$

$$= \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

٩) العبارة $3\log_2 x + 5\log_2 y$ تكافئ

١) $8\log_2(x+y)$

٢) $\log_2 \frac{x^3}{y^5}$

٣) $\log_3 x^2 y^5$

٤) $\log_2 x^3 y^5$

نستخدم قاعدتين
اولا قاعده الاس
وقاعدة تحويل الجمع الى الضرب

$$\begin{aligned} & 3\log_2 x + 5\log_2 y \\ &= \log_2 x^{\boxed{3}} + \log_2 y^{\boxed{5}} \\ &= \log_2 x^3 y^5 \end{aligned}$$

٩) العبارة $3\log_2 x + 5\log_2 y$ تكافئ

١) $8\log_2(x+y)$

٣) $\log_3 x^2 y^5$

$$2 \log_5 12 - \log_5 8 - 2 \log_5 3$$

$$2 \log_5 12^2 - \log_5 8 - 2 \log_5 3^2$$

نسبتي سالبي
عامل مشترك

$$= \log_5 12^2 - (\log_5 8 + \log_5 3^2)$$

$$= \log_5 12^2 - \log_5 (8 \times 3^2)$$

بسط ← ← مقام

$$= \log_5 \frac{(12)^2}{8 \times 3^2} = \frac{12 \times 12}{8 \times 9} = \frac{144}{72} = \log_5 2$$

نلاحظ الطرح بين ثلاث حدود
وخاصية القسمة الى الطرح بين الحدين
بسط ومقام
لكن هنا بين 3 حدود
لازم عمليه طرح مرة وحدة

حل المعادلة (12) $x = 4$ وما هو x ستاوي
 (أ) 125 (ب) 625 (ج) 25 (د) 1225
 الأساس الأساس

الأس 4 و 5 الأساس

الحل
 $5^4 = x$
 $x = 5^4 = 5^2 \times 5^2$
 $= 25 \times 25$
 $= 625$

حل المعادلة (13) $x = -3$ وما هو x ستاوي :-
 (أ) 1000 (ب) 0.001 (ج) 0.0001 (د) 0.0001

نحولها إلى الدالة الأسية.

$$x \cdot 10^{-3} = x$$

$$x = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0.001$$

PhotoGrid

$$3 \log_2 x = \log_2 8$$

حد المعادلة

64 (د)

38 (ج)

2 (ب)

8

$$\log_2 x^3 = \log_2 8$$

$$\log_2 x^3 = \log_2 2^3$$

بالمقارنة

$$x = 2$$

هل نحولها لداله اسية؟

لا. لان اللوغاريتم مكتوب في الطرفين

حل المعادلة $\log_4 x = \log_4 8$ - $\log_4 16$ وما هو -

أ) 2 ب) 8 ج) 4 د) $\frac{1}{2}$

نقول لستم

$$\log_4 \frac{16}{x} = \log_4 8$$

$$\Rightarrow \frac{16}{x} = 8 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

سوال 15

نفس فكرة سؤال 14

لكن الطرف الاول مكتوب لوغاريتم مرتين

استخدم قاعده الطرح وتحولها لقسمة

ثم استخدم خاصية حذف اللوغاريتم بالمقارنه

حل المتباينة (16) $x > 3$ $x > \frac{3}{2}$ $x > 9$ $x > 8$ $x > 6$

الأسس ← الأساس

$x > 2^3$
 $x > 8$

سوال 16

نفس فكرة حل المعادله ونفس الخطوات
 اللوغاريتم مكتوب مرة وحدة
 اذن نحولها لداله اسية
 نحدد من الاساس ومن الاس

في هذه الحالة الأصلية أخذ اللوغاريتم لأعداد أقل من أو تساوي الصفر.

مفهوم أساسي

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

الرموز: إذا كان $b > 1$ ، فإن $\log_b x > \log_b y$ إذا وفقط إذا كان $x > y$ ، $x > 0, y > 0$

مثال: إذا كان $\log_6 x > \log_6 35$ ، فإن $x > 35$.

تتحقق هذه الخاصية أيضًا إذا احتوت المتباينة رمزي التباين \geq, \leq

$$\log_5 (2x+1)$$

مثال 5

حل متباينات تتضمن عبارتين لوغاريتميتين لهما الأساس نفسه

أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

المتباينة الأساسية

$$\log_4 (x+3) > \log_4 (2x+1)$$

$$x+3 > 2x+1$$

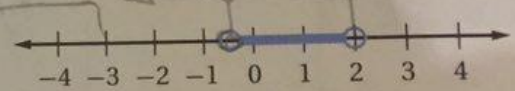
$$2 > x$$

خاصية التباين للدوال اللوغاريتمية

اطرح $x+1$ من كلا الطرفين

ثم استثن قيم x التي تجعل $x+3 \leq 0$ أو $2x+1 \leq 0$ (أو $x \leq -3$ أو $x \leq -\frac{1}{2}$)

إذن مجموعة الحل هي $\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 2, x \in \mathbb{R}\}$



التحقق: عوض بعدد يقع في الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$ ، وآخر يقع خارج الفترة $(-\frac{1}{2}, 2)$.

$$x = 3$$

$$x = 1$$

$$\log_4 (3+3) > \log_4 (2 \times 3 + 1)$$

$$\log_4 (1+3) > \log_4 (2+1)$$

$$\log_4 6 > \log_4 7$$

$$\log_4 4 > \log_4 3$$

$$\log_4 6 > \log_4 7 \quad \times$$

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$$\log_4 4 > \log_4 3 \quad \checkmark$$

إذن الحل صحيح.

تحقق من فهمك

(5) أوجد مجموعة حل المتباينة $\log_5 (2x+1) \leq \log_5 (x+4)$ ، ثم تحقق من صحة حلك.

الدالة اللوغاريتمية متزايدة عندما تكون قيمة الأساس أكبر من 1

$$\log_4(x+3) > \log_4(2x+1)$$

المبتدأية تحل على فطوسيتين...

① من خواص اللوغاريتم

$$\cancel{\log_4}(x+3) > \cancel{\log_4}(2x+1)$$

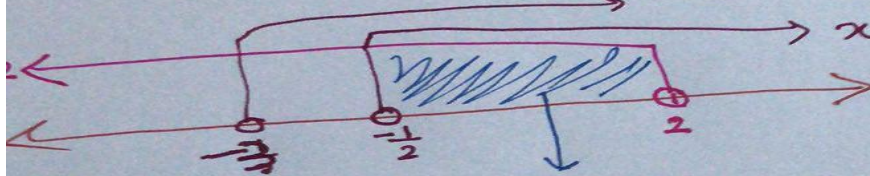
تحل المبتدأية عادي

$$x+3 > 2x+1 \Rightarrow 2x-x < 3-1 \Rightarrow \boxed{x < 2} \rightarrow ①$$

② ما يدخل اللوغاريتم < صفر

$$x+3 > 0 \Rightarrow x > -3$$

$$2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2} \rightarrow ②$$



الحل
 $[-\frac{1}{2}, 2)$

$$\log_3 x > 4$$

~~حل~~

مثال) أوجد مجموعة حل لـ $\log_3 x > 4$

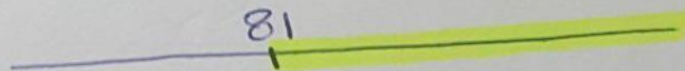
① نحول اللوغاريتم إلى دالة أسية

$$x > 3^4$$

$$x > 81$$

②

③



$$(81, \infty) = \{x \mid x > 81\} = \text{المجال}$$

نقاشات

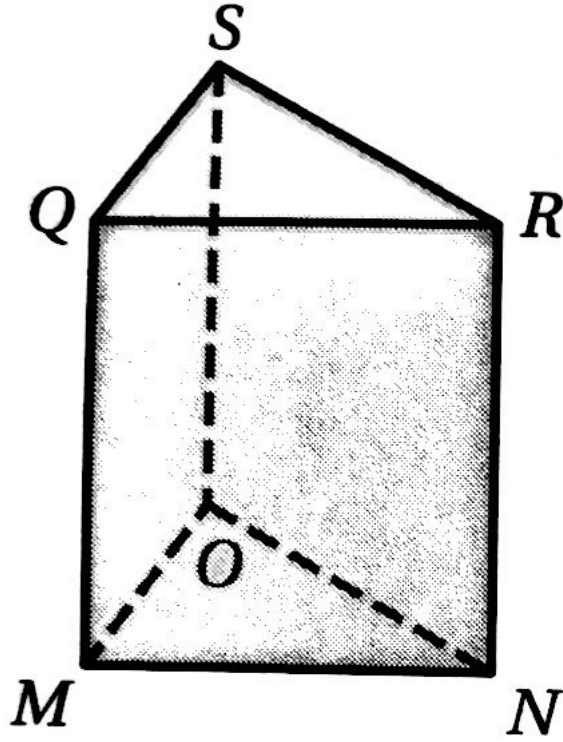
المعيار

الثالث والرابع

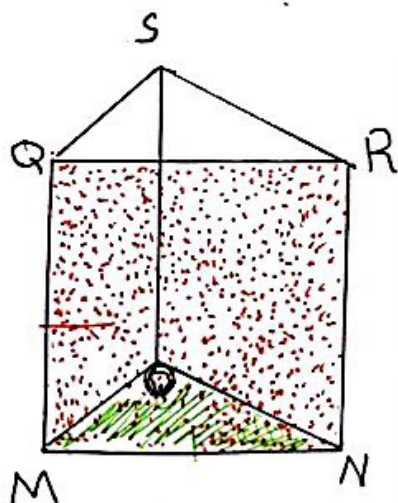
نقاش

اليوم 11

(12) استعمل الشكل أدناه لتحديد كلاً مما يأتي:



- (a) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{MQ}
- (b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN
- (c) قطعة مستقيمة تخالف \overline{ON}



* مستطابقه متوازیانه :

$QR \parallel MN$ ← بقعانه زیستوی نفسه

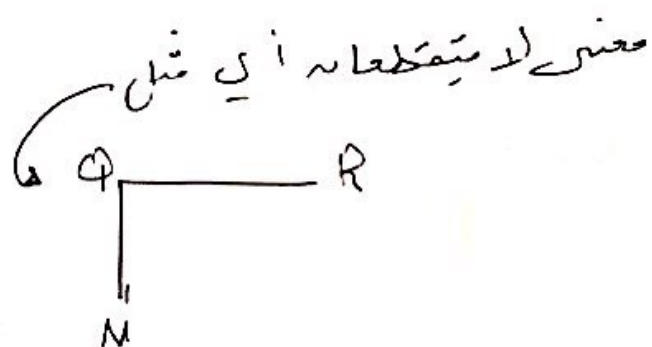
$RN \parallel SO$

$SQ \parallel MO$

* مستطابقه متضالفاه :

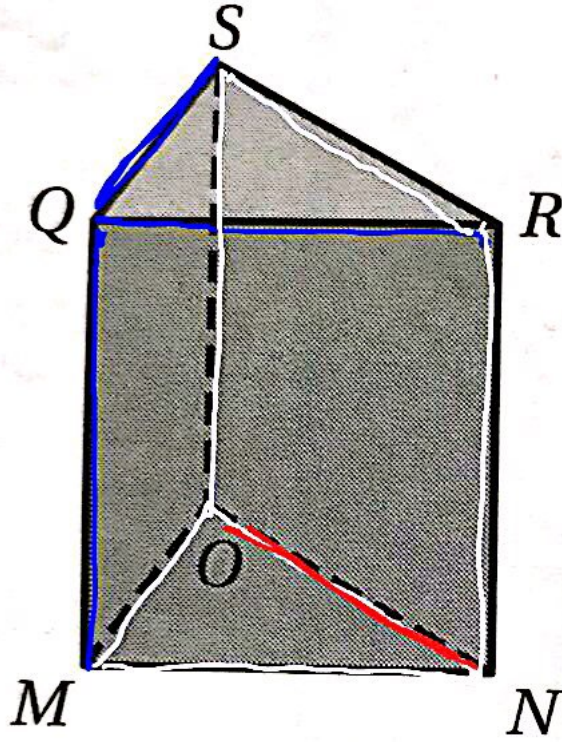
RN یخالف SO

SO یخالف NO



RQ یقطع NO

(12) استعمل الشكل أدناه لتحديد كلاً مما يأتي:



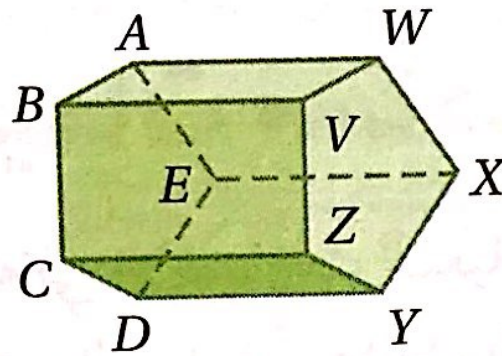
مستقيم
مائل

(a) جميع القطع المستقيمة التي توازي \overline{MQ}

(b) جميع المستويات المتقاطعة مع المستوى SRN

(c) قطعة مستقيمة تخالف \overline{ON}

17) اختيار من متعدد: أي القطع المستقيمة تخالف \overline{CD} ؟



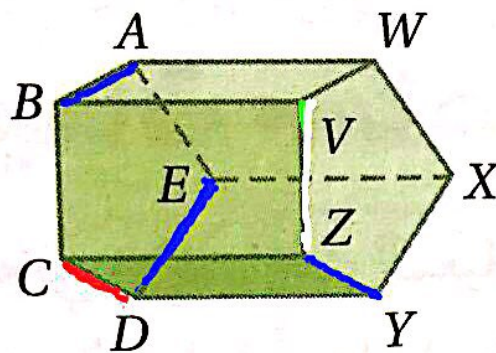
\overline{DE} (C

\overline{ZY} (A

\overline{VZ} (D

\overline{AB} (B

(17) اختيار من متعدد: أي القطع المستقيمة تخالف \overline{CD} ؟



\overline{DE} (C

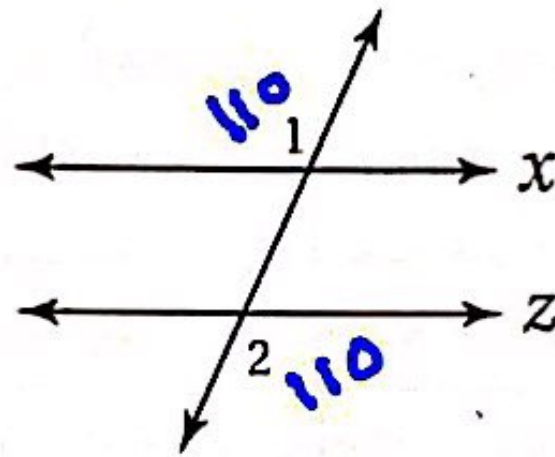
\overline{ZY} (A

\overline{VZ} (D

\overline{AB} (B

اختر رمز الإجابة الصحيحة فيما يأتي:

1) إذا كان $m\angle 1 = 110^\circ$ ، فما قيمة $m\angle 2$ التي تجعل المستقيمين x, z متوازيين؟



$m\angle 1, m\angle 2$
متباينة هنا يجب
: متطابقتان

- 110° **D** 70° **C** 60° **B** 30° **A**

$$\angle 6 + \angle 8 = 90$$

$$\angle 6 + 47 = 90$$

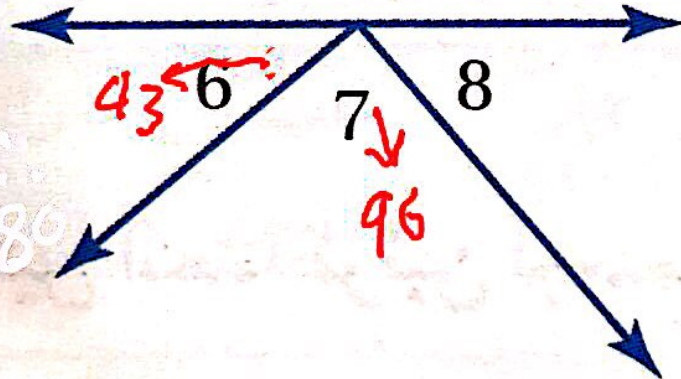
(49) إذا كانت $\angle 6, \angle 8$ متتامتين، $\angle 6 = 43^\circ$

و $m\angle 8 = 47^\circ$ ، فأوجد $m\angle 6, m\angle 7$.

$\angle 6, \angle 8, \angle 7$
على خط مستقيم

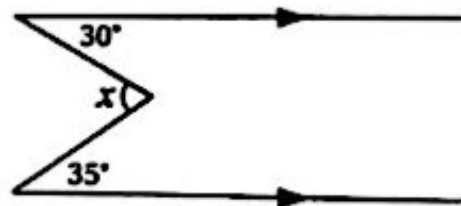
$$\angle 6 + \angle 8 + \angle 7 = 180$$

$$90 + 90 = 180$$

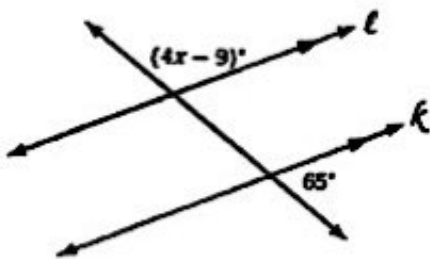


قرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في نموذج الإجابة:

(1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



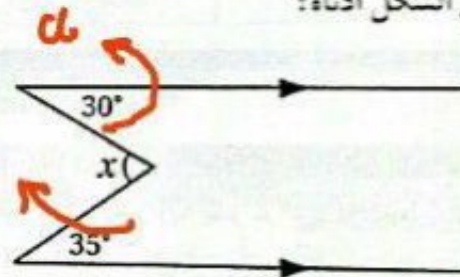
(2) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



الفصل 2 الإمتاد للاختبار

اقرأ كل سؤال فيما يأتي، ثم اكتب الإجابة الصحيحة في نموذج الإجابة:

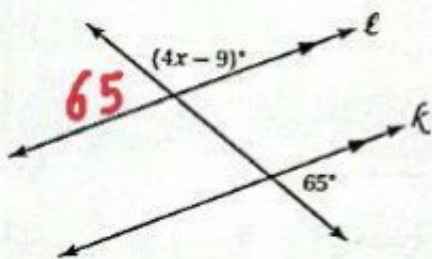
(1) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



$$x = a + b \rightarrow \text{معامدة}$$

$$x = 30 + 35 = 65$$

(2) ما قيمة x في الشكل أدناه؟



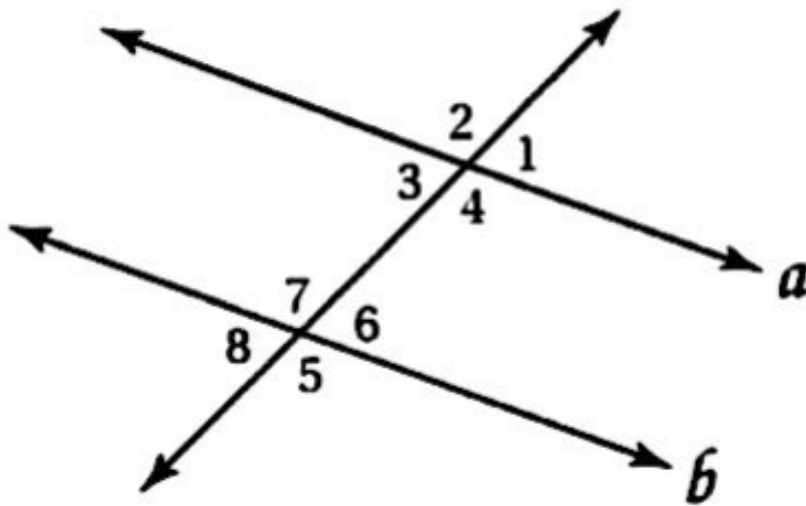
$$(4x - 9) + 65 = 180$$

$$4x = 180 - 56 = 124$$

$$4x = 124 \rightarrow x = 31$$

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

1) في الشكل أدناه: إذا كان $a \parallel b$ ، فأَيُّ مما يأتي صحته ليست مؤكدة؟



$\angle 2 \cong \angle 5$ **C**

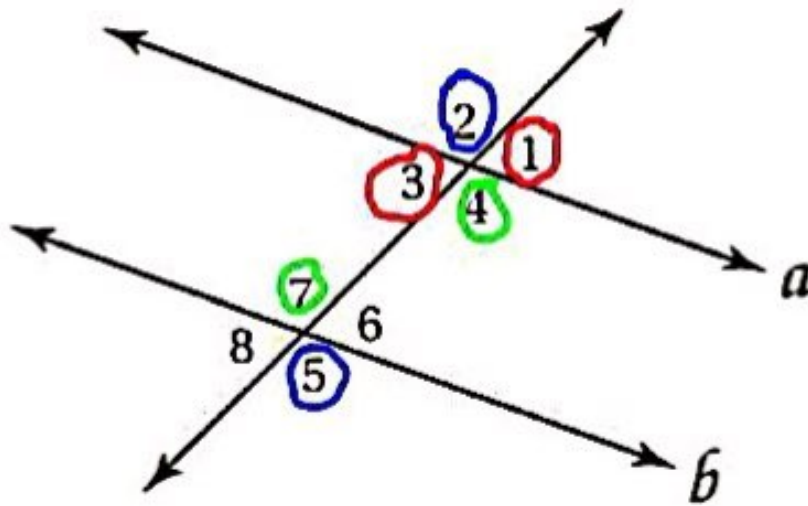
$\angle 1 \cong \angle 3$ **A**

$\angle 8 \cong \angle 2$ **D**

$\angle 4 \cong \angle 7$ **B**

اقرأ كل سؤال فيما يأتي ، ثم اكتب رمز الإجابة الصحيحة:

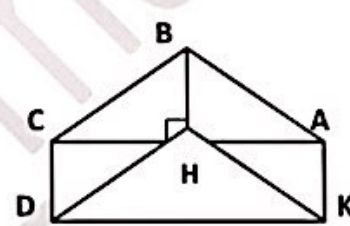
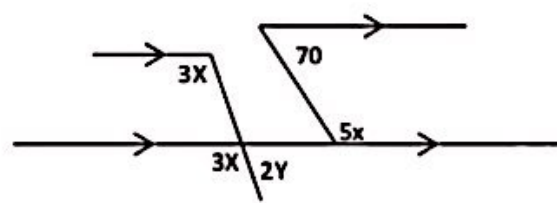
1) في الشكل أدناه: إذا كان $a \parallel b$ ، فأَيُّ مما يأتي صحته ليست مؤكدة؟



- A $\angle 1 \cong \angle 3$ متساوية بالرأس
B $\angle 4 \cong \angle 7$ متبادلة زائديا
C $\angle 2 \cong \angle 5$ متبادلة خارجيا
D $\angle 8 \cong \angle 2$ متبادلة زائديا

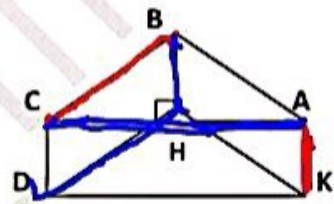
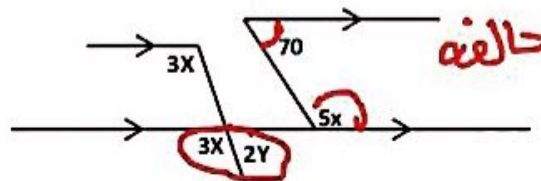
المعيار الثالث: اسئلة مناقشة اليوم الثاني عشر

المستقيمات والمستويات والزوايا-الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمان متوازيان

السؤال	الحل
<p>1. اذا كان المستقيم L عمودي على المستوى P في الفراغ , فيمكن أن نستنتج مايلي:</p> <p>(أ) أي مستقيم يوازي L عمودي على P</p> <p>(ب) أي مستقيم يقطع P يجب ان يقطع L</p> <p>(ج) أي مستقيم يخالف L يقطع المستوى P</p> <p>(د) أي مستقيم عمودي على L يقع في المستوى P</p>	
<p>2. الشكل أدناه مرسوم في الفضاء الثلاثي أي قطعة مستقيمة تخالف \overline{BC}:</p>  <p>(أ) \overline{AC} (ب) \overline{AK}</p> <p>(ج) \overline{DH} (د) \overline{BH}</p>	
<p>3. في الشكل المقابل اوجد قيمة $x+y$</p>  <p>(أ) 70 (ب) 79</p> <p>(ج) 90 (د) 110</p>	

المعيار الثالث: اسئلة مناقشة اليوم الثاني عشر

المستقيمت والمستويات والزوايا- الزوايا الناتجة من تقاطع مستقيم مع مستقيمان متوازيان

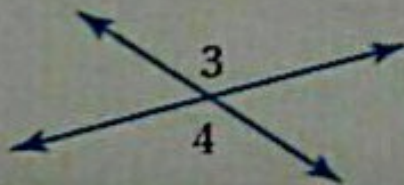
السؤال	الحل
<p>1. اذا كان المستقيم L عمودي على المستوى P في الفراغ , فيمكن أن نستنتج مايلي:</p> <p>(أ) أي مستقيم يوازي L عمودي على P</p> <p>(ب) أي مستقيم يقطع P يجب ان يقطع L</p> <p>(ج) أي مستقيم يخالف L يقطع المستوى P</p> <p>(د) أي مستقيم عمودي على L يقع في المستوى P</p>	
<p>2. الشكل أدناه مرسوم في الفضاء الثلاثي أي قطعة مستقيمة تخالف \overline{BC}:</p>  <p>\overline{AK} (ب) \overline{AC} (أ) \overline{BH} (د) \overline{DH} (ج)</p>	<p>المستقيم المتخالف يجب أن يكون في مستوى آخر ولا يتقاطعان</p>
<p>3. في الشكل المقابل اوجد قيمة $x+y$</p>  <p>79 (ب) 70 (أ) 110 (د) 90 (ج)</p>	$70 + 5x = 180$ $5x = 110$ $x = 22$ $3x + 2y = 180$ $3(22) + 2y = 180$ $2y = 180 - 66$

$$2y = 114 \Rightarrow y = 57, \therefore x + y = 22 + 57 \Rightarrow 79$$

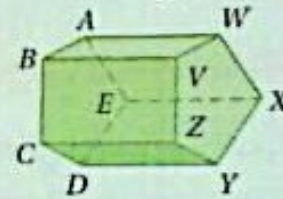
أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ

$$m\angle 3 = (2x + 23)^\circ \quad (10)$$

$$m\angle 4 = (5x - 112)^\circ$$



(17) اختيار من متعدد، أي القطع المستقيمة تخالف \overline{CD} ؟



\overline{DE} (C

\overline{VZ} (D

\overline{ZY} (A

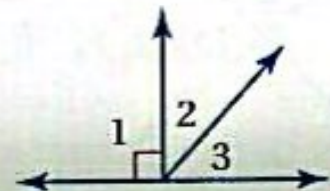
\overline{AB} (B

أوجد قياس الزوايا المرقمة في كلٍّ مما يأتي، نظريات التي تبرر حلك.

$$m\angle 4 = (3(x - 1))^\circ, m\angle 5 = (x + 7)^\circ \quad (2)$$



$$m\angle 2 = x^\circ, m\angle 3 = (x - 16)^\circ \quad (1)$$



$$m\angle 3 = (2x + 23) : 4$$

$$m\angle 4 = (5x - 112)$$

مقابلته بالرأس \therefore متطابقة .

$$m\angle 3 = m\angle 4$$

$$2x + 23 = 5x - 112$$

$$3x = 135$$

$$x = 45$$

$$\angle 3 = 2 \times 45 + 23 = 113$$

$$\angle 4 = 5 \times 45 - 112 = 113$$

$$m\angle 2 = x \text{ و } m\angle 3 = (x - 16)^\circ \quad (1)$$

زاويتاه متتامتان مجموعهم 90

$$m\angle 2 + m\angle 3 = 90$$

$$x + x - 16 = 90$$

$$2x = 106 \Rightarrow x = 53$$

$$m\angle 2 = 53$$

$$m\angle 3 = 53 - 16 = 37$$

$$53 + 37 = 90 \text{ للتأكد}$$

/17

المسئلات المتخالفة

هي التي تقع في

مستويات مختلفة

ولكنوازي .

الحل (10) $\sqrt{2}$

أوجد قياس الزاوية المرفقة

$$m\angle 4 = (3(x - 1))^\circ$$

$$m\angle 5 = (x + 7)$$

$$\angle 4 + \angle 5 = 180$$

$$(3(x - 1)) + (x + 7) = 180$$

$$3x - 3 + x + 7 = 180$$

$$4x = 180 - 4$$

$$4x = 176$$

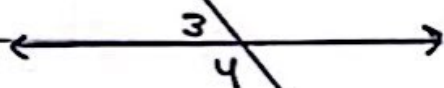
$$x = 44$$

$$m\angle 4 = (3(44 - 1)) = 129$$

$$m\angle 5 = 44 + 7 = 51$$

٥٤ * إذا كان $m\angle 3 = (2x)^\circ$ و $m\angle 4 = (2x + 60)^\circ$

فما هي $m\angle 3$ بالدرجات تقاوي:



50 (2) 70 (p
40 (ـ) 60 (ـ)

$$m\angle 3 = 2x$$

$$m\angle 4 = 2x + 60$$

$$m\angle 3 + m\angle 4 = 180$$

$$2x + 2x + 60 = 180$$

$$4x = 180 - 60$$

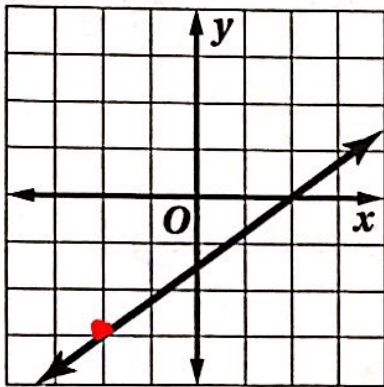
$$\frac{4x}{4} = \frac{120}{4}$$

$$x = 30$$

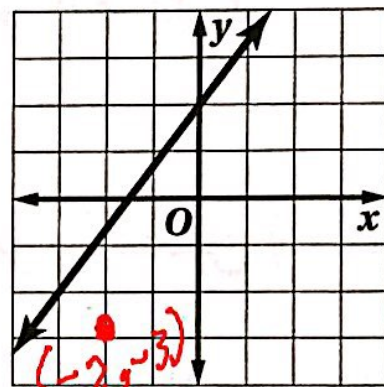
$$\begin{aligned} m\angle 3 &= 2x \\ &= 2(30) \\ &= 60 \end{aligned}$$

تدريب على اختبار

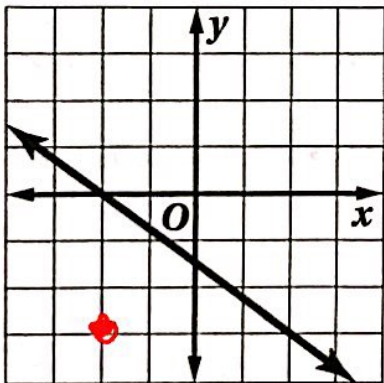
(59) أي مما يأتي هو التمثيل البياني للمستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, -3)$ ؟



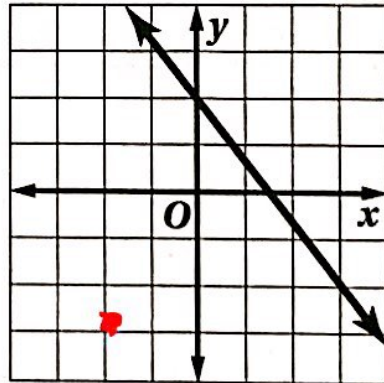
C



A



D



B



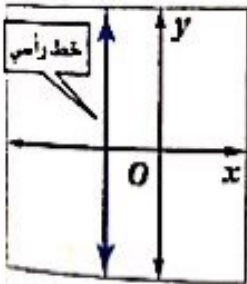
ملخص المفهوم

حالات الميل

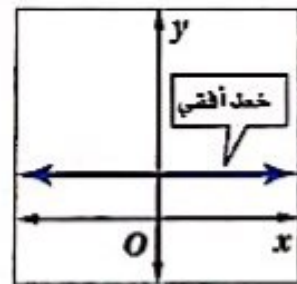
أضف إلى

مطولتك

الميل غير معرف



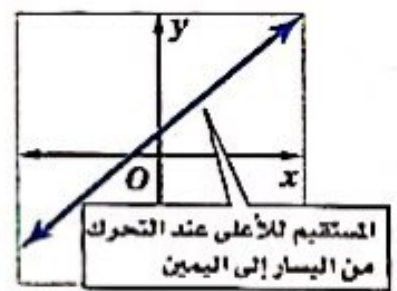
الميل يساوي صفرًا



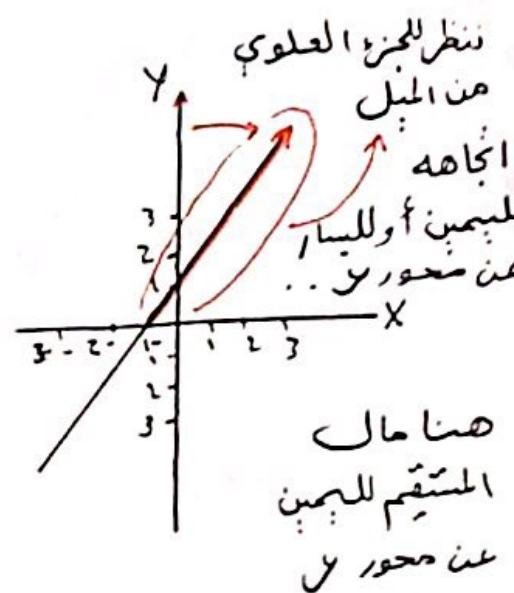
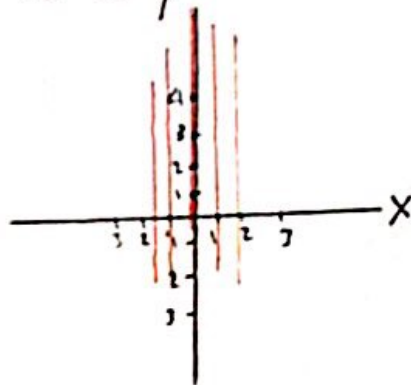
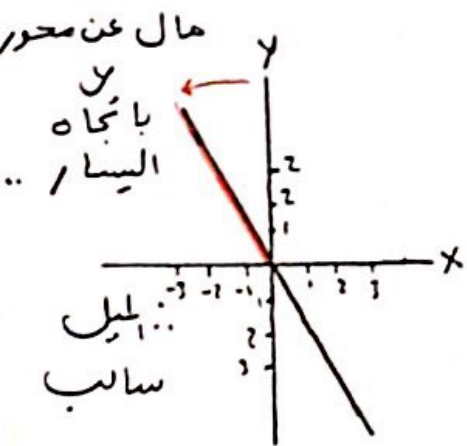
الميل سالب



الميل موجب



المثل موازي لمحور y أو y غير معروف ..



∴ الميل موجب
ننظر لتقاطع المنحنى

المستقيم مع محور x : $x = -1$
 مع محور y : $y = 1$
 \therefore الميل $= \frac{1}{1}$

الحل بالقوانين ..
نكتب قانون الميل ..

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

وختیار ای نقطتین بحر کا تسلیم
لنکن سے ..

المقدولين لستاج
الميل
الميل =

$$\frac{1-0}{0-(-1)} = 1$$

نأخذ قيمه الميل والنقطة صلا (0, 1)
من طبق القانون: نأخذ نقطة صلا

$$y = m(x - x_1) + y_1$$

$$Y = 1(x - 0) + 1$$

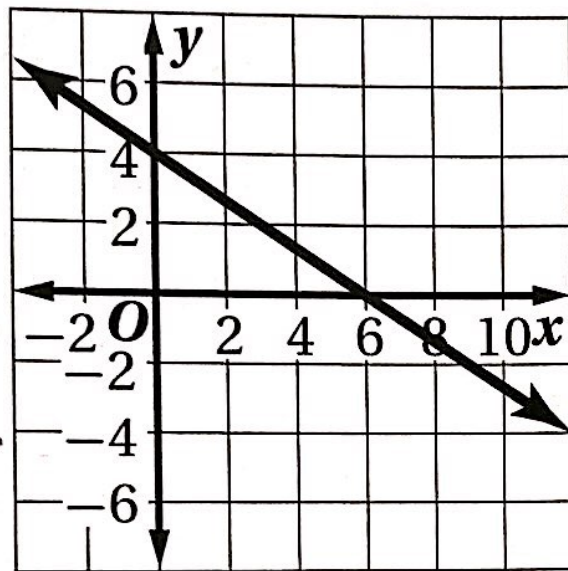
$$y = x + 1$$

لا يكون في البطح تقاطع المستقيم مع محور γ
ولمّا تقاطع المستقيم مع محور x
ونكتبها بدون كتابة $اسم$
لأننا مستقيماً حددنا $اسم$ $اسم$
الطويل ..

* المصالح أ، الجزء المقطوع من حـ، ٧
وهو ط ..

و هو ...
نكتب ~~بعضاً~~ عبارة عن تقاطع المستقيم
مع محور y ونكتبه y_0 ...
إذا كان التقاطع عند 2
يكون $2 = b$ لو كان
شاملاً عند $2 - 1$ تكون $2 = b$

3) ما ميل المستقيم الممثل بيانياً أدناه ؟



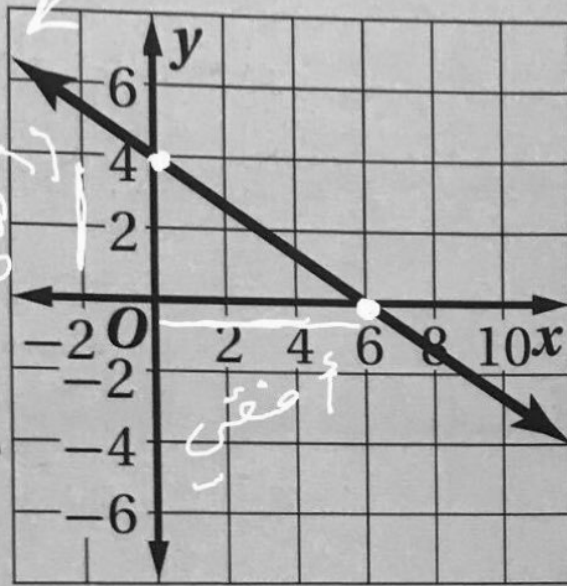
$-\frac{2}{5}$ **C**

$-\frac{1}{6}$ **D**

$-\frac{2}{3}$ **A**

$-\frac{1}{2}$ **B**

(3) ما ميل المستقيم الممثل بيانياً أدناه؟



التغير الرأسي
التغير الأفقي

$$\frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

$-\frac{2}{5}$ **C**

$-\frac{1}{6}$ **D**

$-\frac{2}{3}$ **A**

$-\frac{1}{2}$ **B**

45 أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين
 $(2, 4), (0, -2)$ ؟

$\frac{1}{3}$ **C**

$-\frac{1}{3}$ **A**

3 **D**

-3 **B**

45) أي القيم الآتية تمثل ميل المستقيم المار بالنقطتين

$(2, 4), (0, -2)$ ؟

$$\frac{-2 - 4}{0 - 2} = \frac{-6}{-2} = 3$$

$\frac{1}{3}$ **C**

$-\frac{1}{3}$ **A**

3 **D**

-3 **B**

تدريب على اختبار

(44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا يعامد المستقيم الذي

معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$ ؟

$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ **C**

$y = -\frac{4}{3}x - 6$ **A**

$y = -\frac{3}{4}x - 5$ **D**

$y = \frac{4}{3}x + 5$ **B**

تدريب على اختبار

(44) أي المعادلات الآتية تمثل مستقيمًا يعامد المستقيم الذي

معادلته $y = \frac{3}{4}x + 8$ ؟ نعكس الميل ونعكس الإشارة

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4} \quad \mathbf{C}$$

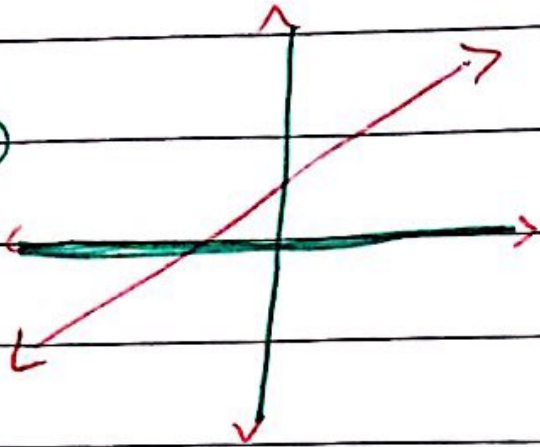
$$y = -\frac{4}{3}x - 6 \quad \mathbf{A}$$

$$y = -\frac{3}{4}x - 5 \quad \mathbf{D}$$

$$y = \frac{4}{3}x + 5 \quad \mathbf{B}$$

جملہ

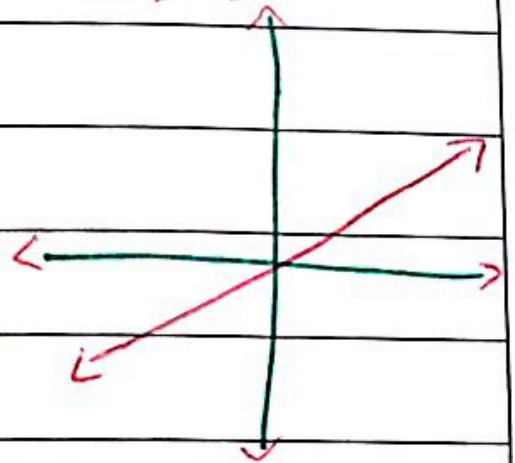
①



$m + \rightarrow$
 $b +$

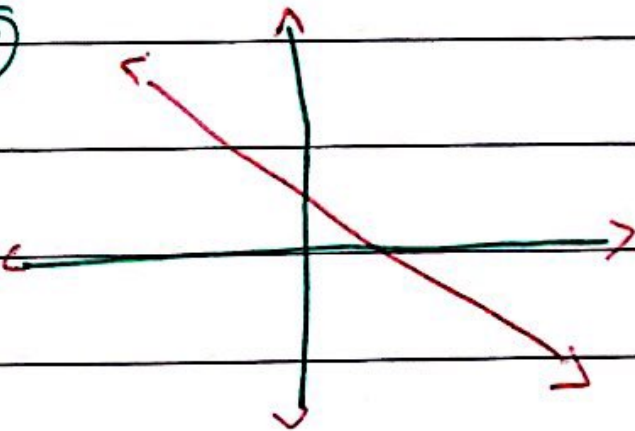
جملہ

②



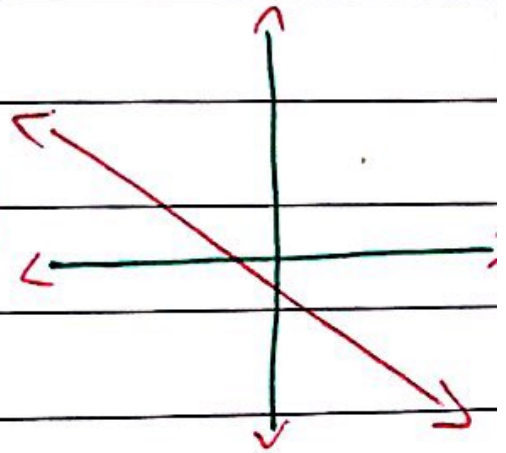
$m +$
 $b -$

③



$m -$
 $b +$

4)



$m -$
 $b -$

(60) أي مما يأتي هي معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 1)$ ، ويعامد المستقيم $y = \frac{1}{3}x + 5$ ؟

نعكس الميل
-3

$y = 3x + 7$ **A**

$y = \frac{1}{3}x + 7$ **B**

$y = -3x - 5$ **C**

$y = -\frac{1}{3}x - 5$ **D**

(50) ما ميل المستقيم الذي معادلته $2x + y = 5$ ؟

$$y = -2x + 5$$

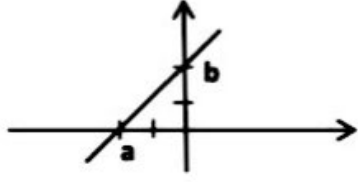
-1 C

2 A

-2 D

$\frac{5}{2}$ B

الميل
↓

السؤال	الحل
<p>1. مامعادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(x, y) = (-2, 1)$ ويعامد المستقيم $x + 4y - 8 = 0$</p> <p>(أ) $y + 4x = 9$</p> <p>(ب) $y - 4x = 9$</p> <p>(ج) $2y - 4x = 9$</p> <p>(د) $2y + 4x = 9$</p>	
<p>2. مامعادلة المستقيم العمودي على المستقيم $y = 2x + 1$ ويمر بالنقطة $(2, -4)$</p> <p>(أ) $y = -2x$</p> <p>(ب) $y = \frac{-1}{2}x - 3$</p> <p>(ج) $y = \frac{-1}{2}x - 5$</p> <p>(د) $y = 2x - 8$</p>	
<p>3. ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $-2x + y = -4$ ويمر بالنقطة $(5, 3)$</p> <p>(أ) $y = 2x - 7$</p> <p>(ب) $y = \frac{1}{2}x - 7$</p> <p>(ج) $y = 2x + 13$</p> <p>(د) $y = \frac{1}{2}x + 13$</p>	
<p>4. ما ميل المستقيم $2y - x = 0$</p> <p>(أ) 1</p> <p>(ب) -1</p> <p>(ج) $\frac{1}{2}$</p> <p>(د) $-\frac{1}{2}$</p>	
<p>5. في الشكل أدناه، ما معادلة المستقيم المار بالنقطتين a, b</p>  <p>(أ) $y = x + 2$</p> <p>(ب) $y = x - 2$</p> <p>(ج) $y = -x + 2$</p> <p>(د) $y = -x - 2$</p>	

$$\textcircled{1}x + \textcircled{4}y - 8 = 0$$

المستقيم الذي يعاينه
تغير المعاملات
مع تغيير اتجاهه (x)

$$-4x + 1y \text{ ---}$$

$$2/ \quad y = 2x + 1, (x, y) = (2, -4)$$

بجانب المماس $-\frac{1}{2}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-4) = -\frac{1}{2}(x - 2)$$

$$y + 4 = -\frac{1}{2}x + 1$$

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}x - 3}$$

الكل

$$3 \mid -2x + y = -4$$

$$y = 2x - 4$$

الميل
ميل المستقيم الموازي له -2

$$y - y_1 = 2(x - x_1)$$

نعوض بـ $(5, 3)$

$$y - 3 = 2(x - 5)$$

$$y = 2x - 10 + 3$$

$$y = 2x - 7$$

الحل

$$2y - x = 0$$

3

اگرید هو - معامیل x
معامل y

$$\frac{-(-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

سؤال 5

الطريقة الاولى

الطريقة الثانية

هيك
المحور
موجب

بتجريب الحمار
بالنقاط

(0, 2)

(-2, 0)

والمقطع الصادي

(0, 2)

$$y = x + 2$$

$$y = 0 + 2$$

$$y = 2$$

النقطة
الاولى

$$y = x + 2$$

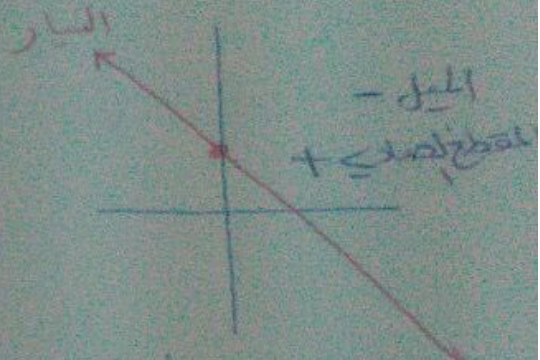
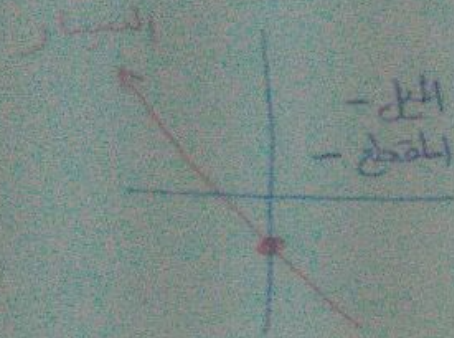
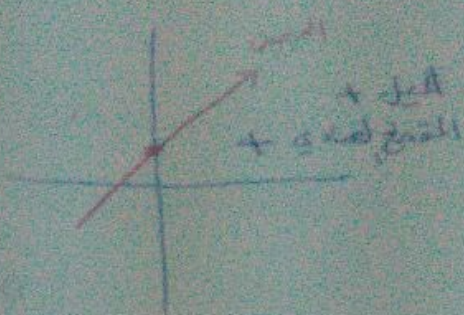
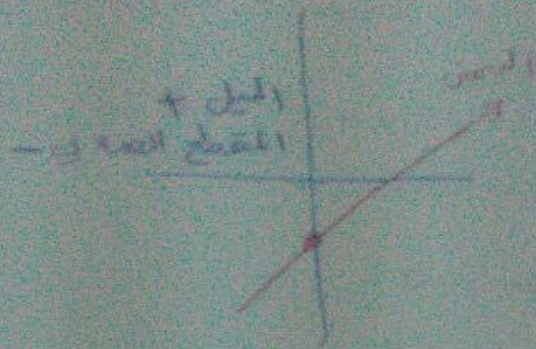
$$y = -2 + 2$$

$$y = 0$$

النقطة
الثانية

الجواب

$$y = x + 2$$



$$\text{المقطع الرأسي} = \frac{\text{المقطع الأفقي}}{\text{الميل}}$$

$$y = \pm m x \pm b$$

معادلة المستقيم بدلالة الميل والمقطع

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

معادلة المستقيم بدلالة الميل والنقطة

السؤال	الحل	هامش
<p>١٣٠) ما معادلة المستقيم الذي يوازي المستقيم $-2x + y = -4$ ، و يمر بالنقطة $(5,3)$:</p> <p>• $y = 2x - 7$</p> <p>• $y = \frac{x}{2} - 7$</p> <p>• $y = 2x + 13$</p> <p>• $y = \frac{x}{2} + 13$</p>	<p>$-2x + y = -4 \Rightarrow m_1 = \frac{-a}{b} = \frac{2}{1} = 2$</p> <p>$M_2$ يوازي M_1</p> <p>$M_2 = 2$</p> <p>$y - y_1 = m(x - x_1)$</p> <p>$y - 3 = 2(x - 5)$</p> <p>$y = 2x - 7$</p>	

هامش

الحل

المثال

$$-4 = \frac{-4}{1} = \frac{(x \text{ معامل}) - y \text{ معامل}}{y - y_1 = m(x - x_1)} \text{ ميل المستقيم}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1) \text{ معادلة المستقيم}$$

$$y - 1 = -4(x - 2)$$

$$y - 1 = -4x + 8$$

$$y + 4x = 9$$

٦٦ معادلة المستقيم المار بالنقطة
(2, 1) ويوازي المستقيم
 $Y + 4X = 8$

- $Y + 4X = 12$ •
- $Y - 4X = 12$ •
- $Y - 4X = 9$ •
- $Y + 4X = 9$ •

ما المقطع x للمستقيم $4x - 6y = 12$ ؟

-3 **C**

3 **A**

-2 **D**

2 **B**

إذا أعطانا معادلة وطلب المقطع x

نضع $y = 0$

$$4x - 6(0) = 12$$

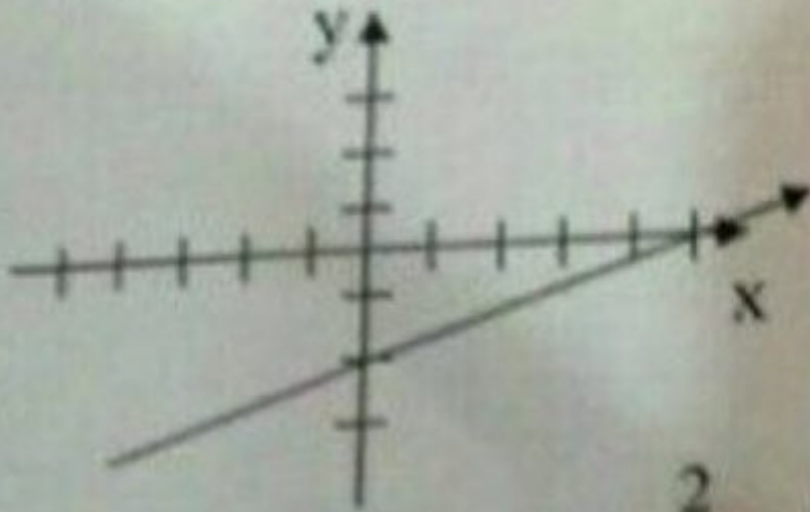
$$\frac{4x}{4} = \frac{12}{4} \Rightarrow x = 3$$

لإيجاد المقطع y نضع $x = 0$

$$4(0) - 6y = 12 \Rightarrow \frac{-6y}{-6} = \frac{12}{-6}$$

$$y = -2$$

١- أي مما يلي يمثل معادلة المستقيم المبين في الشكل أدناه؟

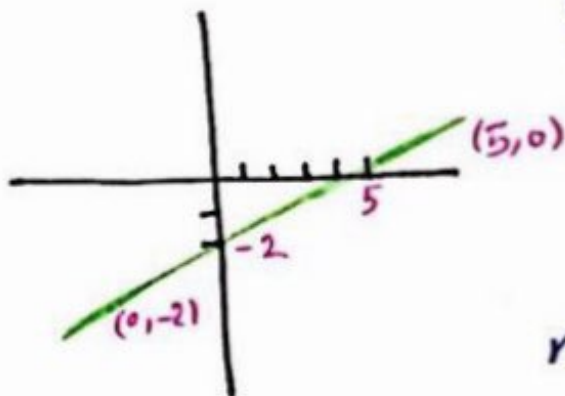


أ) $y = \frac{2}{5}x + 2$

ب) $y = 10x + 2$

ج) $y = 10x - 2$

د) $y = \frac{2}{5}x - 2$



ج. نوجد ميل = $\frac{\text{التغير الرأسي}}{\text{التغير الأفقي}}$

بما أن نقطة تقاطع $y = -2$

الميل =

$m = \frac{2}{5}$ ، $y = \frac{2}{5}x - 2$.

١١- ما التمثيل البياني لمعادلتين المستقيمين $y - 3x = -5$ و

$$3y + x = 8$$

أ) مستقيمان متعامدان

ب) مستقيمان متوازيان

ج) يقطعان المحور x في نفس النقطة

د) يقطعان المحور y في نفس النقطة

الحل: نضع الميل أمراً: $[y - 3x = -5]$

$$m_1 = \frac{\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = -\frac{(-3)}{1} = 3$$

$$[3y + x = 8] \quad m_2 = -\frac{1}{3}$$

∴ المستقيمان متعامدان .

P ←

١٣- إذا كان ميل المستقيم المار بالنقطتين (a, b) و (c, d) يساوي

0.5، فما ميل المستقيم المار بالنقطتين $(2-4a, 3-4b)$ و

$(2-4c, 3-4d)$

أ) 0.5

ب) 2

ج) -0.5

د) -2

ار شعاعاً ثلاثة
ما المسافة بين

(a, b) و (c, d) يساوي 0.5

ج. ٩

النقطتين $(2-4c, 3-4d)$ و $(2-4a, 3-4b)$

$$m = \frac{d-b}{c-a} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{3-4d - (3-4b)}{2-4c - (2-4a)}$$

$$= \frac{3-4d - 3 + 4b}{2-4c - 2 + 4a}$$

نأخذ مشترك

$$= \frac{-4(d-b)}{-4(c-a)} = \frac{1}{2}$$

P ←

نقاش

اليوم 12

تدريب على اختبار

٢٨) أوجد المسافة بين النقطتين $(2, -4)$ ، $(-5, 8)$.

ج) $\sqrt{95}$

أ) ٥

د) $\sqrt{193}$

ب) ٧

$$28) (2, -4), (-5, 8)$$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(-5 - 2)^2 + (8 - (-4))^2}$$

$$= \sqrt{(-7)^2 + (12)^2} = \sqrt{49 + 144}$$

$$= \sqrt{193} \quad \rightarrow 13.89$$

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \\ (2, -4) & , & (-5, 8) \end{matrix}$$

ۛ سواء به انا ب x_1 او x_2
 بكونه لينا نجي نفسه .

$$\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} , \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\sqrt{(2 - (-5))^2 + (-4 - 8)^2} , \sqrt{(-5 - 2)^2 + (8 - (-4))^2}$$

$$\sqrt{(7)^2 + (-12)^2} , \sqrt{(-7)^2 + (12)^2}$$

$$\sqrt{49 + 144} , \sqrt{49 + 144}$$

$$\sqrt{193} , \sqrt{193}$$

مثلاً

$$\begin{matrix} x & y \\ \left(\begin{matrix} x_1 \\ 2 \\ x_2 \\ -5 \end{matrix} \right) & , \left(\begin{matrix} y_1 \\ -4 \\ y_2 \\ 8 \end{matrix} \right) \end{matrix}$$

* سواء بدأنا بـ x_1 أو x_2 لا يهم

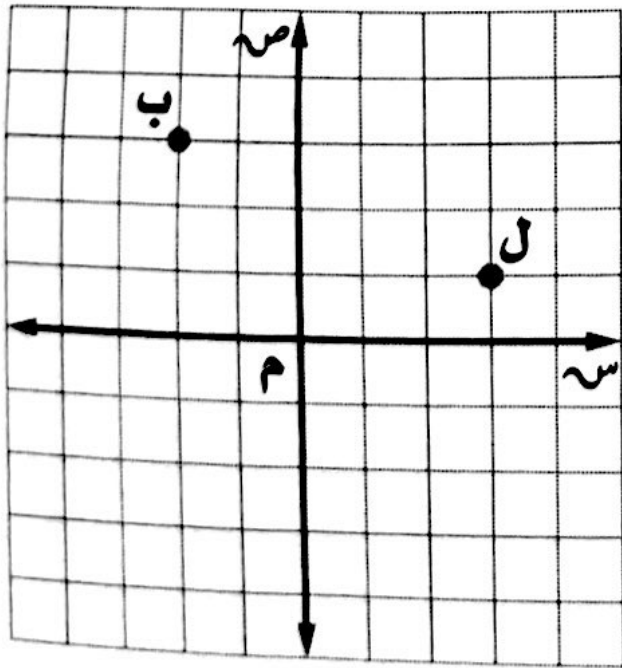
المهم أنه نراعي الإشارات

* إذا بدأنا بـ x_1 لدينا أنه نبدأ

المقدار الثاني بـ y_1

إذا بدأنا بـ x_2 ، المقدار الثاني نبدأ بـ y_2

٤٤) إذا كانت (ل) تمثل منارة، و(ب) سفينة، ويوجد قارب صيد في منتصف المسافة بين ل و ب، فأَيّ الإحداثيات الآتية تمثل موقع القارب؟



أ) $(\frac{1}{2}, 2)$

ب) $(\frac{1}{2}, 1)$

ج) $(2, \frac{1}{2})$

د) $(5, \frac{1}{2})$

$(-3, 4) \cup (1, 4)$
 $(-2, 3) \cap (3, 1)$

44)

قانون نقطة المنتصف

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

موقع المئادة $\leftarrow h = (3, 1)$

موقع سفينة $\leftarrow B = (-2, 3)$

المطلوب منتصف المسافة :

$$\left(\frac{3 + (-2)}{2}, \frac{1 + 3}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{2} \right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2 \right)$$

٦) إذا كانت n تقع في منتصف المسافة بين a و b ،
حيث $n(1, 1)$ ، $a(2, 2)$ ، فإن إحداثيات b تكون:

أ) $(3, 3)$

ب) $(1, 5, 1, 5)$

ج) $(0, 0)$

د) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

تاسو

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = (1, 1)$$

سوال
↑

$$\left(\frac{2 + x_2}{2}, \frac{2 + y_2}{2} \right) = (1, 1)$$

$$\frac{2 + x_2}{2} = 1, \quad \frac{2 + y_2}{2} = 1$$

$$2 + x_2 = 2, \quad 2 + y_2 = 2$$

$$x_2 = 0, \quad y_2 = 0$$

$$\therefore B(0, 0)$$

$$(1, 1)$$

$$\frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$(2, 2)$$

~~$$\frac{1+2}{2}$$~~

~~$$\frac{1+2}{2}$$~~

$$\frac{3}{2}, \frac{3}{2}$$

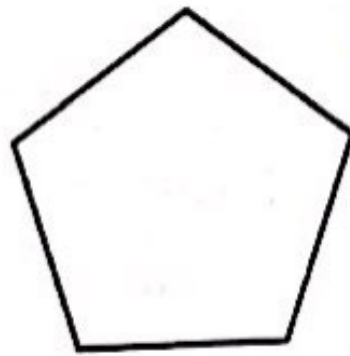
~~$$(1, 5), (1, 5)$$~~

حل صحیح

از به مطلوب نتیجه ب

ولیس نقطه به نصف

(4) ما قياس كل زاوية داخلية في الخُماسي المنتظم؟



120° C

135° D

96° A

108° B

4)

~~.....~~
~~.....~~

$$\boxed{n=5}$$

منطوق منظم: خماسي ←

$$\left. \begin{array}{r} 180 - 360 \\ \hline n \end{array} \right\} \Rightarrow \text{مناو} \sim$$

$$\begin{array}{r} 180 - 360 \\ \hline 5 \end{array} \quad \text{عدد المناو} \rightarrow$$

$$180 - 72 = 108$$

$$S = \frac{(n-2) \cdot 180}{n} \quad \text{عدد المناو} \rightarrow$$

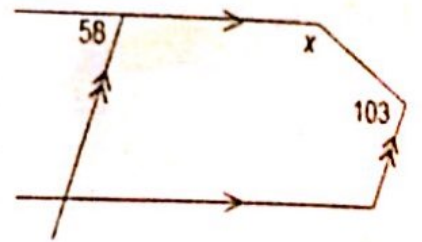
$$= \frac{(5-2) \cdot 180}{5}$$

$$\frac{3 \times 180}{5} = \frac{540}{5}$$

$$= \frac{540}{5} = 108$$

مثال

(١) ما قياس الزاوية x في الشكل المرافق؟



(ب) 145

(د) 125

(أ) 155

(ج) 135

الحل

(١) بالتجاور على مستقيم لدينا زاويتان

متكاملتان مجموع قياسهما 180°

(٢) بالتوازي والتبادل لدينا زاويتان

متساويتان بالقياس

(٣) بالتوازي والتحالف لدينا زاويتان

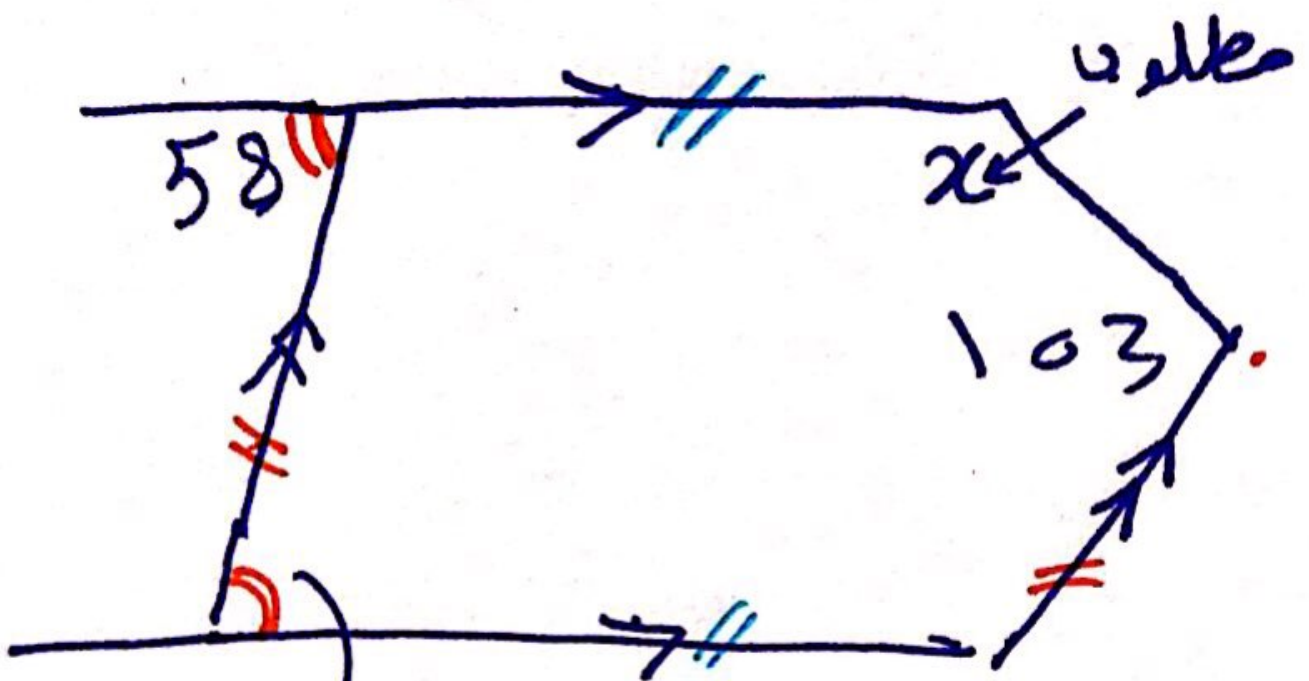
متكاملتان مجموع قياسهما 180°

(٤) مجموع زوايا المضلع الخماسي $(n - 2) \times 180^\circ =$

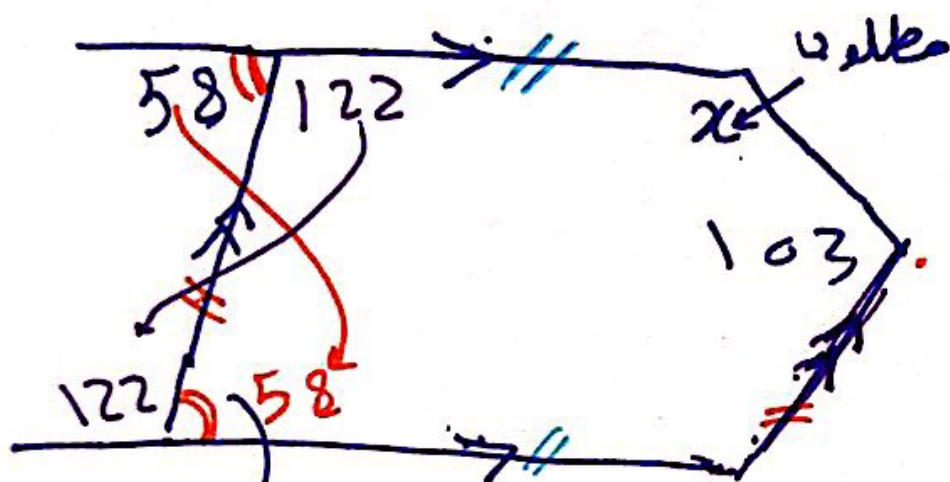
$$540 = 3 \times 180 =$$

$$x = 540 - (122 + 122 + 103 + 58) (^\circ)$$

$$x = 540 - 405 = 135^\circ$$

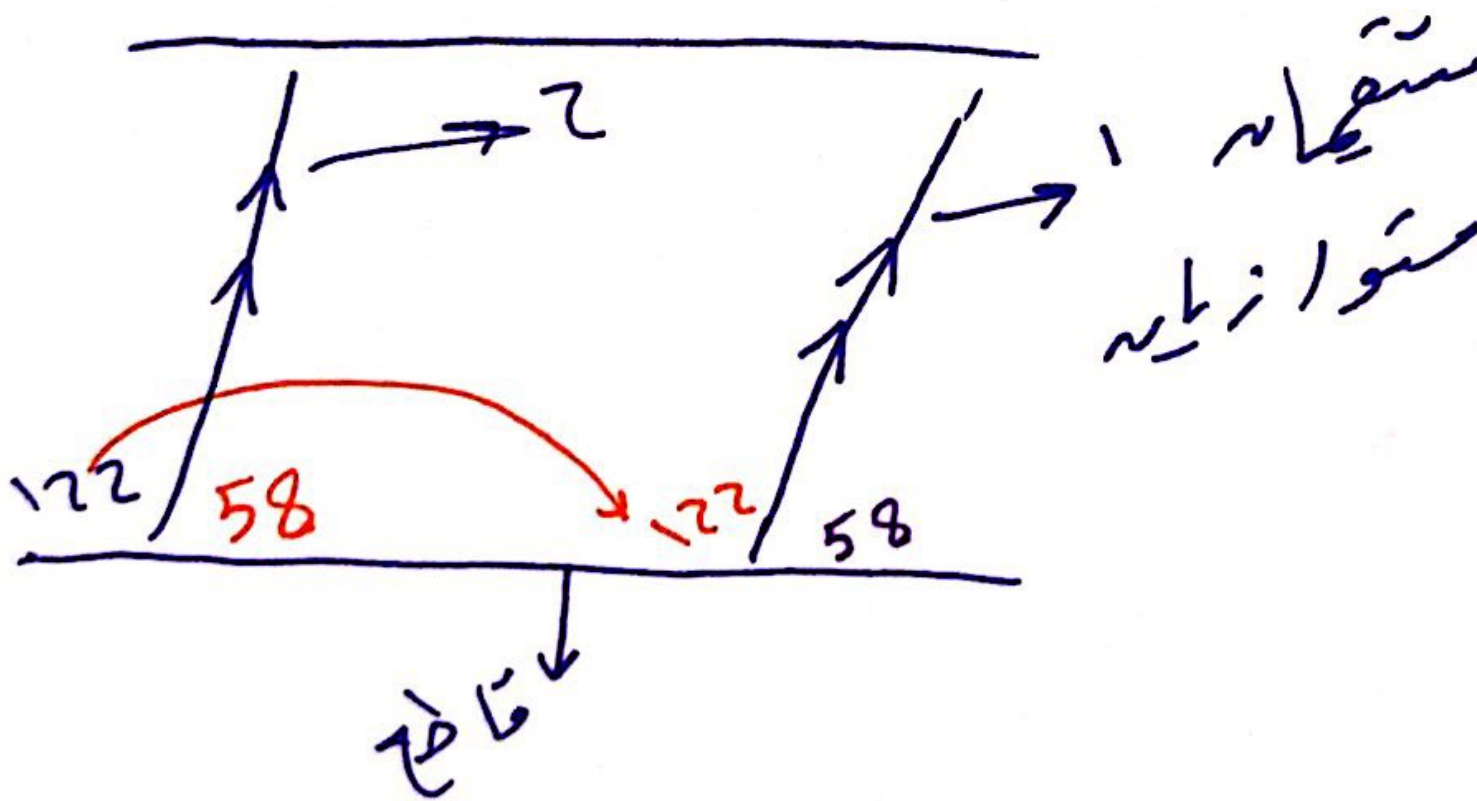


← مستوية
 داخليا
 مستوية ::



مطلوب
مطلوب
داخلياً
مطلوباً
∴

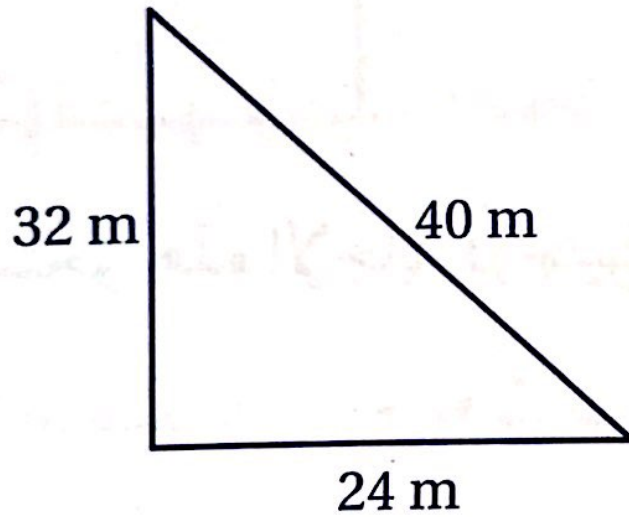
$$180 - 58 = 122$$



نقاش

اليوم 13

(2) يصنف المثلث المرسوم أدناه بحسب أضلاعه بأنه:



- A** متطابق الأضلاع
B متطابق الضلعين
C قائم الزاوية
D مختلف الأضلاع

تدريب على اختبار

(36) إذا كان قياسا زاويتين في مثلث هما 45° , 92° ، فما نوع هذا المثلث؟

- A منفرج الزاوية ومختلف الأضلاع.
- B حادّ الزوايا ومختلف الأضلاع.
- C منفرج الزاوية ومتطابق الضلعين.
- D حادّ الزوايا ومتطابق الضلعين.

$$36) (92 + 45) + x = 180$$

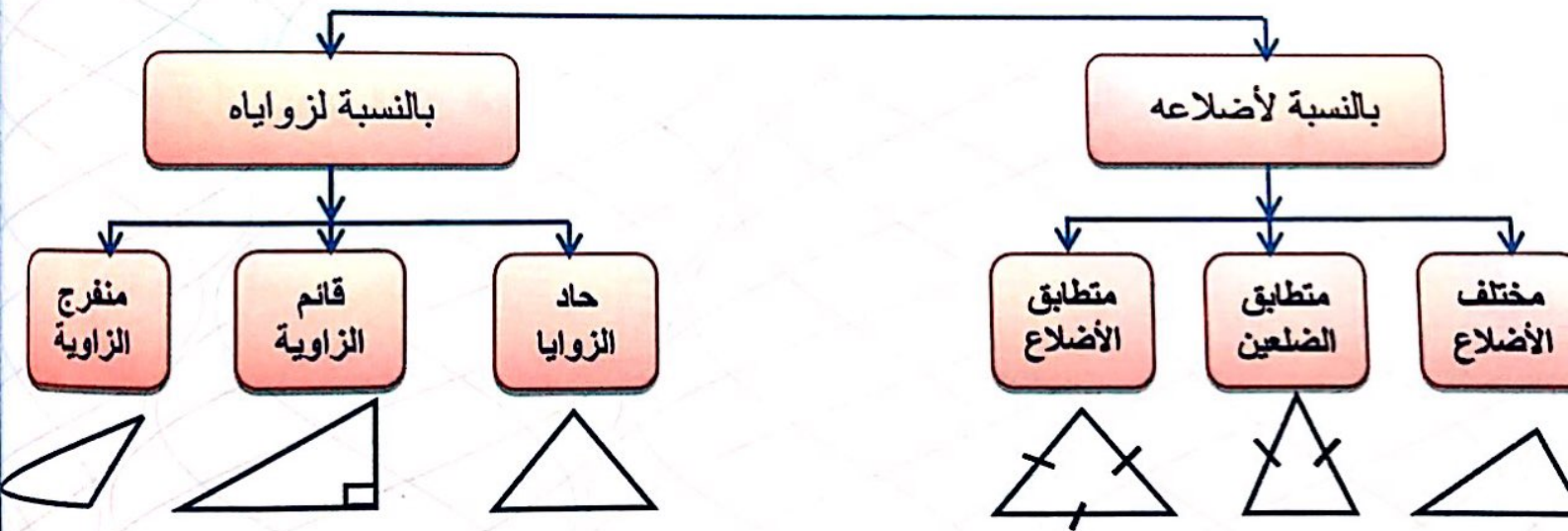
$$x = 43$$

∴ فيه زاوية فياسرها أكبر من 90

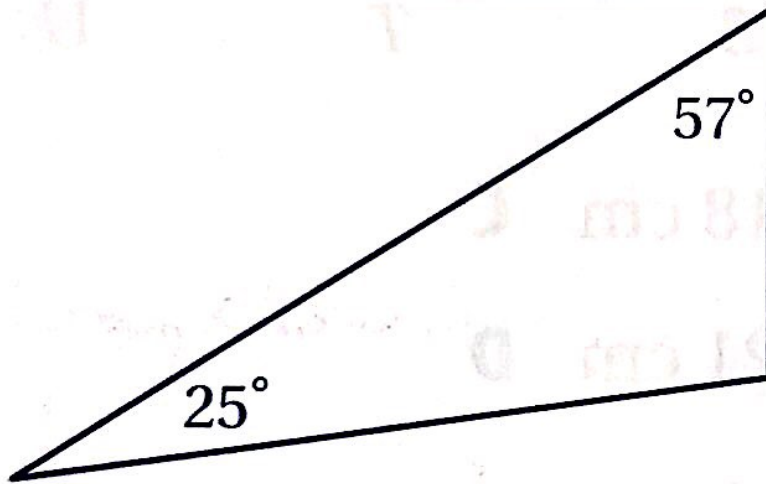
∴ يثلث منفرج الزاوية و صختلف

الاصدع .

٦ أنواع المثلثات :



6) صنف المثلث أدناه تبعًا لقياسات زواياه.



A حادّ الزوايا

B متطابق الزوايا

C منفرج الزاوية

D قائم الزاوية

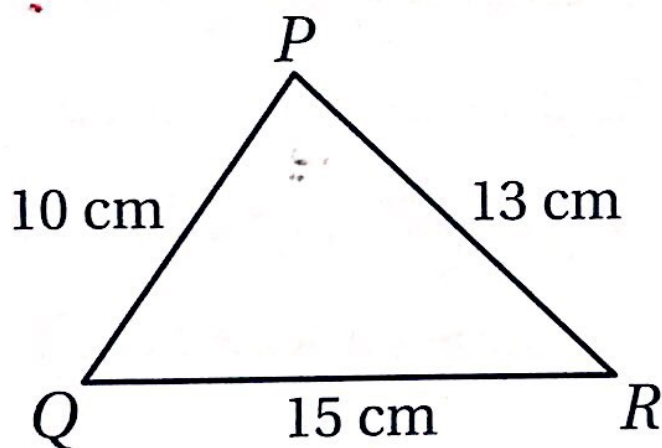
$$6) \quad 25 + 57 + x = 180$$

$$x = 180 - 82$$

$$x = 98 > 90$$

∴ منفرج الزاوية

4) ما العلاقة الصحيحة بين قياسات زوايا $\triangle PQR$ ؟



$m\angle R < m\angle Q < m\angle P$ **A**

$m\angle R < m\angle P < m\angle Q$ **B**

$m\angle Q < m\angle P < m\angle R$ **C**

$m\angle P < m\angle Q < m\angle R$ **D**

4)

∴ الزاوية المتضادة للصنح الأصغر
تكون هي الأصغر والعكس ..

$$\therefore |PQ| < |PR| < |QR|$$

كل صنح بضايله زاويه

$$\therefore \angle R < \angle Q < \angle P$$

خواص المثلثات :

- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمثلث $= 180^\circ$.
- مجموع طولي أي ضلعين في المثلث أكبر من طول الضلع الثالث.
- طول أي ضلع في المثلث ينحصر بين الفرق بين الضلعين الآخرين ومجموعهما .
- مدى طول ضلع المثلث $(x - y, x + y) = z$
- قياس الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين البعديتين $a + b = c$
- زاويتا القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان .
- زوايا المثلث المتطابق الأضلاع متطابقة وقياس كل منها $= 60^\circ$.

مثال 2 من اختبار معياري

إذا كان طولاً ضلعين في مثلث هما 3 cm , 7 cm ، فما أصغر عدد طبيعي يمكن أن يمثل طول الضلع الثالث؟

3 cm **A**

4 cm **B**

5 cm **C**

10 cm **D**

الطريقة الثانية

الضلع الثالث أقصر منه

~~الضلع الثالث~~ ^{المجموع} الضلعين

$$7 + 3 = 10$$

كل الخيارات قاعدة 10

بترتيب العكس

$$3 + 3 = 6 < 7 \quad \times$$

$$3 + 4 = 7 = 7 \quad \times$$

$$3 + 5 = 8 > 7 \quad \checkmark$$

الطريقة الأولى

الضلع الثالث

$$7 - 3 = \boxed{4} \text{ أكبره الفرق}$$

$$7 + 3 = \boxed{10} \text{ أصغره المجموع}$$

الخيار الوحيد الذي

يقع بين

4 , 5 , 10

أي مما يأتي لا يمكن أن يكون

متجه لـ x و y

من \mathbb{R}^2 معني أنه يكون متجه

لـ x يعني أنه يكون لضعف
الثالث

* شرط أن أصل المتجه

أن يكون مجموع أي متجهين

أكبر من لضعف الثالث

$x = 8, 9, 10, 11$ ← الضعف الثالث

$$7 + 4 = 11 <$$

$$8 + 7 + 4 = 11 > 8$$

$$7 + 4 = 11 > 9$$

$$7 + 4 = 11 > 10$$

تدريب على اختبار

(35) إذا كان طولاً ضلعين في مثلث 12, 7، فأَيُّ مما يأتي لا يمكن أن يكون محيط المثلث؟

29 **A**

34 **B**

37 **C**

38 **D**

35/

اطوال أصابع مثلث

$$7 - 12$$

$$7 + 12 = 19$$

ونطرح الناتج من الخيار

القيمة التي تساوي 19 لم يكن
النتيجة محيطة مثلث

$$A) 29 - 19 = 10$$

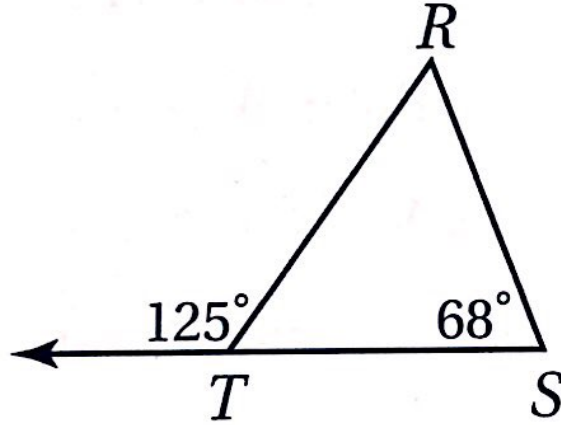
$$B) 34 - 19 = 15$$

$$C) 37 - 19 = 18$$

$$d) 38 - 19 = 19 \rightarrow \text{لدينا أسير كونه}$$

محيط مثلث

(4) ما قياس الزاوية R في الشكل أدناه؟

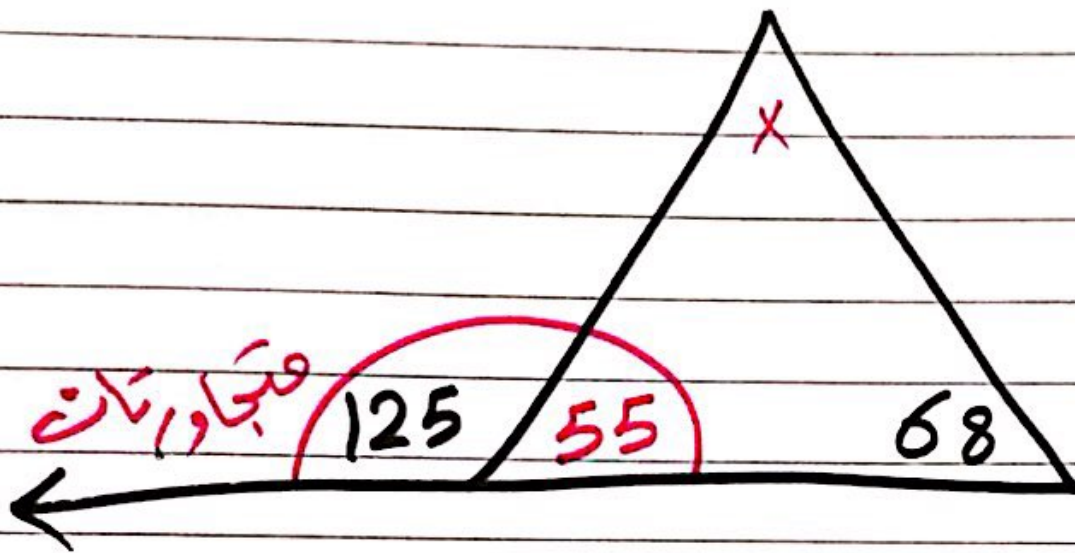


57° **A**

59° **B**

65° **C**

68° **D**

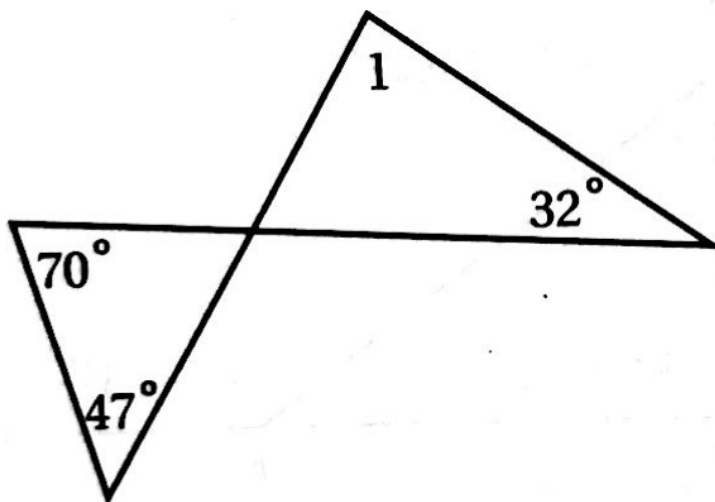


$$X = 180 - (55 + 68)$$

مجموع قياسات
زوايا المثلث

$$= 180 - 123$$

$$= 57$$



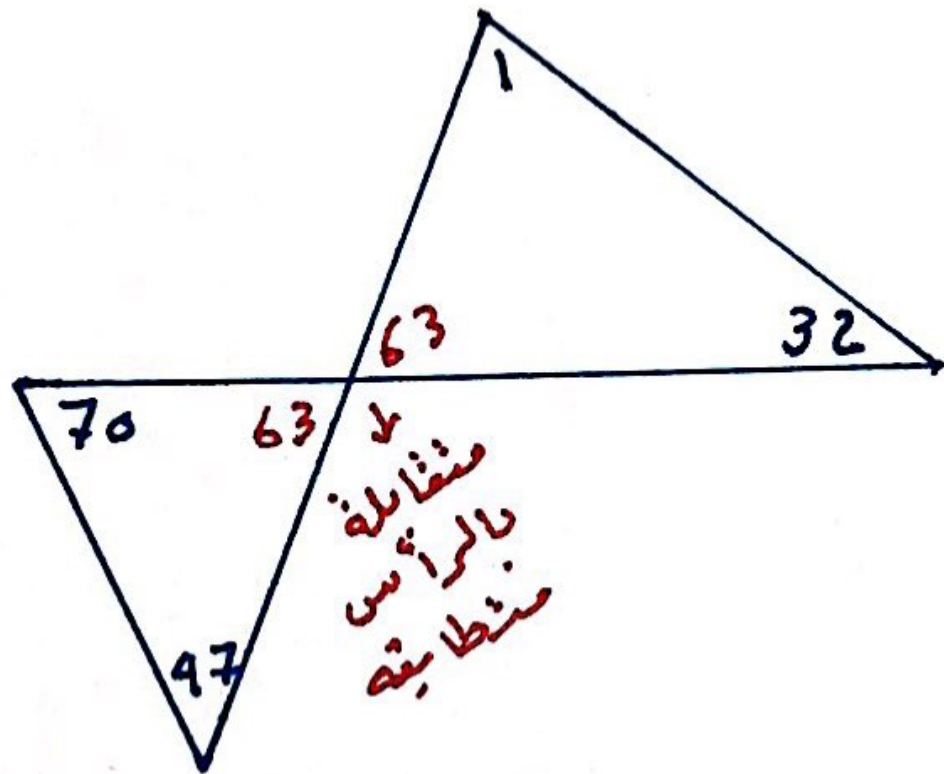
85° A

63° B

47° C

32° D

أمرجه من الزاوية $\angle 1 < 90^\circ$

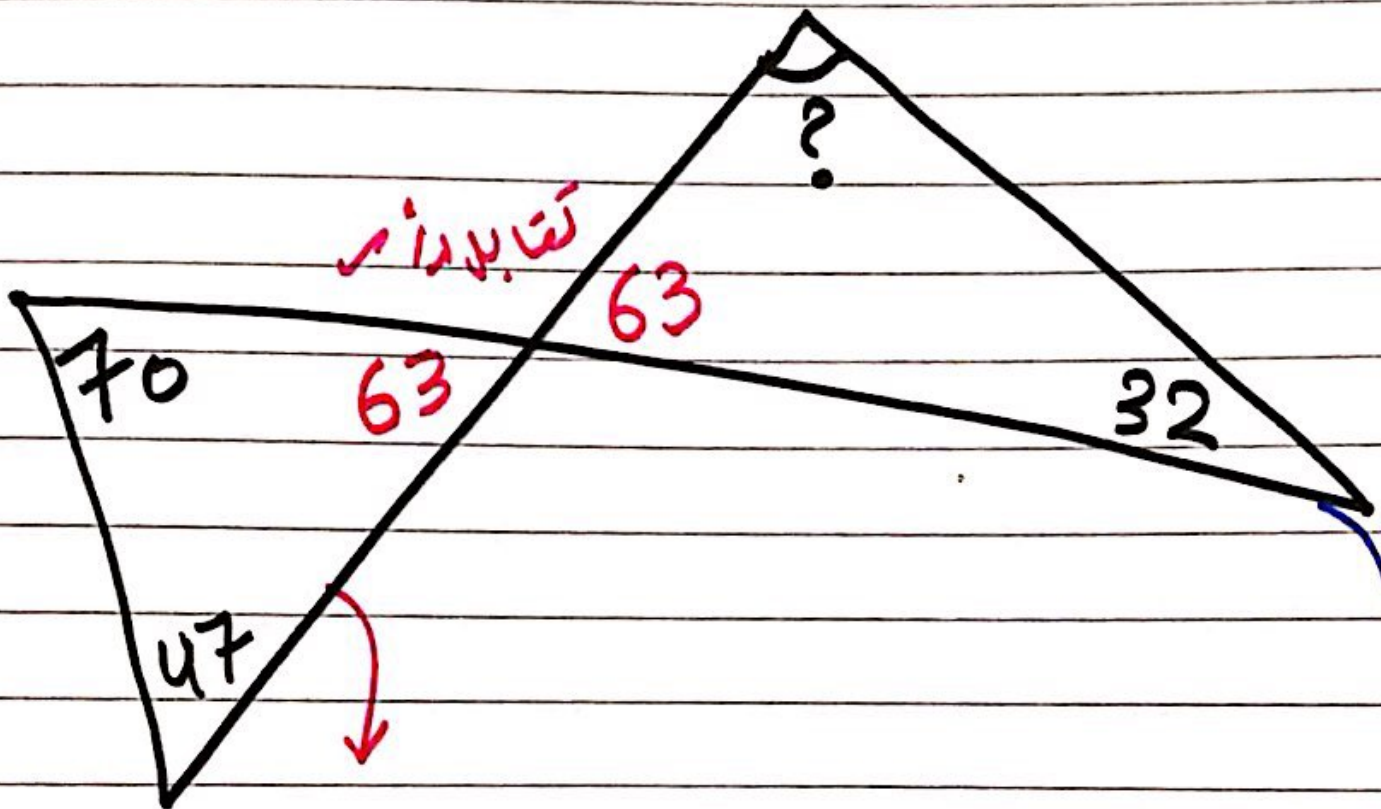


$$(70 + 47) - 180 = 63$$

$$\angle 1 + 63 + 32 = 180$$

$$\angle 1 = 180 - 95$$

$$\angle 1 = 85$$

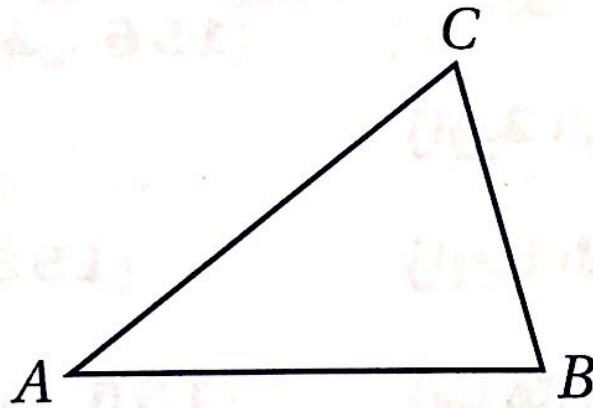


$$180 - (70 + 47) = 180 - 117 = 63$$

$$180 - (63 + 32) = 180 - 95 = 85$$

تدريب على اختبار

25) في الشكل أدناه إذا كان $m\angle B = 76^\circ$ ، وقياس $\angle A$ يساوي نصف قياس $\angle B$ ، فما $m\angle C$ ؟



46° (C)

33° (A)

66° (D)

38° (B)

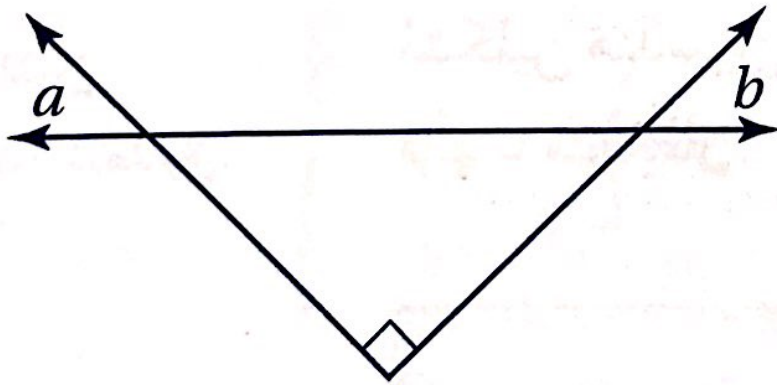
$$m\angle B = \boxed{76}^\circ$$

$$m\angle A = \frac{76}{2} = \boxed{38}$$

$$76 + 38 = 114$$

$$114 - 180 = 66$$

(38) أيُّ العبارات التالية تصف العلاقة الصحيحة بين الزاويتين a, b في الشكل أدناه؟

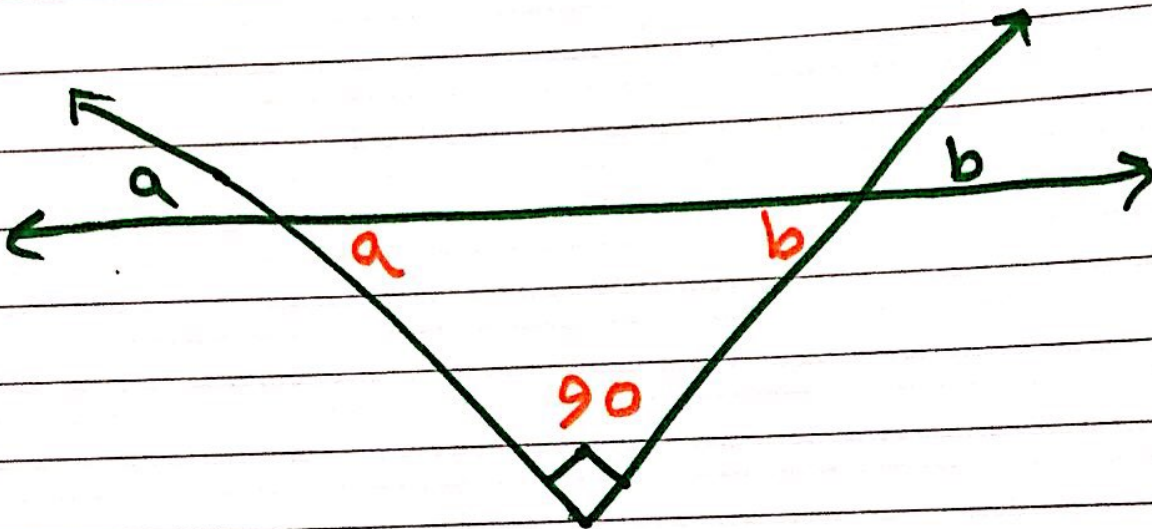


$a + b = 90^\circ$ **C**

$a + b = 45^\circ$ **D**

$a + b < 90^\circ$ **A**

$a + b > 90^\circ$ **B**



$$180 = 90 + 90$$

$$\Rightarrow a + b = 90$$

(٢) في الشكل أدناه، قياس الزاوية C بالدرجات يساوي:

(ب) 20°

(أ) 10°

(د) 70°

(ج) 60°

الحل: قياس الزاوية الخارجية للمثلث تساوي مجموع قياسي الزاويتين البعديتين.

$$5x + 7x = 120^\circ$$

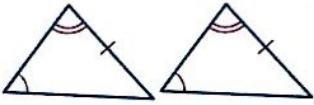
$$12x = 120^\circ$$

$$x = 10^\circ$$

زاوية C

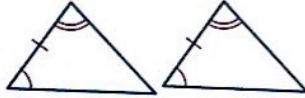
$$C = 7x = 7 \times 10 = 70^\circ$$

AAS



يتطابق مثلثان إذا طبقت
زاويتان وضلع غير محصور
بينهما في المثلث الأول
نظائرها في المثلث الآخر.

ASA



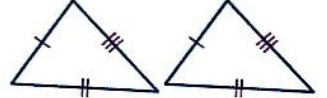
يتطابق مثلثان إذا طبقت
زاويتان والضلع المحصور
بينهما في المثلث الأول
نظائرها في المثلث الآخر.

SAS



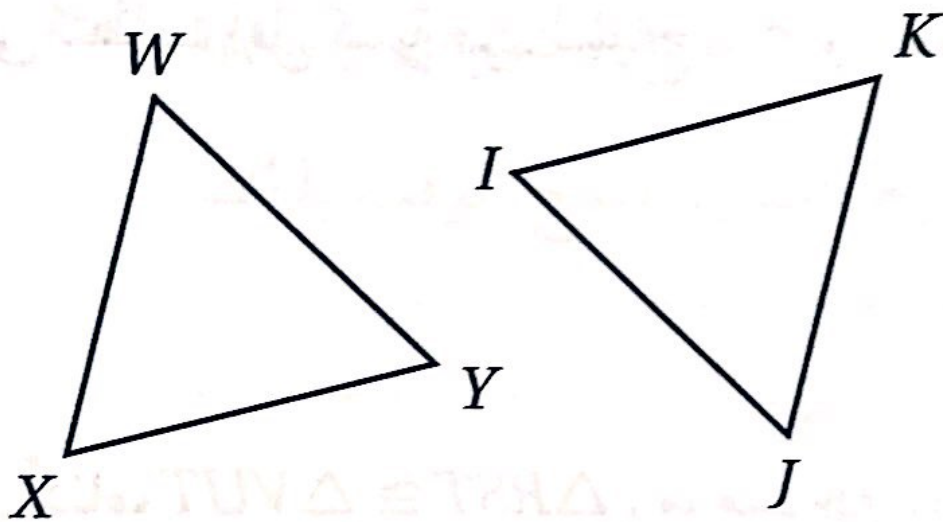
يتطابق المثلثان إذا طابق
ضلعان والزاوية المحصورة
بينهما في المثلث الأول
نظائرها في المثلث الآخر.

SSS



يتطابق مثلثان إذا كانت
أضلاعهما المتناظرة متطابقة.

(3) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}$, $\overline{YX} \cong \overline{IK}$, $\angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين؟

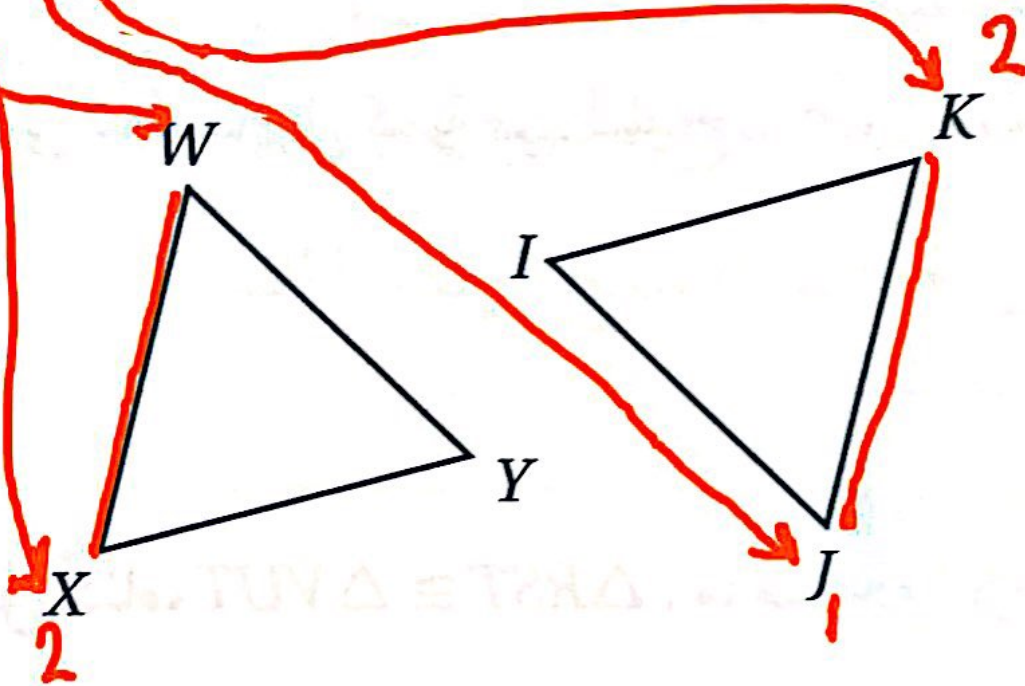
$\triangle WXY \cong \triangle KIJ$ **A**

$\triangle WXY \cong \triangle IKJ$ **B**

$\triangle WXY \cong \triangle JKI$ **C**

$\triangle WXY \cong \triangle IJK$ **D**

(3) في المثلثين أدناه إذا كان: $\overline{WX} \cong \overline{JK}$, $\overline{YX} \cong \overline{IK}$, $\angle X \cong \angle K$



فأيُّ العبارات الآتية تعبر عن تطابق هذين المثلثين؟

$\triangle WXY \cong \triangle KIJ$ A

$\triangle WXY \cong \triangle IKJ$ B

$\triangle WXY \cong \triangle JKI$ C

$\triangle WXY \cong \triangle IJK$ D

$\triangle WXY \cong \triangle JKI$

بداية المثلث الأول
مع بداية المثلث الثاني

تدريب على اختبار

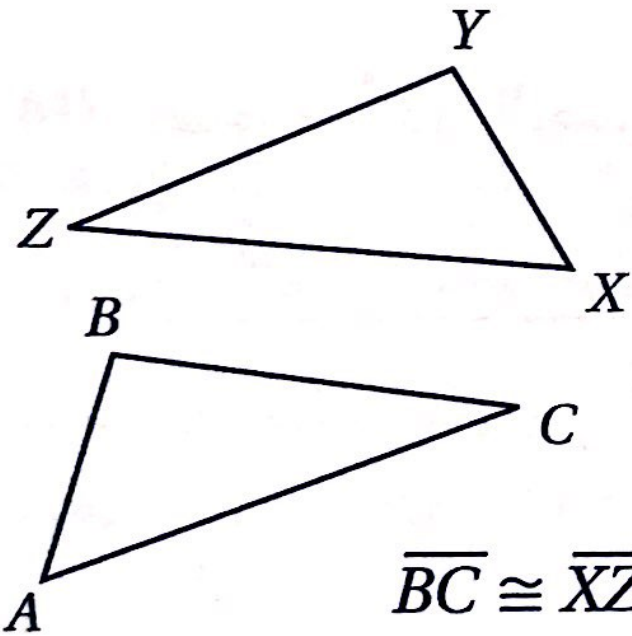
(26) في الشكلين المجاورين،
 $\overline{AC} \cong \overline{XZ}$ و $\angle C \cong \angle Z$
 ما المعلومة الإضافية التي
 يمكن استعمالها لإثبات أن
 $\triangle ABC \cong \triangle XYZ$ ؟

$$\overline{BC} \cong \overline{XZ} \quad \mathbf{C}$$

$$\overline{XZ} \cong \overline{XY} \quad \mathbf{D}$$

$$\overline{BC} \cong \overline{YZ} \quad \mathbf{A}$$

$$\overline{AB} \cong \overline{XY} \quad \mathbf{B}$$



(١) مربع طول الوتر = مجموع مربعي طولي الضلعين الآخرين

$$|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$$

ثلاثيات فيثاغورس:

مضاعفات أطوال أضلاع

المثلث القائم الزاوية

(٣، ٤، ٥) تشكّل مثلثًا قائم

الزاوية أيضًا.

$$2 \times 5 = 10$$

$$2 \times 4 = 8$$

$$6 = 2 \times 3 = \text{س}$$

٤) أيُّ الأطوال التالية لا تمثل أطوال أضلاع مثلث قائم الزاوية؟

نظريه فيثاغورس

$$\begin{aligned} & \sqrt{16^2 + 12^2} \\ &= \sqrt{256 + 144} = \sqrt{400} \\ &= 20 \neq 24 \end{aligned}$$

(أ) (٢٤، ١٦، ١٢)

(ب) (٢٦، ٢٤، ١٠)

(ج) (٥١، ٤٥، ٢٤)

(د) (٣٠، ٢٤، ١٨)

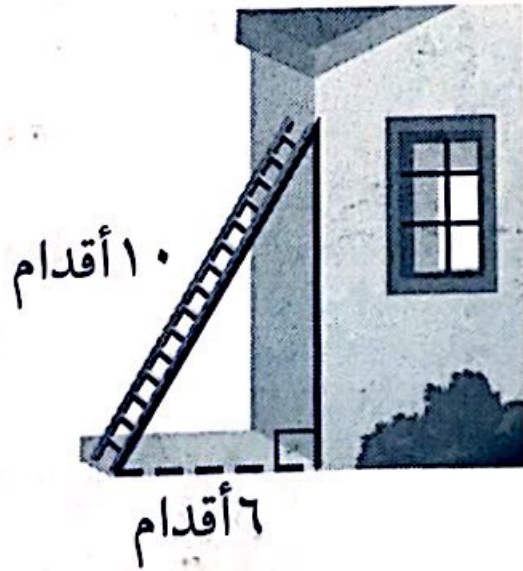
الاعداد الشهيرة في نظرية فيثاغورس

هناك ست عشر ثلاثة فيثاغورس حيث $c \leq 100$:

(5 , 4 , 3) (13 , 12 , 5) (7 , 24 , 25) (8 , 15 , 17)
(9 , 40 , 41) (11 , 60 , 61) (12 , 35 , 37) (13 , 84 , 85)
(16 , 63 , 65) (20 , 21 , 29) (28 , 45 , 53) (33 , 56 , 65)
(36 , 77 , 85) (39 , 80 , 89) (48 , 55 , 73) (65 , 72 , 97)

	5	4	3
2x ↘	10	8	6
3x ↘	15	12	9
4x ↘	20	16	12

إجابة قصيرة: وضع سلم طوله ١٠ أقدام على الحائط الرأسي لمنزل، بحيث تبعد حافة السلم السفلى ٦ أقدام من قاعدة المنزل.



على ارتفاع كم قدم من الحائط تصل حافة السلم العليا؟

من نظرية فيثاغورس

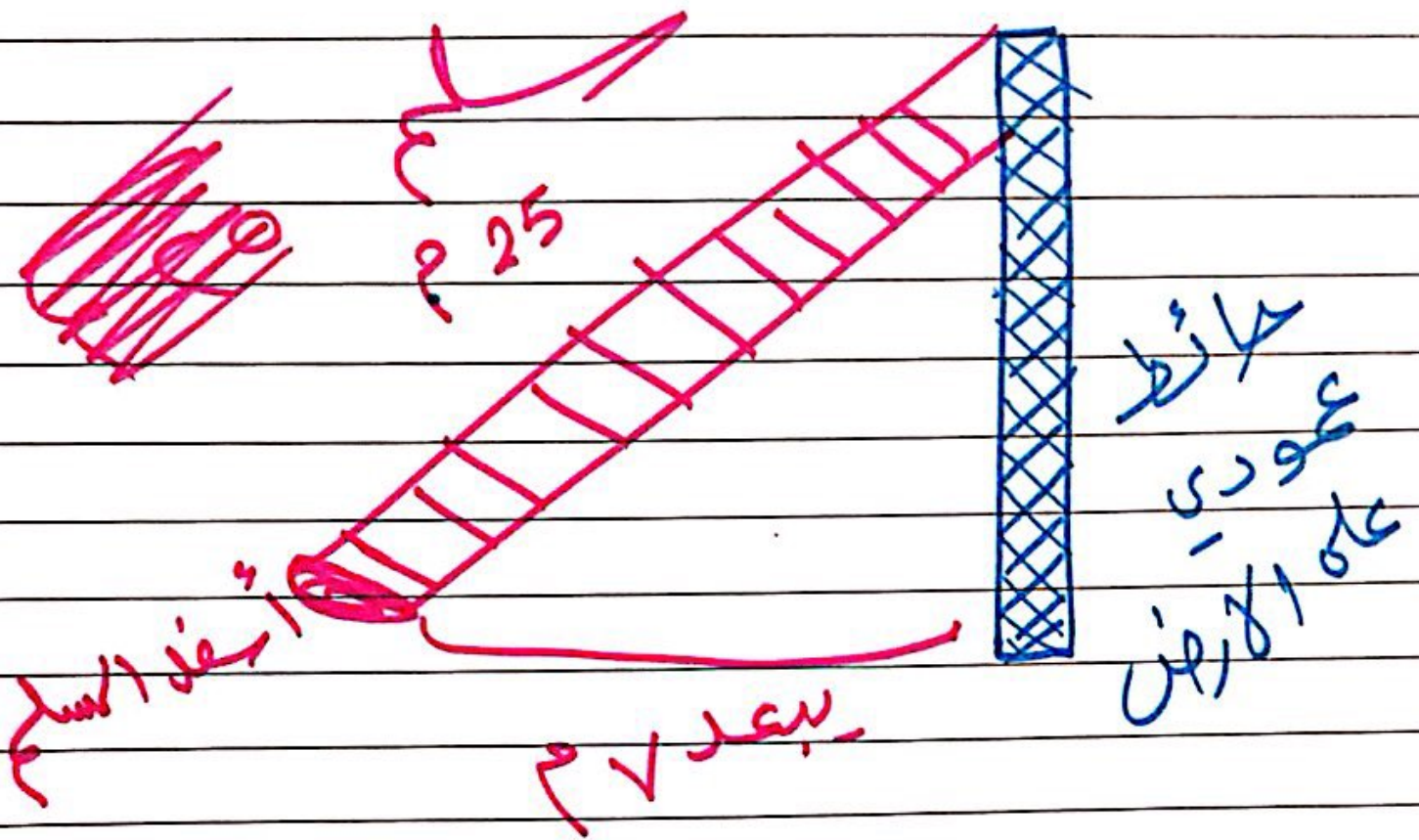
$$(\text{المجاور})^2 + (\text{المقابل})^2 = (\text{الوتر})^2$$

$$10^2 = x^2 + 6^2$$

$$x^2 = 100 - 36$$

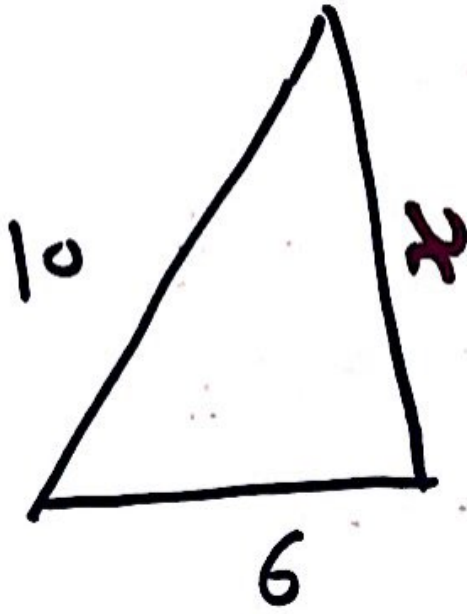
$$x^2 = 64$$

$$x = \sqrt{64} = \boxed{8}$$



من فيثاغورس

$$(25)^2 = (7)^2 + x^2$$



سہ المثلاثیں جسٹھوں

3, 4, 5

6, [8], 10

8)

اذا جاء عدد بين منفرها
بالنظر يكونه كل عدد
الثالث

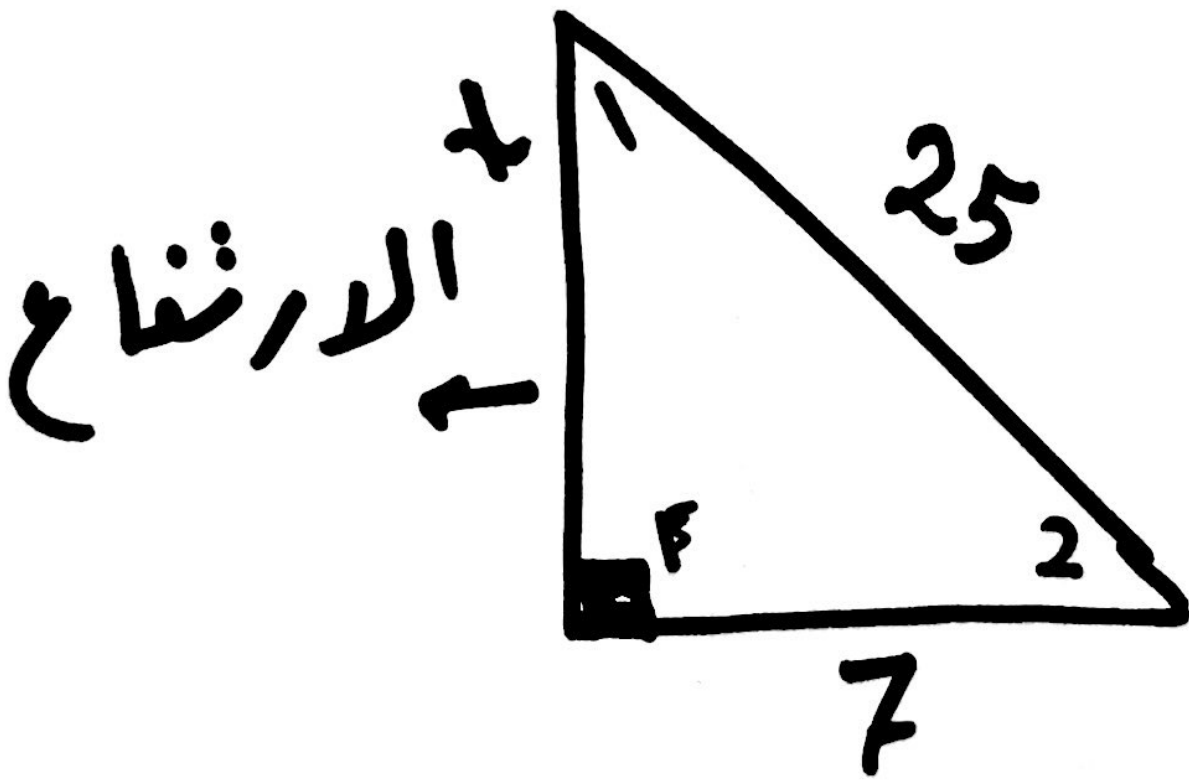
٥ يتكئ سلم طوله ٢٥ م على حائط عمودي بحيث
يبعد أسفل السلم ٧ م من الحائط، أوجد ارتفاع
الحائط.

(ج) ٣٢ م

(د) ٣٥ م

(أ) ٢٤ م

(ب) ٢٦ م



٩) تشابه المثلثات :

حالات التشابه :

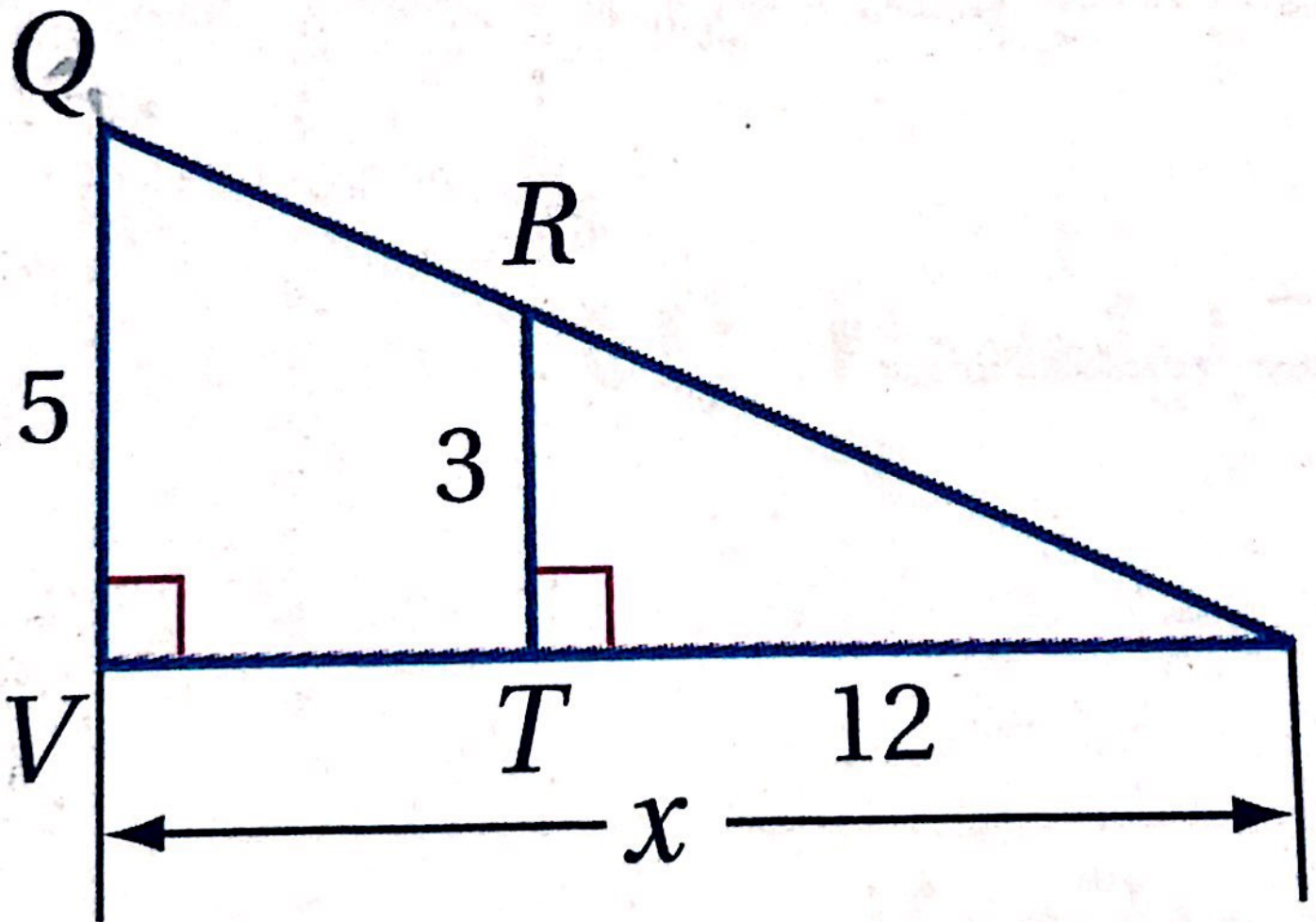
- (١) يتشابه مثلثان إذا تساوت زاويتان من المثلث الأول مع زاويتين في المثلث الثاني .
- (٢) يتشابه مثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما
- (٣) يتشابه مثلثان إذا تساوى قياس زاوية من مثلث وقياس زاوية من مثلث آخر و تناسبت أطوال الأضلاع التي تحويها هاتين الزاويتين فإن المثلثين يتشابهان .

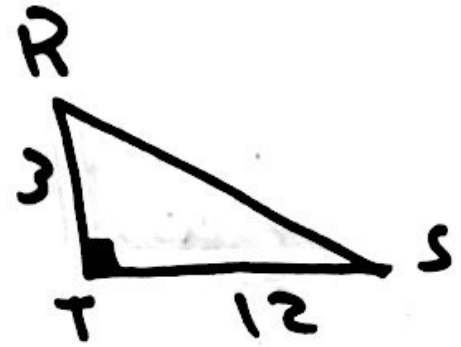
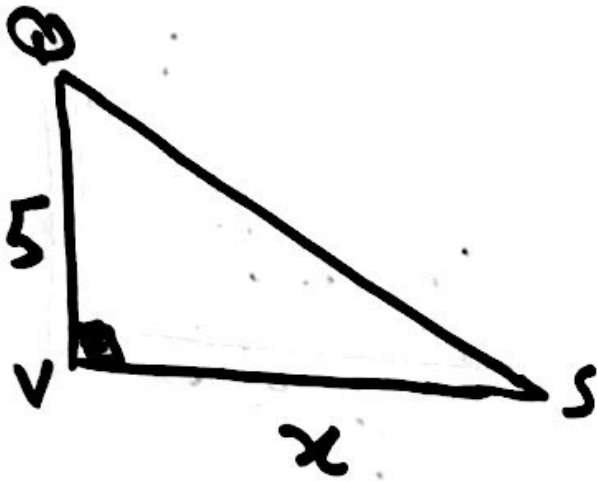
نظرية :

- (١) النسبة بين مساحتي مثلثين متشابهين **تساوي** مربع النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما .
- (٢) النسبة بين محيطي مثلثين متشابهين **تساوي** النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين فيهما .

$$\frac{\text{أحد أضلاع المثلث الصغير}}{\text{الضلع المناظر في المثلث الكبير}} = \frac{\text{ضلع آخر في المثلث الصغير}}{\text{الضلع المناظر في المثلث الكبير}}$$

التناسب يعني :





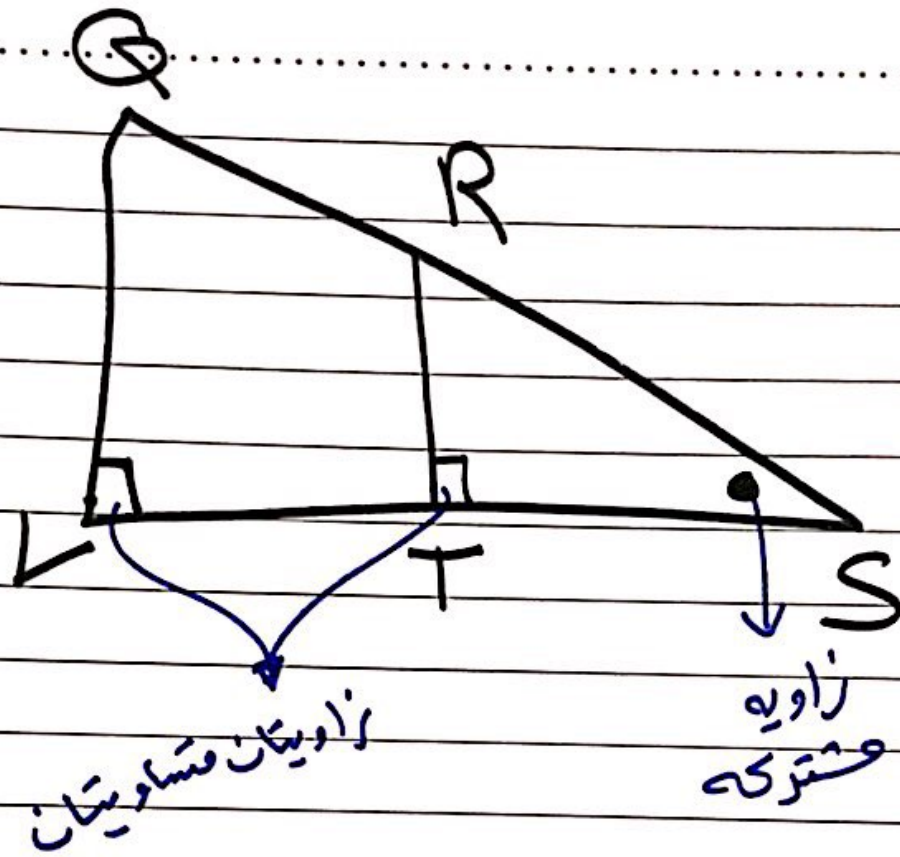
$$\frac{12}{x} = \frac{3}{5}$$

هذا * الصحيح لا هذا
~~هذا~~

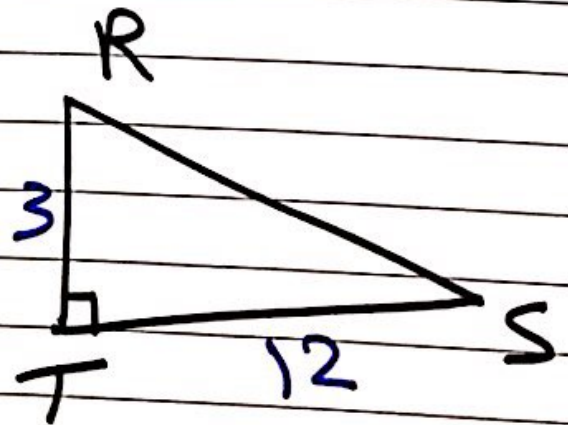
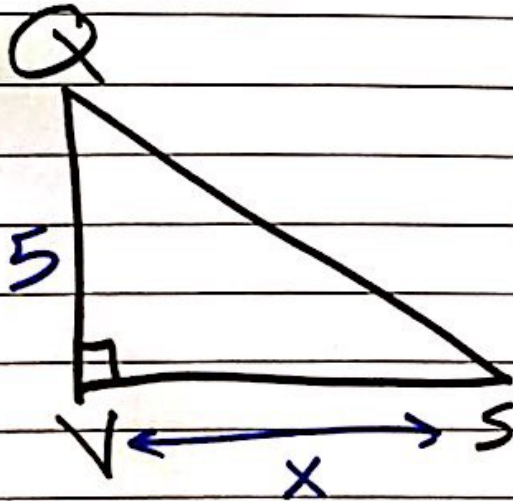
$$3x = 12 \times 5$$

$$3x = 60$$

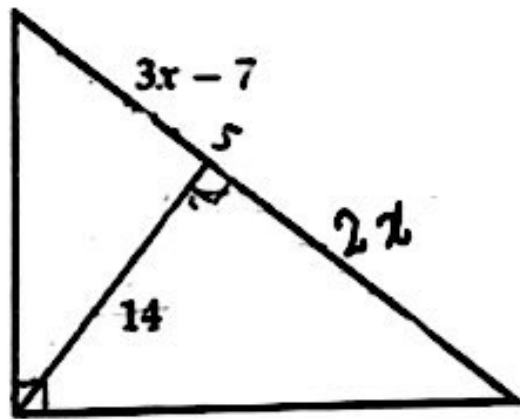
$$x = 20$$



۵۰: امثلتات متساویات



جد قيمة x في الشكل أدناه؟

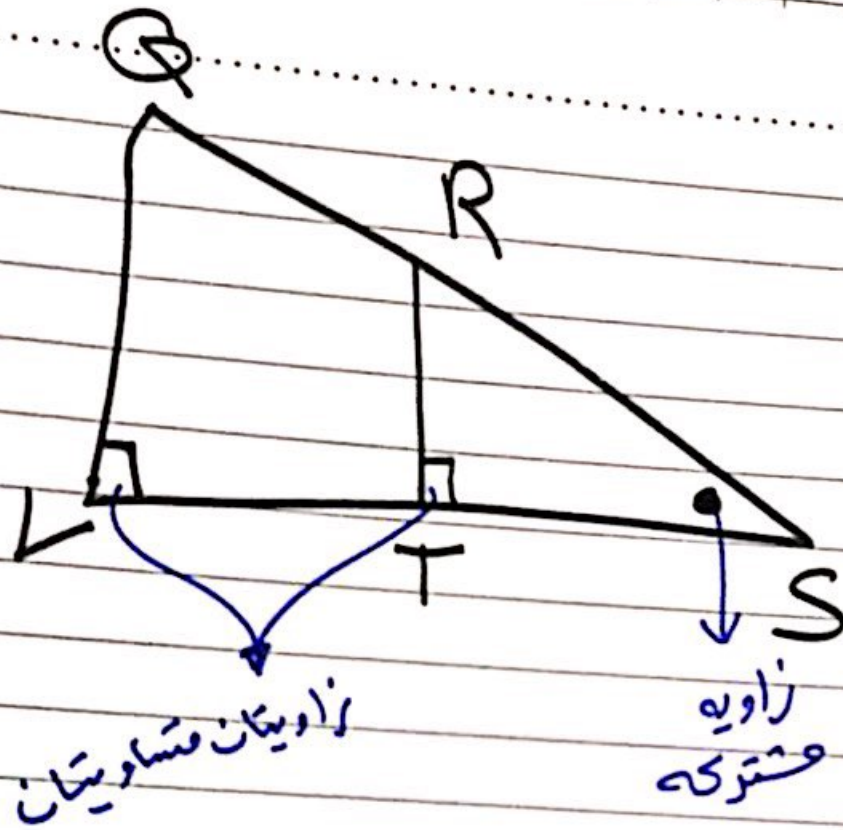


8

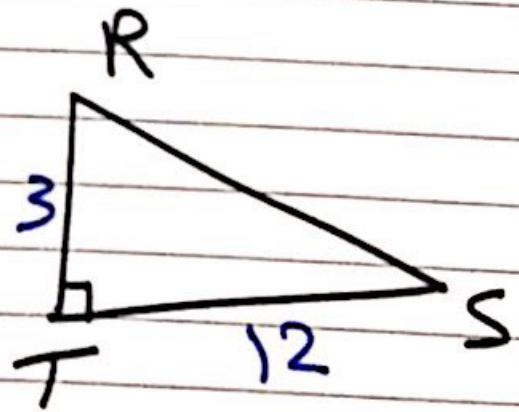
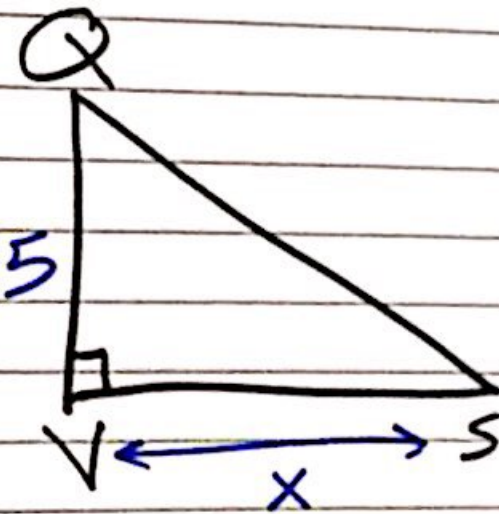
5

10

7



∴ المثلثان متشابهان



$$\frac{5}{x} = \frac{3}{12}$$

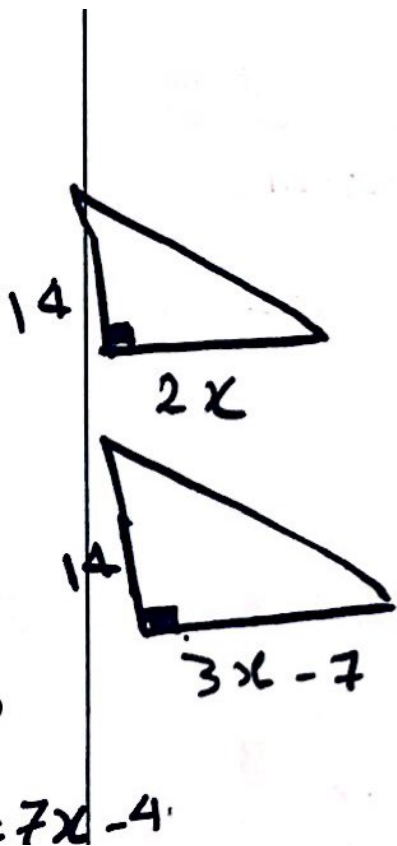
$$\frac{x}{5} = \frac{12}{3}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{x}{12}$$

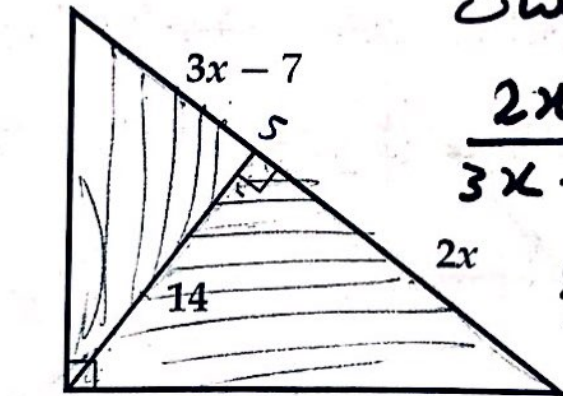
$$\frac{3}{5} = \frac{12}{x}$$



حله التناوب



(2) أوجد قيمة x في الشكل أدناه؟
معطاه: نسابه المثلثان



$$\frac{2x}{3x-7} = \frac{14}{5}$$

$$\frac{2x}{3x-7} = 1$$

$$2x = 3x - 7,$$

$$x = 7$$

8 C

5 A

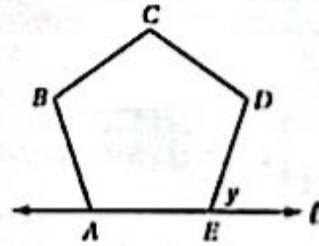
10 D

7

48) إذا كان مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع مثلي مجموع قياسات زواياه الخارجية، فما نوع هذا المضلع؟

- A مربع
B خماسي
C سلاسي
D ثنائي

49) اجابة قصيرة، الشكل $ABCDE$ خماسي منتظم، والمستقيم l يحوي \overline{AE} . ما قياس $\angle y$ ؟



48) قياس الزاوية الخارجيه لمضلع
منتظم عدد أضلاعه N يساوي

$$\frac{360}{n}$$

$$\angle y = \frac{360}{n} = 72$$

49) مجموع قياسات الزوايا الخارجيه
كأي مضلع منتظم = 360

مجموع قياسات الزوايا الداخليه لمضلع = 360×2

$$720 =$$

مجموع قياسات الزوايا الداخليه
للمربع = 360
 $\frac{(n-2) \cdot 180}{2}$ عدد الزوايا الداخليه

للمخماسي = 540

للسداسي = 720

نقاش

اليوم 14

(53) ما الشكل الذي يمكن أن يكون مثالاً مضاداً للتخمين الآتي؟
إذا كان قطراً شكل رباعي متطابقين فإنه مستطيل .

A المربع

B المعين

C متوازي الأضلاع

D شبه المنحرف المتطابق الساقين

مَنَال مَضَاد لِمَنْ لَيْسَ بِالشَّكْلِ الرَّبَاعِي
قَطْرَاهُ مِطَاقَانِ وَلَيْسَ مِصْطَبِي

١٥ طَمِينٌ قَطْرَاهُ لَيْسَ مِطَاقَانِ

٥ مَوَازِيهِ الدُّضَلَاخِ قَطْرَاهُ لَيْسَ مِطَاقَانِ .

٥ المَرْبِيعُ هُوَ الْمِصْطَبِي

٥ سَبْهُ الْمُنْعَرَفِ مِطَاقٌ السَّاحِيهِ قَطْرَاهُ

مِطَاقَانِ وَلَيْسَ مِصْطَبِي

هُوَ الَّذِي يَقِفُ الْغُرْضُ وَلَا يَقِفُ لِنَيْتِهِ

قطر



المربع

المعين

المستطيل

متوازي الاضلاع

متعاقدان

1. متعاقدان

متطابقين

1. ينصف كل منهما

الأخر

ومتطابقا

2. ينصف الزاويتين

2. يقسمه إلى

وينصف كل

الشيء يصل بين

مثلثين متطابقين

منها الآخر

رأسها

أضلاع



المربع

المعين

المستطيل

متوازي الاضلاع

جميع اضلاعه

جميع اضلاعه

كل ضلعين

كل ضلعين متقابلين

متطابقه

متطابقه

متقابلين

متطابقا ومتوازيين

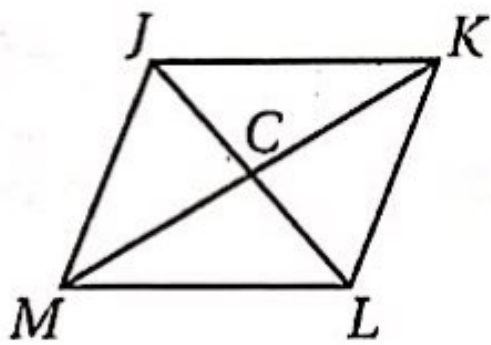
1. كل ضلعين فيه

متطابقا

متتاليين متطابقا

ومتوازيين

تدريب على اختبار



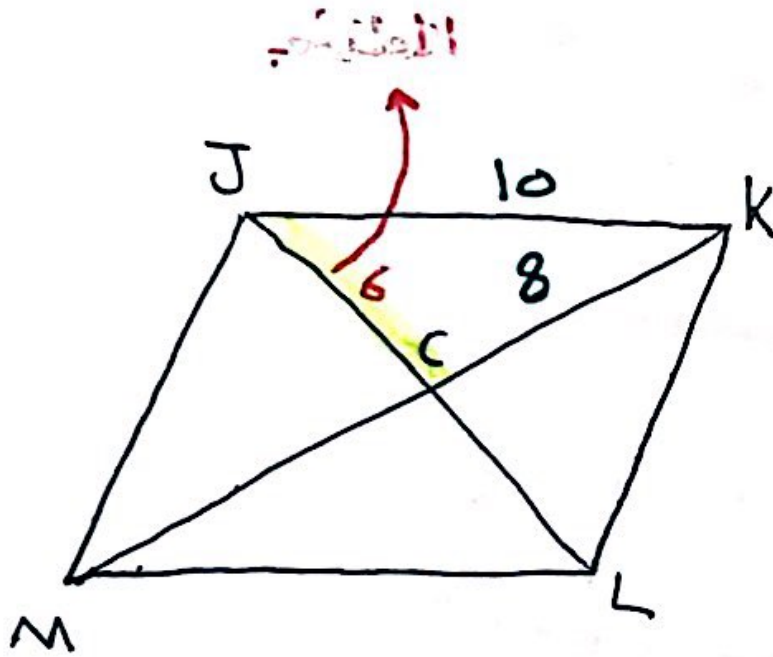
42) في المعين $JKLM$ ، إذا كان $JK = 10$ ، $CK = 8$ ، فأوجد JC .

8 **C**

4 **A**

10 **D**

6 **B**



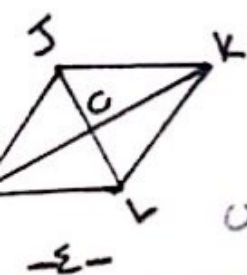
خاصية \Rightarrow : المعين قطره متعامدان

المثلث $\Delta K C J$

قائم .

مجموعات الأعداد 3, 4, 5 و 6, 8, 10

$$JC = 6$$



١٨- في المعين JKLM اذا كان $CK=8$ و $KJ=10$ فإن $JC=$ تساوي :-

10 (D) 8 (B) 6 (A)

نظرية فيثاغورس $JC = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$

السؤال الأول:- صغري علامة (ـ) أو (x) مع التصحيح:-

١- مجموع قياسات الزوايا الخارجية للمضلع المحدب يساوي $[360^\circ]$

٢- قطرا متوازي الاضلاع ينصف كل منهما الآخر

٣- قطرا متوازي الاضلاع يقسمه الى مثلثين متطابقين

٤- المستطيل هو متوازي الاضلاع زواياه الاربعة قوائم

٥- المعين هو متوازي الاضلاع جميع اضلاعه الاربعة متطابقه

٦- المربع هو متوازي الاضلاع جميع اضلاعه متطابقه وجميع زواياه قائمه

٧- المربع هو متوازي الاضلاع ومستطيل ومعين.

٨- اذا كان إحدى زوايا متوازي الاضلاع قائمة فإن زواياه الاربعة قوائم

٩- شكل الطائرة الورقية هو شكل رباعي يتكون من زوجين متمايزين من الاضلاع المتجاورة المتطابقه

١٠- القطعة المتوسطة لشبه المنحرف توازي كلا من القاعدتين وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين

١١- قطرا شكل الطائرة الورقية متعامدان وقطرا المعين متعامدان

السؤال الثاني:- أكمل الفراغات التالية:-

١- من خصائص متوازي الاضلاع كل ضلعين متقابلين متساويان .. وكل زاويتين متقابلتين متساويتان .. وكل زاويتين متجاورتين متممة ..

٢- قطر المضلع .. هو قطعة مستقيمة تصل بين رأسين غير متتاليين.

٣- اذا كان متوازي الاضلاع مستطيلاً فإن قطريه متساويان ..

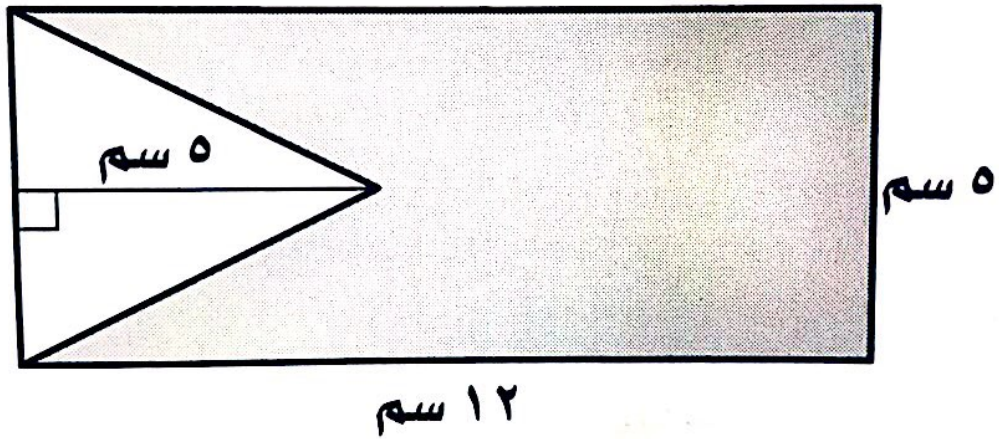
٤- اذا كان قطرا متوازي الاضلاع متطابقان فإنه مستطيل .. واذا كان قطرا متعامدان فإنه معين ..

٥- متوازي الاضلاع الذي اضلاعه الاربعة متطابقه يكون معيناً ..

٦- اذا كان الشكل الرباعي مستطيلاً ومعيناً فإنه مربع ..

٧- شبه المنحرف هو شكل رباعي فيه ضلعان فقط متوازيان يسميان قاعدتي .. شبه المنحرف ويسمى الضلعان غير المتوازيان جانبي .. شبه المنحرف

٧ تمَّ قَصُّ مثلث متطابق الضلعين من مستطيل كما في الشكل أدناه . ما مساحة الجزء المتبقي من المستطيل؟



(ج) ٥, ٤٧ سم^٢

(أ) ٦٠ سم^٢

(د) ٣٥ سم^٢

(ب) ٥٥ سم^٢

6 - 10

مساحة الجزء المظلّل =

7 -

مساحة المستطيل - مساحة

المثلث

$$\text{مساحة المستطيل} = 15 \times 5$$

$$= 75$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times 5 \times 5$$

$$= 12,5$$

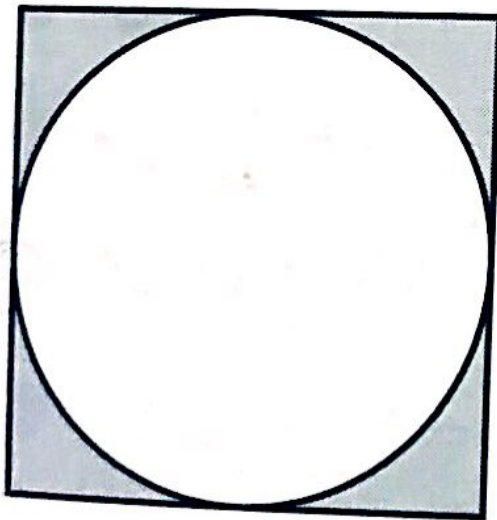
$$\therefore \text{مساحة الجزء المظلّل} = 75 - 12,5$$

$$= 62,5$$

٨

لوح خشبي مربع الشكل طول ضلعه متران، إذا قصَّ نجار دائرةً منه كما هو مبين في الشكل أدناه، فما مساحة الجزء المتبقي؟

(إرشاد: مساحة الدائرة: πr^2 ، $\pi \approx 3,14$)



٢ متر

(أ) ٨,٥٦

(ب) ٠,٨٦

(ج) ٢,٢٨

(د) ٣,١٤

٨/ المطلوب الجزء المصنل . .
∴ مساحة المربع - مساحة الدائرة

$$\text{مساحة المربع} = ٢^2 = ٤$$

مساحة الدائرة = نصف قطر مربع $\times \pi$

$$\text{طول القطر} = ٢$$

$$\text{نصف} = ١$$

$$\therefore ١ \times ٣,١٤$$

$$٣,١٤$$

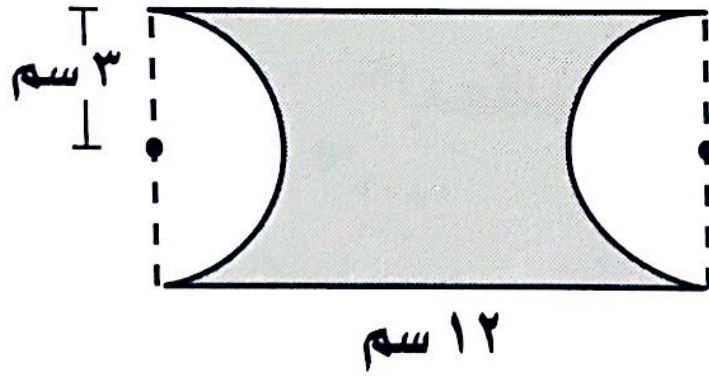
$$\text{مساحة الجزء المصنل} = ٤ - ٣,١٤$$

$$,٨٦$$

الم د ب

٥

ما مساحة الجزء المظلل في الشكل أدناه، مقرباً
إجابتك إلى أقرب جزء من عشرة؟

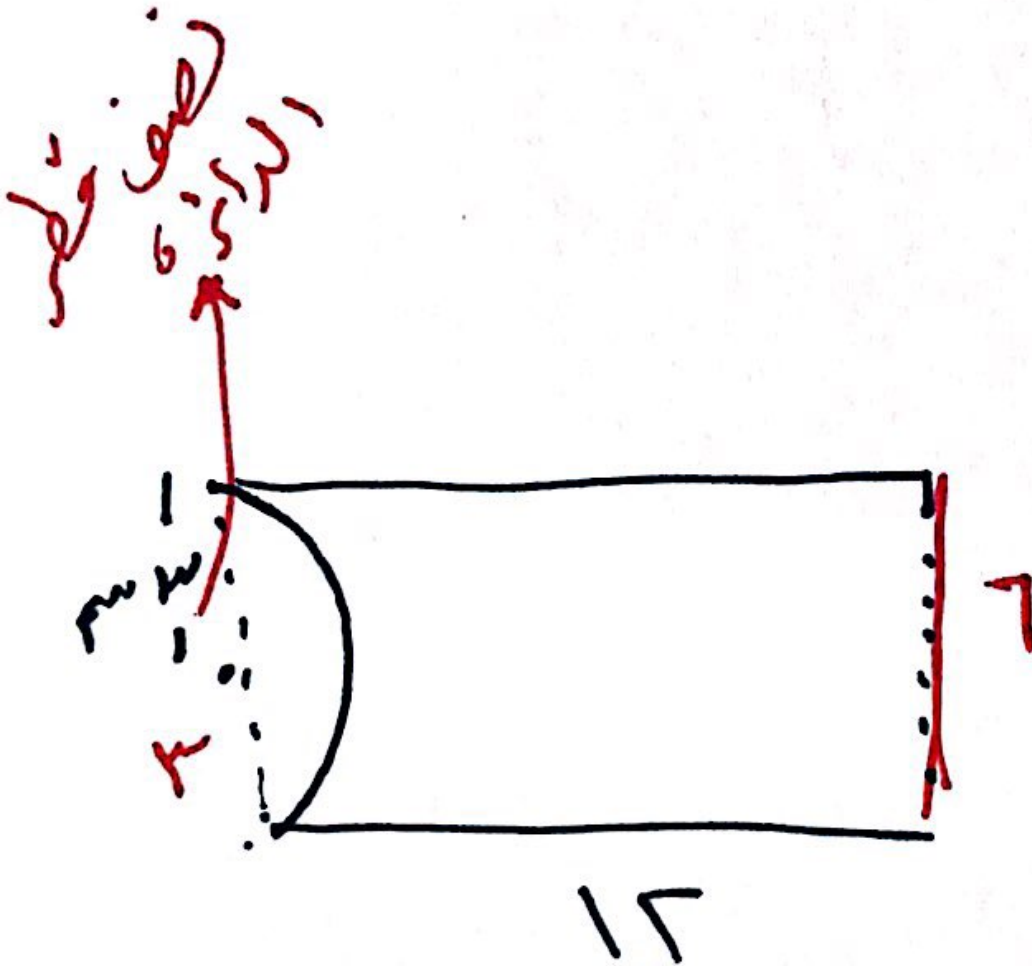


(ج) ٧, ٤٣ سم^٢

(د) ٠, ٤١ سم^٢

(أ) ٤, ٧ سم^٢

(ب) ٥, ١٥ سم^٢



٥ - ساعة الجرد بالمثل =

ساعة التشغيل - ساعة الدائرة

ساعة التشغيل = 12×6

$$= 72$$

ساعة الدائرة = $31 \times 3,12$

$$= 96,72$$

∴ ساعة الجرد بالمثل :

$$72 - 96,72$$

$$= -24,72$$

$$= \underline{24,72}$$

السؤال	الحل
<p>1. ما أكبر مساحة بالسنتيمتر المربع لمستطيل محيطه 24 سم ؟</p> <p>أ) 24</p> <p>ب) 30</p> <p>ج) 36</p> <p>د) 42</p>	

مرحلة لتسطيل = $2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$

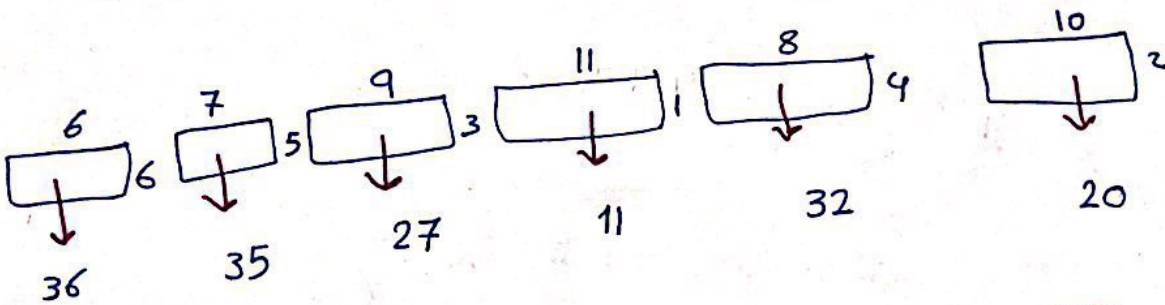
$$24 = 2 \times (\text{الطول} + \text{العرض})$$

$$\underline{\text{الطول} + \text{العرض}} = 12$$

$$\begin{aligned} &= (6 + 6), \Rightarrow 6 \times 6 = \boxed{36} \Rightarrow \\ &(10 + 2) \Rightarrow 10 \times 2 = 20 \\ &(8 + 4) \Rightarrow 8 \times 4 = 32 \\ &(7 + 5) \Rightarrow 7 \times 5 = 35 \end{aligned}$$

ما أكبر مساحة بالسلم لتتغير محيط 24 سم ؟
 محيط = 24 أي مجموع الأربعة الأضلاع .

مجموع الضلعين = 12



المساحة
 الطول × العرض

الا جانب (36) مفرقة ج.

2. نسبة المستطيل إلى عرضه هي 12:5 ، إذا كانت مساحة المستطيل 240cm^2 ، فكم طول قطر المستطيل بالسنتيمتر ؟

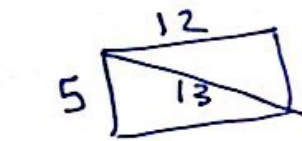
أ) 26
ب) 28
ج) 30
د) 32

نسبة طول المستطيل إلى عرضه هي 12:5 إذا كانت مساحة
المستطيل 240 cm^2

نصم طول وقطر المستطيل

$$\frac{\text{طول المستطيل}}{\text{العرض}} = \frac{12}{5} \quad \text{الطول 12 والعرض 5 والقطر 13}$$

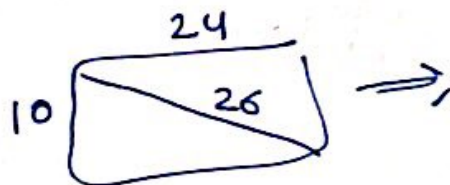
∴ المساحة = 60



لكن المساحة 240

$$\frac{240}{60} = 4 = 2 \times 2$$

↓ ↓
الطول العرض



الطول 24
العرض 10
القطر 26
المساحة 240

الاجابة

القطر 26

مساحة المستطيل = الطول \times العرض

$$12x \times 5x = 240$$

$$60x^2 = 240$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2 \rightarrow \text{نضربه في } 12, 5$$

... نثبت قائمتنا إذاً من نظرية

بيثاغورس :

$$(12 \times 2)^2 + (5 \times 2)^2 = \text{الوتر}$$

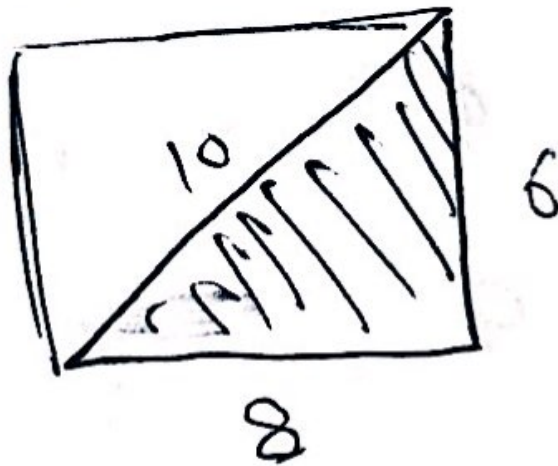
$$(24)^2 + (10)^2 = \text{الوتر}$$

$$576 + 100 = \text{الوتر}$$

$$\sqrt{676} = 26 \rightarrow \text{القطر}$$

	<p>4. مثلث قائم الزاوية اطوال اضلاعه 6,8,10 مساحة المستطيل تساوي ضعف مساحة المثلث حيث طول ضلع المستطيل 6cm ، احسب محيط المستطيل</p> <p>(أ) 25</p> <p>(ب) 27</p> <p>(ج) 28</p> <p>(د) 30</p>
--	---

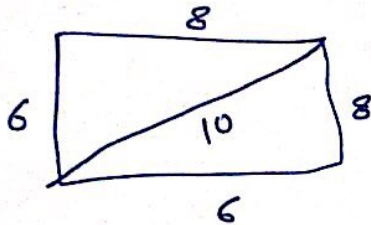
4 15



$$(6 + 8) \times 2 = \text{perimeter!}$$

$$(14) \times 2 =$$

28



مساحة المستطيل = (مساحة المثلث)

$$= \left(\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع} \right)$$

$$= \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$48 = 6 \times 8 =$$

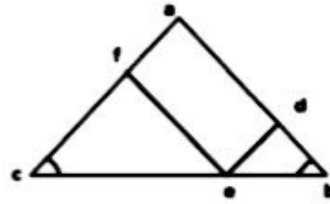
مساحة المستطيل = الطول \times العرض

$$48 = 6 \times 8 =$$

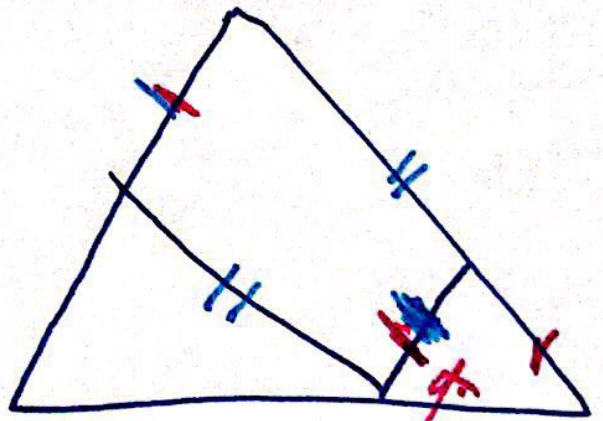
$$28 = 8 + 8 + 6 + 6 = \text{محيط المستطيل}$$

أو

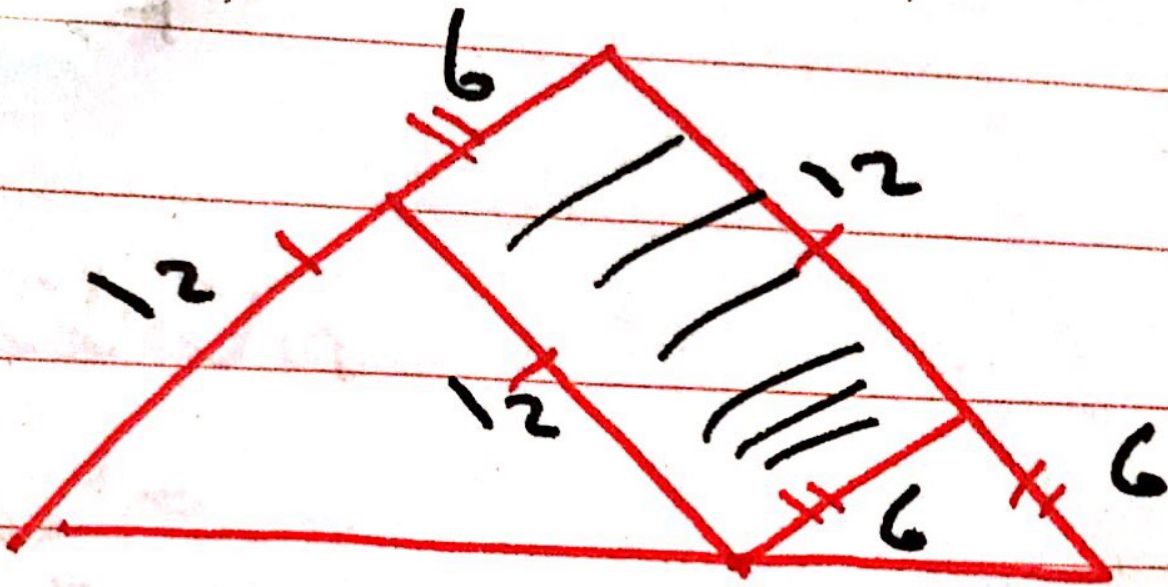
5. في الشكل أدناه abc مثلث متطابق الضلعين ، إذا كان $ab=ac=18\text{cm}$ ، فما محيط متوازي الاضلاع ade ؟



- 32 (أ)
- 34 (ب)
- 36 (ج)
- 38 (د)



فإنه متطابق لإحدى



$$12 + 6 + 12 + 6 = 36$$

6. مثلث قاعدته تساوي 7cm ومساحة المثلث يساوي مساحة دائرة نصف قطرها 7cm , لحسب ارتفاع المثلث

أ) 7π

ب) 12π

ج) 14π

د) 18π

$$7^2 \pi = \text{مساحة الدائره}$$

$$49\pi =$$

$$\text{مساحة المثلث} = \frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$49\pi = \frac{1}{2} \times 7 \times \text{الارتفاع}$$

$$\frac{7}{2} \times \text{الارتفاع} = 49\pi$$

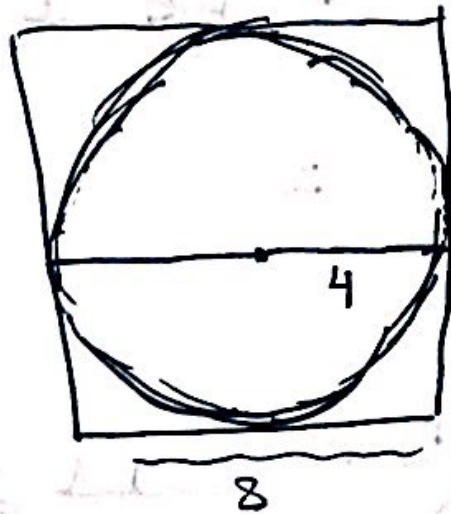
$$\text{الارتفاع} = \frac{2}{7} \cdot 49\pi$$

$$\text{الارتفاع} = 14\pi$$

7. إذا كان ضلع المربع يساوي قطر الدائرة وكانت مساحة الدائرة تساوي 16π فكم مساحة المربع

- (أ) 42
(ب) 62
(ج) 64
(د) 76

سؤال 7 :



$$\text{مساحة الدائرة} = r^2 \pi$$

$$\frac{r^2 \pi}{\pi} = \frac{16 \pi}{\pi}$$

$$r^2 = 16$$

$$r = 4$$

طول القطر = 8

$$\underline{64} = \text{مساحة المربع}$$

السؤال الثالث - اختاري الاجابة الصحيحة :-

* في الشكل الرباعي ABCD شبه منحرف متطابق الساقين

١- الزاوية التي تطابق C هي :-

(A) الزاوية A (B) الزاوية B

٢- الضلع الذي يوازي AB هو :-

(A) DC (B) AC

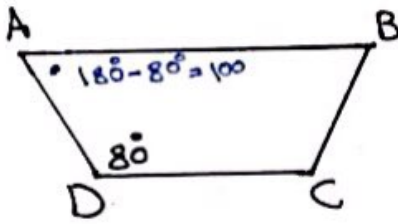
(C) BC

٣- اذا كان $m\angle D$ تساوي 80° فإن قياس الزاوية A تساوي :-

(A) 80° (B) 100° (C) 120°

٤- اذا كان $m\angle D$ تساوي 80° فإن قياس الزاوية C تساوي :-

(A) 80° (B) 100° (C) 120°



(C) الزاوية D

* اذا كان ABCD على شكل طائرة ورقية

٥- طول BC متساوي :-

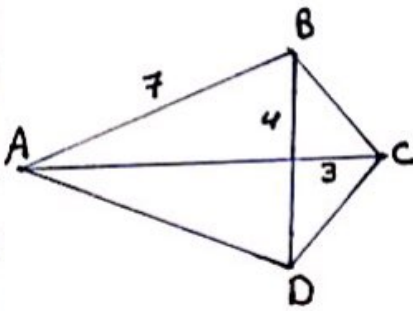
(A) 5 (B) 3 (C) 4

٦- اذا كان طول AB يساوي 7 فإن طول AC يساوي :-

(A) 5 (B) 7 (C) 12

٧- اذا كان $m\angle B = 120^\circ$ فإن قياس الزاوية D تساوي :-

(A) 80° (B) 108° (C) 120°



$$S = (n-2) \times 180^\circ$$

$$(5-2) \times 180^\circ = 3 \times 180^\circ = 540^\circ$$

٨- مجموع قياسات الزوايا الداخلية للمضلع الخماسي :-

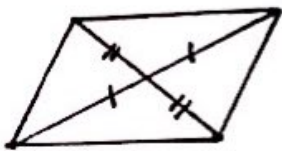
(A) 504 (B) 540 (C) 360

٩- مجموع قياسات الزوايا الداخلية لمضلع منتظم ذي 12 ضلعاً :-

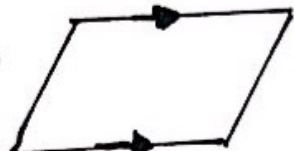
$$S = (12-2) \times 180^\circ = 10 \times 180^\circ = 1800$$

(A) 540 (B) 1800 (C) 1080

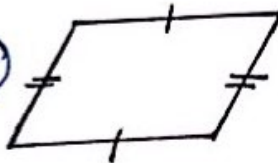
١٠- أي من الأشكال التالية ليس متوازي الأضلاع :-



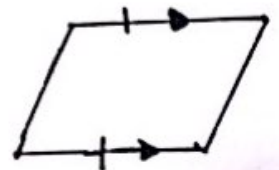
(a)



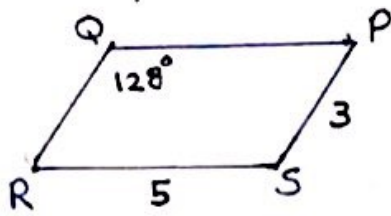
(b)



(c)



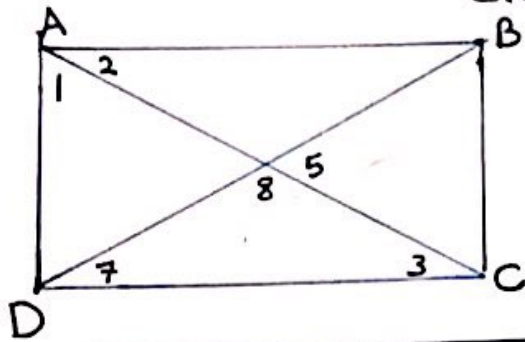
(d)



٨- اذا كان PQRS متوازي الاضلاع فإن :-

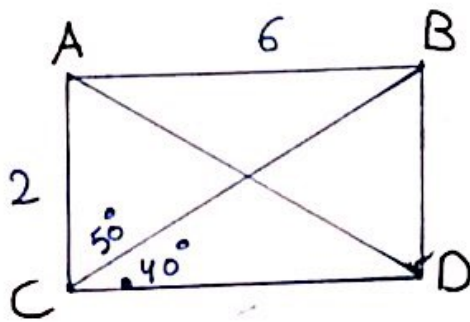
- ١- $\angle R$ يساوي ... 3 ...
- ٢- $\angle P$ يساوي ... 5 ...
- ٣- $m\angle R$ تساوي $52^\circ = 180^\circ - 128^\circ$ متكاملتان
- ٤- $m\angle S$ تساوي 128° متقابلتان

٩- في المستطيل ABCD اذا كان $m\angle 2 = 40^\circ$ فإن :-



- ١- $m\angle 1$ تساوي $50^\circ = 90^\circ - 40^\circ$
- ٢- $m\angle 3$ تساوي 40°
- ٣- $m\angle 8$ تساوي $100^\circ = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ$ (مثلث)
- ٤- $m\angle 5$ تساوي $80^\circ = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ$ (مثلث)

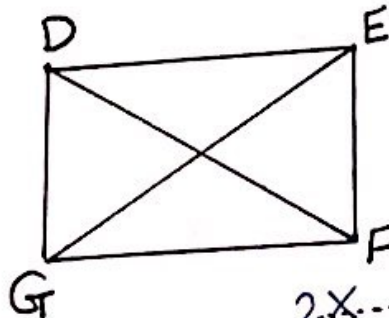
١٠- في المستطيل ABCD الذي فيه :-



$m\angle ACB = 50^\circ$ و $AC = 2$ و $AB = 6$ فأوجد :-

- ١- طول BD ... 2 ...
- ٢- طول CD ... 6 ...
- ٣- $m\angle BCD$ تساوي $40^\circ = 90^\circ - 50^\circ$

١١- في الشكل الآتي :-



١- اذا كان $EG = x+5$ و $FD = 3x-7$ فإن طول القطران متساويان

$$\frac{x+5}{2} = \frac{3x-7}{2}$$

$$x+5 = 3x-7$$

$$6+5 = 11$$

$$3x-7 = x+5$$

$$3x-x = 5+7$$

$$2x = 12$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow x = 6$$

٢- اذا كان $EF = 2x$ و $DG = x+5$ فإن طول الاضلاع متساوية

$$2x = x+5$$

$$2x-x = 5$$

$$x = 5$$

$$2x = x+5$$

$$2x-x = 5$$

$$x = 5$$

الاضلاع متطابقة

$$5x = x + 8$$

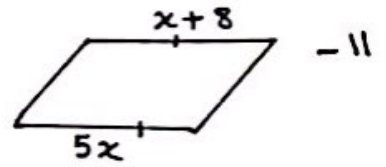
$$5x - x = 8$$

$$\frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$$x = 2$$

$$x = 8 \text{ (C)}$$

قيمة المتغير x في الشكل :-



$$x = 2 \text{ (B)}$$

$$x = 4 \text{ (A)}$$

الزوايا متقابلتان ومجموعهم 180°

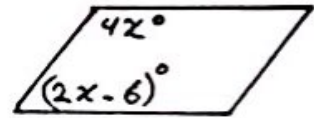
$$(4x) + (2x - 6) = 180^\circ$$

$$6x - 6 = 180^\circ$$

$$6x = 180^\circ + 6 = 186 \Rightarrow x = 31$$

$$x = 31 \text{ (C)}$$

١٢- قيمة المتغير x في الشكل :-



$$x = -3 \text{ (B)}$$

$$x = 3 \text{ (A)}$$

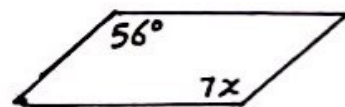
الزوايا متقابلتان متساوية

$$\frac{7x}{7} = \frac{56}{7}$$

$$x = 8$$

$$x = 7 \text{ (C)}$$

١٣- قيمة المتغير x في الشكل :-



$$x = 6 \text{ (B)}$$

$$x = 8 \text{ (A)}$$

١٤- احداثي نقطة تقاطع قطري $ABCD$ الذي رؤوسه :- $AC = (\frac{x+x}{2}, \frac{y+y}{2})$ نقطة المنتصف

$$= (-\frac{4+4}{2}, \frac{6-2}{2}) = (0, 2) \quad A(-4, 6), B(5, 6), C(4, -2), D(-5, -2)$$

$$BD = (\frac{-5+5}{2}, \frac{6-2}{2}) = (0, 2) \quad (4, 0) \text{ (C)}$$

$$(-4, 3) \text{ (B)}$$

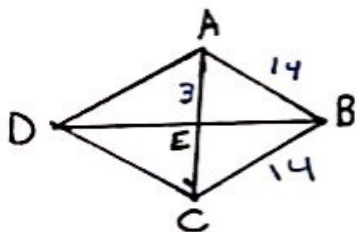
$$(0, 2) \text{ (A)}$$

١٥- في الشكل $ABCD$ معين. اذا كان $AB = 14$ فإن طول BC يساوي :-

$$14 \text{ (C)}$$

$$16 \text{ (B)}$$

$$7 \text{ (A)}$$



١٦- اذا كان AE تساوي 3 فإن طول AC يساوي :-

$$6 \text{ (C)}$$

$$4 \text{ (B)}$$

$$3 \text{ (A)}$$

١٧- قياس $\angle AEB$ يساوي :-

$$90^\circ \text{ (C)}$$

$$45^\circ \text{ (B)}$$

$$180^\circ \text{ (A)}$$

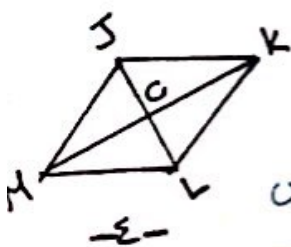
١٨- في المعين $JKLM$ اذا كان $CK = 8$ و $JK = 10$ فإن JC يساوي :-

$$10 \text{ (D)}$$

$$8 \text{ (B)}$$

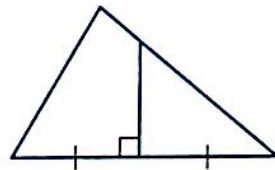
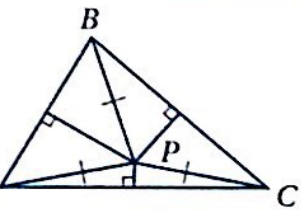
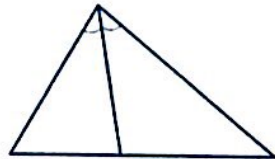
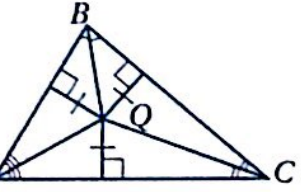
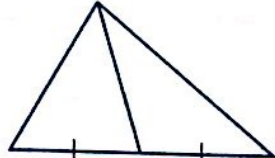
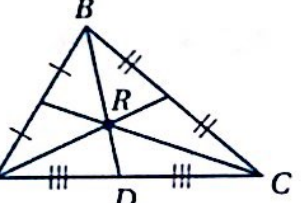
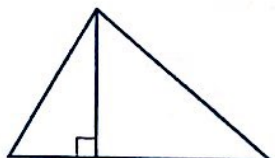
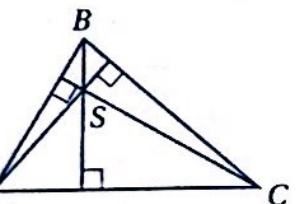
$$6 \text{ (A)}$$

$$JC = \sqrt{10^2 - 8^2} = \sqrt{100 - 64} = \sqrt{36} = 6$$



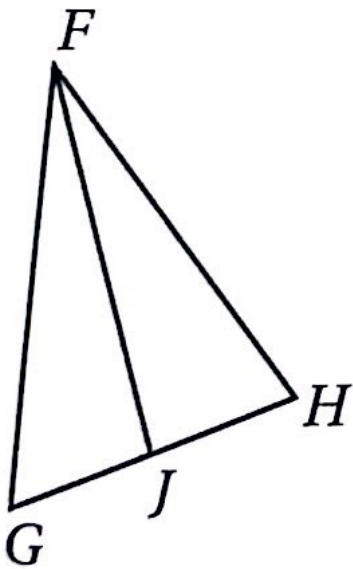
نقاش

اليوم 15

المفهوم	مثال	نقطة التلاقي	الخاصية	مثال
العمود المنصف		مركز الدائرة الخارجية للمثلث	P مركز الدائرة الخارجية لـ $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من رؤوس المثلث.	
منصف الزاوية		مركز الدائرة الداخلية للمثلث	Q مركز الدائرة الداخلية في $\triangle ABC$ ، وتقع على أبعاد متساوية من أضلاع المثلث.	
القطعة المتوسطة		مركز المثلث	R مركز $\triangle ABC$ ، وتبعد عن كل رأس ثلثي طول القطعة الواصلة بين ذلك الرأس ومنتصف الضلع المقابل له.	
الارتفاع		ملتقى الارتفاعات	تلتقي المستقيمات التي تحوي ارتفاعات $\triangle ABC$ عند النقطة S ، وتسمى ملتقى الارتفاعات.	

تدريب على اختبار

(31) في الشكل المجاور، إذا كان $\overline{GJ} \cong \overline{HJ}$ ،
فأي عبارة مما يأتي صحيحة؟



- A \overline{FJ} ارتفاع لـ $\triangle FGH$
- B \overline{FJ} منصف زاوية في $\triangle FGH$
- C \overline{FJ} قطعة متوسطة في $\triangle FGH$
- D \overline{FJ} عمود منصف في $\triangle FGH$

\overline{BCA} در قطاع \leftarrow کیون عمودین و ضامانیہ ایں مصیبات تقول اہ طستقیم عمودین
 \overline{AB} آنصف سے نصف زاویہ نفسی

\overline{FJ} قطع مستقیم سے تقسیم ضلع مقابل للزاویہ

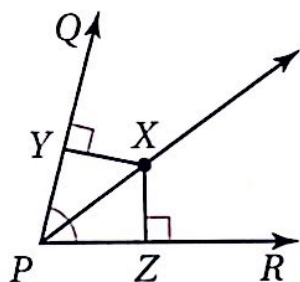
\overline{FJ} عمود نصف سے لے کر شرط یخرج الرأس ولا بد ان یکون ضی علامہ
 السامد الربیع الصغیر

∴ لاجاہ ہی \overline{FJ} قطع متوسلہ فی $\triangle FGH$
 لادہ ذکر فی سوال ان $\overline{FJ} \approx \overline{GH}$

4.4 نظرية منصف الزاوية

كل نقطة تقع على منصف زاوية تكون على بُعدين متساويين من ضلعيها.

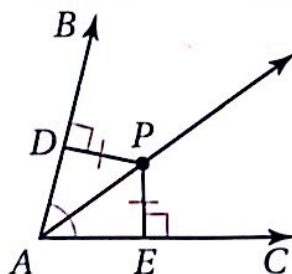
مثال: إذا كان \overrightarrow{BF} منصفاً لـ $\angle DBE$ ، وكان $\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}$ ، $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}$ فان $DF = FE$.



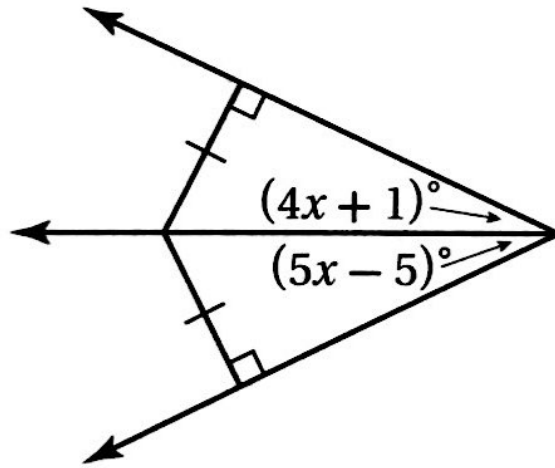
4.5 عكس نظرية منصف الزاوية

كل نقطة تقع داخل الزاوية وتكون على بُعدين متساويين من ضلعيها فإنها تكون واقعة على منصف الزاوية.

مثال: إذا كان $\overrightarrow{FD} \perp \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{BE}, DF = FE$ فإن \overrightarrow{BF} ينصف $\angle DBE$



اقراء كل سؤال مما يأتي، ثم حدّد رمز الإجابة الصحيحة:
(1) أوجد قيمة x .



3 **A**

4 **B**

5 **C**

6 **D**

حذف الزاوية :

أي بقسم الزاوية إلى

قسمين متساويين

ويكون على بعدين متساويين

من ضلعيها .

$$4x + 1 = 5x - 5$$

$$\boxed{x = 6} \Rightarrow \text{الحل}$$

$$4(6) + 1 = 24 + 1 = 25$$

$$5(6) - 5 = 30 - 5 = 25$$

3) أيُّ مما يأتي أفضل وصف لأقصر مسافةٍ من أحد رؤوس مثلثٍ إلى الضلع المقابل له؟

A ارتفاع

B عمود منتصف

C قطعة متوسطة

D قطعة مستقيمة

الكل

محمودية

* الدار شفاع

هذا أحد رؤوس المثلث إلى الضلع المقابل له .

* محمود حذيف :

ليس بالضرورة أنه يكون من أحد رؤوس المثلث

* قطعة متوسطة :

من أحد رؤوس المثلث إلى منتصف الضلع
المقابل له .

* القطعة المستقيمة :

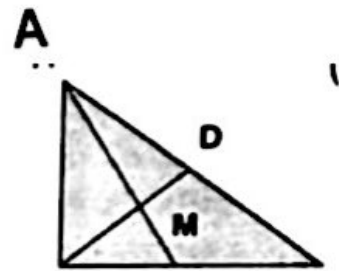
خط مستقيم يمر بنقطتين

$$|DC| \frac{1}{3} = |DM| \leftarrow \text{من تعريف القطع المتوسط}$$

$$\Rightarrow |DC| = 3|DM|$$

$$\xRightarrow{\text{مطبق الإصلاخ } \Delta CDB} |AB| = 2|DC| = 2[3|DM|]$$

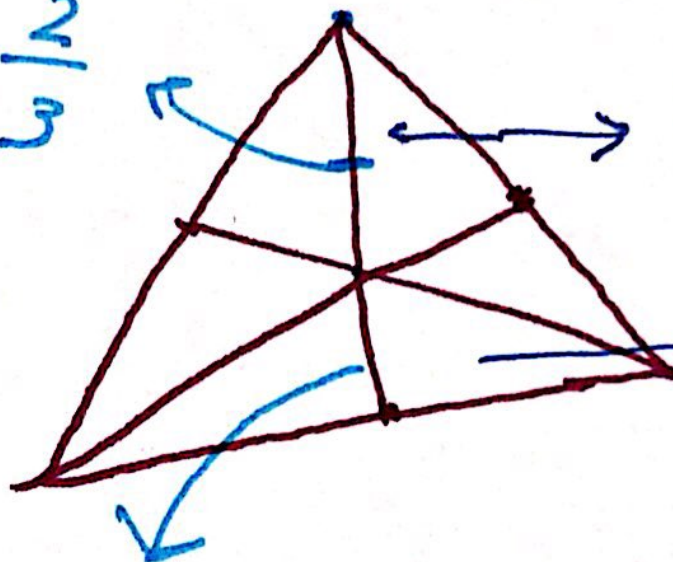
$$\Rightarrow |AB| = 6|DM|$$



مثلث ABC قائم الزاوية في C فإذا
 نقت M نقطة التقاء القطع المتوسطة
 $|CD|$, $|AH|$ فإن طول $|AB|$ هو

- $2|DM|$ •
- $3|DM|$ •
- $5|DM|$ •
- $6|DM|$ •

$\frac{2}{3}$ من الرأس
 إلى
 نقطة الالتقاء



$\frac{1}{3}$ من الضلع
 إلى نقطة
 الالتقاء

$|CD| \Rightarrow$ قطعه متوسطه

$$|CD| = 3 |MD|$$

$AB \Rightarrow$ وتر في
المثلث قائم

* قاعدة
أي مثلث قائم الزاوية المقطع
المتوسطه فيه تساوي نصف
الوتر

$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$|CD| = \frac{1}{2} |AB|$$

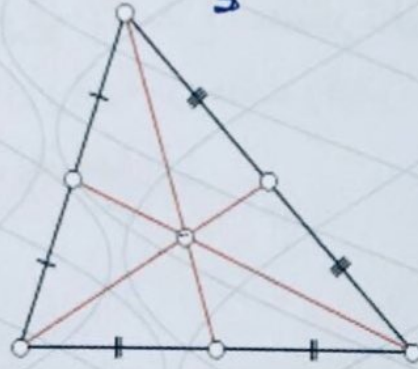
قطعه متوسطه وتر

$$2 \cdot 3 |MD| = 2 \cdot \frac{1}{2} |AB|$$

$$6 |MD| = |AB| \quad \therefore$$

٨) العلاقات في المثلث :

متوسطات المثلث تلتقي جميعاً في نقطة واحدة ، وتقسم كل منها بنسبة $1 : 3$ من جهة القاعدة
المسافة من نقطة التقاطع إلى ضلع المثلث $= \frac{1}{3}$ المسافة من نقطة التقاطع إلى رأس المثلث



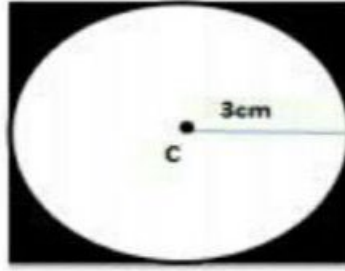


أولاً : محيط ومساحة الدائرة

إذا كان السؤال دائرة مرسومة داخل مربع
قيمة قطر الدائرة تكون نفسها طول ضلع
المربع (القطر يوازي ضلع المربع)

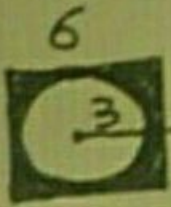
وإذا كان المطلوب الجزء المضلل:
نطرح مساحة الدائرة من مساحة المربع
(طول الضلع تربيع)

1. في الشكل أدناه ، نسبة مساحة المنطقة المظلمة إلى مساحة الدائرة التي مركزها C تساوي :



- (أ) $1 - \frac{4}{\pi}$
 (ب) $1 - \frac{\pi}{4}$
 (ج) $4 - \frac{1}{\pi}$
 (د) $1 - 4$

في الشكل أدناه نسبة مساحة المنطقة المظلمة إلى مساحة الدائرة التي مركزها C تساوي .



نصف = 3 سم
 القطر = ضلع المربع = 6 سم

① مساحة المربع = $6 \times 6 = 36$

② مساحة الدائرة = $\pi r^2 = 9\pi$

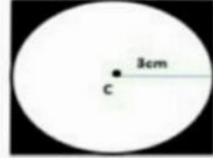
③ المساحة المظلمة = مساحة المربع - مساحة الدائرة

= $36 - 9\pi$

النسبة = $\frac{36 - 9\pi}{9\pi} = \frac{4(4 - \pi)}{9\pi}$

= $1 - \frac{4}{\pi}$

الدائرة

السؤال	الحل
<p>1. في الشكل أدناه ، نسبة مساحة المنطقة المظللة إلى مساحة الدائرة التي مركزها C تساوي :</p>  <p> $\frac{4}{\pi} - 1$ (أ) $1 - \frac{4}{\pi}$ (ب) $4 - \frac{1}{\pi}$ (ج) $\frac{1}{\pi} - 4$ (د) </p>	<p>نص القطر = 3 القطر = ضلع المربع = 6</p> <ul style="list-style-type: none"> • مساحة المربع = $6 \times 6 = 36$ • مساحة الدائرة = $\pi r^2 = 9\pi$ • مساحة المنطقة المظللة = مساحة المربع - مساحة الدائرة $\implies 36 - 9\pi$ • نسبة مساحة المنطقة المظللة الى مساحة الدائرة $\implies \frac{36 - 9\pi}{9\pi} = \frac{9(4 - \pi)}{9\pi} = \frac{4 - \pi}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1$

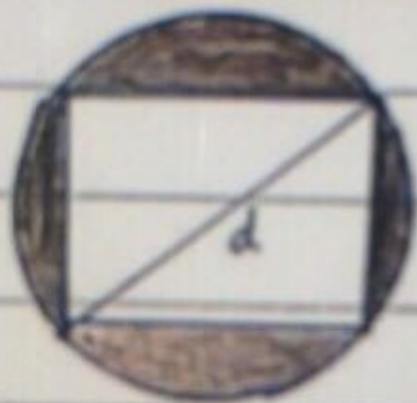
إذا السؤال بدون نسبة نكتفي ونطلع الجزء المضلل

إذا طالب نسبة

ناخذ الناتج ونقسمه على المساحة المطلوبة

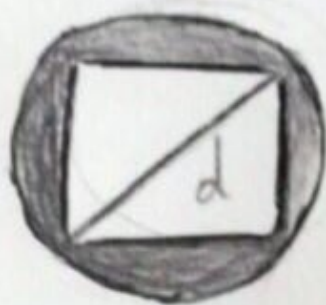
Photo
Grid

٥٢) في الشكل أمامه وضع مربع داخل دائرة
طول قطرها d ، ما مساحة المنطقة المظلمة
بدلالة d ؟



$$d^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{و} \quad d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) \quad \text{بـ}$$

$$d^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{و} \quad d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right) \quad \text{بـ}$$



نوجد مساحة الدائرة ومساحة
المربع ونطرحهم من بعض ...

$$\pi r^2 = \text{مساحة الدائرة}$$

$$d = r \quad \text{و} \quad \frac{d}{2} = \text{نصف القطر}$$

$$\pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 = \pi \frac{d^2}{4}$$

مساحة المربع = طول الضلع في نفسه

وجود القطر فقط في التوال ← مساحة المربع = $\frac{\text{قطر المربع في نفسه}}{2}$

$$\Rightarrow \frac{d \times d}{2} = \frac{d^2}{2}$$

$$\pi \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2} \quad \leftarrow \text{مساحة المنطقة المظلمة}$$

نأخذ d عامل مشترك .

$$d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

7. في الشكل أدناه ، وضع مربع داخل دائرة طول قطرها d ، ما مساحة المنطقة المظللة بدلالة d ؟



القطر $d =$ ، نصف القطر $\frac{d}{2}$

• مساحة الدائرة $= \pi r^2 = \pi \frac{d^2}{4}$

• مساحة المربع $= \frac{\text{قطر المربع في نفسه}}{2} = \frac{d^2}{2}$

• مساحة المنطقة المظللة

$$\pi \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{2} = d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$$

(أ) $d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right)$

(ب) $d^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} \right)$

(ج) $d^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \right)$

(د) $d^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{4} \right)$

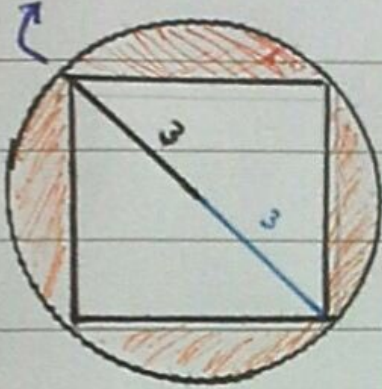
الكبير ناقص الصغير |

ايه الكبير نطرح منه الجزء الصغير

لان المربع داخل الدائرة
 مساحة الدائرة اكبر

عكس السؤال الاول

نصف القطر لو أنحلناه يعتبر قطر للمربع والدائرة



نوجد مساحة المربع اما بمعلومية القطر

أو الضلع : طول القطر = 6 ملاحظتان

- * مساحة المربع بمعلومية قطر = $\frac{1}{2} \times \text{طول القطر}^2$
- * طول ضلع المربع بمعلومية قطر = $\frac{\text{طول القطر}}{\sqrt{2}}$
- * طول القطر = طول الضلع $\times \sqrt{2}$

معلومية القطر

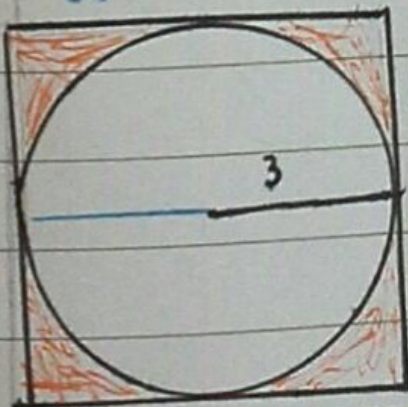
$$\text{مساحة المربع} = \frac{1}{2} \times (6)^2 = 18$$

$$\text{مساحة الدائرة} = 3^2 \pi = 9\pi$$

مساحة الشكل المفضل = مساحة الدائرة - مساحة المربع

$$9\pi - 18 \quad \text{أو} \quad 9(\pi - 2)$$

نصف القطر يوازي ضلع المربع
 $\therefore 3 + 3 = \text{طول ضلع المربع}$



قطر الدائرة فقط

معلومية طول الضلع

مساحة المربع = طول الضلع \times عرض

$$36 = 6^2$$

$$\text{مساحة الدائرة} = 3^2 \pi = 9\pi$$

مساحة الجزء المفضل = مساحة المربع - الدائرة

$$36 - 9\pi = 9(4 - \pi)$$

تم

القيمة العددية لمساحة الدائرة = 5 أضعاف محيطها

$$\implies \pi r^2 = 5 \times 2\pi r$$

$$r^2 = 10r$$

$$r = 10$$

2. إذا كانت القيمة العددية لمساحة دائرة 5 أضعاف القيمة العددية لمحيطها ، فإن نصف القطر الدائرة يساوي :

- (أ) 5
- (ب) 10
- (ج) 15
- (د) 20

نقارن بين المساحة والمحيط بعلامة يساوي
المساحة تساوي 5 في المحيط

Photo
Grid

3. محيط دائرة 44cm ما مساحتها التقريبية بالسنتيمتر المربع ؟

(أ) $\frac{154}{7}$

(ب) $\frac{98}{7}$

(ج) 49

(د) 154

جـ محيط الدائرة $= 2\pi r = 44 \Leftrightarrow 2 \times \frac{22}{7} \times r = 44$

$\Rightarrow \frac{44}{7} r = 44$

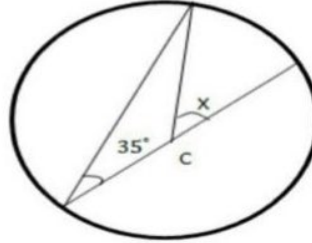
$\Rightarrow r = 44 \cdot \frac{7}{44} \Rightarrow r = 7$

مساحة الدائرة $= \pi r^2$

بالفعل $\frac{22}{7} \cdot (7)^2 = \frac{22}{7} (49)$

$= 22 \cdot 7 = 154$

4. في الشكل أدناه ، دائرة مركزها C ، ما قيمة X



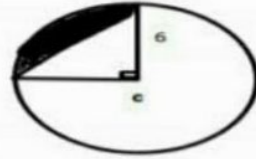
- (أ) 75
- (ب) 70
- (ج) 65
- (د) 60

الزاوية المركزية = ٢ × المحيطية

$$70 = x$$

Photo
Grid

9. في الشكل أدناه ، دائرة مركزها C ، ما مساحة الجزء المظلل؟



- (أ) $9\pi - 18$
 (ب) $9\pi - 36$
 (ج) $36\pi - 18$
 (د) $36\pi - 36$

• مساحة الدائرة = $36\pi = \pi r^2$

• مساحة ربع الدائرة = $9\pi = \frac{36\pi}{4}$

• مساحة المثلث = $18 = 6 \times 6 \times \frac{1}{2}$

• مساحة المنطقة المظللة = مساحة ربع الدائرة - مساحة المثلث
 $\Rightarrow 9\pi - 18$

الدائرة مقسمه إلى اربعة أجزاء

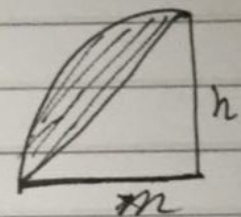
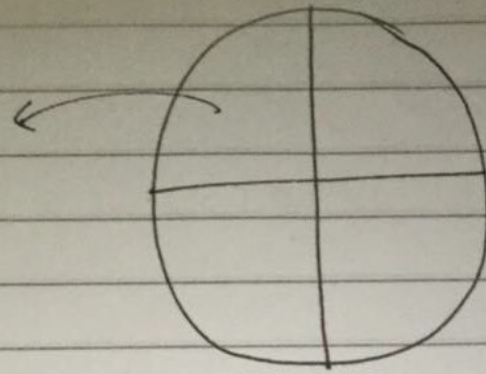
الجزء المضلل يقع في ربع واحد من الدائرة

نوجد أولا مساحة ربع الدائرة ثم مساحة المثلث

ملاحظة *** المثلث هنا متطابق الضلعين

ونطرح المثلث من ربع الدائرة

في هالسؤال انا مو محتاجه مساحه الدائره كامل
 انا محتاجه ربع المساحه بس
 اذا اوجدته
 اطرح منه مساحه المثلث



مساحة المثلث

$$= \frac{1}{2} \times h \times m$$

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 6$$

$$= 3 \times 6 = 18$$

$$= \frac{1}{4} (\text{مساحة الدائرة})$$

$$= \frac{1}{4} (\pi r^2)$$

$$= \frac{1}{4} (\pi 6^2)$$

$$= \frac{36}{4} \pi$$

$$= 9\pi$$

(المساحة المطلوبة)

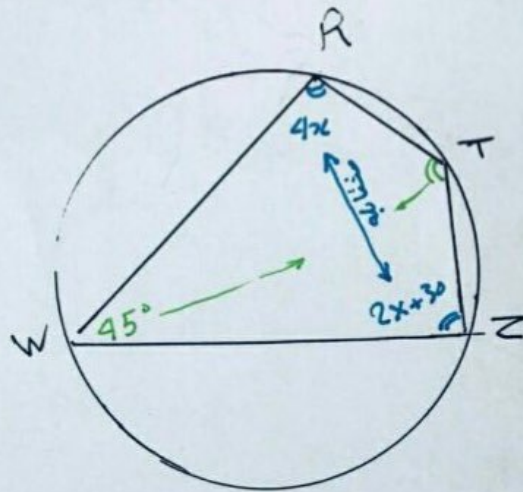
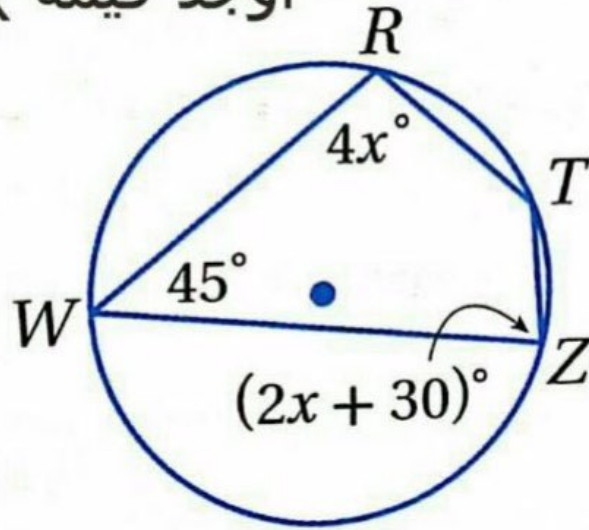
$$= 9\pi - 18$$



الان نأخذ لشكل الرباعي الدائري المحصور

ويقال عن شكل رباعي أنه محصور داخل دائرة إذا كانت جميع رؤوسه تقع على الدائرة وتكون كل زاويتين فيه متقابلتين متكاملتين ، أي مجموعهما يساوي 180

أوجد قيمة x



* كل زاويتين متقابلتين متكاملتين
أي مجموعهما = 180

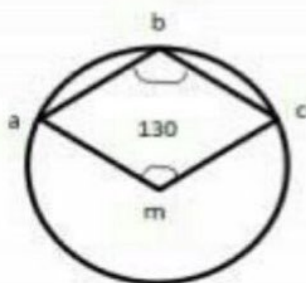
$$4x + 2x + 30 = 180$$

$$6x + 30 = 180$$

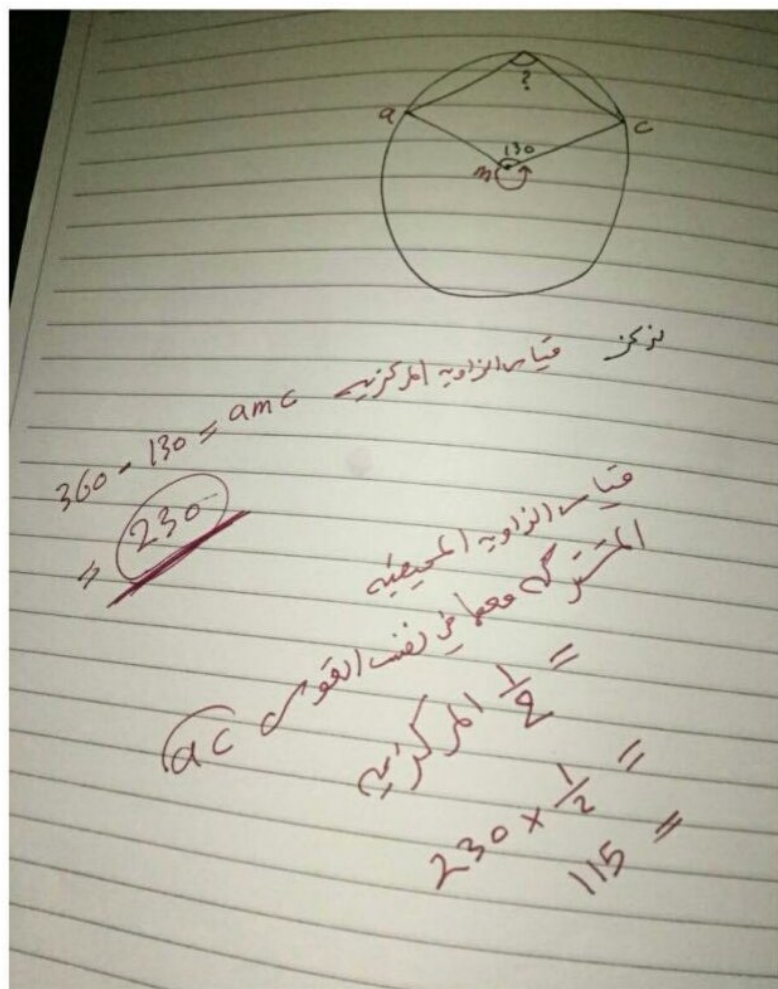
$$6x = 180 - 30 \Rightarrow 6x = 150$$

$$x = 25$$

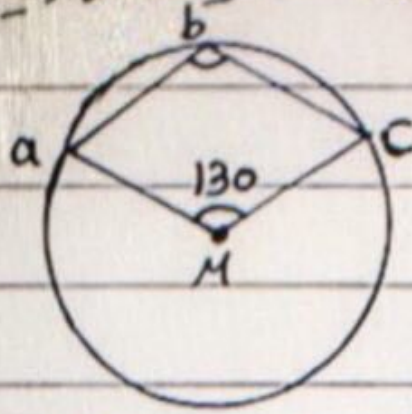
8. في الشكل أدناه ، ما قياس الزاوية \widehat{abc} ؟



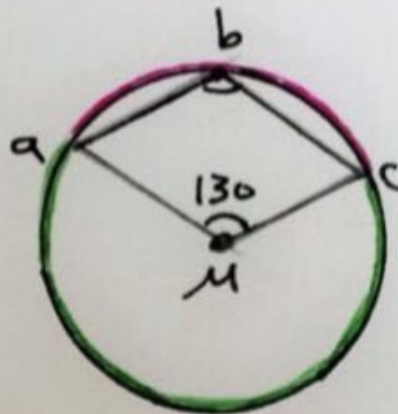
- (أ) 65
- (ب) 115
- (ج) 120
- (د) 130



٥٨ * في الشكل أدناه، ما قياس الزاوية $\angle abc$ ؟



120	(2)	65	(p)
130	(3)	115	(ب)



$\angle abc$ محيطية. [تساوي نصف القوس طعاب لها]

بما أن الزاوية المركزية = القوس المصنّف

$$m \angle aMc = 130^\circ$$

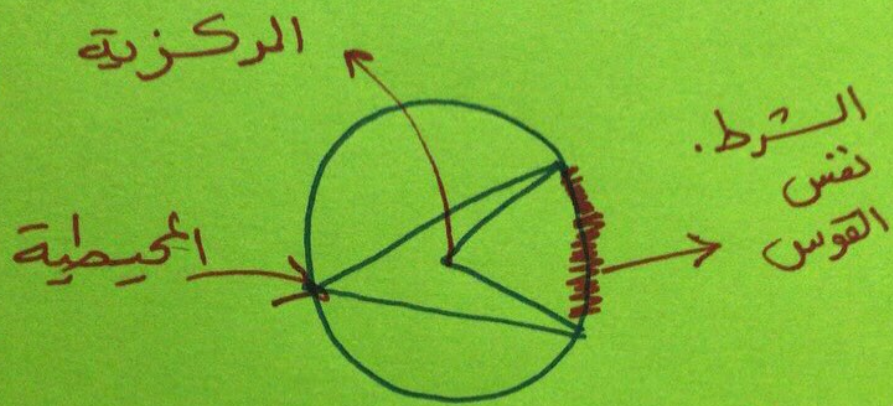
$$m \widehat{ac} = 360^\circ - 130^\circ = 230^\circ$$

الدائرة كاملة

الزاوية المحيطية تساوي نصف القوس

$$\Rightarrow \angle abc = \frac{230}{2} = 115$$

قاعدة



① قياس القوس = الزاوية المركزية .

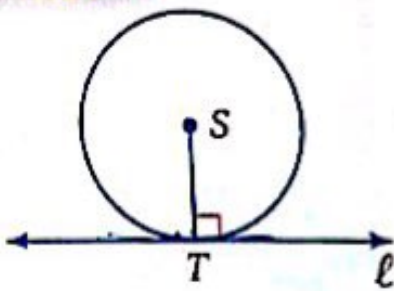
② الزاوية المحيطة

$$\frac{1}{2} [\text{قياس القوس}] = \text{أو المحاسية}$$

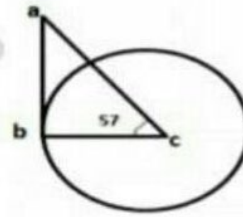
النظرية 4.10

التعبير اللفظي: يكون المستقيم مماساً لدائرة في المستوى نفسه،
إذا وفقط إذا كان عمودياً على نصف القطر عند
نقطة التماس.

مثال: يكون المستقيم ℓ مماساً لـ $\odot S$ ، إذا وفقط إذا
كان $\ell \perp \overline{ST}$.



10. إذا كان المستقيم ab مماساً للدائرة C عند النقطة b ،
ما قياس الزاوية \widehat{cab} ؟



- 23 (أ)
- 33 (ب)
- 43 (ج)
- 36 (د)

- بما ان المماس يعامد القطر
 $m\angle b = 90^\circ$

- الزاوية المركزية $57 =$
 $cab = 180 - (90 + 57) = 180 - 147 = 33$

من النظرية نطلع قياس b وهي 90

ونجمعها مع زاوية C ونطلع الناتج



٢) الدائرة التي مركزها $(-2, 4)$ و طول نصف قطرها 10 وحدات تكون معادلتها :

أ) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

ب) $(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 10$

ج) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 100$

د) $(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 20$

المركز $(-2, 4)$ $r = 10$

معادلة الدائرة $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$(x - (-2))^2 + (y - 4)^2 = 10^2$

$(x + 2)^2 + (y - 4)^2 = 100$

Photo
Grid

مثال

(١) المعادلة : $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$ تمثل
معادلة دائرة مركزها :

(أ) $(-1, 5)$

(ب) $(1, -5)$

(ج) $(5, -1)$

(د) $(-5, 1)$

وهالسؤال بالمثل

بالنظر يكون الجواب X سالب واي موجب

Photo
Grid

6. مركز الدائرة التي معادلتها

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 23 = 0 \text{ هو :}$$

(أ) $(-2, 3)$

(ب) $(2, -3)$

(ج) $(3, -2)$

(د) $(-3, 2)$

سالب معامل اكس على 2 ، سالب معامل
واي على 2

بالنظر نختار أ

Photo
Grid

٣) المعادلة $(x + 5)^2 + (y - 1)^2 = 16$ تمثل
معادلة دائرة طول نصف قطرها :

(أ) 5 وحدات

(ب) 8 وحدات

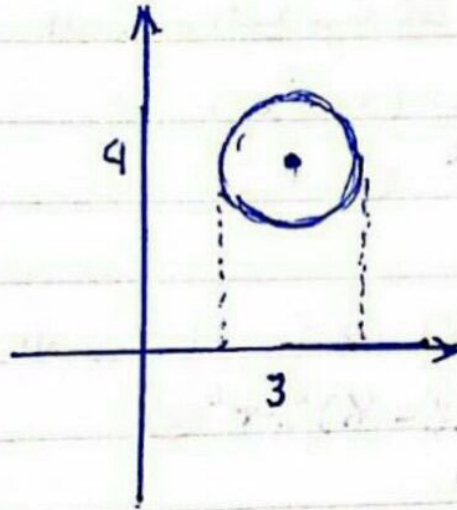
(ج) 4 وحدات

(د) 16 وحدات

$$r^2 = 16 \Rightarrow r = 4$$

١/٢ جواب ج. 4 وحدات .

Photo
Grid



معادلة الدائرة هي:

$$x^2 + y^2 - 3x - 4y = 1$$

$$x^2 + y^2 + 3x - 4y = 1$$

$$(x+3)^2 + (y+4)^2 = 1$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 1$$

بالنظر نستبعد الخيار الاول والثاني

يكون الحل اما ج او د

ناخذ د لأن القانون فيه سالب

المركز 3 و 4 كلهم موجبين
اشارة المعادلة داخل القوس سالب
ونصف القطر 1 وتربيعها واحد

٤) دائرة طرفي قطر فيها هما $(-2,1)$, $(6,7)$ يكون مركزها

أ) $(4,3)$

ب) $(2,4)$

ج) $(4,8)$

د) $(8,6)$

هنا معطينا اطراف القطر

وطالب المركز

والمركز دائم بالنص

فنطبق قانون منتصف قطعة مستقيمة

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}$$

$$\frac{6 + (-2)}{2}, \frac{7 + 1}{2}$$

$$\frac{4}{2}, \frac{8}{2}$$

$$(2, 4)$$

المس ب

PhotoGrid

5. طول نصف قطر الدائرة
 $x^2 + y^2 + 8y = 9$ يساوي :

- 3 (أ)
4 (ب)
5 (ج)
6 (د)

نطلع نصف القطر من الصورة العامة

$$r = \sqrt{0 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 9}$$
$$= \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

المعادلة مع صورة معادلة دائرة على طول

نوجد نصف القطر

$$\text{نصف القطر} = \sqrt{\left(\frac{\text{معامل } x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\text{معامل } y}{2}\right)^2 - c}$$

المعادلة

$$x^2 + y^2 + 8y = 9$$

$$x^2 + y^2 + 8y - 9 = 0$$

$$\sqrt{\left(0\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 - (-9)}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + 9} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$$

Photo
Grid

12. معادلة الدائرة التي تمس محور الصادات

ومركزها (3,2) هي:

(أ) $x^2 + y^2 = 9$

(ب) $x^2 + y^2 = 4$

(ج) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$

(د) $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$

على طول نصف القطر يكون الاحداثي
السيني وهو 3

ولو كان مكتوب يمس محور السينات يكون
الاحداثي الصادي

Photo
Grid

أولاً

نستبعد الخيار أ وب لأن المركز بالسؤال ليس نقطة الأصل

ثانياً نأخذ قيمة x بالسؤال ونربعه قيمته 3 تربيعه 9

إذا الحل د

لو السؤال يمس محور السينات نأخذ قيمة y بالسؤال ونربعه

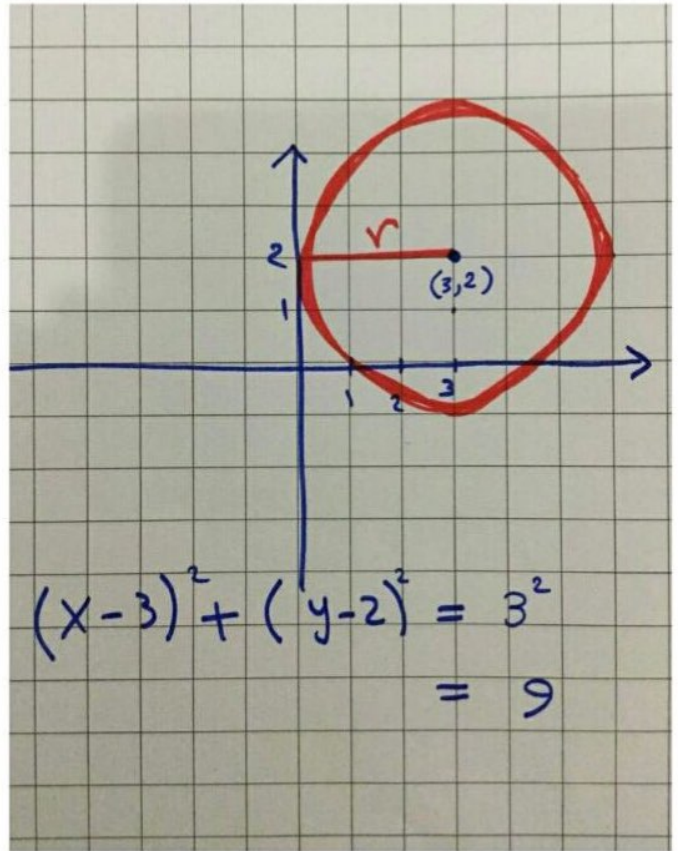


Photo
Grid

معادلة الدائرة :

معادلة الدائرة التي مركزها (h, k) وطول نصف قطرها r هي :

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

مثال : اكتب معادلة الدائرة التي مركزها $(4, -2)$ ، $d = 4$ حيث d طول القطر

الحل : $r = 2 \rightarrow d = 4$ ، $(h, k) = (4, -2)$

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 4$$

إذا كانت معادلة الدائرة : $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + c = 0$

فإن مركزها هو $\left(\frac{x\text{-معامل}}{2}, \frac{y\text{-معامل}}{2}\right) = (h, k)$

وطول نصف قطرها r وحدة هي : $r = \sqrt{h^2 + k^2 - c}$

مثال : إذا كانت معادلة الدائرة : $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 2 = 0$ ، ماهو مركزها ونصف قطرها ؟

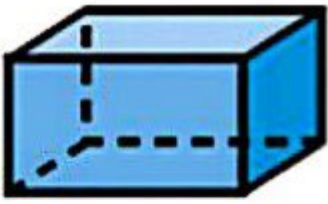
الحل :

مركزها $(3, -4)$

وطول نصف قطرها $r = \sqrt{h^2 + k^2 - c} = \sqrt{3^2 + (-4)^2 - 2} = \sqrt{23}$

نقاش

اليوم 16



مَنْشُورٌ رُبَاعِيٌّ



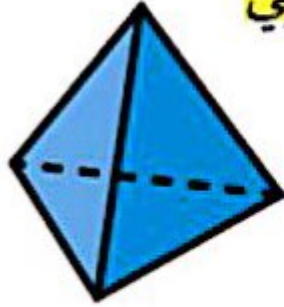
مَنْشُورٌ ثَلَاثِيٌّ



مُكَعَّبٌ



مَخْرُوطٌ



هَرَمٌ ثَلَاثِيٌّ



كُرَّةٌ



أُسْطُوَانَةٌ

2. متوازي مستطيلات ابعاده 4,5,8 نريد ان نضع
به مكعبات طول حرف المكعب الواحد 2cm
فكم مكعب يمكن ان نضع

(أ) 12

(ب) 14

(ج) 16

(د) 15

2 - نفسم حجم متوازي المستطيلات

على حجم المكعب المعطى .

* لادب انه كلور ابعاد متوازي المستطيلات

تقبل القسمه على طول الحرف المعطى

حجم متوازي المستطيلات $\leftarrow 4 \times 5 \times 8$

حجم المكعب الصغير $\leftarrow \frac{4 \times 5 \times 8}{2 \times 2 \times 2} = \frac{4 \times 4 \times 8}{8} = \frac{128}{8} = 16$

معرضه / 5 لا تقبل القسمه على 2

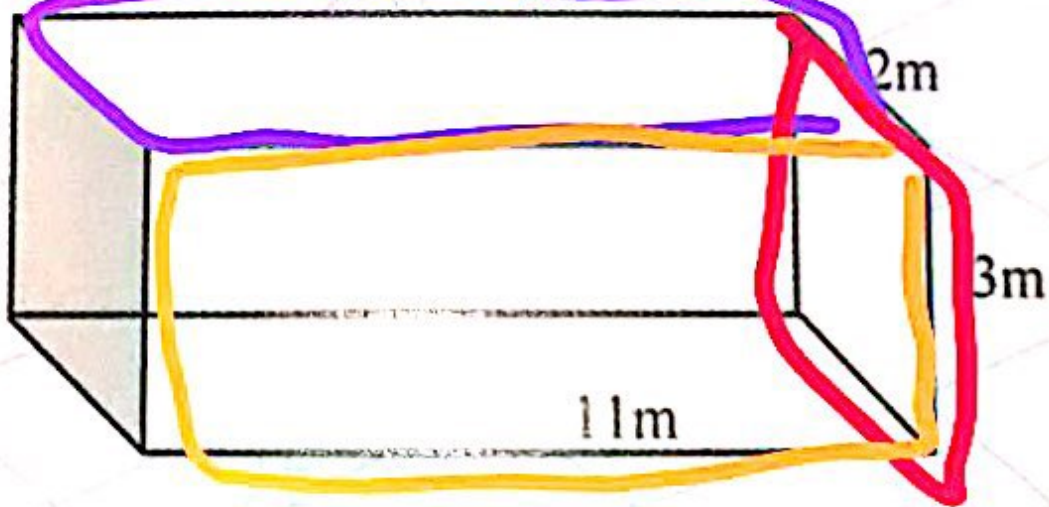
لذا انشبدلها بعدد اصغر من

5 يقبل القسمه على 2 .

اعامة لكلية

مثال

(١) في الشكل أدناه، ما مساحة الأوجه بالمتري المربع؟



(ب) 66

(د) 166

(أ) 61

(ج) 122

محيط القاعدة \times الارتفاع

$$33 = 3 \times 11$$

$$22 = 2 \times 11$$

محيط المصراع القائم \times طول الحرف الجانبي

$$6 = 2 \times 3$$

$$2(33 + 22 + 6)$$

$$2 \times 61 = 122$$

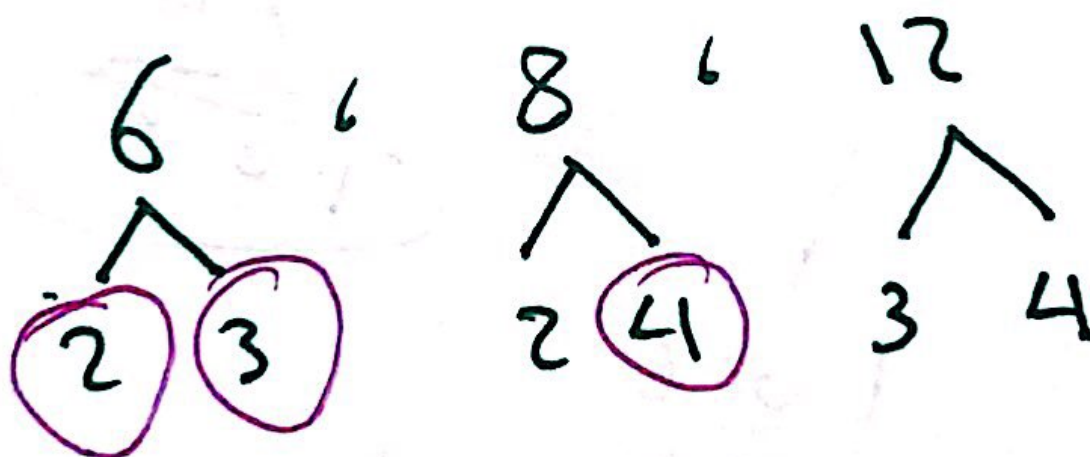
٤) إذا كانت أبعاد متوازي مستطيلات أعداداً صحيحة وكانت المساحات السطحية للسطوح هي 6,6,8,8,12,12 فما حجمه؟

(ب) 12^2
(د) 12

(أ) 24^2
(ج) 24

حجم متوازي المستطيلات

مساحة القاعدة \times الارتفاع



نأخذ فقط عدد واحد

$$2 \times 3 \times 4 = 24$$

$\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع 1	$2\pi r^2 + 2\pi r \times h =$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	محيط القاعدة \times الارتفاع الجانبي $\frac{1}{2}$	الهرم
--	---	---	-------

4. مجموع مساحة أوجه مكعب يساوي $96cm^2$
ما طول ضلع المكعب

أ) 3

ب) 4

ج) 7

د) 8

المكعب عبارة عن 6 أوجه (مربعات)

$$\frac{96}{6} = 16$$

↓

مساحة مربع

$$\sqrt{16} = 4$$

∴ طول ضلع المربع = 4

(ج) 144 (ب) 100
(٢) ما مساحة سطح الهرم الرباعي المنتظم الذي طول قاعدته 5cm، وارتفاعه الجانبي 10cm بالسنتيمتر مربع؟

(ب) 120

(أ) 115

(د) 130

(ج) 125

سؤال 2 ص 108

* المسؤال عبارة عن هرم ربا عى



قاعدة مربعة

طول القاعدة
الاحص

سؤال 2 ص 108

هرم ربا عى



بني القاعدة مربعة

طول القاعدة = 5

∴ المحيط = 4×5

= 20

المساحة $(5)^2$

مساحة القاعدة $\Rightarrow 25$

المطلوب :

مساحة سطح الهرم الرباعي =

المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

عبارة عنه :
 $\frac{1}{2} (\text{محيط القاعدة} \times \text{ارتفاع})$

$\frac{1}{2} (20 \times 10)$

25

+ 100

125

الحل

(٣) اسطوانة ارتفاعها 10cm ، ومساحتها الجانبية 100π ، ما حجمها بالسنتيمترات المكعبة ؟

(ب) 250π

() 300π

(د) 150π

(ج) 200π

(٣) المطلوب حجم المستطوانه



حجم المستطوانه = مساحة القاعدة \times الارتفاع



مساحة
الدائرة

نوجد أولاً نصف القطر من المساحة الجانبيه .

المساحة الجانبيه $\rightarrow 100\pi$

محيط القاعدة \times الارتفاع = 100π



$100\pi = 10 \times 2r\pi$

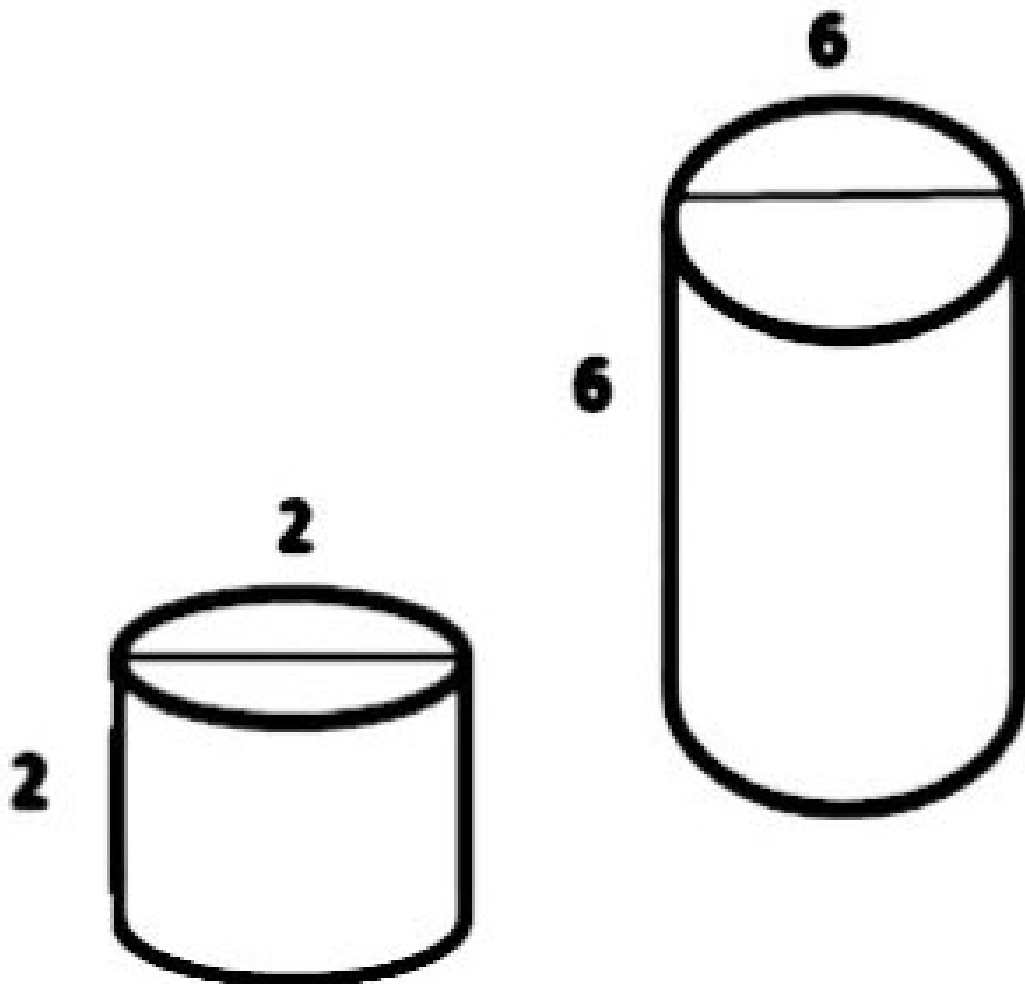
$$\frac{160\pi}{20\pi} = \frac{20r\pi}{20\pi}$$

$$5 = r$$

مساحة القاعدة = $(5)^2 \pi$
 $= 25\pi$

\therefore حجم المستطوانه = $10 \times 25\pi$
 250π

3. كم أسطوانة صغيرة نحتاج لتملئ الأسطوانة الكبيرة :



حجم الاسطوانة = مساحة لقاعدة \times الارتفاع -

$$* \text{مساحة قاعدة الاسطوانة الصغيرة} = r^2 \pi = (1)^2 \pi$$

$$* \text{الكبيرة} = r^2 \pi = (3)^2 \pi = 9\pi$$

$$\therefore \frac{\text{حجم الاسطوانة الكبيرة}}{\text{حجم الاسطوانة الصغيرة}} = \frac{9\pi \times 6}{\pi \times 2} = \frac{54\pi}{2\pi}$$

$$= 27$$

السؤال

1. اسطوانة مملوءة حتى سدسها فإذا أضفنا 6 لترات أصبحت مملوءة حتى النصف ، فكم حجم الأسطوانة
- (أ) 8
- (ب) 10
- (ج) 12
- (د) 18

المعطيات

* حجم المستطوانه = 18

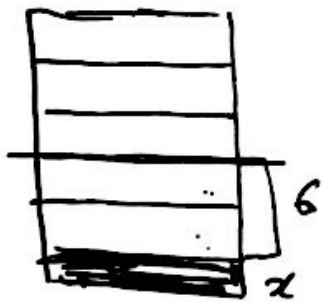
* المستطوانه مقسمه إلى 6

نجرب بالاحصاء الأعداد التي تقبل

القسمة على 6

فقط نستبعد أرب

~~18~~ $12 \div 6 = \boxed{2}$



$6 + x =$ النصف

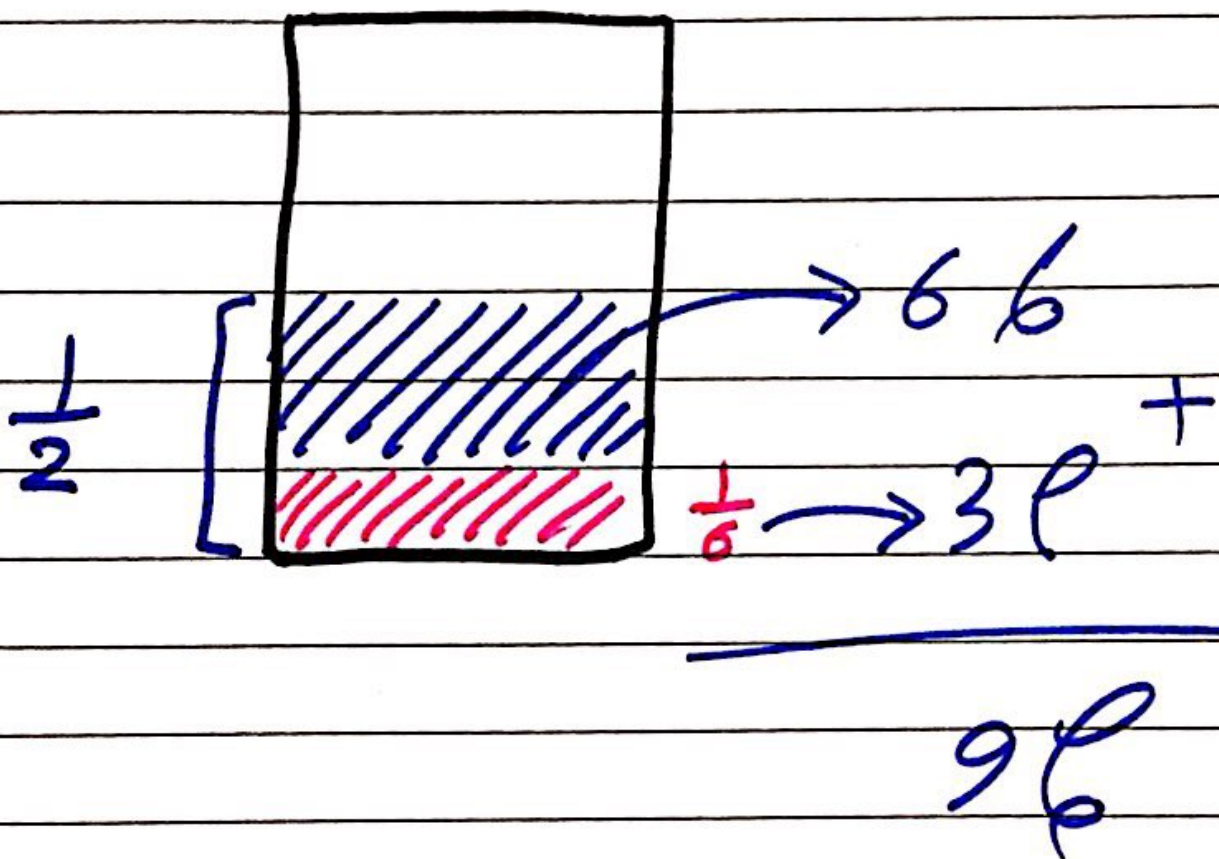
$6 + 2 = 8$

$8 + 8 = 16$ ✗

$18 \div 6 = \boxed{3} \Rightarrow$ كد جزء 3

$6 + 3 = 9$

$9 + 9 = 18$



$00 \quad 2 \times 9 = 18$

٥) أسطوانة محيط قاعدتها 31.4 m وارتفاعها 4m
مملوءة بالماء وكان بها فتحة تفرغ $1m^3$
في دقيقة ، ففي كم دقيقة يتم تفريغها كاملة ؟

- (أ) 318 min (ب) 314 min
(ج) 3140 min (د) 3.14 min

سؤال رقم 6

حجم المستطوانه = مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$r^2 \pi$$

$$31,4 : 4 = \text{مساحة القاعدة}$$

$$31,4 = 2r^2 \pi$$

$$\frac{31,4}{2\pi} = r$$

$$\frac{31,4}{2\pi}$$

$$2 \times 3 \leftarrow \text{بالتقريب}$$

$$\frac{31,4}{6} = 5 \rightarrow \text{بالتقريب}$$

$$4 \times (5)^2 \times \pi = \text{حجم المستطوانه}$$

$$4 \times 25 \times \pi$$

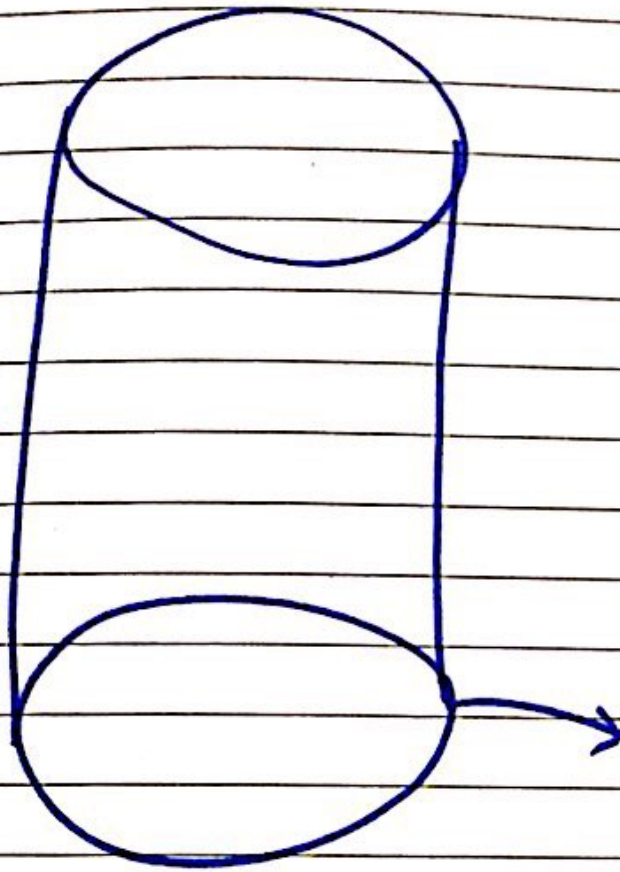
$$100\pi$$

$$= 100 \times 3,14$$

$$= 314 \leftarrow \text{الاجم}$$

$$\frac{314}{1} = 314$$

الارتفاع
4m



ال محيط

$$31.4 = 2\pi r$$

$$31.4 = 2r(3.14)$$

$$3.14 = \pi$$

تركبت الفاصلة
مرة جهة اليمين
أذن العدد ضرب
في 10

$$2r = 10$$

$$r = 5$$

الحجم = المساحة القاعدة \times الارتفاع

$$4 \times 3.14 \times 25 =$$

$$100 \times 3.14 =$$

$$\boxed{314} =$$

$$\frac{314 \text{ m}^3}{3.14 \text{ min}} = \frac{1 \text{ m}^2}{1 \text{ min}}$$

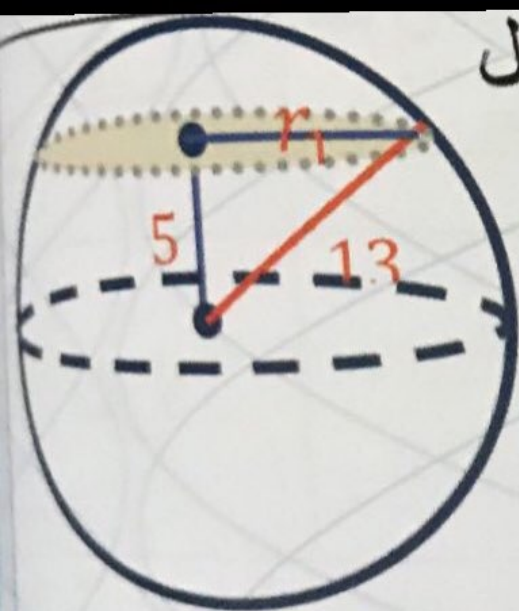
٥) كرة نصف قطرها 13cm، قطعها مستوي يبعد عن المركز بمقدار 5cm، ما محيط الدائرة للمقطع المتكون؟

ب) 24π

أ) 12π

د) 144π

ج) 26π



في المثلث القائم الزاوية في الشكل المقابل

$$r_1^2 = 13^2 - 5^2 = 144$$

$$r_1 = 12$$

محيط الدائرة للمقطع المتكون $= 2\pi r_1$

$$24\pi =$$

* أول شيء نوجد الضلع المحصول في المثلث
∴ مثلث قائم الزاوية من نظرية فيثاغورس
التي هو يكون نصف قطر الدائرة

$$r_1 = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12$$

* أوجدنا نصف القطر لدائرة التي هو 12 المطلوب
المحيط فطبق بالقانون

$$2 \pi r = 2 \times 12 \pi = 24 \pi$$

نقاش

اليوم 17

مثال

(أ) القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 4)^2 = 8(y + 3)$ تكون رأسه

(ب) $(4, -3)$

(ج) $(-4, 3)$

(د) $(3, -4)$

(هـ) $(-3, 4)$

الرأس عبارة عن الأعداد التي تكون مع
x و y ولكن تكون على الإشارة.

$$(x-4)^2 = 8(y+3)$$

(-3 و 4) الرأس

٢) القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 4)^2 = 8(y + 3)$ تكون بؤرته

(أ) $(2, -1)$	(ب) $(6, -1)$
(ج) $(4, -5)$	(د) $(4, -1)$

(2) بما أنه التربيع على x

إذا: في البؤرة يتم x لا تستغير

فقط نغير الإشارة

نفس العدد
الذي مع x
فقط نغير
الإشارة

$(4, K + C)$

$$4C = 8 \Rightarrow C = 2$$

البؤرة عبارة

$(4, K + C)$
↓

$(4, -3 + 2)$

$(4, -1)$

٣) القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 4)^2 = 8(y + 3)$ يكون دليله

(ب) $y = -1$

(د) $x = -1$

(أ) $y = -5$

(ج) $x = -5$

٣- التوزيع على X

∴ تكون معادلة الدليل :

$$y = \text{عدد}$$

نستعد ج و د

معادلة الدليل :

$$y = K - C$$

$$4C = 8 \Rightarrow C = 2$$

العدد الذي مع y
يعكس إشارة

$$y = -3 - 2$$
$$y = -5$$

من السؤال

٤) القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 4)^2 = 8(y + 3)$ يكون مفتوح ناحية

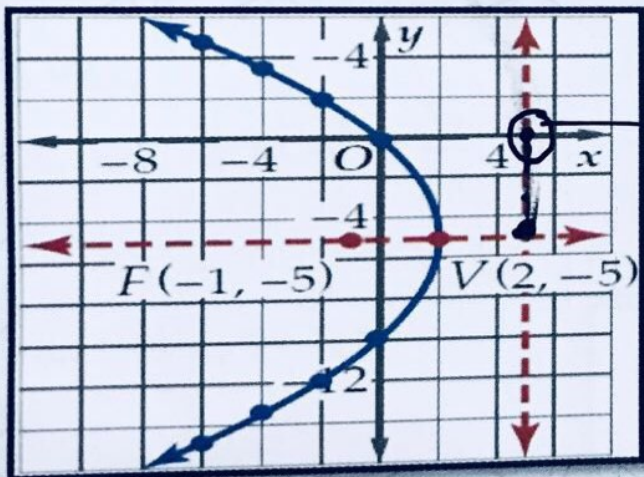
(أ) اليمين
(ب) اليسار
(د) لأسفل

(ج) لأعلى

$$(x - 4)^2 = 8(y + 3)$$

الترتيب على x (مفتوح للزمني أو للأسفل)
الإشارة مع جهة
∴ للزمني

٥) الشكل المقابل يمثل قطع مكافئ ،
معادلة دليله هي



(ب) $y = 5$
(د) $x = 5$

(أ) $y = -5$
(ج) $x = -5$

١٥ منه الرسمة الدليل حول الخط المتقاطع
الذي يكون دائماً خلف القطع اوتته الرأس
دائماً اذا كانه القطع مفتوح افضي
يكونه الدليل $x = \text{عدد}$

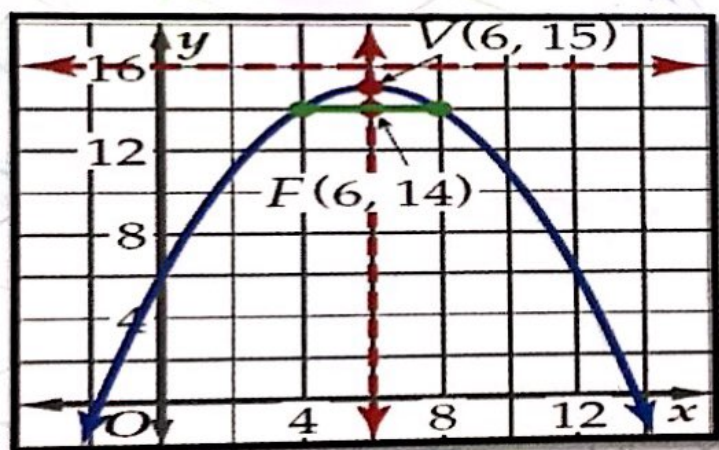
اذا كانه القطع مفتوح رأسي
يكونه الدليل $24 = \text{عدد}$

القطع المكافئ الذي معادلته $(x - 1)^2 = 4(y + 2)$ طول وتره البؤري يساوي

(ب) 4 وحدات
(د) 8 وحدات

وحدتان
6 وحدات

طول لوتر البؤري
هو العدد الذي تبين
القوس $|4| = 4$



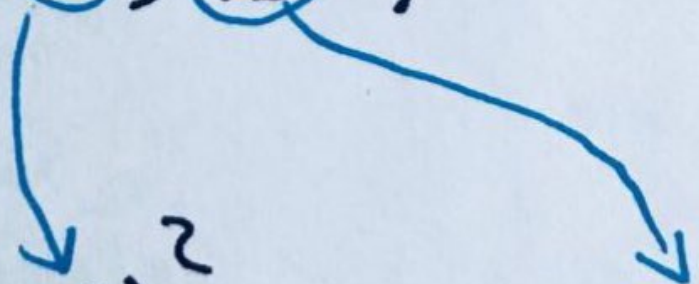
٧ أي من المعادلات الآتية تعبر عن الشكل المقابل

- (أ) $(x - 6)^2 = -4(y - 15)$
 (ب) $(x + 6)^2 = -4(y + 15)$
 (ج) $(x - 6)^2 = 4(y - 15)$
 (د) $(y - 6)^2 = -4(x - 15)$

(7) الترتيب على Δ لأن
المقطع مفتوح رأسي

ولإشارة بعد = - إليه
إذاً مفتوح للأسفل

النقطة (6, 15)


$$(x - 6)^2 = -4(y - 15) \quad \therefore$$

سلا) بالرسم مخططا المركز وقته x ، y موجبه

اذا بالقوانين في طعاده تكونه يعكس y كاره

منسحب اي خيار تكونه غير موجبه

صه الرسم القلع مفتوح رأسه للأرض

اذا يكونه التربع x والاختاره بعد علامه - y اليه

صكونه الحل P

٨) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2, 4)$ و بؤرته $(-2, 7)$ تكون :

- (أ) $(x + 2)^2 = -12(y - 4)$ (ب) $(x + 2)^2 = -12(y + 4)$
 (ج) $(x + 2)^2 = 12(y - 4)$ (د) $(y - 4)^2 = 12(x + 2)$

الرأس $(-2, 4)$
 \therefore لديه
 $(x + 2)^2 = 12(y - 4)$

٩) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2, 4)$ و دليله $x = 6$ تكون :

الرأس $(-2, 4)$

البؤرة $(-2, 7)$

$(h, k+c)$

~~$c = 2$~~ \therefore

$$(-2, 4+c)$$

$$c = 3 \therefore$$

$$4c = 12$$

\therefore الرأس و البؤرة مشتركان

في x \therefore التربيع

على x

$$(x+2)^2 = 12(y-4)$$

٩) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(-2, 4)$ و دليله $x = 6$ تكون :

$$(y - 4)^2 = -8(x + 2) \quad \text{ب)}$$

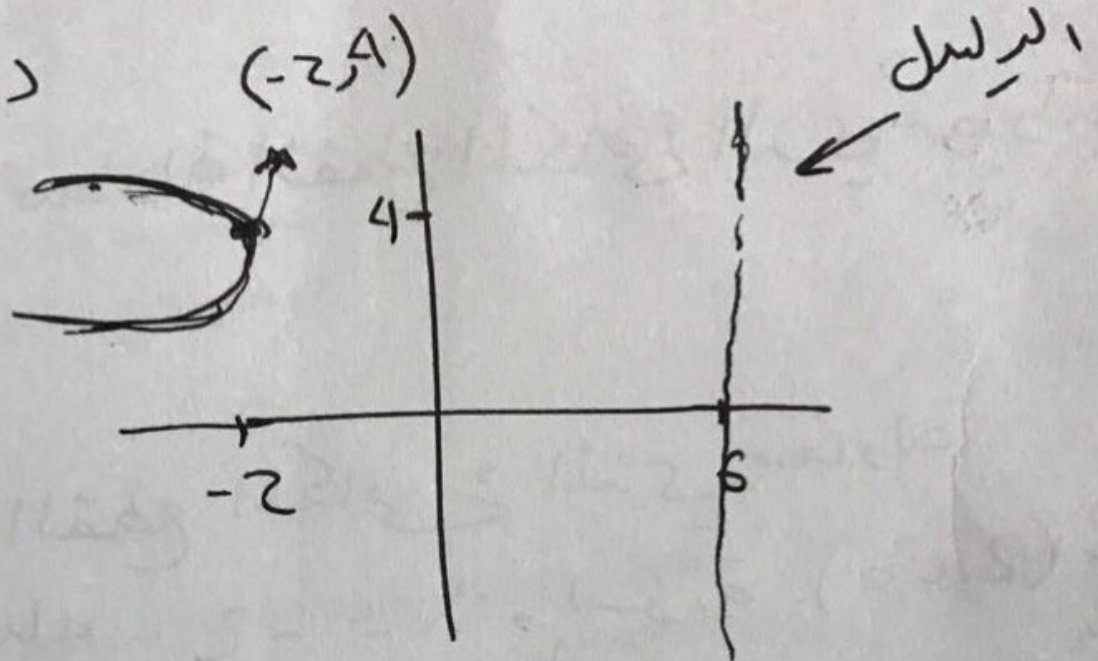
$$(y - 4)^2 = 8(x + 2) \quad \text{د)}$$

$$(y + 4)^2 = -8(x + 2) \quad \text{أ)}$$

$$(x - 2)^2 = -8(y - 4) \quad \text{ج)}$$

الرأس $(-2, 4)$

دليله $x = 6$



* الدليل دائما خلف أو تحت المركز .

∴ مفتوح لليسار ، أغصيا

لأنه الدليل

$$\bar{x} = 6$$

$$\therefore \text{حل} : (y - 4)^2 = -8(x + 2)$$

4. ما معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $x = -2$ والبؤرة $(2,0)$ ؟

(أ) $y^2 = 8x$

(ب) $x^2 = 8y$

(ج) $x^2 = 4y$

معادلة القطع المكافئ الذي معادلة
دليله $x = -2$ ولبؤرة $(2, 0)$ و

* إذا كانت الدليل عدد $x =$ ← مستقيم رأسي
ملوك، لتربيع على y

* إذا كانت الدليل عدد $y =$ ← مستقيم أفقي
ملوك، لتربيع في المعادلة على x

∴ معادلة نشأة الجار ب و ج

البؤرة $(2, 0)$ $h+c$ k

$$h + c = 2$$

$$h + c = 2$$

$$c = 2 \quad \therefore$$

$$4c = 4 \times 2 \\ = 8$$

∴ الحل: $y^2 = 8x$

حل مختصر :

از اینجا

$$x = -2$$

نکته

نکته: ترتیب می

معمولاً در اینجا

$$x^2 = 2 \times 4 \times x$$

$$x^2 = 8x$$

خصائص القطع المكافئ الذي معادلته

المعادلة شكلها
طرف عليه تربيع
وطرفا بدونه

$$(y-1)^2 = -12(x-5)$$

• الرأس: $(5, 1)$

$$C = \frac{-12}{4} = -3$$

ثابت لا يتغير

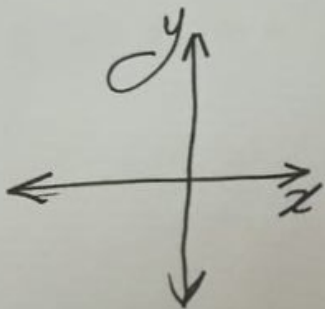
• البؤرة: $(2, 1)$

معادلة الدليل: $x = 5 + 3 = 8$

معادلة محور التماثل: $y = 1$

طول الوتر البؤري: 12

اتجاه الفتحة: x^- (للخلف)



Sarhan

٢) القطع الناقص الذي معادلته $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$ يكون طول محوره الاكبر

(أ) 4 وحدات	(ب) 3 وحدات
(ج) 6 وحدات	(د) 8 وحدات

2/ القطع الناقص الذي معادلته

$$\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

نلاحظ طول محوره الأكبر

العدد الأكبر y

∴ طول باحور الأكبر = $2a$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$$

$$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$2 \times 4 = 8$$

هـ) بما أنه باحور الأكبر ينطبق على

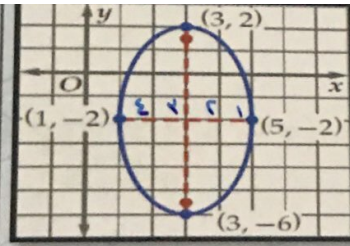
محور x خارج

العدد الأكبر يكون تحت x

٣) من الشكل المقابل يكون طول المحور الاصغر هو

أ) 4 وحدات
ج) 6 وحدات

ب) 3 وحدات
د) وحدتان



مسألة برسم وإجابة
عمد المبرجات ٤

٤) القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ تكون بؤرتاه هما

(ب) $(\pm 9, 0)$

(أ) $(\pm 3, 0)$

(د) $(0, \pm 9)$

(ج) $(0, \pm 3)$

$$4) \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\frac{(x-0)^2}{25} + \frac{(y-0)^2}{16} = 1$$

\downarrow \downarrow
 a^2 b^2

البؤبؤ، c : ~

$$(h \pm c, k)$$

$$(0 \pm 3, 0)$$

$$(\pm 3, 0)$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

$$= \sqrt{25 - 16}$$

$$= \pm \sqrt{9}$$

$$\pm 3$$

٥) معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل و طولاه محوريه 8 , 10 وحدات و محوره الاكبر ينطبق على محور x تكون

$$\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad (\text{د})$$

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad (\text{ا})$$

$$\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1 \quad (\text{ج})$$

(٥) بما أن المحور الأكبر ينصف

على محور x فإنه

العدد الأكبر (a) يكون x

طول المحورين 8 ، 10
↓ ↓
أصغر أكبر

طول المحور الأكبر = $2a$

$$2a = 10$$

$$a = 5$$

طول المحور الأصغر = $2b$

$$2b = 8$$

$$b = 4$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{ن.ك.ل}$$

عدد خصائص القطع الناقص الذي معادلته

Sarhan

$$4(x-1)^2 + 9(y-5)^2 = 36$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{4} = 1$$

المركز

جذر الأكبر

$$a = \sqrt{9} = 3$$

جذر الأصغر

$$b = \sqrt{4} = 2$$

$$c = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$

عكس الإشارة

المركز: $(1, 5)$

البيورتان: $(1 \pm \sqrt{5}, 5)$

نلاحظ العدد الأكبر في المعادلة تحت x لذلك نكتب المصاح

c عند x وهو مصفاح البيورتان

الرؤسان: $(1 \pm 3, 5)$
 $(4, 5) \leftarrow$
 $(-2, 5) \leftarrow$

الرؤسان المرافقان: $(1, 5 \pm 2)$
 $(1, 7) \leftarrow$
 $(1, 3) \leftarrow$

مختلفة
 عند البيورتان والرؤسان

طول المحور الأكبر = $2a = 6$

طول المحور الأصغر = $2b = 4$

الصورة القياسية لمعادلة القطع الزائد الذي مركزه (0,0)

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

الاتجاه / المحور لقطع رأسي

الاتجاه / المحور لقطع أفقي

إذا كان الحد الموجب y^2 يكون رأسي

إذا كان الحد الموجب x^2 يكون أفقي

المركز (0,0)

المركز (0,0)

الرؤس (0, ±a)

الرؤسان (±a, 0)

البؤرتان (0, ±c)

البؤرتان (±c, 0)

المحور لقطع $x=0$

المحور لقطع $y=0$

وطوله 2a

وطوله 2a

المحور المرافق: $y=0$

المحور المرافق $x=0$

وطوله 2b

وطوله 2b

خطا التقارب $y = \pm \frac{a}{b}x$

خطا التقارب $y = \pm \frac{b}{a}x$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

لكن

عدد ضامئ القطع الزائء الذي معادلته

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x+7)^2}{25} = 1$$

الاول 9 الثاني 25

الحل

جذر الاول

$$a = \sqrt{9} = 3$$

جذر الثاني

$$b = \sqrt{25} = 5$$

$$c = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

المفتاح يوضع على حسب الحرف الذي بدأت به المعادلة

المركز: $(-7, 1)$

الرؤساء: $(-7, 1+3)$

الصورتان: $(-7, 1+\sqrt{34})$

طول المحور القاطع = $2a = 6$

طول المحور المرافق = $2b = 10$

جذر حائت y في المعادلة

$$y-1 = \pm \frac{3}{5} (x+7)$$

جذر حائت x في المعادلة

Sarhan

▲ القطع الناقص ▲

التربيع على X وعلى Y ، وإشارة X و Y تكون متشابهة ،

الدائرة وهي من حالات القطع الناقص ويكون التربيع على X و Y ، وإشارة X و Y متشابهة ومعاملاتهما متشابهة

▲ في القطع الناقص ▲

قيمة a دائما هي الأكبر ،

وإذا كانت X تربيع مقسوم على a (العدد الأكبر) فالمحور الأكبر يكون أفقيا
إذا كانت Y مقسوم على a (العدد الأكبر) فالمحور الأكبر يكون رأسيا

12:38 1

▲ طول المحور الأكبر والأصغر ▲

إذا كان المحور الأكبر أفقي فإنه يساوي العدد الذي مع Y بعكس إشارته وطوله عبارة عن $2a$

إذا كان المحور الأكبر رأسي فإنه يساوي العدد الذي مع X بعكس الإشارة وطوله عبارة عن $2b$

12:36 1

٥) معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل و طولاً محوريه 8 , 10 وحدات و محوره الاكبر ينطبق على محور x تكون

(ب) $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$

(د) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

(أ) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

(ج) $\frac{y^2}{100} + \frac{x^2}{64} = 1$

5- معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل

وطولاً محوريه 8 , 10 وحدات ومحوره

الاكبر ينطبق على محور x

الحل :

* في القطع الناقص a^2 دائماً العدد الأكبر

* اذا كان المحور الاكبر ينطبق على محور x
اذاً العدد الاكبر يكون حتماً x^2

معطى : أصغر أكبر

طول المحورين 8 , 10

* طول المحور الاكبر $2a$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

* طول المحور الاصغر $2b$

$$2b = 8 \Rightarrow b = 4$$

معادلة القطع الناقص اذا كان مركزه
نقطة الاصل ومحوره الاكبر ينطبق
على x

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{(5)^2} + \frac{y^2}{(4)^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

١٠. خطا التقارب للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$ هما

(ب) $y = \pm 2x$

(أ) $y = \pm \frac{1}{2}x$

(د) $y = \pm 4x$

(ج) $y = \pm \frac{1}{4}x$

معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة

الأصل: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ خطا التقارب $\Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x$ ← موجبة

أو $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ خطا التقارب $\Rightarrow y = \pm \frac{a}{b}x$ ← سالبة

* في القطع الزائد دائما a^2 تكون موجبة
الدرجة أكبر وتكون موجبة

* إذا كانت x^2 موجبة فخطا التقارب يكونان:

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

* إذا كانت x^2 سالبة فخطا التقارب يكونان:

$$y = \pm \frac{a}{b}x$$

معض من السؤال:

$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{1} = 1$ x^2 سالبة
↓ $a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$
↓ $b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$$y = \pm \frac{2}{1}x \Rightarrow y = \pm 2x$$

▲ في القطع الزائد ▲

إذا كانت X تربيع موجبة يكون يكون اتجاه
القطع الزائد أفقي

إذا كانت X تربيع سالبة يكون اتجاه القطع
الزائد رأسي

▲ القطع الزائد ▲

وتكون معادلتها تشبه القطع الناقص ولكن
الاشارات مختلفة

10:00

تميز القطوع



1_ إذا كان التربيع على حد واحد فقط اما على X أو Y إذن هو قطع مكافئ

2_ إذا كان التربيع على X و Y معا بشرط أن يكون الاشارات مختلفة اذا هو قطع زائد

3_ إذا كان التربيع على X و Y والاشارات متشابهة اذا هو قطع ناقص

4_ إذا كان التربيع على X و Y و الاشارات والمعاملات متشابهة اذا هي دائرة

السؤال

1. ما قيمة C التي تجعل المعادلة $(2x - 1)^2 + cy^2 - 6y = 14$ تمثل دائرة ؟

- (أ) -4
- (ب) -2
- (ج) 2
- (د) 4

السؤال الأول

المطلوب كيف نجعل المعادلة الموجودة تمثل دائرة

عشان تكون دائرة لازم اشارة اكس تربيع وواي تربيع متشابهه والمعاملات ايضا متشابهه

لكي تمثل المعادلة دائرة لابد أن يتساوى كل من معاملي x^2, y^2
معامل x^2 بعد فكك القوس $4 =$
 $(2x - 1)^2 = 4x^2 - \dots \dots \dots$
 $\therefore C = 4$

قيمة C وهي معامل y تربيع لابد ان تكون مساوية لقيمة معامل اكس تربيع

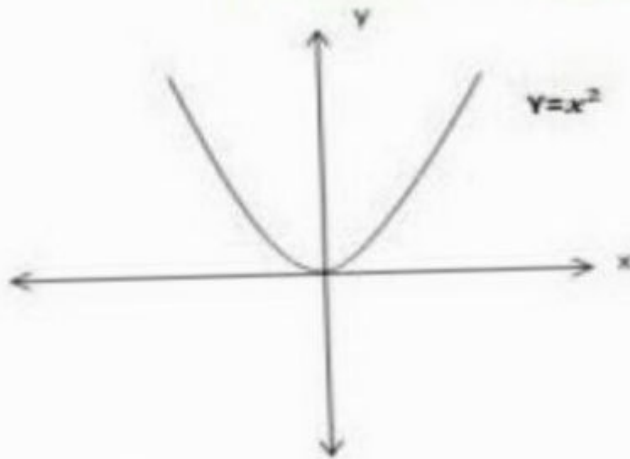
2. $x^2 = -9y$ تمثل المعادلة :
- (أ) قطع ناقص طرفاً محوره الأصغر $(0,3)(0,-3)$
- (ب) قطع ناقص بؤرتاه $(0,3)(0,-3)$
- (ج) قطع مكافئ مفتوح إلى أسفل
- (د) قطع مكافئ مفتوح إلى اليسار

سؤال 2 الحل بالنظر

التربيع على حد واحد اذا هو قطع مكافئ

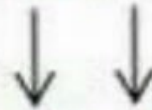
الاشارة بعد يساوي سالب اذا مفتوح للأسفل

3. إذا تم عمل انسحاب لقطع مكافئ في الشكل أدناه ليكون رأسه $(-1, 2)$ فما معادلة القطع الجديد ؟



رأس القطع المكافئ دائما معامل x بعكس الإشارة وايضا معامل y عكس الإشارة

$(-1, 2)$



$+1$ -2

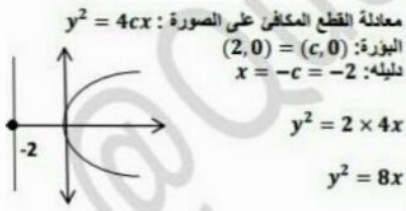
$$y - 2 = (x + 1)^2$$

سؤال 3

نكتب معادلة القطع المكافئ

ونعوض بالنقطة اللي معطينا

ما معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $x = -2$ والبؤرة $(2, 0)$ ؟



- (أ) $y^2 = 8x$
 (ب) $x^2 = 8y$
 (ج) $x^2 = 4y$
 (د) $y^2 = 4x$

معادلة القطع المكافئ الذي معادلة دليله $x = -2$ والبؤرة $(2, 0)$ ؟

* إذا كانت الدليل عند $x = -2$ ← مستقيم رأسي
 يكون التربع على y

* إذا كانت الدليل عند $y = 0$ ← مستقيم أفقي
 يكون التربع على x

∴ من دليل نستنتج الجواب ب، ج

البؤرة $(2, 0)$

$$h + c = 2$$

$$0 + c = 2$$

$$c = 2$$

$$4c = 4 \times 2 = 8$$

$$\therefore \text{الحل: } y^2 = 8x$$

حل مختصر:

إذا كانت $x = -2$ ← دليله رأسي
 يكون التربع على y

$y^2 = 2 \times 4x$
 $y^2 = 8x$

▼ في القطع المكافئ ▼

لابد من معرفة :

الرأس
إتجاه القطع
معادلة الدليل
طول الوتر البؤري



في كل قطع لابد من معرفة :

الصورة القياسية اذا كان الرأس او المركز
نقطة الأصل (0,0) أو (h , k)

معرفة اتجاه كل قطع

▼ في القطع الناقص ▼

لابد من معرفة

المركز

اتجاه القطع

المحور الأكبر - المحور الأصغر

▼ في القطع الزائد ▼

لابد من معرفة :

المركز

اتجاه القطع

خطا التقارب

Photo

نقاش

اليوم 18

▲ أولاً : التحويلات الهندسية للنقطة ▲

وبنداً بالإنعكاس: وهو تحويل هندسي يقلب الشكل حول مستقيم يسمى محور الإنعكاس ● إذا كانت النقطة واقعة على محور الإنعكاس فإن صورتها هي النقطة نفسها

الانعكاس حول نقطة الأصل فنضرب (x, y) في -1 $\rightarrow (-x, -y)$

الانعكاس حول محور x أضرب إحداثي y في -1

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

الانعكاس حول محور y أضرب إحداثي x في -1

$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

الانعكاس حول المستقيم $y = x$ نبدل موضعي x, y

$$(x, y) \rightarrow (y, x)$$

مثال:

صورة امدائتي المثلث ΔJKL الذي رؤوسه

$$J(3, 2), K(2, -2), L(4, -5)$$

بالانعكاس حول محور x ؟

الانعكاس حول x $(3, 2) \rightarrow (3, -2)$

نضرب امدائتي y في -1 $(2, -2) \rightarrow (2, 2)$

$$(4, -5) \rightarrow (4, 5)$$

الانعكاس حول محور y ؟

نضرب امدائتي x في -1 $(3, 2) \rightarrow (-3, 2)$

$$(2, -2) \rightarrow (-2, -2)$$

$$(4, -5) \rightarrow (-4, -5)$$

الانعكاس حول المستقيم $x = y$

نبدل بين موضعي x, y $(3, 2) \rightarrow (2, 3)$

$$(2, -2) \rightarrow (-2, 2)$$

$$(4, -5) \rightarrow (-5, 4)$$

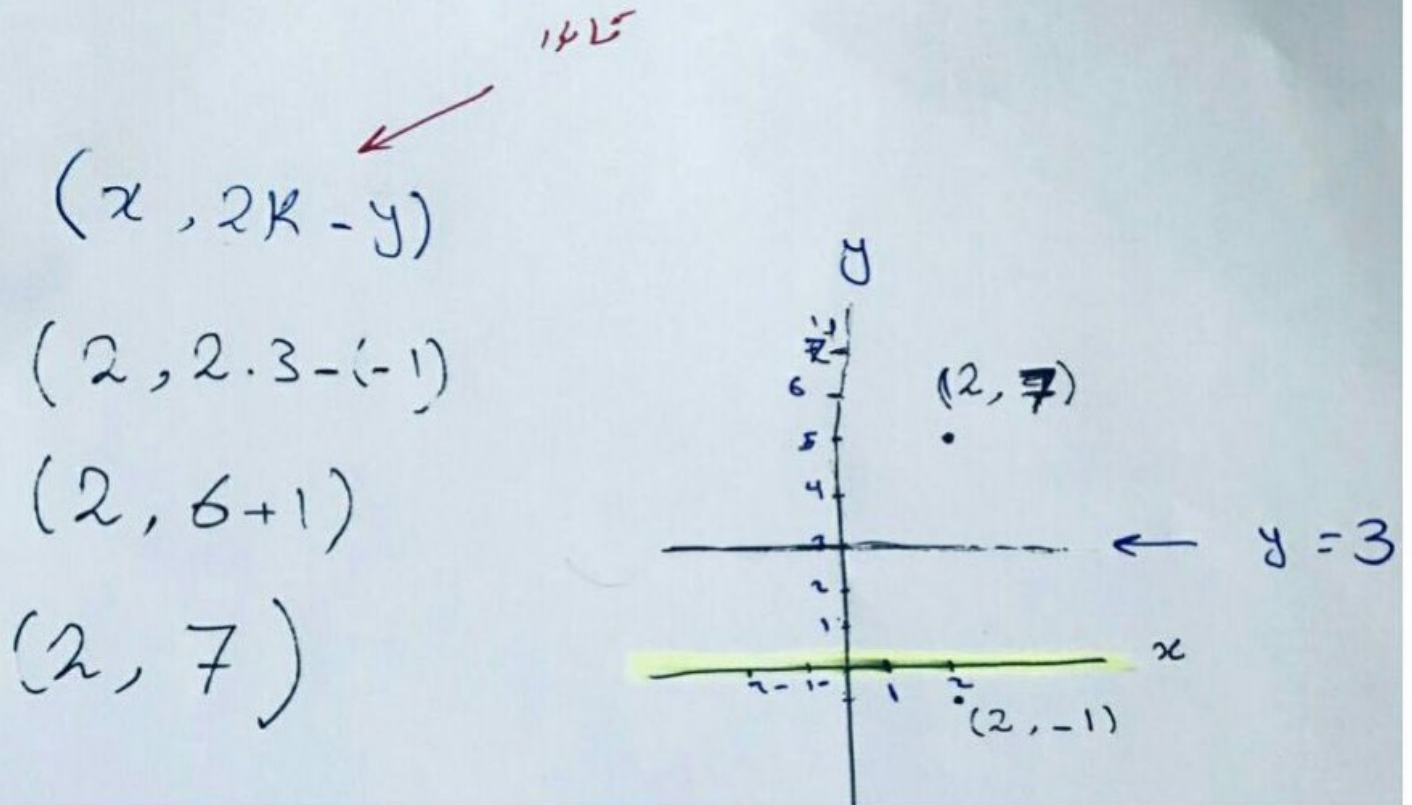
2. انعكاس النقطة $(2, -1)$ في المستقيم $y=3$ هي؟

(أ) $(4, -1)$

(ب) $(2, 7)$

(ج) $(2, -1)$

(د) $(-1, 2)$



ارسم محاورين

وعوض بقيمة النقطة

وارسم المستقيم $y=3$ واطوي الورقة وشوف وين
تطلع صورتها

صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم

صورة النقطة (x_1, y_1) بالتناظر حول المستقيم الرأسي $x = a$ هي: $(2a - x_1, y_1)$

$$(2, -1) \xrightarrow[\text{المستقيم } x = -3]{\text{بالانعكاس حول}} (2 \times -3 - 2, -1) = (-8, -1) \text{ مثلاً:}$$

صورة النقطة (x_1, y_1) بالتناظر حول المستقيم الأفقي $y = b$ هي: $(x_1, 2b - y_1)$

$$(2, -1) \xrightarrow[\text{المستقيم } y = -3]{\text{بالانعكاس حول}} (2, 2 \times -3 + 1) = (2, -5) \text{ مثلاً:}$$

مثال: أوجد صورة النقطة $(3, 1)$ بالتناظر حول المستقيم $y = -5$ متبوعاً بالانعكاس حول المستقيم $x = 2$ لحل:

$$(3, 1) \xrightarrow[\text{المستقيم } y = -5]{\text{بالانعكاس حول}} (3, 2 \times -5 - 1) = (3, -11) \xrightarrow[\text{المستقيم } x = 2]{\text{بالانعكاس حول}} (2 \times 2 - 3, -11) = (1, -11)$$

... أسأل الله العلي القدير أن يوفقنا وإياكم لما يُحب ويرضى ...

▲ الانسحاب أو الإزاحة ▲

- عندما تكون $b=0$ تكون الإزاحة أفقية فقط
- عندما تكون $a=0$ تكون الإزاحة رأسية فقط

1 12:50

الازاحة في النقاط بنفس الاشارات

اعلى موجب
يمين موجب
يسار سالب
اسفل سالب

1:00 ص 1

الازاحة .. أو الانسحاب

لإزاحة نقطة ما مسافة a وحدة (مفيا) واحدة رأسيا
اجمع a إلى الإحداثي y ، وط a إلى الإحداثي x .

$$(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$$

إشارة a السالبة تعني أن الإزاحة لليسار وإشارة b السالبة تعني أن الإزاحة إلى أسفل.

Δ EFG

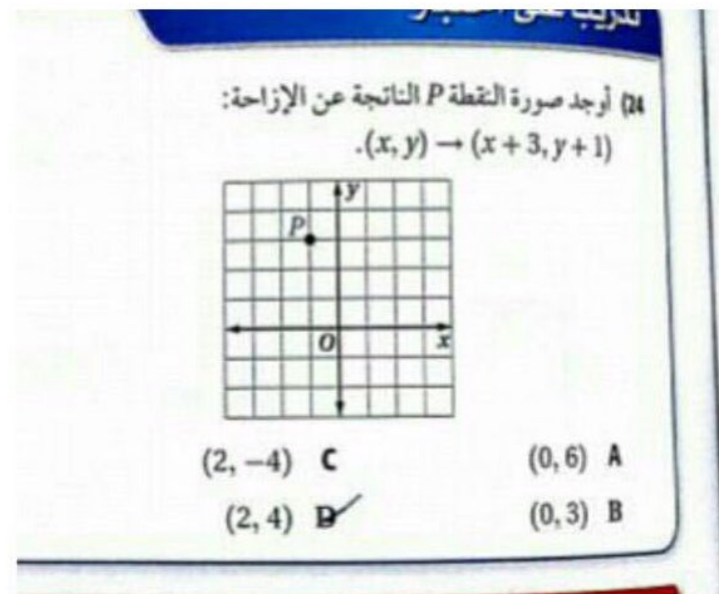
$$E(-7, -1), F(-4, -4), G(-3, -1)$$

$$\text{الزيج ورفع القاعدة} \rightarrow (x+2, y+5)$$

$$E(-7, -1) \rightarrow E'(-7+2, -1+5) \rightarrow (-5, 4)$$

$$F(-4, -4) \rightarrow F'(-4+2, -4+5) \rightarrow (-2, 1)$$

$$G(-3, -1) \rightarrow G'(-3+2, -1+5) \rightarrow (-1, 4)$$



أولا اكتبو النقطة نفسها

وبعدها اجرو الانسحاب نفس اللي بالورقة

1:01 ص 1

نوجد امدايتان لنقطه P في الحيز

$(x + 3, y + 1)$ $P(-1, 3) \rightarrow (2, 4)$
 $+3 \quad +1$

الحل D

١٠) أجي انسحاب إلى اليمين للنقطة $(2, -3)$ بمقدار وحدة واحدة ، ثم انسحاب إلى أسفل بمقدار وحدتين ، ثم تناظر حول نقطة الأصل ، ما مجموع إحداثيات النقطة الناتجة؟

(ب) -8

(د) 2

(أ) 8

(ج) 2

(١١) إذا أحينا انسحاباً إلى أسفل بمقدار ٣ وحدات

تناظر حول

نقطة الأصل

$$(2, -3) \xrightarrow{\text{انسحاب } (1, -2)} (3, -5) \xrightarrow{\text{تناظر حول نقطة الأصل}} (-3, 5)$$

$$-3 + 5 = 2$$

أولا انسحاب لليمين بمقدار وحدة واحدة يعني
نضيف لقيمة x واحد

انسحاب للأسفل (على محور y) وحدتين يعني
نضيف لقيمة y (-2)

ثم نطبق قانون التناظر حول نقطة الأصل وهو
نحرب الإحداثيات اكس وواي في سالب

④

① اجري انحاب الى اليمين للنقطة $(2, -3)$ *
 بمقدار وحدة واحدة ، ثم انحاب الى اسفل
 بمقدار وحدتين ، ثم تناظر حول نقطة الاصل
 ما مجموع إحداثيات النقطة الناتجة ؟

8	م
-2	ع
2	ب
-8	د

$(2, -3)$

* اجري انحاب الى اليمين بمقدار واحدة ، $x+1$
 انحاب للأسفل بمقدار وحدتين $y-2$

$(2, -3)$
 $(2+1, -3-2) \rightarrow (3, -5)$
 تناظر حول نقطة الاصل $(0,0)$
 نضرب (x, y) في -1
 $-1 \times (3, -5)$
 $(-3, 5)$

مجموع الإحداثيات :
 $-3 + 5 = 2$

الحل ب

▲ ثالثا: التمدد ▲

التمدد هو تحويل هندسي يكبر الشكل أو يصغره بنسبة محددة تسمى هذه النسبة معامل التمدد

التحويلات الهندسية:

• انعكاس = تناظر

• ازاحه = انسحاب

• دوران

• تمدد

1 1:05

التمدد ..
لدينا احداثيات لصوره (x, y) عن تمدد بنسبة k لنضرب الإحداثيين x, y في معامل مقياس التمدد k
 $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

مثال
 $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2)$
معامل التمدد = 2
نضرب كل إحداثي x, y في معامل التمدد 2
 $(2, 1) \rightarrow (4, 2)$
 $(0, 3) \rightarrow (0, 6)$
 $(-1, 2) \rightarrow (-2, 4)$

Photo
Created

Generated by CamScanner

$$(2, -1) \xrightarrow{\text{تمدد معامله 2}} (2 \times 2, -1 \times 2) \Rightarrow (4, -2)$$

(ج) (5, 2) (د) (1, -2)
 ٦ صورة النقطة (2, -1) بتمدد مركزه نقطة
 الأصل ومعامله 2 هي :
 (أ) (4, 2) (ب) (4, -2)
 (ج) (-4, 2) (د) (2, -1)
 ٧ صورة النقطة (2, -1) بتمدد مركزه نقطة

التحويلات الهندسية للدوال

وأهم التحويلات الهندسية هي ((الانسحاب أو الإزاحة))

انسحاب الدوال

لليمين أو اليسار يعني على محور X
لليمين سالب
لليسار موجب

لأعلى وأسفل يعني على محور Y ، لا تتغير الإشارة

الانسحاب الرأسى والانسحاب الأفقى

التحويلات الهندسية للدوال

$f(x) = f(x-h)$ انسحاب لليمين
 $f(x) = f(x+h)$ انسحاب لليسار

$g(x) = |x-2| - 1$
انسحاب لليمين بمقدار وحدتين
انسحاب للأسفل بمقدار وحدة

$g(x) = |x+3|$
انسحاب لليسار بمقدار 3 وحدات

$h(x) = (x+2)^2 + 4$
انسحاب لليسار بمقدار 2 وحدات
انسحاب للأعلى بمقدار 4 وحدات

$g(x) = f(x) + k$ انسحاب للأعلى
 $g(x) = f(x) - k$ انسحاب للأسفل

مثال:
 $g(x) = |x| + 4$ انسحاب للأعلى بمقدار 4 وحدات
 $g(x) = x^2 - 5$ انسحاب للأسفل بمقدار 5 وحدات

الانعكاس حول المحاور:
حول x: $g(x) = -f(x)$
حول y: $g(x) = f(-x)$

التمدد الرأسى والتمدد الأفقى

$g(x) = af(x)$
 $a > 1$ ← توسع رأسى
 $a < 1$ ← تضيق رأسى

$f(x) = 2x^2$
 $f(x) = \frac{1}{8}x^2$

أ. نهله

$f(x) = (2x)^2$
 $f(x) = (\frac{1}{3}x)^3$

$a > 1$ ← توسع أفقى
 $a < 1$ ← تضيق أفقى

(١١) إذا أجرينا انسحاباً لمستقيم معادلته
 $y = x - 1$ ، بمقدار 5 وحدات إلى اليمين
فما معادلة المستقيم الجديد؟

(ب) $y = x + 4$

(أ) $y = x - 5$

(د) $y = x - 6$

(ج) $y = 5x - 1$

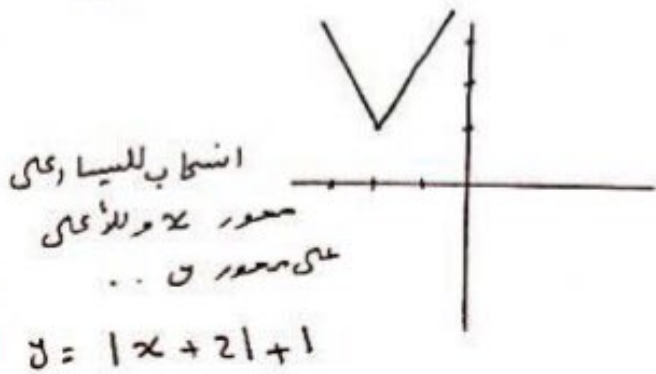
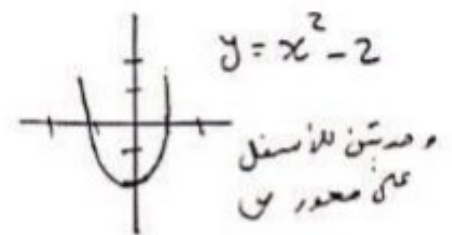
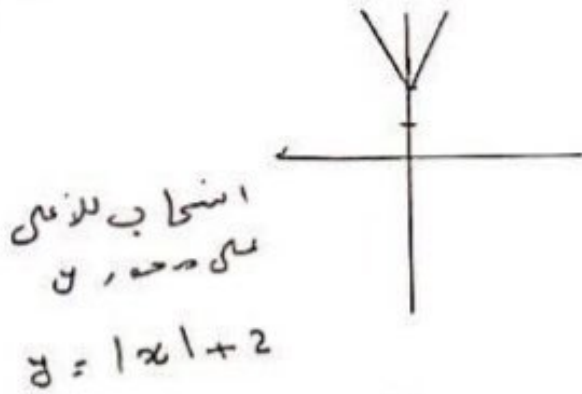
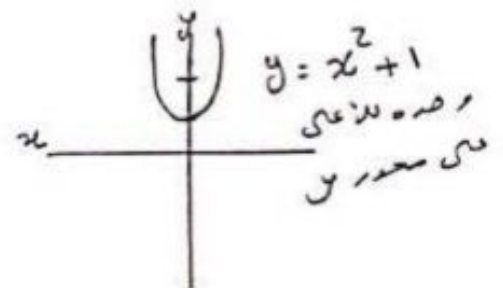
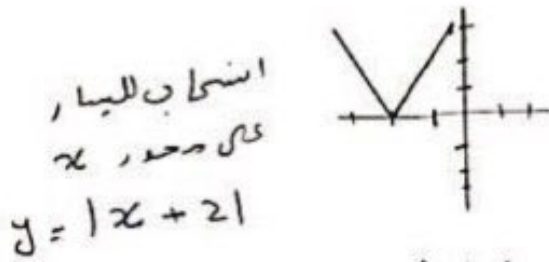
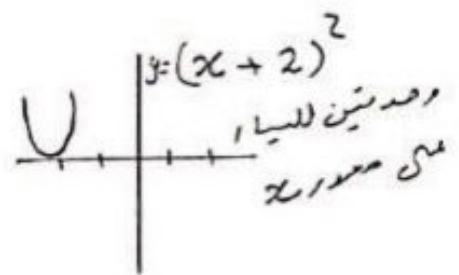
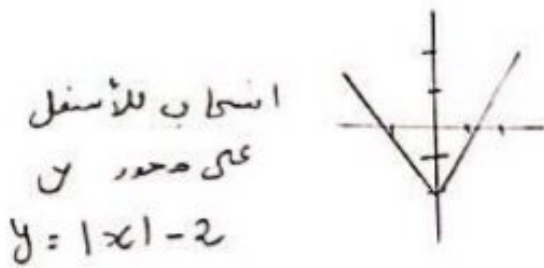
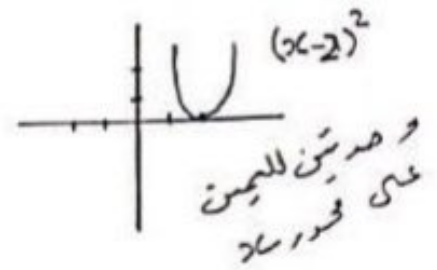
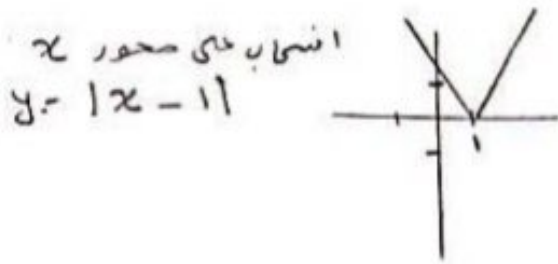
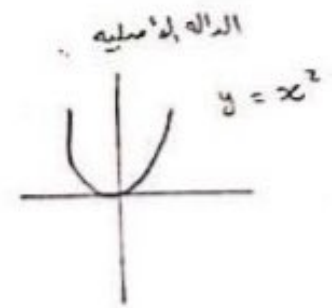
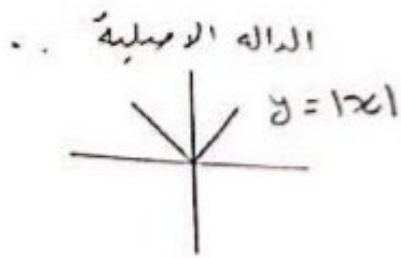
$$y = x - 1$$

مقدار 5 وحدات لليمين

نضيف العدد داخل القوس مع x

$$y = (x - 5) - 1$$

$$y = x - 6$$



5

* إذا كان الانسحاب أفقي (لليمين أو اليسار)

نضيف العدد داخل القوس .

مثال : 5 وحدات لليمين

$$y = x^2 - 1$$

$$y = (x - 5)^2 - 1$$

* إذا كان الانسحاب للأعلى أو للأسفل

نضيف العدد خارج القوس .

مثال : 5 وحدات للأعلى

$$y = x^2 + 1$$

$$y = x^2 + 5 + 1$$

$$y = x^2 + 6$$

إذا كان الانسحاب لليمين أو اليسار نضيف

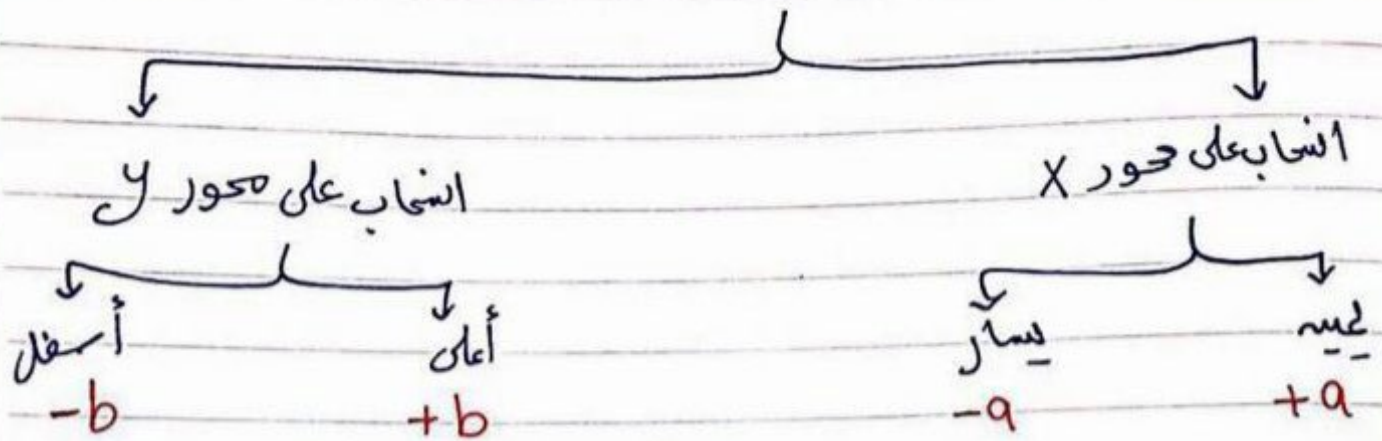
العدد بعكس اشارته داخل القوس مع X

إذا الانسحاب للأعلى أو للأسفل نضيف العدد

بنفس اشارته خارج القوس

معادله المماس

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$



Line passing through (x_1, y_1) with slope m .

Line passing through (x_1, y_1) with slope m .

5 وحدات لأعلى

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 5 = x - 1$$

$$y = x - 1 + 5$$

$$y = x + 4$$

5 وحدات للأسفل

$$y - (-5) = x - 1$$

$$y + 5 = x - 1$$

$$y = x - 1 - 5$$

$$y = x - 6$$

5 وحدات للأسفل

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y = x - 5 - 1$$

$$y = x - 6$$

5 وحدات للأسفل

$$y = x - (-5) - 1$$

$$y = x + 5 - 1$$

$$y = x + 4$$

النقطة

(x, y) ← يحين $x = a$ موجب

← سيار $x = a$ سالب

أعلى $y = a$ موجب

أقل $y = a$ سالب

الدوال

$y = x + a$ ← حين $y = x - a$ سالب لأن جنب المتغير

← سيار $y = x + a$ موجب لأن جنب المتغير

← أعلى $y = x + a$ موجب

سالب $y = x - a$

← أسفل

$$y = x - 1$$

* انشحاب بمقدار 5 وحدات لليمين $\leftarrow -5$

$$y = x - 5 - 1$$

$$y = x - 6$$

* انشحاب للدالة $y = x - 1$ 5 وحدات للأعلى يعني $+5$

$$y = x - 1 + 5$$

$$y = x + 4$$

* انشحاب للدالة $y = x^2 - 1$ 5 وحدات لليمين $\leftarrow -5$

$$y = (x - 5)^2 - 1$$

* انشحاب للدالة $y = x^2 - 1$ 5 وحدات للأعلى $+5$

$$y = x^2 - 1 + 5$$

$$y = x^2 + 4$$

* على محور x تصنيف العدد داخل القوس

* على محور y تصنيف العدد خارج القوس

5. عند سحب المنحنى $y = (x - 2)^2 - 3$ خمس وحدات للأعلى ووحدتان لليسار فإن المنحنى الناتج يمكن كتابته:

(أ) $y = x^2 + 2$

(ب) $y = x^2 - 8$

(ج) $y = (x - 4)^2 - 8$

(د) $y = (x - 4)^2 + 2$

$$y = (x - 2)^2 - 3$$

5 وحدات للأعلى يعني $+5$ ← نضيفها خارج القوس

وحدتان لليسار يعني $+2$ ← داخل القوس .

$$y = (x + 2 - 2)^2 - 3 + 5$$

$$y = (x)^2 + 2$$

$$y = x^2 + 2$$

▲ رابعا : الدوران ▲

● اذا كانت النقطة هي مركز الدوران فإن صورتها هي النقطة نفسها

● اذا كانت النقطة غير مركز الدوران فإن النقطة الأصلية وصورتها تبعدان المسافة نفسها عن مركز الدوران

1:05 ص 1

الدوران :

بزواية 90 :

فكرب اعدادي y في x - ثم نبدل بين المراتب .
180

فكرب x في y - فقط
270

فكرب x في y - ثم نبدل بين نصوص الاعداد x و y
مثال :

صورة اعداديات المثلث PQR

$P(1,1), Q(4,5), R(5,1)$

عند دوران بزواية 90 ، 180

90
فكرب y في x في (-1)
ثم نبدل بين مواقعهم
 $(1,1) \rightarrow (-1,1)$
 $(4,5) \rightarrow (-5,4)$
 $(5,1) \rightarrow (-1,5)$

180
فكرب x في y في -1
فقط
 $(1,1) \rightarrow (-1,-1)$
 $(4,5) \rightarrow (-4,-5)$
 $(5,1) \rightarrow (-5,-1)$

$(x, y) \Rightarrow (y, -x)$ $(2, -1) \xrightarrow{\text{دوران } 270^\circ} (-1, -2)$	<p>٩) صورة النقطة $(2, -1)$ بدوران مركزه نقطة الأصل بزاوية 270° هي :</p> <p>(أ) $(-2, 1)$ (ب) $(1, -2)$ (ج) $(-2, -1)$ (د) $(1, 2)$</p>
--	--

١٠. انعكاس النقطة (x, y) حول x -

١١. محور x $(y, -x)$ تغيير إشارة y

١٢. محور y $(x, -y)$ تغيير إشارة x

١٣. حول المستقيم (y, x) ... قلب بين x, y

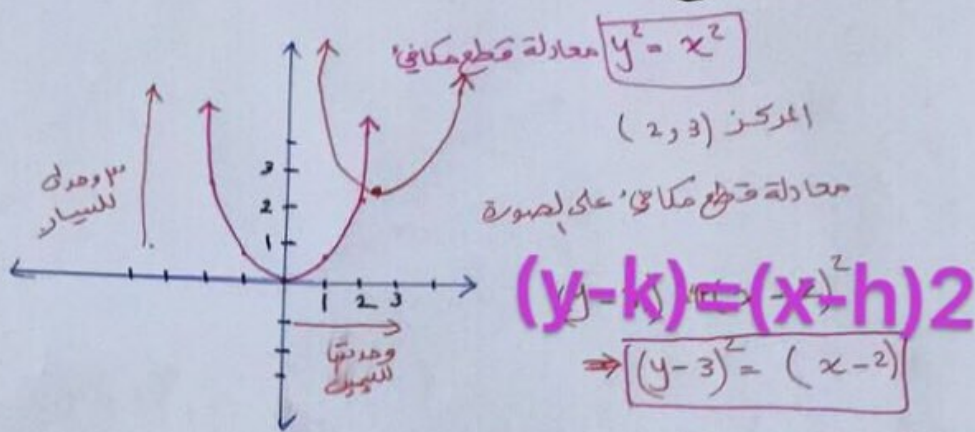
١٤. دوران النقطة (x, y) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة

أ. زاوية 90° $(x, -y)$ قلب وتغيير إشارة y

ب. زاوية 180° $(-x, -y)$ تغيير إشارات x, y

ج. زاوية 270° $(y, -x)$ قلب وتغيير إشارة x

و 3 وحدات للأعلى



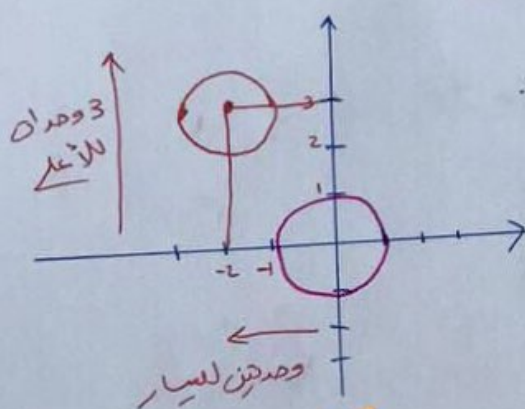
استحاب النقطة للمركز

$$(2, 3) = (0+2, 0+3) \leftarrow (0, 0)$$

استحاب الدالة

$$y = (x-2)^2 + 3 \leftarrow y-3 = (x-2)^2 \leftarrow y = x^2$$

استحاب للدائرة معادلتها $x^2 + y^2 = r^2$ مركزه (0,0) بمقدار 3 وحدات للأعلى ووحدتين للسيارة.



$$x^2 + y^2 = r^2$$

معادلة الدائرة على الصورة

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

المركز (-2, 3)

$$\therefore (x - (-2))^2 + (y - 3)^2 = r^2$$

$$\therefore (x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

استحاب النقطة للمركز

$$(0, 0) \leftarrow \begin{matrix} 3 وحدات للأعلى \\ ووحدتين للسيارة \end{matrix}$$

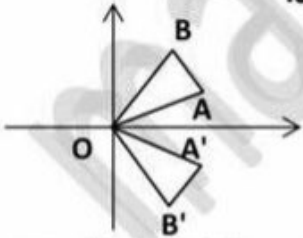
استحاب الدالة

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = r^2 \leftarrow (x - (-2))^2 + (y-3)^2 = r^2 \leftarrow x^2 + y^2 = r^2$$

تفريق بين
انسحاب النقطة
وانسحاب الدالة

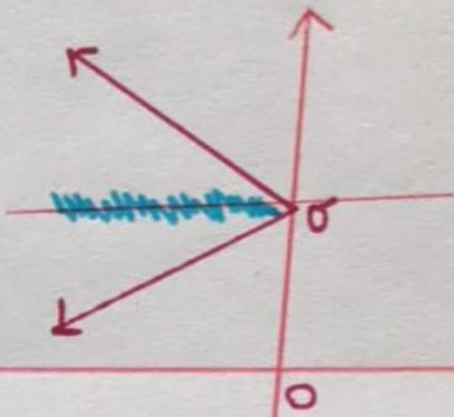
المعيار الثالث: اسئلة مناقشة اليوم التاسع عشر

التحويلات الهندسية

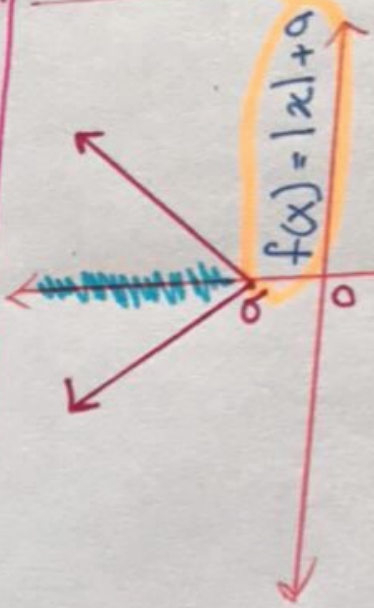
السؤال	الحل
1. انعكاس النقطة $(2,0)$ في المستقيم $y=x$ هو النقطة؟ (أ) $(2,0)$ (ب) $(0,2)$ (ج) $(-2,0)$ (د) $(0,-2)$	نبدل الاحداثي y محل الاحداثي x نبدل الاحداثي x محل الاحداثي y فيصبح $(2,0)$ $(0,2)$
2. انعكاس النقطة $(2,-1)$ في المستقيم $y=3$ هي؟ (أ) $(4,-1)$ (ب) $(2,7)$ (ج) $(2,-1)$ (د) $(-1,2)$	انعكاس النقطة (x,y) في المستقيم $y=k$ هو $(x, 2k-y)$ $(x, 2k-y) = (x, 2(3) - (-1)) = (2, 7)$
3. اذا كان المثلث $\triangle OA'B'$ صورة لـ $\triangle OAB$ فما نوع التحويل الممثل في الشكل:  (أ) انعكاس (ب) انتقال (ج) دوران (د) تمدد	بشكل عام: صورة (x,y) بالانعكاس حول محور السينات هي $(x,-y)$ وحيث ان النقطة $A = (-2,3)$ $\xrightarrow{\text{انعكاس A}} (-2,-3)$
4. انعكاس النقطة A حول محور السينات في الشكل هي: (أ) $(2,3)$ (ب) $(-2,3)$ (ج) $(2,-3)$ (د) $(-2,-3)$	بشكل عام: صورة (x,y) بالانعكاس حول محور السينات هي $(x,-y)$ وحيث ان النقطة $A = (-2,3)$ $\xrightarrow{\text{انعكاس A}} (-2,-3)$
5. عند سحب المنحنى $y = (x-2)^2 - 3$ خمس وحدات للأعلى ووحدتان لليسار فإن المنحنى الناتج يمكن كتابته: (أ) $y = x^2 + 2$ (ب) $y = x^2 - 8$ (ج) $y = (x-4)^2 - 8$ (د) $y = (x-4)^2 + 2$	$y = (x-2+2)^2 - 3 + 5$ $y = x^2 + 2$
6. اذا انتقلت النقطة $(2,0)$ إلى النقطة $(-2,0)$ بدوران مركزه نقطة الاصل واتجاهه مع عقارب الساعة, فإن زاوية الدوران هي: (أ) 90 (ب) 180 (ج) 270 (د) 360	باستخدام الرسم على المستوى الاحداثي نجد ان الدوران كان بزاوية 180 درجة

ايجاد المدي من الرسم (محور y)

$$f(x) = |x - a|$$

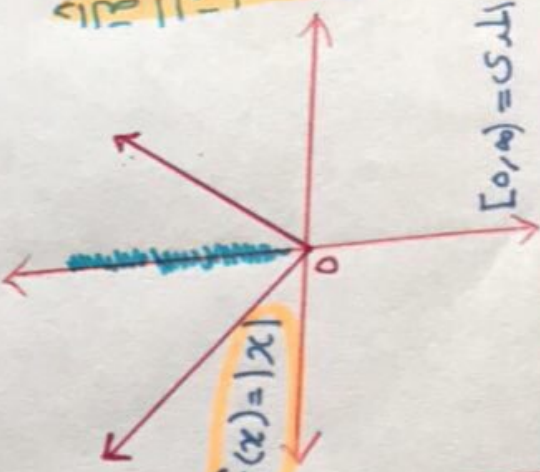


المدي = $[0, \infty)$



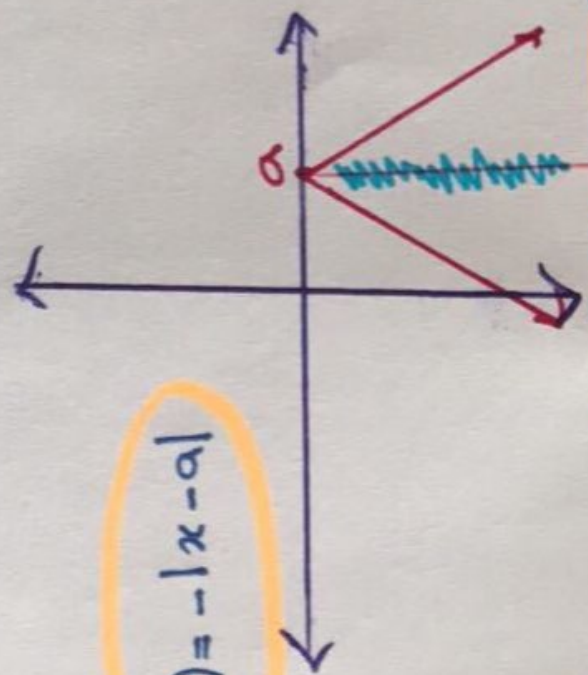
المدي = $[a, \infty)$

$$f(x) = |x|$$



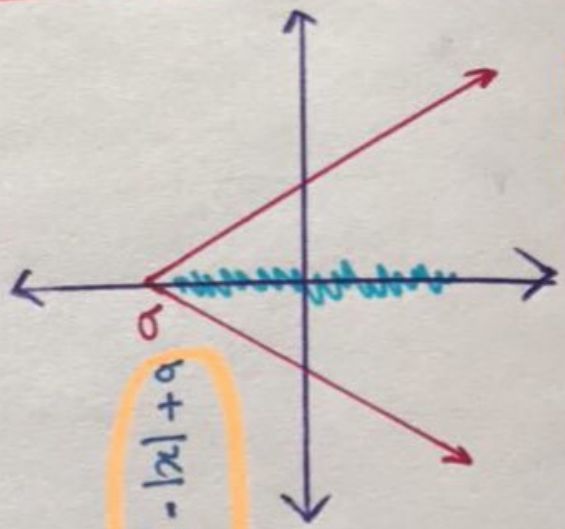
المدي = $[0, \infty)$

$$f(x) = -|x - a|$$



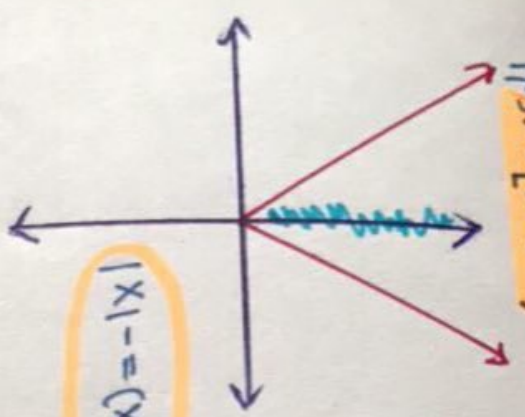
المدي = $(-\infty, 0]$

$$f(x) = -|x| + a$$



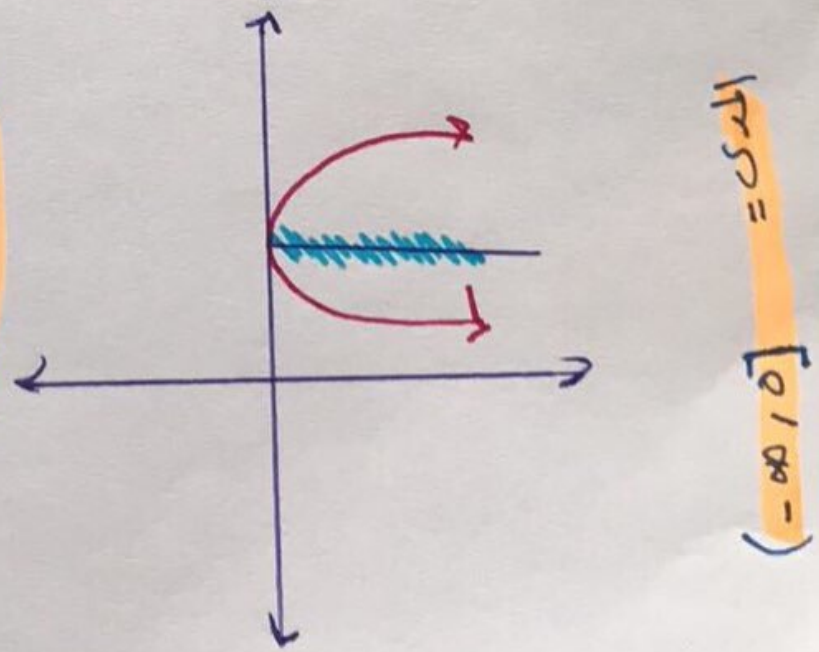
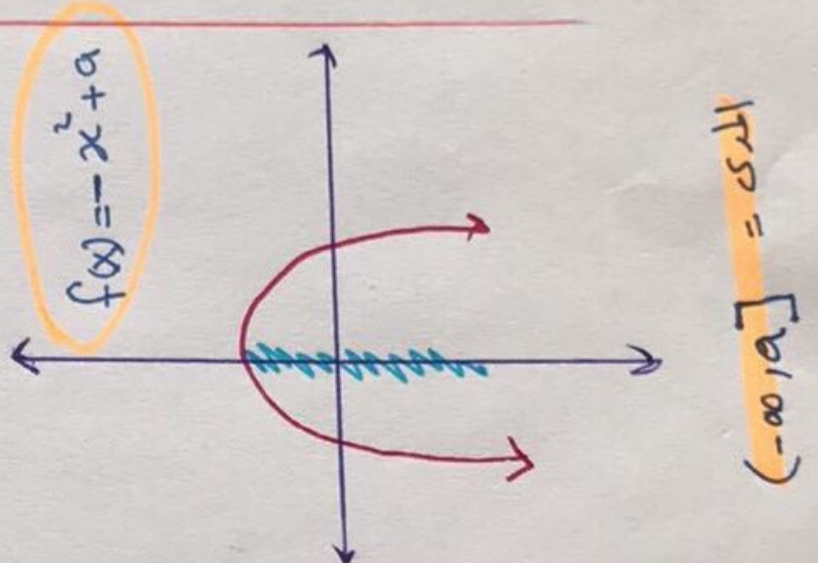
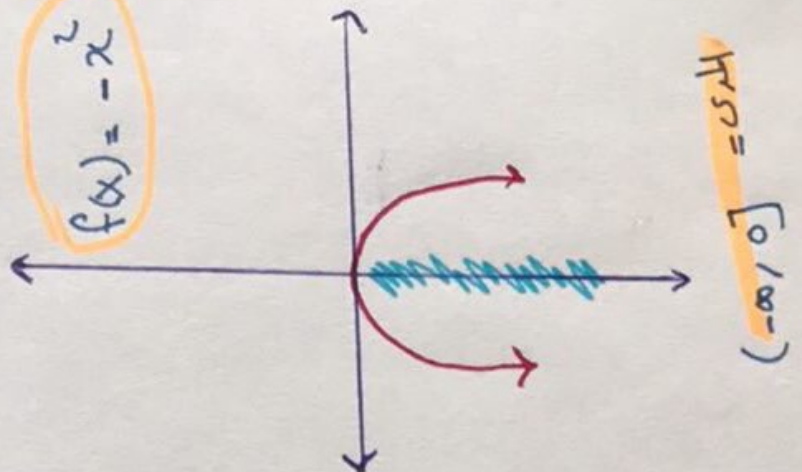
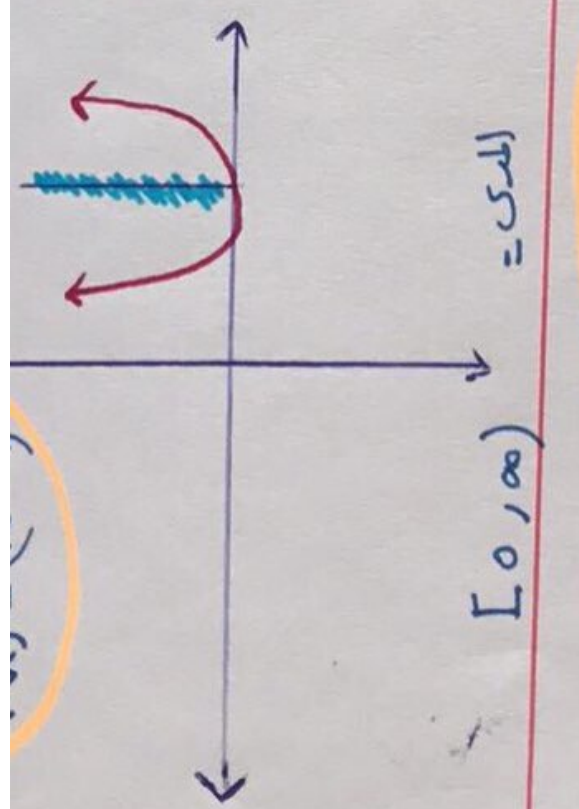
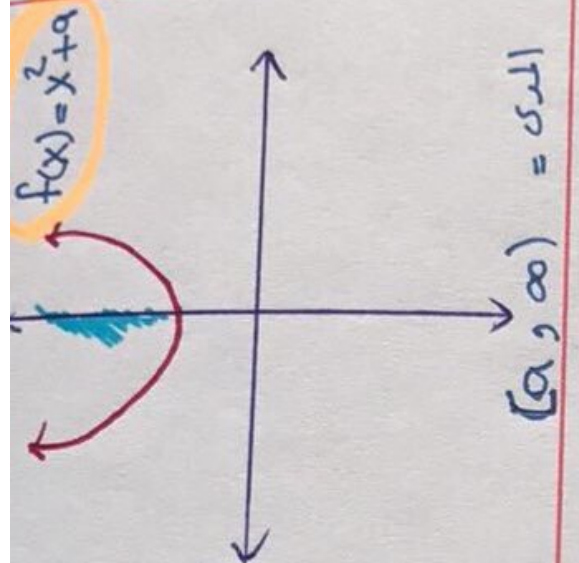
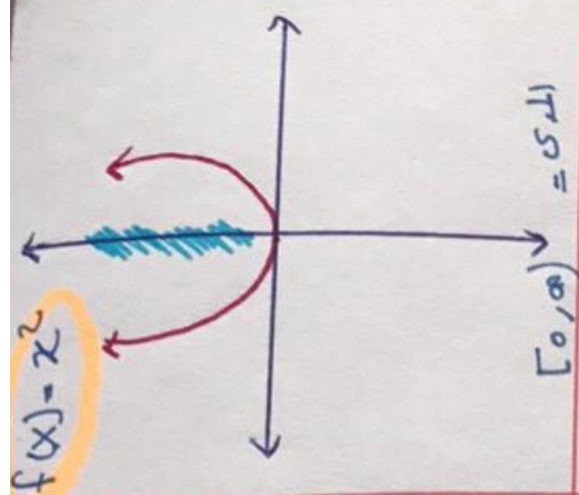
المدي = $(-\infty, a]$

$$f(x) = -|x|$$



المدي = $(-\infty, 0]$

المدة = 15 دقيقة



انسحاب للأعلى أو الأسفل للدالة ممكن
نحدد منها المدى فيكون من عدد على المحور
الصادي
أما انسحاب يمين و يسار. مداها نفس دالة
الأم

الانعكاس حول الصادات إذا وجد إشارته
سالبة قبل الدالة.
فيكون المدى للأسفل يبدأ من أعلى قيمة على
المحور الصادي

الدوال التي لها علاقة بالانسحاب بالمدى
هي دالة التربيع. ودالة القياس والدالة
الجزئية والدالة الأسية
لأن عند التعويض بقيم اكس تصبح موجبة

7:27

بسم الله الرحمن الرحيم

ملخص محاضرة [١]

- من التعاريف التي وضعها العالم اليوناني إقليدس: النقطة حيث قال: النقطة هي ما لا يكون لها جزء.
- نعلم أنه في نظام إحداثي متعام المحاور XOY تكون النقطة لها الإحداثي: (x, y) .
- بعد النقطة (x, y) عن نقطة الأصل $(0, 0)$ هو $\sqrt{x^2 + y^2}$
- التحويلات الهندسية للنقطة (x, y) في المستوى:

إعداد الأستاذ سمير وهدان

[١] الانعكاس (التناظر - التماثل)

حول ...	النتيجة	الخلاصة
حول محور X	$(x, -y) \leftarrow (x, y)$	نعكس إشارة إحداثي y
حول محور Y	$(-x, y) \leftarrow (x, y)$	نعكس إشارة إحداثي x
حول نقطة الأصل	$(-x, -y) \leftarrow (x, y)$	نعكس إشارة الإحداثيين x , y معاً
حول المستقيم: $y = x$	$(y, x) \leftarrow (x, y)$	بدل الإحداثيين معاً

[٢] الانتقال (الانسحاب - الإزاحة)

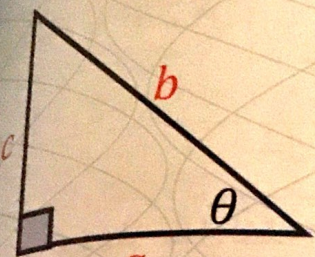
في اتجاه...	الصيغة	الخلاصة
محور X بمقدار a	$(x + a, y) \xleftarrow{a} (x, y)$	أضف على إحداثي x
محور Y بمقدار b	$(x, y + b) \xleftarrow{b} (x, y)$	أضف على إحداثي y
المحورين معاً: (a , b)	$(x + a, y + b) \xleftarrow{(a,b)} (x, y)$	أضف a على إحداثي x و أضف b على إحداثي y معاً

[٣] دوران مركزه نقطة الأصل

قياس زاويته	الصيغة	الخلاصة
+90, -270	$(-y, x) \leftarrow (x, y)$	بدل الإحداثيين معاً و اعكس إشارة الأولى
-90, +270	$(y, -x) \leftarrow (x, y)$	بدل الإحداثيين معاً و اعكس إشارة الثانية
± 180	$(-x, -y) \leftarrow (x, y)$	اعكس الإشارتين
± 360	$(x, y) \leftarrow (x, y)$	دوران محايد: لا يغير النقطة

نقاش

اليوم 19

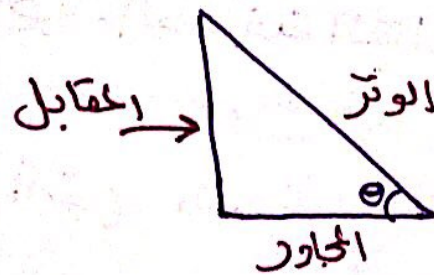


الدوال المثلثية :

الدوال المثلثية	مقلوبها
$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{c}{b}$	$\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$
$\cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{b}$	$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$
$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{c}{a}$	$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

طريقة سهلة لحفظ الدوال المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

	0°	30°	45°	60°	90°
Sin	0	1	2	3	4
Cos	4	3	2	1	0
2					



$$\sin \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} \quad \cos \theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

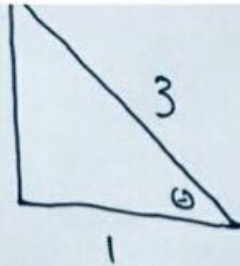
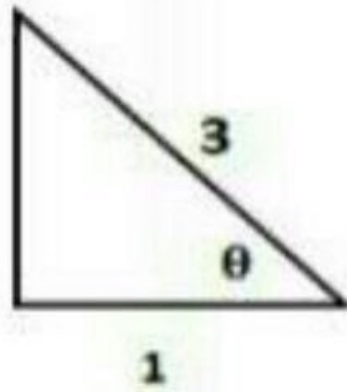
$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{\text{الوتر}}{\text{المجاور}}$$

↙
مقلوب cos

$$\csc \theta = \frac{\text{الوتر}}{\text{المقابل}}$$

↗
مقلوب sin

٤) أوجد قيمة $\sin \theta$:



$$3^2 = 1^2 + x^2$$

$$9 = 1 + x^2$$

$$x^2 = 8$$

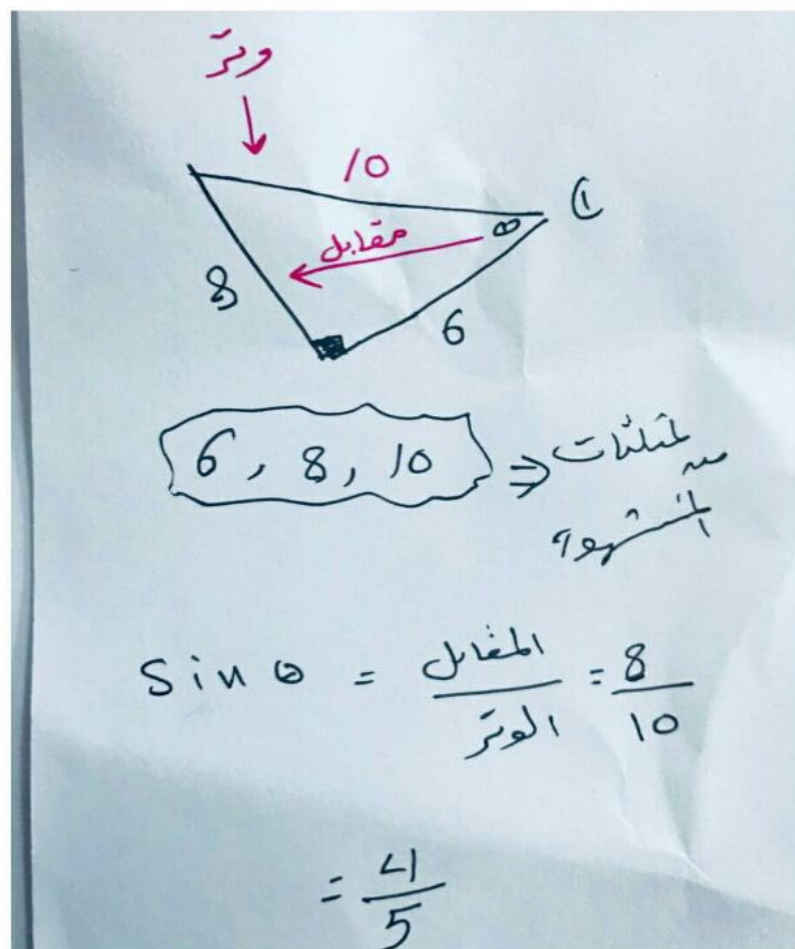
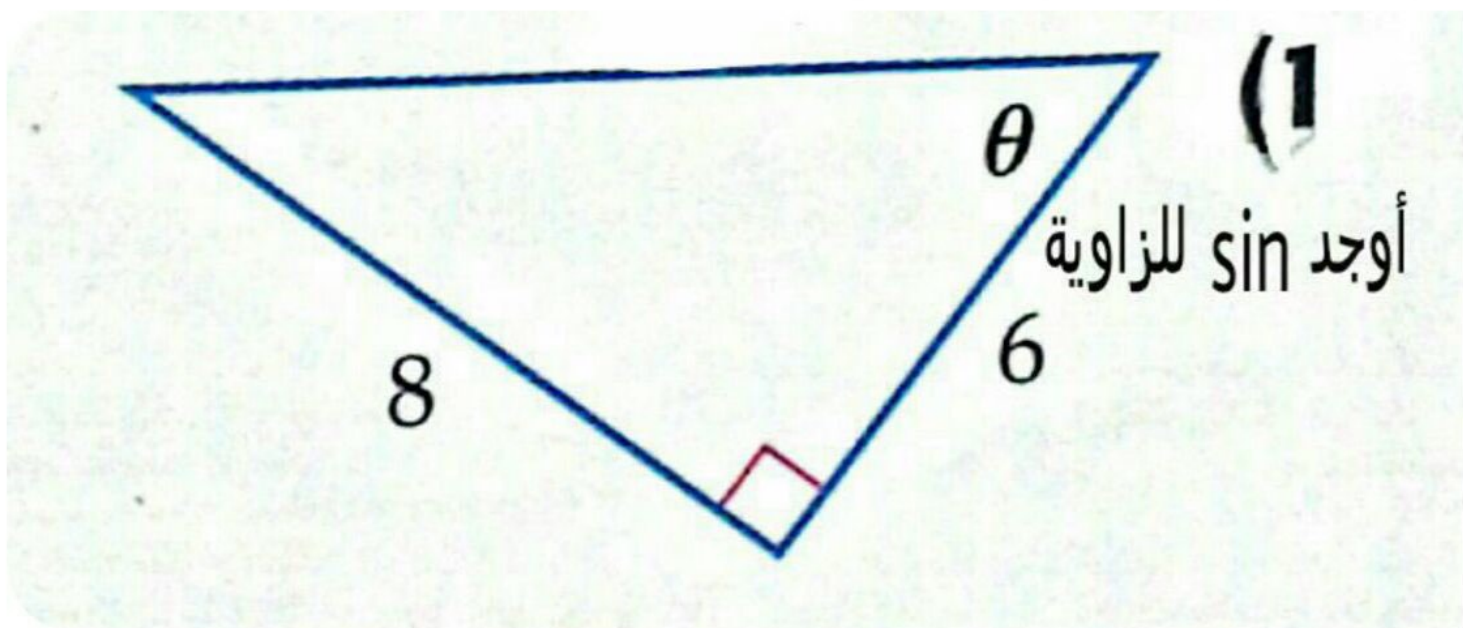
$$x = \sqrt{8}$$

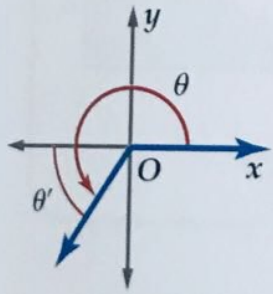
$$\sin \theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Photo
Grid





الدوال المثلثية باستعمال الزوايا المرجعية : إذا كانت θ زاوية غير ربعية مرسومة في الوضع القياسي، فإن زاويتها المرجعية θ' هي الزاوية الحادة المحصورة بين ضلع انتهاء الزاوية θ والمحور x . والجدول الآتي يبين قواعد إيجاد قياس الزاوية المرجعية للزاوية θ حسب الربع الذي يقع فيه ضلع الانتهاء لها، حيث $0^\circ < \theta < 360^\circ$ أو $0 < \theta < 2\pi$.

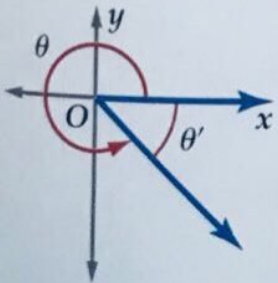
أضف إلى

مطوبتك

الزوايا المرجعية

مفهوم أساسي

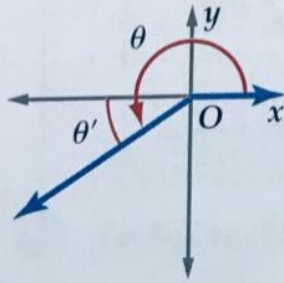
الربع الرابع



$$\theta' = 360^\circ - \theta$$

$$\theta' = 2\pi - \theta$$

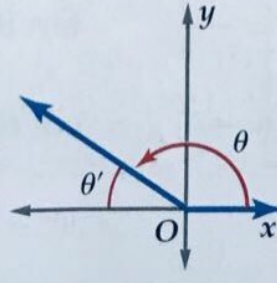
الربع الثالث



$$\theta' = \theta - 180^\circ$$

$$\theta' = \theta - \pi$$

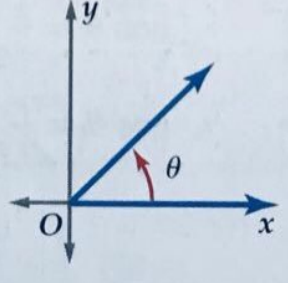
الربع الثاني



$$\theta' = 180^\circ - \theta$$

$$\theta' = \pi - \theta$$

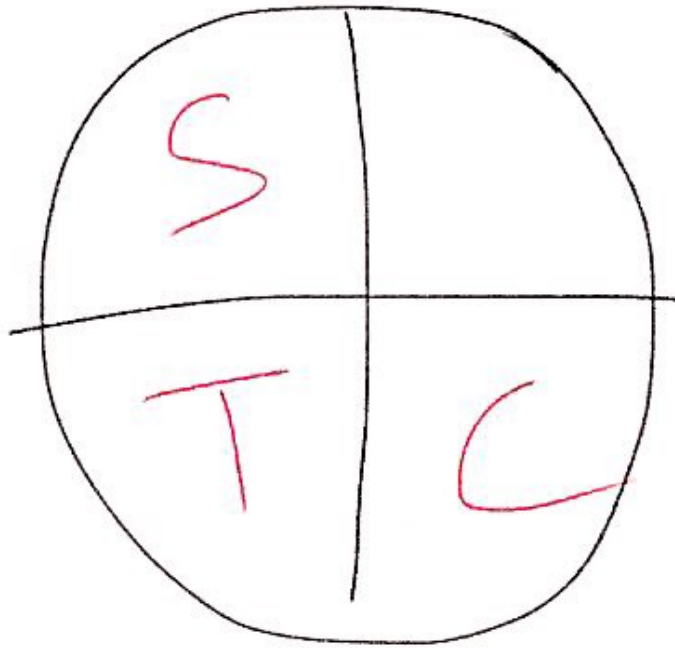
الربع الأول



$$\theta' = \theta$$



الملاحظات >



- ☐ الربع الاول كلها موجبة
- ☐ الربع الثاني فقط اللي تبدأ بـ S
- ☐ الربع الثالث اللي تبدأ بـ T
- ☐ الربع الرابع اللي تبدأ بـ C
- ☐ Sin, cos, tan, cot



مفهوم أساسي

إيجاد قيم الدوال المثلثية

أضف
مطوية

الربع الأول	الربع الثاني
$\sin \theta, \csc \theta: +$	$\sin \theta, \csc \theta: +$
$\cos \theta, \sec \theta: +$	$\cos \theta, \sec \theta: -$
$\tan \theta, \cot \theta: +$	$\tan \theta, \cot \theta: -$
الربع الثالث	الربع الرابع
$\sin \theta, \csc \theta: -$	$\sin \theta, \csc \theta: -$
$\cos \theta, \sec \theta: +$	$\cos \theta, \sec \theta: -$
$\tan \theta, \cot \theta: -$	$\tan \theta, \cot \theta: +$

الخطوة 1: أوجد قياس الزاوية المرجعية θ' .

الخطوة 2: أوجد قيمة الدالة المثلثية للزاوية θ' .

الخطوة 3: حدّد إشارة قيمة الدالة المثلثية

للزاوية θ باستعمال الربع الذي يقع

فيه ضلع الانتهاء للزاوية θ .

من أسئلة أعوام سابقة :

الزاوية التي قياسها 1450° - في

الوضع القياسي
صنع الانشاء لـ 1450° يقع في الربع :

① الأول

② الثاني

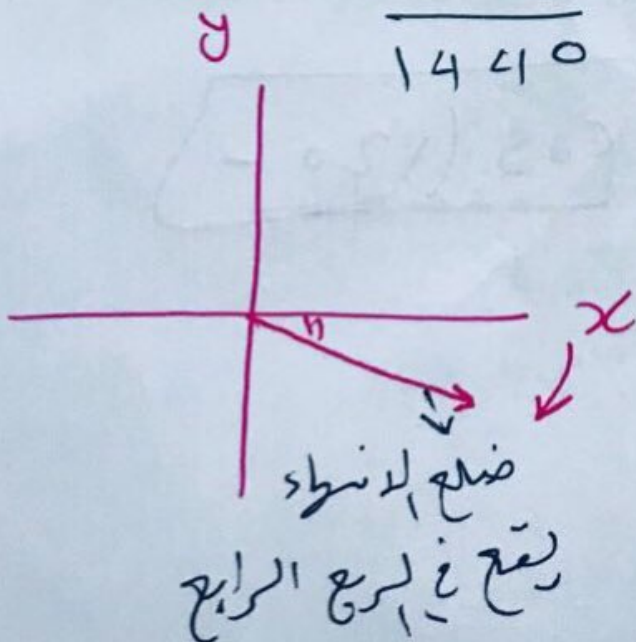
③ الثالث

④ الرابع

نضع العدد 1450 إذا نجح عليه
كل مرة 360 ومضاعفاتها

$$\begin{array}{r} 360 \\ 4 \times \\ \hline 1440 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1450 \\ 1440 - \\ \hline 10 \end{array}$$



سؤال من أسوأ أسئلة :
 الزاوية التي قياسها 1450 - في الوضع العيادي
 منطل من مركزها يقع في الربع :

① الأول

② الثاني

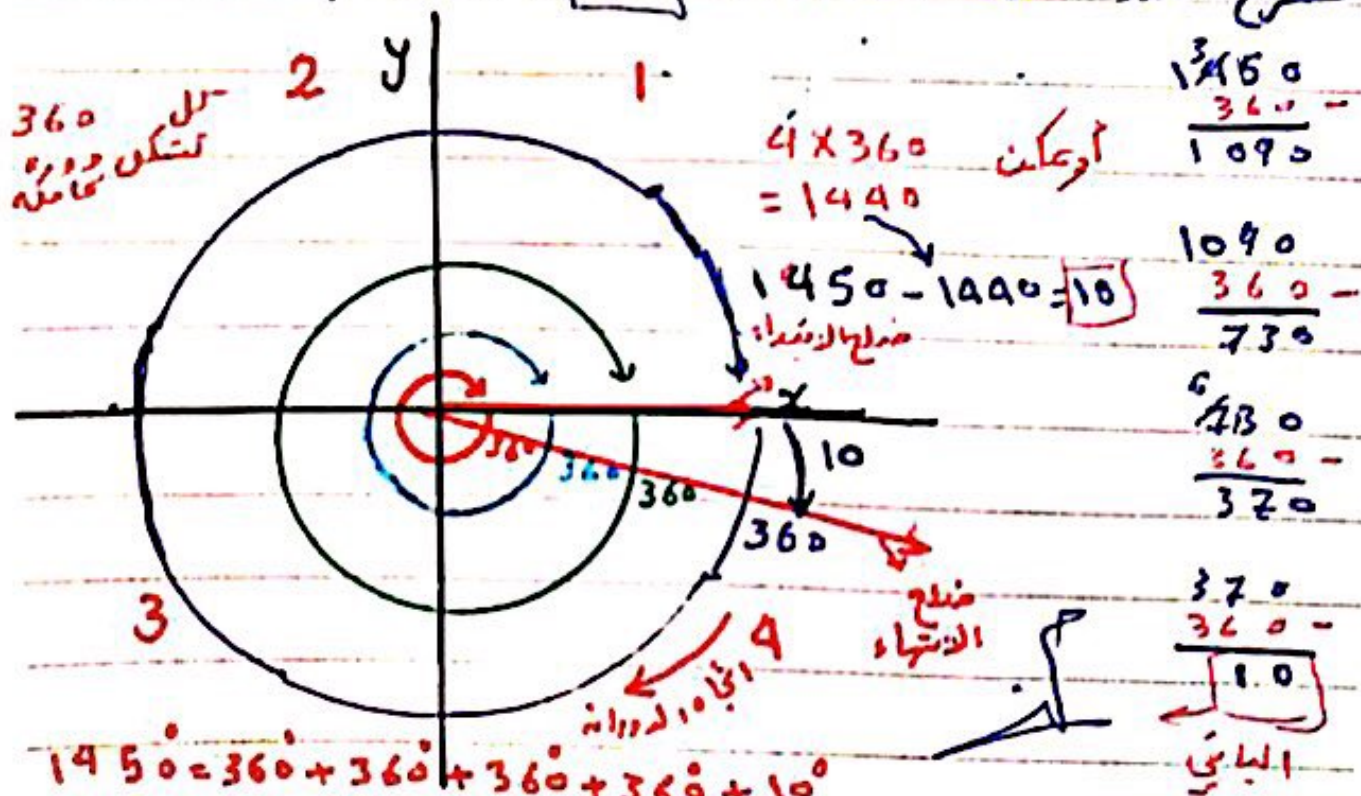
③ الثالث

④ الرابع

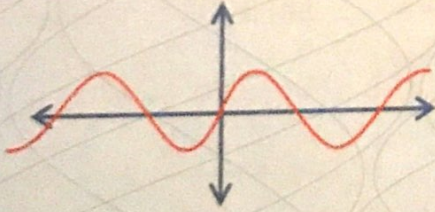
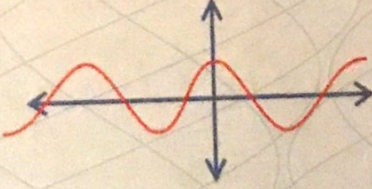
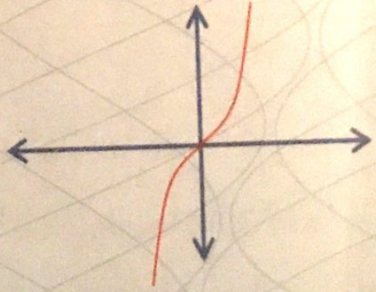
الحل :

قياس الزاوية = 1450 يعني اتجاه الدوران
 مع الساعات

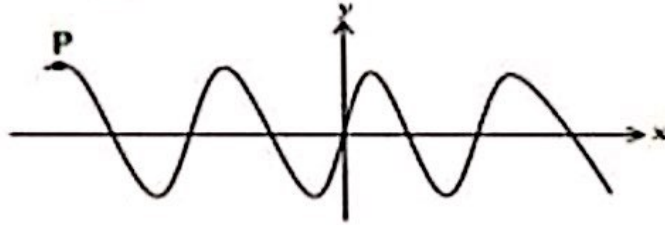
نطرح الحد 1450 من الحد 360 أو مضاعفاتها



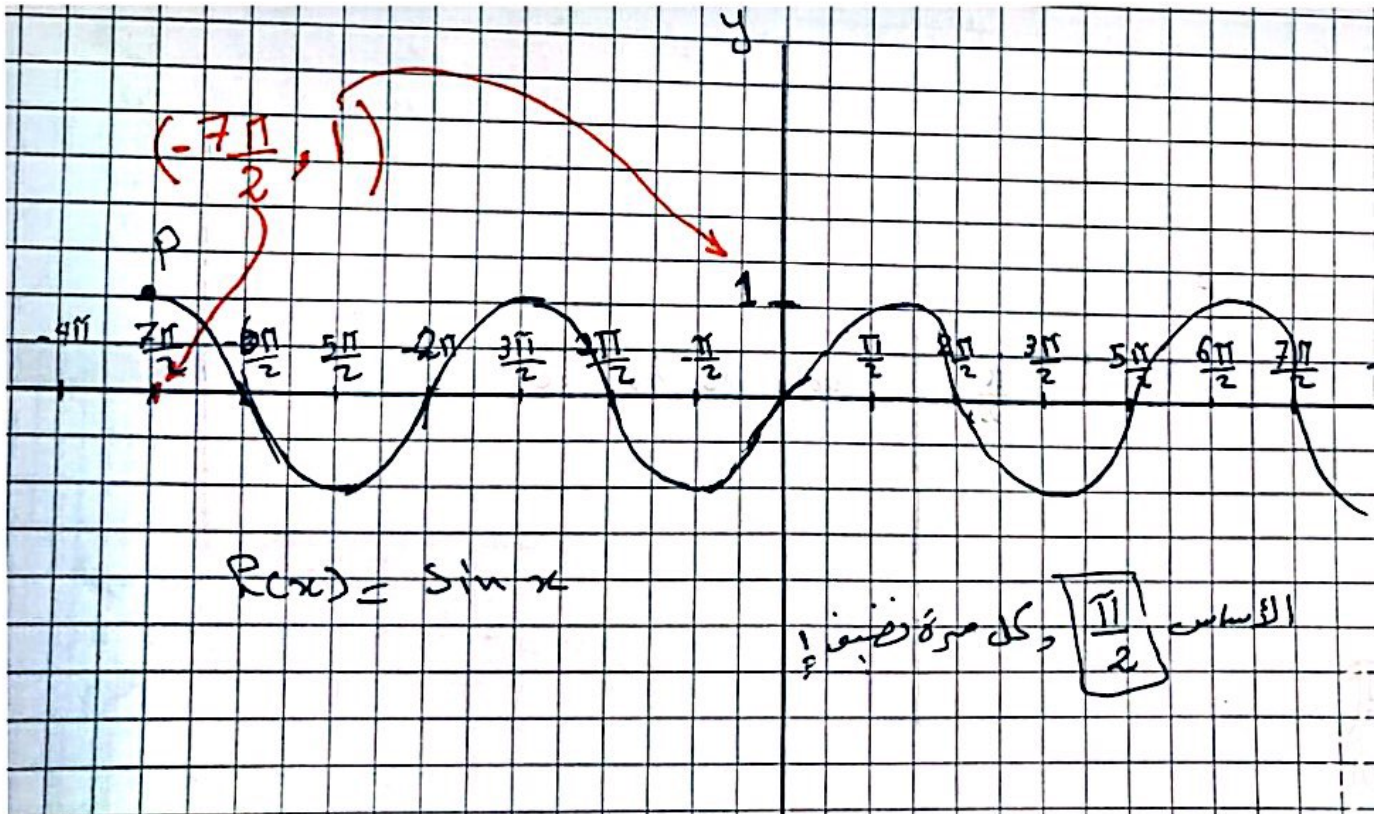
الدوال الدائرية

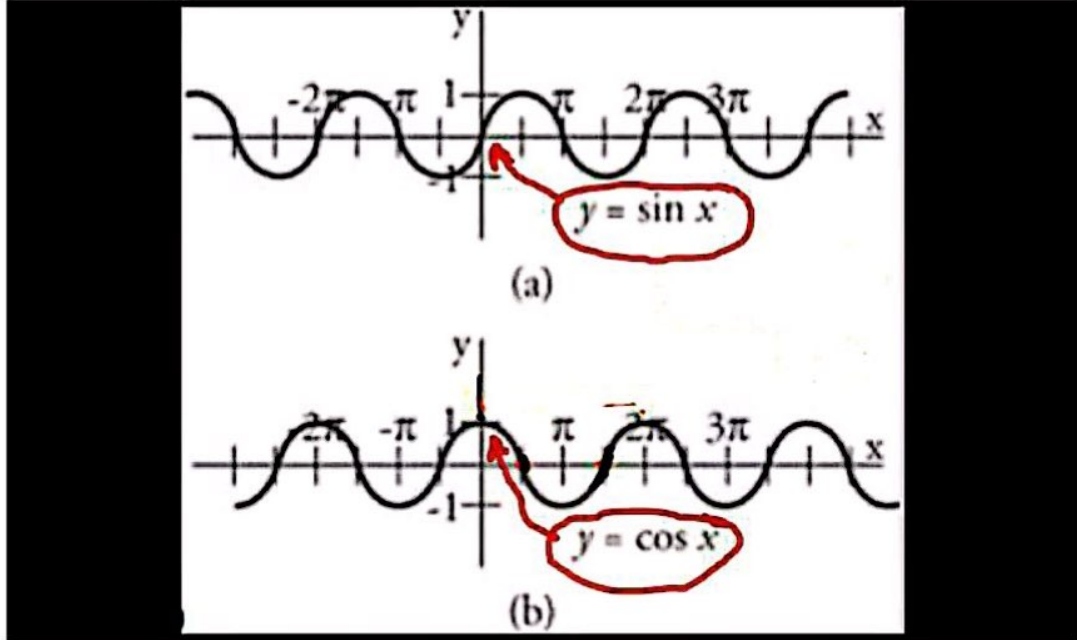
$\sin(-\theta) = -\sin \theta$ دالة فردية	$\cos(-\theta) = \cos \theta$ دالة زوجية	$\tan(-\theta) = -\tan \theta$ دالة فردية
		

2. في الشكل ادناه ، ما احداثيات النقطة P في بيان الدالة ؟ $f(x) \sin x$



- (أ) $(-\frac{7\pi}{2}, 1)$
- (ب) $(-\frac{5\pi}{2}, 1)$
- (ج) $(-\frac{\pi}{2}, 1)$
- (د) $(-7\pi, 1)$





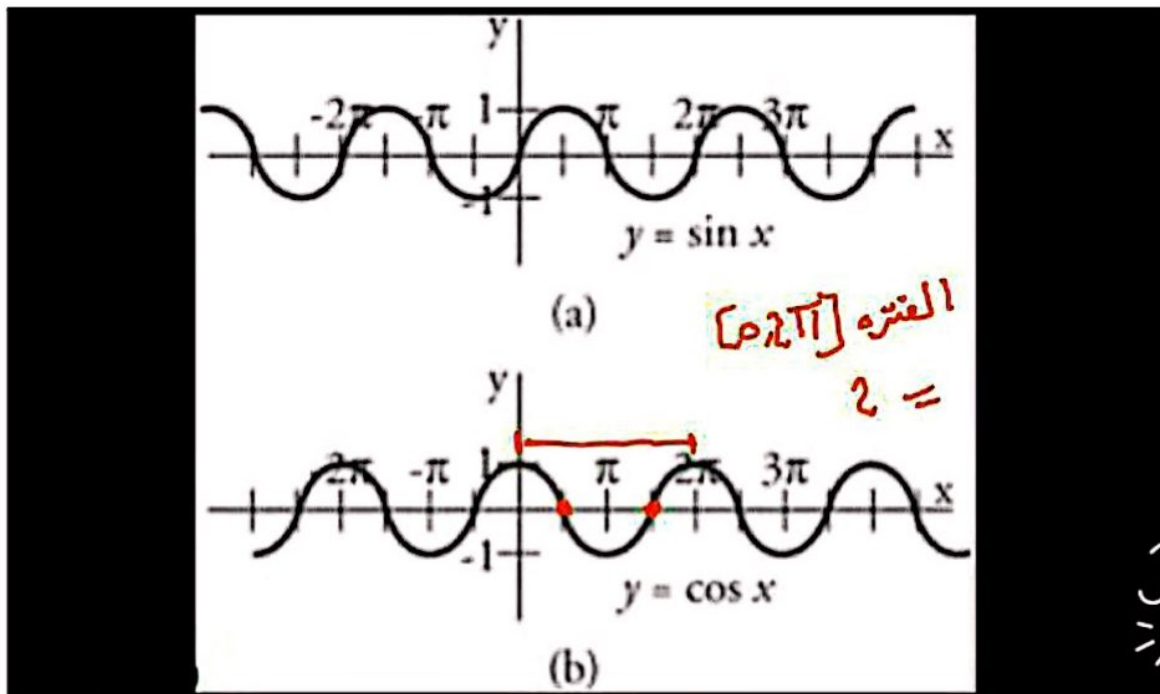
هذا السؤال كأننا نطلع احداثي نقطة في
المستوى

لكن الفرق هنا ان محور x احداثياته
بالراديان او بالدرجات

اما محور واي فهو ثابت من 1 إلى -1 11:15 م

3. في الفترة $[0, 2\pi]$ عدد نقاط تقاطع منحنى الدالة $\cos x$ مع محور السينات هو؟

- (أ) 0
- (ب) 1
- (ج) 2
- (د) 3

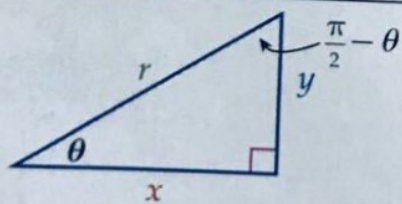


هذا تمثيل ثابت لدالة السايين والكوزاين

عدي تقاطع المنحنى بالفترة اللي بالسؤال
من 0 الى 2 باي

النقاط اللي بالاحمر تقاطع المنحنى

ولو السؤال من 0 الى 3 باي يكون الحل
3 نقاط



$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos \theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot \theta$$

متطابقات الزاويتين

المتتامتين:

متطابقات الزاويتين
المتتامتين:

يمكن كتابة متطابقات
الزاويتين المتتامتين
بالدرجات كما يلي:

$$\sin (90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

نقاش

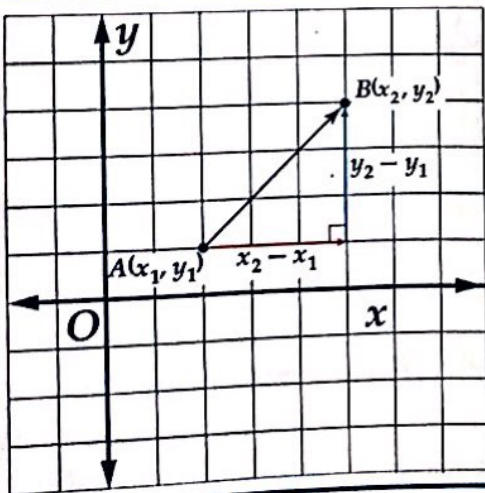
اليوم 20

مفهوم أساسي

الصورة الإحداثية لمتجه

الصورة الإحداثية لـ \overrightarrow{AB} الذي نقطة بدايته $A(x_1, y_1)$ ونقطة نهايته $B(x_2, y_2)$ هي :

$$\langle x_2 - x_1, y_2 - y_1 \rangle$$



السؤال	الحل
<p>1. متجه نقطة بدايته (0,0) ونقطة نهايته (1,1) المتجه الذي يساويه هو الذي نقطة بدايته (1,1) ونقطة نهايته (0,0)</p> <p>أ (1,1) ونقطة نهايته (0,0)</p> <p>ب (1,1) ونقطة نهايته (3,3)</p> <p>ج (1,1) ونقطة نهايته (1,0)</p> <p>د (1,0) ونقطة نهايته (2,1)</p>	<p>(النهاية-البداية)</p> $\overrightarrow{AB} = B - A$ $(1,1) - (0,0) = (1-0, 1-0) = (1,1)$ <p>نبحث في الخيارات عن الزوج الذي يطلع ناتجة بعد الطرح يساوي (1,1) فنجد الاختيار الأخير لأن:</p> $(2,1) - (1,0) = (2-1, 1-0) = (1,1)$

الحل نطلع اول المتجه اللي بالسؤال

ونشوف الناتج

وبعدها نسوي نفس الشيء بالخيارات أ و د
نشوف ايش المتجه اللي يكون نفس الأرقام
ونفس الاشارات

طبعا بعد استبعاد الخيار ب و ج مباشرة

وبالمتجه ضروري نبدأ بنقطة النهاية ثم البداية

تكون نقطة النهاية x_2, y_2

8:56 م

المتجه بالسؤال = (1 , 1)

(1) (1 , 1) ← البداية

(0 , 0) ← النهاية

(0 - 1 , 0 - 1)

(-1 , -1) X

(2) (1 , 0) ← البداية

(1 , 2) ← النهاية

(2 - 1 , 1 - 0)

(1 , 1) ←

متجه الوحدة: هو متجه طوله 1 فإذا كان لدينا متجه غير صفري \underline{V}

فإن متجه الوحدة الذي له نفس اتجاه V هو $\underline{u} = \frac{V}{|V|}$

مثال : أوجد متجه وحدة u له نفس اتجاه المتجه $V = \langle -8, -2 \rangle$

$$|V| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$$

الحل :

$$u = \frac{V}{|V|} = \left\langle \frac{-8}{2\sqrt{17}}, \frac{-2}{2\sqrt{17}} \right\rangle = \left\langle \frac{-4\sqrt{17}}{17}, \frac{-\sqrt{17}}{17} \right\rangle$$

أوجد متجه وحدة u $v = (3, 4)$

$$u = \frac{1}{|v|} \cdot v \Rightarrow \text{قانونه}$$

$$|v| \leftarrow \frac{1}{\sqrt{(3)^2 + (4)^2}} \times \langle 3, 4 \rangle$$

$$\frac{\langle 3, 4 \rangle}{\sqrt{9+16}} = \frac{\langle 3, 4 \rangle}{\sqrt{25}}$$

$$= \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

إذا كان $V = \langle x_1, y_1 \rangle$, $W = \langle x_2, y_2 \rangle$ فإن :

$$1) V + W = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2 \rangle$$

$$2) V - W = \langle x_1 - x_2, y_1 - y_2 \rangle$$

$$3) kW = \langle kx_2, ky_2 \rangle, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$4) V \cdot W = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2$$

$$5) V \cdot W = |V| \cdot |W| \cos \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ هي الزاوية المحصورة بين المتجهان } V, W$$

$$\cos \theta = \frac{V \cdot W}{|V| |W|}$$

4. ليكن $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{b} = (y, x)$ متجهين إذا كان $3\vec{a} - \vec{b} = (0, -8)$ فإن قيمة المتجه \vec{a} تساوي؟

$$3\vec{a} - \vec{b} = (0, -8)$$

- (i) $(-1, -3)$
- (ب) $(-1, 3)$
- (ج) $(1, -3)$
- (د) $(1, 3)$

$$3\vec{a} = (3x, 3y) \quad \vec{b} = (y, x)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 3\vec{a} - \vec{b} &= (3x - y, 3y - x) \\ &= (0, -8) \end{aligned}$$

$$3x - y = 0$$

$$\boxed{y = 3x}$$

$$3y - x = -8$$

$$3(3x) - x = -8$$

$$9x - x = -8$$

$$8x = -8$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$y = 3(-1)$$

$$\boxed{y = -3}$$

$$3\vec{a} - \vec{b} = (0, -8) \Leftarrow \text{معطى}$$

$$\vec{a} = (x, y) \Rightarrow 3\vec{a} = (3x, 3y)$$

$$\vec{b} = (y, x)$$

$$3\vec{a} - \vec{b} = (0, -8)$$

$$(3x, 3y) - (y, x) = (0, -8)$$

$$3x - y = 0, \quad 3y - x = -8$$

$$3x = y$$

$$3y = x - 8$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

نعوض قيمة
y في المعادلة

$$3x = y$$

$$3x = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3}$$

$$3x - \frac{1}{3}x = -\frac{8}{3}$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{8}{3}x = -\frac{8}{3} \times \frac{3}{8}$$

$$x = -1 \Rightarrow \text{نعوض} \Rightarrow y = 3x \Rightarrow y = 3(-1) \Rightarrow y = -3$$

$$(-1, -3) \quad \therefore \text{الحل}$$

الضرب الاتجاهي للمتجهات

إذا كان $a = a_1i + a_2j + a_3k$, $b = b_1i + b_2j + b_3k$ فإن الضرب الاتجاهي للمتجهين هو المتجه :

$$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$$

الذي فيه $u = (2, 3, -2)$, $v = (2, 0, 1)$ ضلعان متجاوران

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3 - 0)i - (2 + 4)j + (0 + 6)k$$
$$= 3i - 6j + 6k$$

$$|u \times v| = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = \sqrt{9 + 36 + 36} = \sqrt{81}$$

$$\text{حجم متوازي السطوح} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (3 + 4 + 1) - (2 + 6 + 1) = 8 - 9 = -1$$

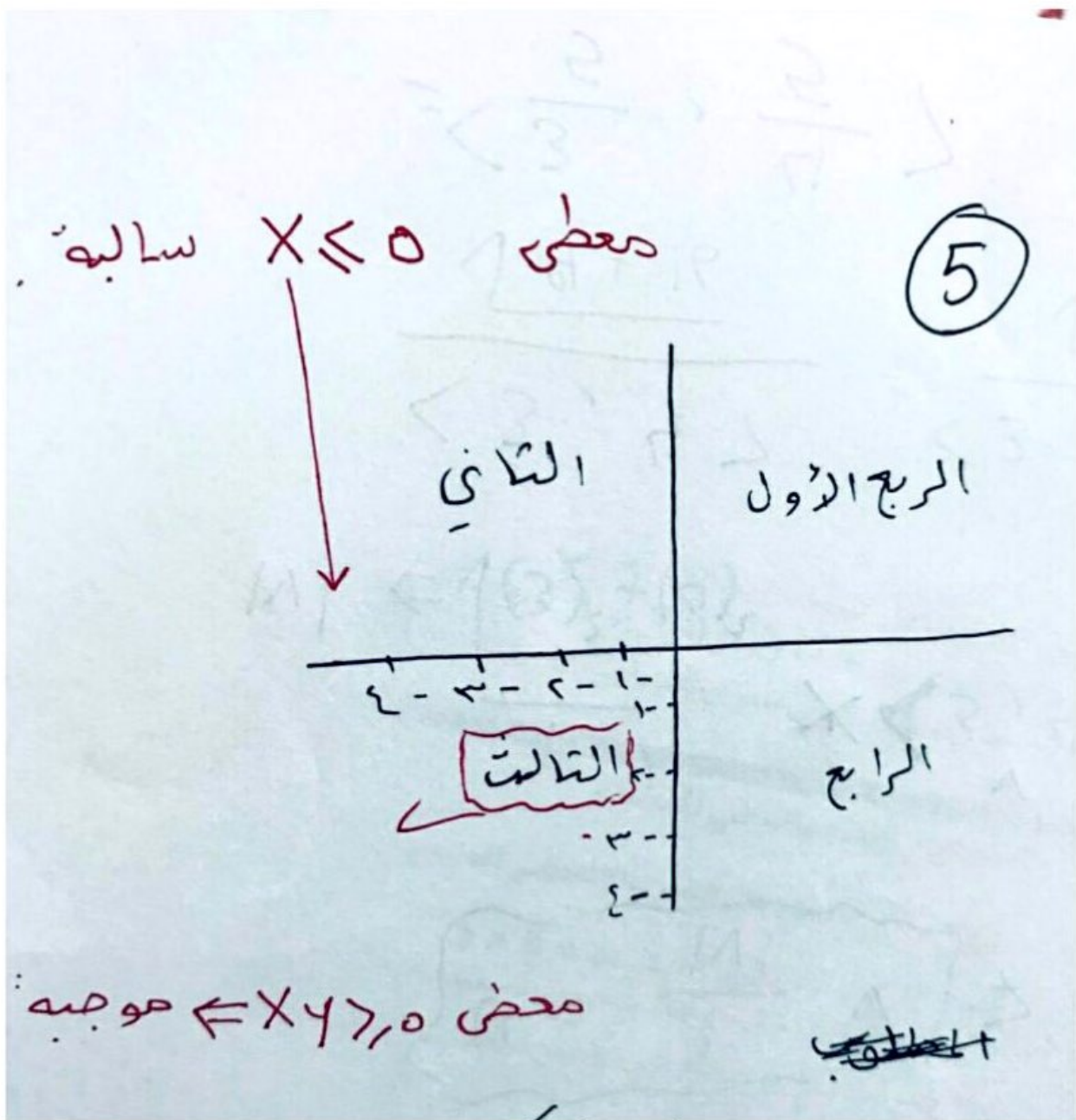
$$\text{حجم متوازي السطوح} = |-1| = 1$$

2. إذا كانت المتجهات $\langle 1, 1, 1 \rangle$, $\langle 1, 1, 2 \rangle$, $\langle 3, 2, 1 \rangle$ أضلاع لمتوازي سطوح فإن حجمه بالوحدات المكعبة يساوي؟

- أ) 1
- ب) 4
- ج) 5
- د) 9

5. إذا كانت (x, y) جميع النقاط في المستوى والتي تحقق $xy \geq 0, x \leq 0$ فإن هذه النقاط تمثل الربع؟

- (أ) الأول
- (ب) الثاني
- (ج) الثالث
- (د) الرابع



6. إذا كانت $x > 2$ فأين تقع النقطة $(x - 2, 2 - x)$ ؟

- (أ) الربع الأول
- (ب) الربع الثاني
- (ج) الربع الثالث
- (د) الربع الرابع

⑥

$$(x - 2, 2 - x)$$

↓ ↓
 x y

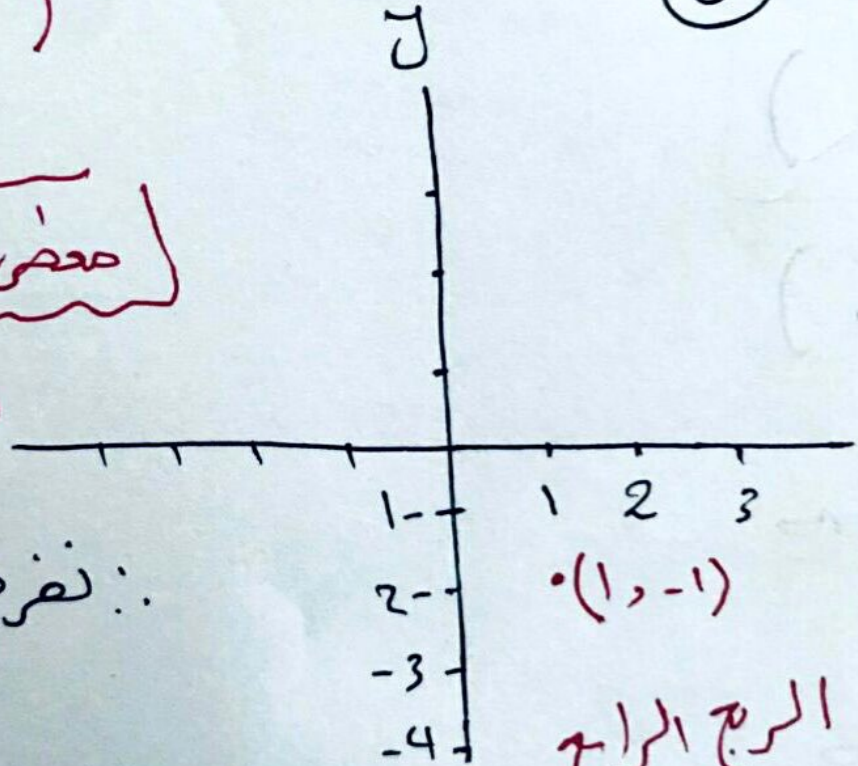
$$x > 2 \text{ محض}$$

نفرض أعداد أكبر من

$$x = 3 \text{ نفرض}$$

$$(3 - 2, 2 - 3)$$

$$(1, -1)$$



الربع الرابع

Photo
Grid

المتجهات

$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$	جمع متجهين في الفضاء
$a - b = a + (-b) = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$	طرح متجهين في الفضاء
$ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$	ضرب متجه في عدد حقيقي في الفضاء
$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	الضرب الداخلي لمتجهين في الفضاء
$t \cdot (u \times v) = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$	الضرب القياسي لثلاثيات
$a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$	جمع متجهين في مستوى
$a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$	طرح متجهين في مستوى
$ka = (ka_1, ka_2)$	ضرب متجه في عدد حقيقي في المستوى
$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2$	الضرب الداخلي لمتجهين في المستوى
$\cos \theta = \frac{a \cdot b}{ a b }$	الزاوية بين متجهين
$ V = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$	طول متجه
$a \times b = (a_2b_3 - a_3b_2)i - (a_1b_3 - a_3b_1)j + (a_1b_2 - a_2b_1)k$	الضرب الاتجاهي لمتجهين في الفضاء

الإحداثيات القطبية

$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$	صيغة الضرب
$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \right]$	صيغة القسمة
$\sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$	المسافة بالصيغة القطبية
$z^n = [r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$	نظرية دي موافر
$\frac{1}{r^n} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$	الجذور المختلفة

المعيار الثالث : اسئلة مناقشة اليوم العشرون

المتجهات في المستوى الاحداثي

السؤال	الحل
1. متجه نقطة بدايته (0,0) ونقطة نهايته (1,1) المتجه الذي يساويه هو الذي نقطة بدايته (أ) (1,1) ونقطة نهايته (0,0) (ب) (1,1) ونقطة نهايته (3,3) (ج) (1,1) ونقطة نهايته (1,0) (د) (1,0) ونقطة نهايته (2,1)	$\overrightarrow{AB} = B - A \quad \text{(النهاية - البداية)}$ $(1,1) - (0,0) = (1-0, 1-0) = (1,1)$ <p>نبحث في الخيارات عن الزوج الذي يطلع ناتجة بعد الطرح يساوي (1,1) فنجد الاختيار الأخير لأن:</p> $(2,1) - (1,0) = (2-1, 1-0) = (1,1)$
2. اذا كانت المتجهات (1,1,1), (1,1,2), (3,2,1) أضلاع لمتوازي سطوح فإن حجمه بالوحدات المكعبة يساوي؟ (أ) 1 (ب) 4 (ج) 5 (د) 9	$\text{حجم متوازي السطوح} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ $= (3 + 4 + 1) - (2 + 6 + 1) = 8 - 9 = -1$ $\text{حجم متوازي السطوح} = -1 = 1$
3. ما المتجه العمودي على المستوى $2x + 4y - 6z = 12$ (أ) $\langle -2, -4, -6 \rangle$ (ب) $\langle 1, 2, -3 \rangle$ (ج) $\langle -6, 4, 2 \rangle$ (د) $\langle 3, 2, -1 \rangle$	<p>بالقسمة على 2 في المعادلة</p> $2x + 4y - 6z = 12 \implies x + 2y - 3z = 6$ <p>اقسم على 2</p> $\langle 2, 4, -6 \rangle \implies \langle 1, 2, -3 \rangle$
4. ليكن $\vec{a} = (x, y)$, $\vec{b} = (y, x)$ متجهين إذا كان $\vec{3a} - \vec{b} = (0, -8)$ فإن قيمة المتجه \vec{a} تساوي؟ (أ) $(-1, -3)$ (ب) $(-1, 3)$ (ج) $(1, -3)$ (د) $(1, 3)$	$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ $\vec{3a} - \vec{b} = (3x - y, 3y - x) = (0, -8)$ $\begin{array}{l l} 3x - y = 0 & 3y - x = -8 \\ y = 3x & 3y = x - 8 \\ & y = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \end{array}$ $3x = \frac{1}{3}x - \frac{8}{3} \implies 3x - \frac{1}{3}x = -\frac{8}{3}$ $\frac{8}{3}x = \frac{-8}{3} \implies x = -1$ <p>نعوض بقيمة x لايوجد y</p> $y = 3x = 3(-1) = -3$ <p>∴ قيمة المتجه \vec{a} تساوي $(-1, -3)$</p>

المعيار الثالث : اسئلة مناقشة اليوم العشرون

المتجهات في المستوى الاحداثي

$x = -$ $xy = +$ $\therefore y = -$ <p>بما ان (x, y) سالبة اذن تقع في الربع الثالث</p>	<p>5. اذا كانت (x, y) جميع النقاط في المستوى والتي تحقق $xy \geq 0, x \leq 0$ فإن هذه النقاط تمثل الربع؟</p> <p>(أ) الأول (ب) الثاني (ج) الثالث (د) الرابع</p>
$\overrightarrow{AB} = B - A \quad \text{(النهاية - البدائية)}$ $(1, 1) - (0, 0) = (1 - 0, 1 - 0) = (1, 1)$ <p>نبحث في الخيارات عن الزوج الذي يطلع ناتجة بعد الطرح يساوي $(1, 1)$ فنجد الاختيار الأخير لأن:</p> $(2, 1) - (1, 0) = (2 - 1, 1 - 0) = (1, 1)$	<p>6. اذا كانت $x > 2$ فأين تقع النقطة $(x - 2, 2 - x)$؟</p> <p>(أ) الربع الأول (ب) الربع الثاني (ج) الربع الثالث (د) الربع الرابع</p>

نقاش

اليوم 21

سلسلة قياس المساحة



وحدات قياس المساحة ..

الوحدة	رمزها
كيلومتر مربع	كم ²
متر مربع	م ²
ديسمتر مربع	دسم ²
سنتيمتر مربع	سم ²
المليمتر مربع	مم ²

للتحويل بين وحدات قياس المساحة نستخدم

السلسلة التالية ..





سلسلة قياس الطول

« وحدات قياس الأطوال ..

الوحدة	رمزها
الكيلومتر	كم
المتر	م
الديسيمتر	دسم
الستيمتر	سم
المليحتر	ملم

« للتحويل بين وحدات قياس الطول نستخدم

السلسلة التالية ..



« عند التحويل من وحدة أكبر إلى وحدة أصغر

نضرب في معامل التحويل المناسب؛ فمثلاً ..

$$٥ \text{ م} \xrightarrow{10 \times} ٥٠٠ \text{ سم}$$

« عند التحويل من وحدة أصغر إلى وحدة أكبر

نقسم على معامل التحويل المناسب؛ فمثلاً ..

$$٦ \text{ مل} \xrightarrow{1000 \div} ٠,٠٠٦ \text{ م}$$

« فالتدثان ..

« عند الضرب في قوى العدد ١٠ : ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ،

١٠٠٠٠ ، ... ؛ نحرك **الفاصلة** ناحية **اليمن** بحسب

عدد الأصفار ..

$$٢١٣,٥ = ١٠٠ \times ٢,١٣٥$$

« عند القسمة على قوى العدد ١٠ : ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ،

١٠٠٠٠ ، ... ؛ نحرك **الفاصلة** ناحية **اليسار** بحسب **عدد الأصفار** ..

$$٢,١٣٥ = \frac{٢١٣,٥}{١٠٠}$$



سلسلة قياس الكتلة

« وحدات قياس الكتلة « الوزن » ..

الوحدة	رمزها
الطن	طن
الكيلوجرام	كجم
الجرام	جم

« التحويل بين وحدات قياس الكتلة نستخدم

السلسلة التالية ..



« مثال توضيحي ١ ..

٦ طن $\xleftarrow{١٠٠٠}$ ٦٠٠٠ كجم $\xleftarrow{١٠٠٠}$ ٦٠٠٠٠٠ جم

« مثال توضيحي ٢ ..

$$٨ \text{ جرام} = \frac{٨}{١٠٠٠} = ٠,٠٠٨ \text{ كيلوجرام}$$

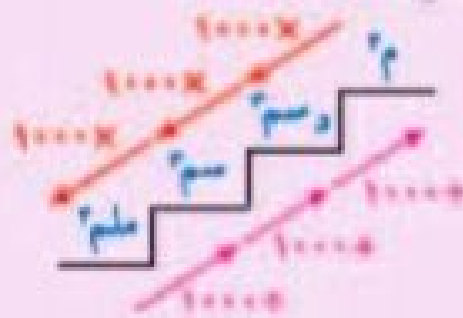
سلسلة قياس الحجم

وحدات قياس الحجم ..

الوحدة	رمزها
المتر المكعب	m^3
الديسيمتر المكعب	dm^3
الستيمتر المكعب	cm^3
المليمتر المكعب	mm^3

للتحويل بين وحدات قياس الحجم نستخدم

السلسلة التالية ..



مثال توضيحي ..

$$8 \text{ سم}^3 \xrightarrow{1000} 8000 \text{ ملم}^3$$

تذكر ..

حجم المكعب = (طول الحرف) 3 .

حجم متوازي المستطيلات =

الطول \times العرض \times الارتفاع .

١٨- إذا كانت سرعة جسم 600 متر في الدقيقة، فكم سرعته بالسنتيمتر لكل ثانية؟

أ. 3600

ب. 1000

ج. 360

د. 100

(٣) سرعة جسم 600 متر في الدقيقة
كم سرعته بالسنتيمتر لكل ثانية ؟
* تحول من متر إلى سنتيمتر
(من كبير إلى صغير نضرب)
 $600 \times 100 = 60000$ سم
* تحول من دقيقة إلى ثانية
دقيقة = 60 ثانية
السرعة بالسنتيمتر لكل ثانية يعني نقسم
 $\frac{60000}{60} = 1000$

100 (د)	1000 (ج)
(٤) كم سنتيمتر مربع لكل $0,00064 \text{ km}^2$ ؟	
(ب) 64	(أ) 0,64
(د) 6400000	(ج) 64000

كم سم مربع لكل
 ؟ $0,00064 \text{ km}^2$
 هن كم؟ الى سم
 هن اكبر الى اصغر نضرب
 من كم الى سم نضرب بي 100000
 من كم؟ الى سم نضرب بي 10000000000000000
 $0,00064 \times 10000000000000000$
 نحرك الفاصلة لليمين 15 حنازل ..
 = 6400000

٢) مقياس الرسم :

- تستعمل مقاييس الرسم ومقياس النماذج لتمثيل الأشياء التي تكون كبيرة جداً أو صغيرة جداً عندما ترسم بحجمها الحقيقي .
- المقياس هو نسبة القياس على الرسم أو النموذج الى القياس الفعلي ، وهي لاتعني دائماً نسبة القياس الاصغر الى القياس الاكبر.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$$

مثال : أوجد عامل المقياس في نموذج طائرة إذا كان المقياس 1 سم = 6 أمتار

الحل :

$$\frac{1 \text{ سم}}{600 \text{ سم}} = \frac{1 \text{ سم}}{6 \text{ م}}$$

$$\frac{1}{600} = \text{عامل المقياس}$$

6. إذا كان مقياس الرسم في خريطة $1\text{cm} : 250\text{km}$ ،
وكان المسافة بين مدينتين في الخريطة 3.5cm فكم
المسافة الفعلية بين المدينتين بالكيلو متر؟

(أ) 625

(ب) 725

(ج) 875

(د) 975

⑥ الضاؤون :

مقياس = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

\downarrow

$\frac{3.5\text{cm}}{x} = \frac{1\text{cm}}{250\text{km}}$

$x = 250 \times 3.5$

$= 875$

تذكر إفا صله للصين
ضانه وادهة عستان
الصفحة رقم 25 ضرب
25 × 35

7. إذا كان مقياس الرسم على الخريطة 1 سنتيمتر: 40 كيلو متراً، وكانت المسافة بين المدينتين في الخريطة 30 سنتيمتراً، فكم المسافة الفعلية بينهما بالكيلو متر؟

- أ) 120
- ب) 240
- ج) 1200
- د) 2400

(7)

مقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$

$$\frac{1 \text{ cm}}{40 \text{ كم}} = \frac{30 \text{ cm}}{x}$$
$$x = 40 \times 30$$
$$= 1200$$

المعيار الرابع

السؤال	الحل
1. انطلقت سيارة A الى المدينة B بسرعة 60km/h وانطلقت بعدها بنصف ساعة سيارة بسرعة 80km/h, فبعد كم دقيقة سيلتقيان؟ (أ) 15 min (ب) 30 min (ج) 60 min (د) 90 min	$\text{زمن الالتقاء} = \frac{\text{السرعة الأولى} \times \text{الفارق الزمني بينهما}}{\text{السرعة الثانية} - \text{السرعة الأولى}}$ $90 \text{ دقيقة} = \frac{1800}{20} = \frac{30 \times 60}{60 - 80} \leftarrow$
2. عند الساعة الثامنة انطلقت سيارة من المدينة A بسرعة 80km/h . بعدها بساعة تبعها على نفس الطريق سيارة سرعتها 120km/h . متى تلحق السيارة الثانية بالسيارة الاولى؟ (أ) 10:00 (ب) 10:30 (ج) 11:00 (د) 11:30	$\text{زمن الالتقاء} = \frac{\text{السرعة الأولى} \times \text{الفارق الزمني بينهما}}{\text{السرعة الثانية} - \text{السرعة الأولى}}$ $2 \text{ ساعة} = \frac{80}{40} = \frac{1 \times 80}{80 - 120} \leftarrow$ <p>∴ يلتقيان بعد ساعتين من انطلاق السيارة الثانية بما أن السيارة الثانية انطلقت الساعة التاسعة إذن يلتقيان معاً عند الساعة الحادية عشر</p>
3. هناك سيارتان الأولى تسير بسرعة 100km/h والثانية تسير بسرعة 110km/h , بعد كم دقيقة يصبح الفرق بينهما 20km ؟ (أ) 30 min (ب) 60 min (ج) 90 min (د) 120 min	<p>الفرق بينهما بعد 1h $\leftarrow 10 \text{ km/h}$ $\leftarrow t \quad 20 \text{ km/h}$</p> $10 t = 1 \times 20 \leftarrow$ $t = \frac{20}{10} = 2 \text{ h} \leftarrow$ $t = 60 \text{ min} \times 2 = 120 \text{ min}$
4. تستهلك سيارة 30L في الساعة, وسيارة أخرى تستهلك 20L في الساعة. احسب الفرق في عدد اللترات بينهما بعد 10 ساعات؟ (أ) 100L (ب) 120L (ج) 210L (د) 500L	$30L \times 10 = 300$ $20L \times 10 = 200$ <p>الفرق بعد 10 ساعات يساوي $300 - 200 = 100$</p>
5. حوض ماء تملئه الحنفية الاولى في ساعتين والثانية في 3 ساعات والثالثة في 6 ساعات, اذا كان الحوض فارغ وفتحنا الحنفيات في وقت واحد بكم ساعة يمتلئ الحوض؟ (أ) ساعة (ب) ساعة ونصف (ج) ساعتين (د) ساعتين ونصف	$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3 + 2 + 1}{6} = \frac{6}{6} = 1$ <p>ساعة واحدة</p>

المعيار الرابع

$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$	<p>6. حنفية تملئ الحوض في 4 ساعات وأخرى في 3 ساعات وهناك مخرج يفرغ الحوض في ساعتين، لو شغلنا الحنفيتان والمخرج معاً كم ساعة نحتاج لملء الحوض؟</p> <p>(أ) 2 (ب) 4 (ج) 6 (د) 12</p>
<p>المقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$</p> $\frac{1cm}{250km} = \frac{3.5cm}{x}$ $x = 250 \times 3.5 = 875$	<p>7. إذا كان مقياس الرسم في خريطة 1cm: 250km، وكان المسافة بين مدينتين في الخريطة 3.5cm فكم المسافة الفعلية بين المدينتين بالكيلو متر؟</p> <p>(أ) 625 (ب) 725 (ج) 875 (د) 975</p>
<p>المقياس الرسم = $\frac{\text{الطول في الرسم}}{\text{الطول الحقيقي}}$</p> $\frac{1cm}{40 km} = \frac{30 cm}{x}$ $x = 40 \times 30 = 1200$	<p>8. إذا كان مقياس الرسم على الخريطة 1 سنتيمتر: 40 كيلو متراً، وكانت المسافة بين المدينتين في الخريطة 30 سنتيمتراً، فكم المسافة الفعلية بينهما بالكيلو متر؟</p> <p>(أ) 120 (ب) 240 (ج) 1200 (د) 2400</p>

تم النسخ إلى الحافظة.

خطوط التقارب الرأسية والأفقية

مفهوم أساسي

التعبير اللفظي، إذا كان $f(x) = \frac{a(x)}{b(x)}$ ، حيث $a(x)$ ، $b(x)$ كثيرتا حدود لا يوجد بينهما عوامل مشتركة غير الواحد، و $b(x) \neq 0$ فإنه:

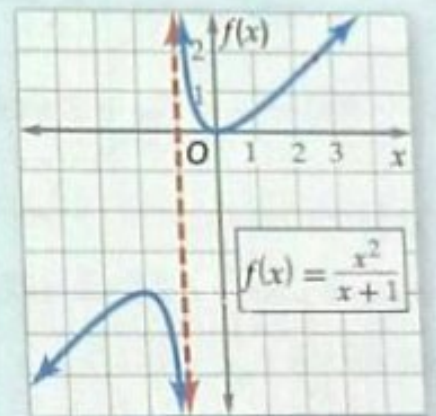
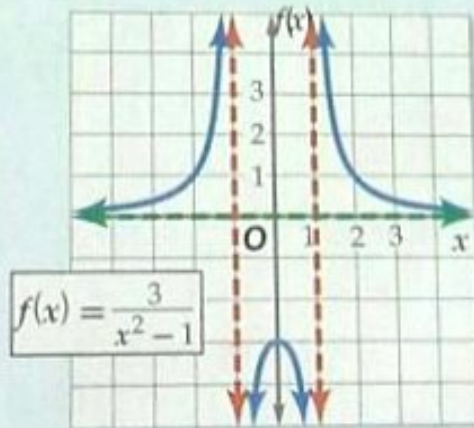
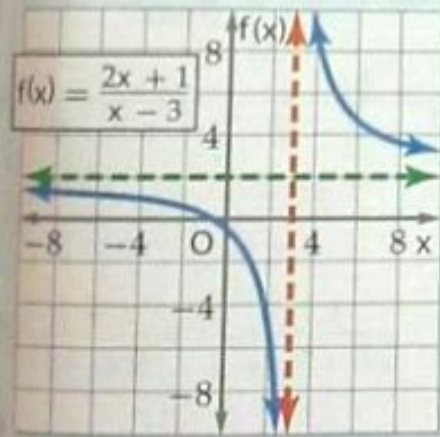
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب رأسي عندما $b(x) = 0$.
- يوجد للدالة $f(x)$ خط تقارب أفقي واحد على الأكثر.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أكبر من درجة $b(x)$ فلا يوجد خط تقارب أفقي.
- إذا كانت درجة $a(x)$ أقل من درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم $y = 0$.
- إذا كانت درجة $a(x)$ تساوي درجة $b(x)$ ، فإن خط التقارب الأفقي هو المستقيم:

$$y = \frac{\text{المعامل الرئيس لـ } a(x)}{\text{المعامل الرئيس لـ } b(x)}$$

أمثلة،

يوجد خط تقارب أفقي واحد

لا يوجد خط تقارب أفقي



خط التقارب الرأسي:

$$x = 3$$

خط التقارب الأفقي:

$$y = 2$$

خطا التقارب الرأسي:

$$x = -1, x = 1$$

خط التقارب الأفقي:

$$y = 0$$

خط التقارب الرأسي:

$$x = -1$$

٣٧ - خط التقارب الأفقي للمعادلة $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ هو:

(أ) $y = -1$
 (ب) $x = -1$
 (ج) $y = 1$
 (د) $x = 1$

الحل: $f(x) = \frac{x+1}{x-1} = \frac{(x-1)+2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$

خط التقارب الأفقي
 بما أن درجة البسط تساوي درجة المقام فقط
 التقارب يساوي

معامل X على معامل Y

إذا $y=1$

12:26 ص

خطوط التقارب:

① إذا درجة $a(x)$ أكبر من $b(x)$ لا يوجد خط تقارب أفقي
مثال: الدرجة أكبر $\leftarrow \frac{x^2}{x+1}$ $R(x)$ درجة بسط أكبر من مقام

* لا يوجد خط تقارب أفقي
* خط التقارب الرأسي يوجد
أصفاء المقام $x = -1$

② درجة $a(x)$ أقل من $b(x)$ بسط أقل من مقام

مثال: $R(x) = \frac{3}{x^2 - 1}$

خط التقارب الأفقي:

$$y = 0$$

خط التقارب الرأسي:

$$x^2 - 1 = 0$$

$$x = \pm 1$$

③ درجة $a(x) = b(x)$ البسط = المقام

مثال: $R(x) = \frac{2x+1}{x-3}$

خط التقارب الأفقي:

$$y = \frac{2}{1} = 2$$

خط التقارب الرأسي:

$$x - 3 = 0$$

$$x = 3$$

* دائمًا خط التقارب الأفقي
عدد $y =$
* خط التقارب الرأسي
عدد $x =$

1 * في خط التقارب الرأسي
توجد أصفاء
المقام

ترتيب المعيار الثالث والرابع حسب أهميتها في قياس
أولا : المواضيع المهمة جدا والمكررة في أغلب النماذج

ثالثا : المواضيع اقل أهمية موجودة في نماذج قليلة
● حساب المتجهات
● المتطابقات المثلثية
● القاطع والمماس
● قطع مستقيمة خاصة في الدائرة
● العلاقات في المثلث
● مسائل فيزيائية

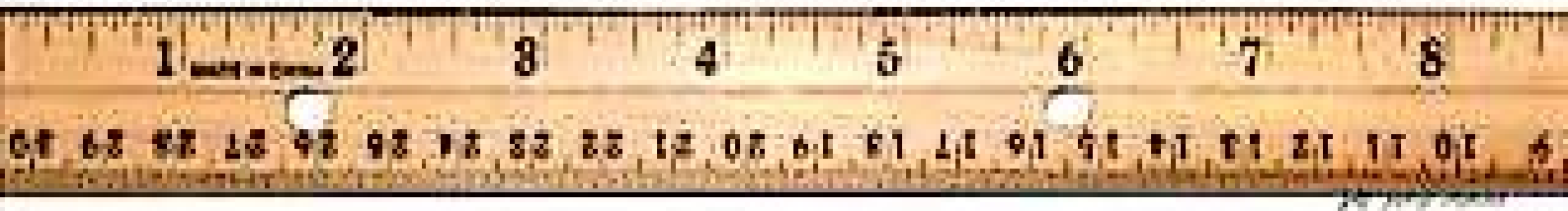
● الميل -معادلة المستقيم
● المستقيمات المتقاطعة والزوايا
● تطبيقات نظرية فيثاغورس
● مساحة أو محيط (المربع -المعين-المثلث)
● الدائرة (معادلتها -نصف قطرها -مساحتها -محيطها)
● تشابه المثلثات
● المسافة بين نقطتين -منتصف القطعة المستقيمة
● التحويلات الهندسية (انسحاب وانعكاس نقطة -انسحاب دالة)

ثانيا : مواضيع مهمة واردة في بعض النماذج

● القطوع
● الأشكال الثلاثية الأبعاد (المكعب -متوازي المستطيلات -الإسطوانة)
● المضلعات المحصورة (مربع داخل دائرة - دائرة داخل مربع)
● حساب المثلثات (ايجاد قيم الزاوية للدوال المثلثية sin -cos-tan)



تم الانتهاء من
المعيار الثالث والرابع



نَقَائِشَاتُ الْمَعْيَارِ

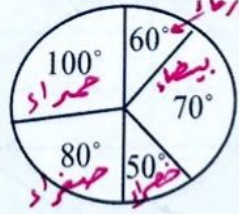

الْخَامِسُ وَالسَّادِسُ

وَالسَّابِعُ

نقاش

اليوم 22

تمارين

الحل	مثال
$\frac{60}{360} \times 48 = \frac{1}{6} \times 48 = 8$	<p>(1) القطاع الدائري الآتي يمثل توزيع ألوان 48 قميصاً ماعد القمصان الزرقاء ؟</p>  <ul style="list-style-type: none"> 16 • 12 • 8 • 6 •
<p>نوجد نسبة العلوم من 100%</p> $100 - (30 + 15 + 35) = 100 - 80 = 20\%$ <p>عددهم ← $\frac{20}{100} \times 200 = 44$</p>	<p>(2) الشكل ادناه يمثل نتائج استبيان عن المادة الدراسية المفضلة أجري على 220 طالباً في مدرسة ابتدائية كم طالباً يفضلون مادة العلوم ؟</p>  <ul style="list-style-type: none"> 11 • 22 • 44 • 88 •

نوجد نسبة العلوم من 100%

$$100 - (30 + 15 + 35) = 100 - 80 = 20\%$$

عددهم ← $\frac{20}{100} \times 220 = 44$

220

المعيار الخامس والسادس :

السؤال
1. ثلاثة أعداد فردية متتالية مجموعها 399 ، فما هو المتوسط الحسابي للعدد الأول والثاني
(أ) 130
(ب) 131
(ج) 132
(د) 133

$$\textcircled{1} \quad \frac{399}{3} = 133$$

131 ، 133 ، 135

$$\frac{131 + 133}{2} \text{ متوسط}$$

ملاحظة :
متوسط أي عدد بين متتاليتين
هو عدد زوجي
= 132

2. مجموع 6 اعداد فردية متتالية 396 اوجد متوسط

اول عددين

(أ) 61

(ب) 62

(ج) 63

(د) 64

② معطى بالسؤال مجموع
6 أعداد فردية متتالية = 396

$$\frac{396}{6} = 66$$

المتوسط الحسابي = مجموع الأعداد
عددها

61, 63, 65, 66, ← ليس هنودري
كتابتها عشوائية
الوقت

المطلوب متوسط أول عددين

$$\frac{61 + 63}{2} = 62$$

الحل

3. 15 عدد متتالي متوسطهم 15 ، فما متوسط اول خمسة اعداد

- (أ) 5
- (ب) 8
- (ج) 10
- (د) 15

هنا 15 عدد متتالي متوسطهم 15

8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

اول خمسة اعداد 8, 9, 10, 11, 12

$$\therefore \frac{8+9+10+11+12}{5} = \frac{50}{5} = 10$$

4. خمسة اعداد متتالية متوسطهم 8 فاوجد اكبر عدد

فيها

(أ) 8

(ب) 10

(ج) 11

(د) 12

5 أعداد متتالية متوسطهم

8

يكونه قبله عددين
وبعد 8 عددين

6, 7, 8, 9, 10

الأكبر

5. إذا علمت أن متوسط 3 أعداد مختلفة هو 4 ،
ومتوسط 4 أعداد أخرى هو 6 ، فإن متوسط جميع
الأعداد

(أ) 5.14
(ب) 5
(ج) 6.24
(د) 3.75

⑤ متوسط 3 أعداد هو 4

$$3 \times 4 = 12$$

متوسط 4 أعداد هو 6

$$4 \times 6 = 24$$

المتوسط الحسابي = مجموع الأعداد
عدد القيم

$$\frac{24 + 12}{3 + 4} = \frac{36}{7} = 5.14$$

مجموع 3 أعداد = $12 = 3 \times 4$
مجموع 4 أعداد أخرى = $24 = 4 \times 6$
متوسط جميع الأعداد = $\frac{36}{7} = 5.14$

$$\begin{array}{r} 5.14 \\ 7 \overline{) 36} \\ \underline{35} \\ 10 \\ \underline{-7} \\ 30 \\ \underline{-28} \\ 2 \end{array}$$

Photo
Grid

6. المتوسط الحسابي لأربع أعداد يساوي 20 ، فإذا كان المتوسط الحسابي عند استبعاد إحدى هذه الأعداد يساوي 15 ، فإن العدد الذي تم استبعاده هو

- (أ) 5
- (ب) 20
- (ج) 32
- (د) 35

مجموع الأربعة أعداد = $4 \times 20 = 80$
مجموع الثلاثة أعداد = $3 \times 15 = 45$
∴ العدد الذي تم استبعاده = $80 - 45 = 35$

المتوسط الحسابي لأربع أعداد = 20
المتوسط الحسابي عند استبعاد إحدى الأعداد أي ثلث أعداد = 15

$20 \times 4 = 80$
استبعاد إحدى الأعداد صارت 3
 $15 \times 3 = 45$
 $80 - 45 = 35$

Photo
Grid

7. متوسط ست اعداد فردية متتالية 8 ، احسب متوسط

آخر عددين

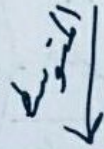
(أ) 11

(ب) 12

(ج) 13

(د) 14

بجاءه اعداد فرديه
متتاليه نشعد الحنا ان
الفرديه



3, 5, 7, 8, 9, 11, 13

6 اعداد فرديه متتاليه

المطلوب متوسط

آخر عددين

$$\frac{11 + 13}{2} = 12$$

الاجل

10. إذا علمت أن 7 هو وسيط البيانات
3, 11, 2, 13, x, 1, 3, 8, 9 فما هي قيمة x :

(أ) $x=3$

(ب) $x=6$

(ج) $x=7$

(د) $x=8$

7 هو وسيط البيانات 9, 8, 3, 1, x, 13, 2, 11, 3

فإنه $x = 7$

1, 2, 3, 3, ⁽⁷⁾x, 8, 9, 11, 13

8. عددان متوسطهما الحسابي 48 ، والفرق بينهما 196 فما العدد الأكبر

- (أ) 50
- (ب) 146
- (ج) 52
- (د) 147

⑧ $\frac{x + y}{2} = 48$

$x + y = 96 \rightarrow ①$

حاصل طرحهم = 196

$x - y = 196 \rightarrow ②$

نجمع ① و ②:

$2x = 292$

$x = 146 \Rightarrow$ القيمة الأكبر

9. متوسط درجات سلطان في أول خمسة اختبارات قصيرة هو 92 ، فإذا أراد تحسين متوسط درجاته ليصبح 93 ، فما الدرجة التي يجب أن يحصل عليها في الاختبار القصير التالي :

(أ) 95

(ب) 98

(ج) 97

(د) 100

متوسط 5 اختبارات = 92 (9)

5 اختبارات $\leftarrow 5 \times 92 = 460$

6 اختبارات $\leftarrow 6 \times 93 = 558$

$558 - 460 = 98$

↓
درجة اختبار
وامر

Photo
Grip

11. اذا كان متوسط درجات اربع طلاب يساوي 12 ، اذا
حذفنا اعلى درجة يصبح المتوسط 11 فما قيمة
أعلى درجة ؟

(11) متوسط درجات 4 طلاب = 12

$$12 \times 4 = 48$$

$$11 \times 3 = 33$$

↓
حذفنا، به 3 درجات

$$48 - 33 = 15$$

↓
اى 15 درجة

Photo
Grid

12. اشترى أحمد 3 كتب قيمة كل واحد منها 15 ريالاً. ثم اشترى كتابين أحدهما بـ 10 ريالاً والآخر بـ 20 ريالاً ما متوسط أسعار الكتب التي اشتراها أحمد؟

- (أ) 14
- (ب) 15
- (ج) 16
- (د) 17

$$\frac{\text{المتوسط الحسابي} = \text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\frac{15 + 15 + 15 + 10 + 20}{5} = 15$$

PhotoGrid

13. قام طالب بأخذ 9 قياسات ثم ألغى أكبر قيمتين و أصغر قيمتين فتنبى لديه 5 قيم . أي مما يلي لن يتأثر بحذف القيم الأربع
- (أ) المتوسط الحسابي
 - (ب) الوسيط
 - (ج) المدى
 - (د) الانحراف المعياري

السؤال 9 قياسات عدد فردي

وحذف 4 قياسات اكبر قيمتين واصغر قيمتين

يعني ما يتأثر باقي الوسيط نفسه

11:49

Photo
Grid

أوجدِي المنوال :

4, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4

لا يوجد

15. أوجد المنوال للقيم 8 2، 3، 7، 2، 5

2

3

5

6

(ب)

(ج)

(د)

Photo
Grid

١٩- الوسط الحسابي لخمس أعداد يساوي 12. إذا حذفنا ثلاثة أعداد

وسطها الحسابي 10، فما الوسط الحسابي للعددتين الباقيتين؟

أ) 12

ب) 13

ج) 14

د) 15

19

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{مجموع 5 أعداد} = \text{عدد القيمة} \times \text{الوسط الحسابي} \\ 60 = 12 \times 5 = \\ \text{مجموع 3 أعداد} = \text{عدد القيمة} \times \text{الوسط الحسابي} \\ 10 \times 3 = \\ 30 = \end{array} \right\}$$

$$\text{مجموع العددتين الباقيتين} = 30 - 60 = 30$$

$$\text{الوسط الحسابي للعددتين} = \frac{30}{2} = 15$$

الإجابة د

نقاش

اليوم 23

أولا : مقاييس التشتت

المدى - الربيع الأدنى - الربيع الأعلى - المدى
الربيعي

المدى الربيعي :

- 1- نرتب البيانات من الأصغر إلى الأكبر
- 2- نقسم البيانات إلى جزئين
- 3- نوجد وسيط الجزء الأيمن (النصف الأعلى
أيالقيم الكبرى) ، نوجد وسيط الجزء الأيسر (
النصف الأدنى أي القيم الأصغر)
- 4- نطرح الربيع الأدنى من الربيع الأكبر

في المدى الربيعي

لازم نرتب البيانات ونقسمها لجزأين

الجزء اللي ع اليسار يكون البيانات الصغرى

واللي على اليمين يكون للبيانات الكبرى

9:20

مثال : المدى الربيعي للبيانات

البيانات زوجيه

4, 2, 4, 10, 8, 6, 12, 14

نرتب البيانات

2, 4, 4, 6, 8, 10, 12, 14

المدى :

$$14 - 2 = 12$$

المدى الربيعي : نصف أعلى
نقسم البيانات : نصف أدنى

2, 4, 4, 6, 8, 10, 12, 14

$$\frac{4+4}{2} = 4$$

$$\frac{10+12}{2} = 11$$

المدى الربيعي : 11 - 4 = 7

ادرى الفرق بين أكبر قيمة وأصل متجه
ادرى الربيعي : الفرق بين الربيعي الأعلى
والدول ..

١٠ ترتيب البيانات ثم نقصها

١١ نوجد الوسط لكل نصف

١٢ نظرم لوسطين من بعض

البيانات فردية :

2, 3, 4, 4, 6, 8, 10, 12, 14

↓
نصف أدنى

↓
وسط

↓
نصف أعلى

$$\frac{3+4}{2} = 3,5$$

$$\frac{10+12}{2} = 11$$

$$المدى الربيعي : 11 - 3,5 = 7,5$$

المدى = اكبر قيمة - اصغر قيمة
 $x - 6 = 15$
 $x = 15 + 6 = 21$

16. اذا كان المدى للبيانات الآتية 6,7,10,x,15,20 يساوي 15 ، فاي القيم الآتية يمكن أن تكون قيمة x ؟

- (أ) 3
(ب) 11
(ج) 16
(د) 21

نحدد من البيانات اصغر قيمة واكبر قيمة
ثم
نجرب الاختيارات
اذا الاختيار اصغر قيمة نطرحه مع اكبر
القيمة 20 هل تطلع 15
الاختيار 11 ليس اصغر قيمة ولا اكبر قيمة
الاختيار 16؟ نفس الطريقة
الاختيار 21 اكبر قيمة واطرحه مع اصغر
قيمة وهو 6 والجواب 15

9:34 م

اصغر القيمة اما 6 او 3
اكبر قيمة اما 20 او 21

نحذف فقرة ب وجيم

ننتقل للانحراف المتوسط

اذا اعطانا بيانات وطلب الانحراف المتوسط

نرتب البيانات ونوجد المتوسط الحسابي

النااتج نطرحه من البيانات المعطاه في قيمة
مطلقة

ثم نجمع النواتج

ونقسمهم على عدد البيانات

8, 9, 10, 11, 12

أو ص، الانحراف المتوسط الحسابي،

8, 9, 10, 11, 12



المتوسط الحسابي = 10 مباشرة
لأن البيانات متساوية وعددها فردي

$$|8 - 10| = 2$$

$$|9 - 10| = 1$$

$$|10 - 10| = 0$$

$$|11 - 10| = 1$$

$$|12 - 10| = 2$$

↓

$$= \frac{6}{5} = 1.2$$

الانحراف المتوسط الحسابي

الناتج يقع في إضطره
(1, 2)

مثل هالمسائل عشان الوقت حاولو بعض
العمليات تسووها في مخكم ما يحتاج تكتبوها

واستعملو التقريب

يوفر عليكم وقت

مثل ايجاد ناتج طرح المتوسط الحسابي من
القيم

ما يحتاج نكتبها مباشرة نطلعها لان الارقام
سهله ونجمع على طول

موضروري الناتج بالضبط

المهم تعرفي القيمة التقريبية للناتج وفي اي
فترة يقع

انتهينا من الانحراف المتوسط

ناخذ الانحراف المعياري

الانحراف المعياري نفس الخطوات الفرق بدال
القيمة المطلقة نربع ناتج الطرح

الفرق بين الانحراف المتوسط والانحراف
المعياري

عشرين خط عليها

مهم مهم

في أي الفترات التالية يقع الانحراف المعياري
(8, 11, 12, 10, 9) ؟

(أ) [0,1]

(ب) [1,2]

(ج) [2,3]

(د) [3,4]

المطلوب في السؤال الانحراف المعياري
أي جذر التباين
① نوجد متوسط البيانات
8, 9, 10, 11, 12
المتوسط الحسابي
هذه البيانات متساوية
② نوجد مجموع الفروق بين القيم
والمتوسط الحسابي

$$\begin{aligned}(8-10)^2 &= 4 \\ (9-10)^2 &= 1 \\ (10-10)^2 &= 0 \\ (11-10)^2 &= 1 \\ (12-10)^2 &= 4\end{aligned}$$

$$4 + 1 + 0 + 1 + 4$$

$$= 10$$

مجموع ونقسم
على عدد
البيانات

$$2$$

التباين

④ نأخذ الجذر التربيعي للناتج

$$\sqrt{2} = 1, \dots$$

$$\sqrt{1} < \sqrt{2} < \sqrt{4}$$

$$1 < \sqrt{2} < 2$$

يعني الناتج يقع بين 1 و 2

(1, 2)
الحل

Photo
Grid

(ذ) لدينا 10 قراءات احصائية مجموع مربعاتها 520 ، فإذا كان متوسط هذه القراءات هو 4 ، فإن الانحراف المعياري لها :

- (أ) 5
- (ب) 6
- (ج) 16
- (د) 20

الانحراف المعياري = $\sqrt{\frac{\text{مجموع المربعات}}{\text{عدد القراءات}} - \text{مربع المتوسط للقراءات}}$

$$\sqrt{\frac{520}{10} - 4^2} = \sqrt{52 - 16} = \sqrt{36} = 6$$

هو اما يعطينا بيانات

واحدنا نحلها نوجد مربعات الفرق بينها وبين المتوسط

او يعطينا جاهزة مجموع المربعات ونطبق القانون الثاني

Photo
Grid

أوجد التباين

9, 10, 12, 11, 8

8, 9, 10, 11, 12

المتوسط = 10

$$(8-10)^2 = 4$$

$$(9-10)^2 = 1$$

$$(10-10)^2 = 0$$

$$(11-10)^2 = 1$$

$$(12-10)^2 = 4$$

المجموع

$$\frac{10}{5} = 2$$

التباين = 2

46 / اذا كانت درجات طلاب
36 ، 44 ، 42 ، 38
مكرر مع تغير
فإن الانحراف المعياري يساوي .. الأرقام
• $\sqrt{10}$
• $2\sqrt{10}$
• $\sqrt{4}$
• 40

شفت الدرجات
قلت درجتين فوق 40
ودرجتين تحت الاربعين

44 زياده 4 و 36 نقصان 4
42 زياده 2 و 38 نقصان 4
بالنظر المتوسط 40

10:38 م

16
36 ، 38 ، 42 ، 44
كل مرة تزيد درجتين
اذاً المتوسط يساوي 40
 $(36 - 40)^2 = 4^2 = 16$
 $(38 - 40)^2 = 2^2 = 4$
 $(42 - 40)^2 = 2^2 = 4$
 $(44 - 40)^2 = 4^2 = 16$
 $\frac{16 + 4 + 4 + 16}{4} = \frac{40}{4} = 10$
الانحراف = $\sqrt{10}$

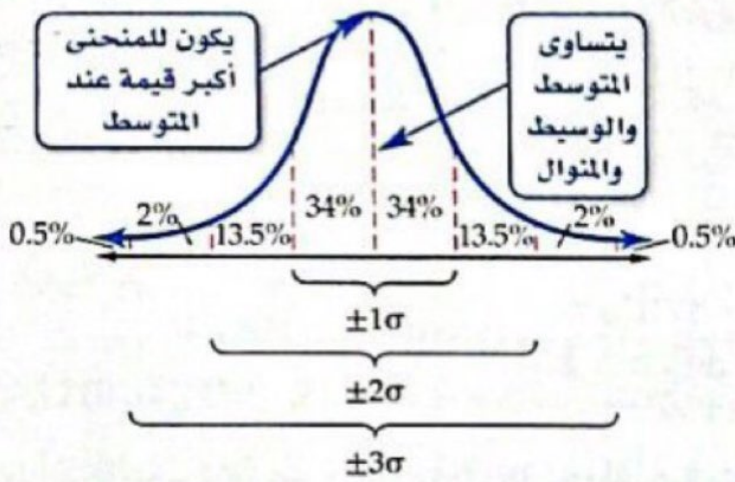
Photo
Grid

◆ انتيهنا من الجزء المخصص للمستوى
الاول والثاني

وننتقل لآخر جزء بالنقاش عن التوزيع
الطبيعي والذي يخص المستوى الثاني

مفهوم اساسي

القانون التجريبي



يتصف التوزيع الطبيعي الذي متوسطه μ وانحرافه المعياري σ بالخصائص الآتية:

- يقع 68% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$.

وهذا يعني أن 68% من البيانات لا يتجاوز بعدها عن المتوسط قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 95% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)$.

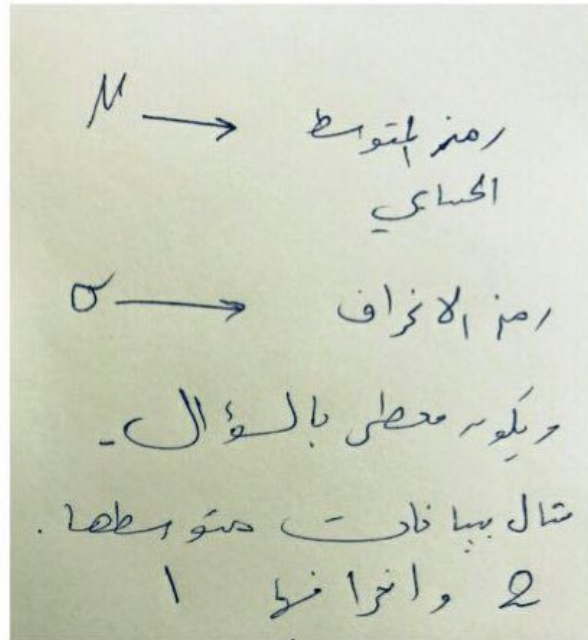
وهذا يعني أن الغالبية العظمى من البيانات (95%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ضعف قيمة الانحراف المعياري.

- يقع 99% تقريباً من البيانات ضمن الفترة $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.

وهذا يعني أن جميع البيانات تقريباً (99%) لا يتجاوز بعدها عن المتوسط ثلاثة أمثال الانحراف المعياري.

هذا تمثيل التوزيع الطبيعي

والبيانات اللي بالصورة والنسب اللي فييه
ثابته



يعطينا بالسؤال المتوسط الحسابي والانحراف

ممكن يكون المطلوب في اي فترة تقع اكثر
البيانات

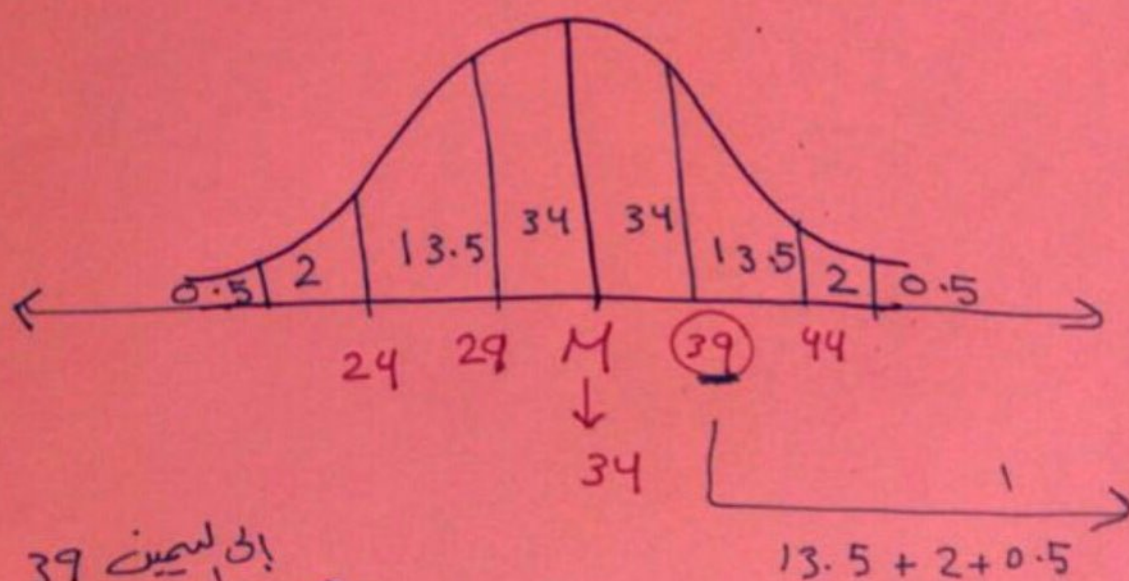
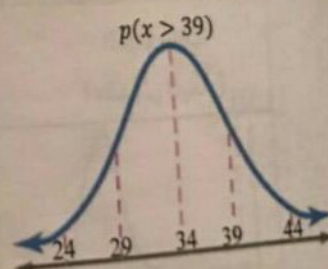
او في اي فترة تقع اقل البيانات

مثال :

توزيع طبيعي متوسطه (34) وانحرافه المعياري (5) أوجد احتمال أن تزيد قيمة x عشوائياً في هذا التوزيع عن (39)

الحل :

$$p(x > 39) = \%13.5 + \%2 + \%0.5 = \%16$$



إلى اليمين 39

$$p(x > 39) = 13.5 + 2 + 0.5 = 16\%$$

Photo
Grid

- ٢٣ - لدينا مجموعة من البيانات متوسطةها يساوي ١ وانحرافها المعياري يساوي ١ أي العبارات الآتية يجب أن تكون صحيحة؟
- أ) توجد على الأقل قيمة واحدة متكررة مرتين في هذه البيانات
 - ب) معظم البيانات تقع في الفترة $[-1, 3]$
 - ج) مدى البيانات في الفترة $[-2, 2]$
 - د) الوسيط لهذه البيانات هو $\frac{3}{2}$

أولاً : نوجد قيم المتوسط الحسابي معطوياً
 منه أو مضافاً إليه المضاعفات
 الثلاثة الأولى للانحراف المعياري

بعض من أسئلة:

المتوسط = 1

الانحراف = 1

$$\mu \pm \sigma = 1 \pm 1 = 0, 2$$

$$\mu \pm 2\sigma = 1 \pm 2 = -1, 3$$

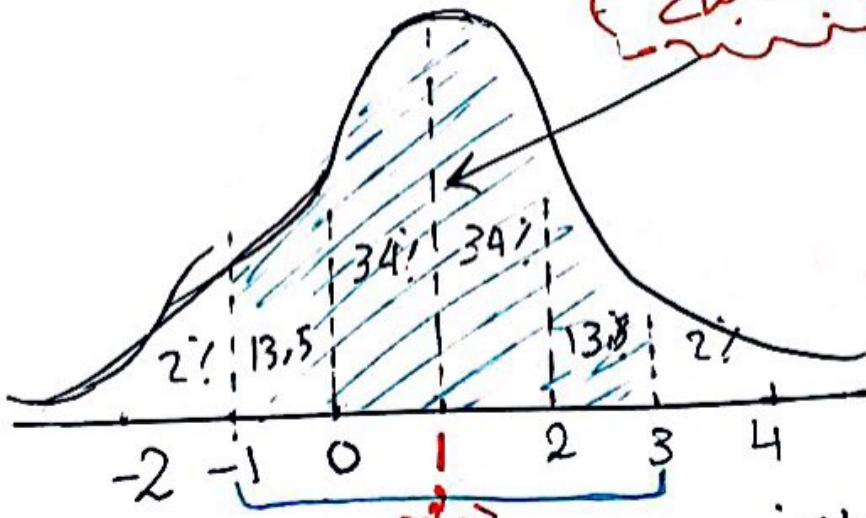
$$\mu \pm 3\sigma = 1 \pm 3 = -2, 4$$

المتوسط
 الحسابي

الانحراف
 المعياري

غسل القيم على الرسم

نسب ثابتة



المتوسط = 1

هذا الرسم أكثر القيم بين
 $[-1, 3]$

ثلاث نسب

اول نسبة 34 34 النسبة 68

الحاله الثانية

34 + 34 + 13.5 + 13.5 النسبة 95

الحاله الثالثة 34 + 34 + 13.5 + 13.5

2 + 2 النسبة 99

11:10 م

اجابه سريعه

اخذ متوسط الفتره

من ساب واحد الى ثلاثة

المتوسط واحد

Photo
Grid

أنته

$$2 = \text{المتوسط}$$

$$3 = \text{الانحراف}$$

$$2 \pm 3 = -1.5$$

$$2 \pm 6 = -4$$

$$2 \pm 9 = -7$$

تحليل البيانات على خط الأعداد

ملاحظة
نقسم الخط إلى 6 أجزاء

نضع المتوسط الجسدي المعطى في المنتصف ثم نوزع الأرقام

$$1 = \text{المتوسط}$$

$$2 = \text{الانحراف}$$

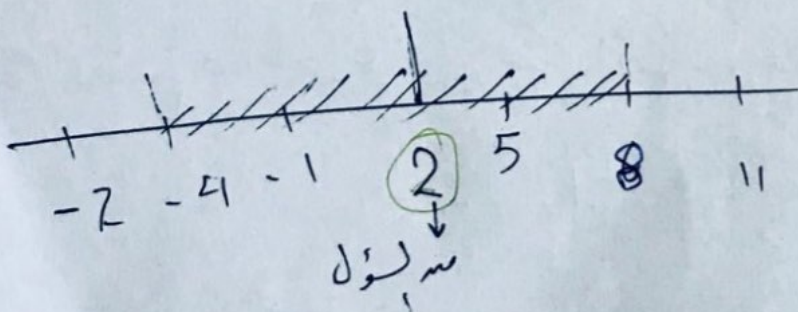
فانوه مضاعفات + المتوسط الانحراف

$$1 \pm 2 = -1, 3$$

$$1 \pm 4 = -3, 5$$

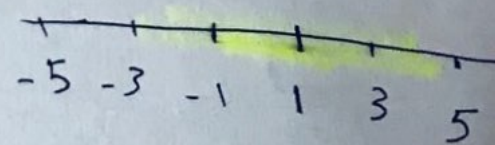
$$1 \pm 6 = -5, 7$$

عندنا



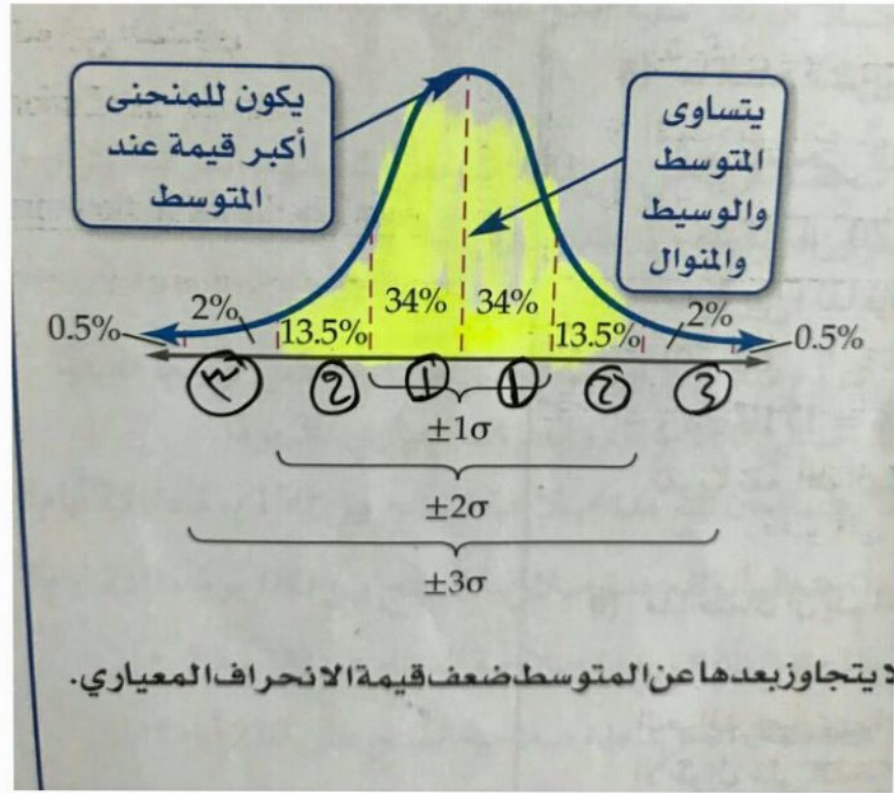
صنعتهم البيانات تقع فقط في 4

تقسيمات (-4, 8)



صنعتهم البيانات تقع

(-3, 5)



صوره

التمثيل مقسم الى 6 اجزاء

3 اجزاء يمين و 3 اجزاء يسار

معظم البيانات تقع في 4 اجزاء جزئين من اليمين وجزئين من اليسار

Photo
Grid

ليش ما اخترتي الفتره الثالثه |
السؤال يبغى معظم البيانات ومعظمها ناخذ
اثنين من اليمين واثنين من اليسار
11.21

ع ايس اساس قسمتي خط الاعداد ؟؟ |
في التوزيع الطبيعي

اقسم على حسب المتوسط الحسابي المعطى
بالسؤال

واقسم خط الاعداد الى 6 اقسام فقط

جزئين 34% وجزئين 13% وجزئين 2%

مختصر التوزيع الطبيعي

● أولاً : نجمع المتوسط الحسابي مع سالب وموجب مضاعفات الانحراف

ثانياً نقسم الخط البياني الى 6 اجزاء

2- نضع المتوسط الحسابي المعطى بالسؤال في المنتصف

ثم نوزع البيانات الناتجة من جمع وطرح المتوسط الحسابي مع مضاعفات الانحراف

3- نوجد الفترة التي تكون فيها معظم البيانات وتكون عبارة عن ثاني عدد يمين المتوسط وثاني عدد يسار المتوسط

نقاش

اليوم 24

قانون المضروب :- $(n!)$ جالالة [رقم ← شفت ← حرف] $[\leftarrow \text{شفت}]$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

مثال :-
[1] $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

[2] $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$

٢- التباديل (nPr) :- جالالة مباشرة [رقم ← شفت ← رقم] $[\leftarrow \text{شفت}]$

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مهم ترتيب العناصر

مثلاً (21) غير عن (12)

[1] $5P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$

[2] $7P_2 = 7 \times 6 = 42$

[3] $5C_4 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

٣- التوافيق (nCr) :- جالالة مباشرة [رقم ← شفت ← رقم] $[\leftarrow \text{شفت}]$

$$nCr = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

غير مهم الترتيب
دون تكرار اختيار

مثلاً :-

[1] $5C_2 = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = \frac{20}{2} = 10$

[2] $7C_5 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \frac{42}{2} = 21$

مثلاً اختيار

محمد أحمد هو نفسه أحمد محمد
محمد زود هو نفسه أحمد زود

٤- التباديل مع التكرار :- عدد التباديل المختلفة لعنصر عدد n عندما يتكرر عنصر منها r_1 و آخر r_2 من المرات فإنه يساوي :-

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

٥- التباديل الدائرية :- (بدون نقطة مرجع) عدد التباديل المختلفة لـ n من العناصر مرتبة على دائرة

$$(n-1)! = \frac{n!}{n}$$

التباديل nP_r

تبادل من العناصر المتميزة مأخوذة r في كل مرة

$nP_r =$ عدد عناصر المجموعة
يمكن ترتيب

هم حسب الترتيب

مثلاً ترتيب خالد ← أحمد

غير ترتيب أحمد ← خالد

التباديل الاستله تكوين - ترتيب

التوافيق nCr

توافيق n من العناصر المختلفة مأخوذة r في كل مرة

nCr

لا شرط الترتيب

لا شرط الرجوع (بدون ارجاع العنصر)

مثل في السؤال اختيار أشخاص 6 وصافحة

مزجبة لو مئتين

مثلاً اختيار أحمد وليد ثم نفس اختيار وليد أحمد

التباديل مهم الترتيب. وبشروط
الاسئلة تكوين الارقام ترتيب الاشخاص
تتشرط ارجاع الرقم او الشخص. لترتيب مع
العنصر الثاني.
مثلا اذا رتبنا احمد محمد وليد
غير عن ترتيب وليد احمد محمد
غير عن ترتيب محمد احمد وليد

متمایزة
مثلا
احمد وليد مع وليد احمد
نفس العناصر يعني متمایزه

Photo
Grid

التوافيق والتباديل

يرمز إلى عدد قوافيه n من العناصر المختلفة

مأخوذة r في كل مرة بالرمز nPr

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$5P_2 = 5 \times 4 = 20$$

- تستلزم الترتيب
- تستلزم الإرجاع. (مع الإرجاع)

يرمز إلى عدد قوافيه n من العناصر المختلفة

مأخوذة r في كل مرة بالرمز nCr قوافيه

مثلاً:-

$$5C_2 = \frac{5 \times 4}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

- لا تستلزم الترتيب (اختيار عشوائي)
- لا تستلزم الإرجاع. (بدون إرجاع العنصر)

كم رقم يتم تكوين عدد مكون من خانتين
مكونة من $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ معهم ترتيباً للعدد.

$$5P_2 = 20$$

$$5 \times 4 = 20$$

توضيح



12
غير من 21

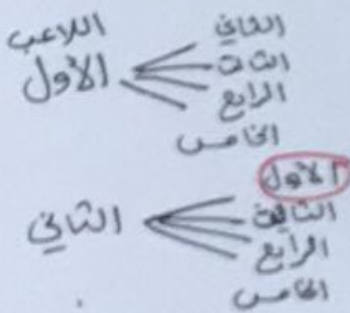
لاحظناهم ترتيب الأرقام
لاحظناهم الإرجاع الرقم (1)

فوجد جميع الاحتمالات لتكوين النواتج

يريد مدرب كرة طائرة اختيار لاعبين من 5

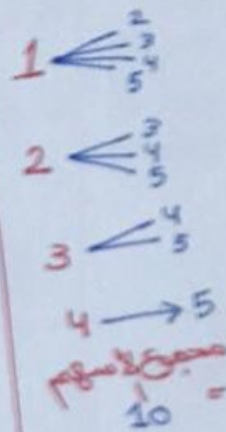
لاعبين لتسيير كل من الترتيب الأول والثاني

$$5P_2 = 5 \times 4 = 20$$



اللاعب الأول
اللاعب الثاني
اللاعب الثالث
اللاعب الرابع
اللاعب الخامس

كم رقم يتم اختيار رقمين من 5 أرقام
اختيار عشوائي منقسم القوافيه



لاحظنا غيرهم إرجاع
العنصر (1)

12
21
افترقا
قبل
المنشأ

$$5C_2 = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

سؤال المصافحة
منج الألوان قوافيه

الألوان 10
اللون 9
أسود
بي

$$11C_2 = \frac{11 \times 10}{2} = 55$$

أسود مزجت مع البي
البي مزجت مع أسود
الأسود مزجت مع البي
البي مزجت مع أسود

اختيار 5 لاعبين من بين 10 لاعبين

2. بكم طريقة يمكن ان يجلس 5 اشخاص في صف

به 9 كراسي

(أ) 15100

(ب) 15000

(ج) 15120

(د) 15150

ترتيب جلوس الشخص في الكرسي الاول غير
عن ترتيب جلوس الشخص نفسه في
الكرسي الثاني
اذن الحل بالتباديل

٢) بكم طريقة يمكن ان يجلس 5 اشخاص في صف به 9 كراسي

نستخدم التباديل

$$n = 9$$

$$r = 5$$

$${}_9P_5 = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 15120$$

3. اذا كان هناك 7 اشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا سوى 3 كراسي ، بكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي الثلاثة معاً

(أ) 200

(ب) 205

(ج) 210

بكم طريقة

٣) اذا كان هناك 7 اشخاص يريدون الجلوس ولم يجدوا سوى 3 كراسي بكم طريقة يمكن ملء هذه الكراسي معاً ؟

$$n = 7 \quad r = 3$$
$${}_nP_r = {}_7P_3 = 7 \times 6 \times 5 = 7 \times 30 = 210$$

Photo

4. مسجد له 7 أبواب ، بكم طريقة يستطيع شخص دخول المسجد من باب والخروج من الآخر

(أ) 40

(ب) 42

(ج) 44

(د) 46

مسجد له 7 أبواب بكم طريقة يستطيع شخص دخول المسجد من باب والخروج من الآخر ؟

عدد الأبواب $r = 2$

$n = 7$

تباديل

$${}^7P_2 = 7 \times 6 = 42$$

Photo
Grid

5. ارادت 4 نوادي إقامة مباريات لكرة القدم بينها بحيث تلعب هذه النوادي متتى متتى ، فبكم طريقة يمكن إتمام ذلك

- (أ) 12
- (ب) 10
- (ج) 6
- (د) 5

مثلا الهلال الاتحاد ذهاب
الاتحاد الهلال اياب

لو ما اشترط
كأنها مباراة واحدة

ارادت 4 نوادي إقامة مباريات لكرة القدم بينها بحيث تلعب هذه النوادي متتى متتى فبكم طريقة يمكن إتمام ذلك ؟

كوفيم

$$n=4$$

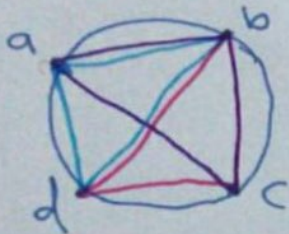
$$r=2$$

$$4C_2 = \frac{4 \times 3}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

PhotoGrid

6. تقع 4 نقاط على دائرة فكم مثلث يمكن رسمه بحيث تكون رؤوسه على الدائرة

- (أ) 2
- (ب) 4
- (ج) 6
- (د) 8



سنستخدم توافقية

عدد النقاط $n = 4$
عدد النقاط للمثلث $r = 3$

$${}^4C_3 = \frac{4 \times 3 \times 2}{3 \times 2 \times 1} = \boxed{4}$$

هذا الحل كلها توافقية لانه فقط توصيل النقاط
ومو مهم ترتيب النقاط

Photo
Grid

7. تقع 8 نقاط على دائرة فكم قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة من هذه النقاط

- (أ) 8
(ب) 16
(ج) 28
(د) 56

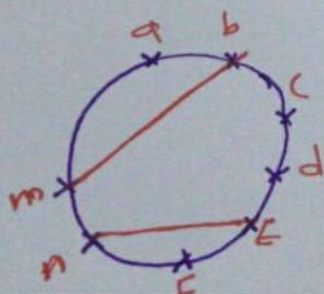
٧- تقع 8 نقاط على دائرة فكم قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين على الدائرة من هذه النقاط.

$$n = 8$$

$$r = 2$$

قطعة مستقيمة

$$8C_2 = \binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = \frac{56}{2} = 28$$



المستقيم m b
هو تقسيم b

Photo
Grid

8. لدى عبدالرحمن 10 كتب مختلفة ويريد أن يختار منهم كتاباً يقرأه في اليوم الأول ثم كتاباً يقرأه في اليوم الثاني ثم كتاباً يقرأه في اليوم الثالث . بكم طريقة يمكنه اختيار هذه الكتب

- (أ) 6
- (ب) 30
- (ج) 100
- (د) 720

اليوم الاول. ممكن 10 كتب
اليوم الثاني قرأنا كتاب وباقي 9 كتب
اليوم الثالث قرأنا كتابين وباقي 8 كتب

$$10 \times 9 \times 8 = 720$$

Photo
Grid

السؤال مكون من جزئين لازم نفهم
بدون تكرار تباديل
وشرط اقل من 300 ننقص من المئات باخذ
رقمين اما واحد او اثنين

9:35

9. كم عدداً طبيعياً مكوناً من ثلاث منازل واصغر
من 300 يمكن تكوينه من الارقام
(1, 2, 3, 4, 5)
إذا كان التكرار غير مسموح؟

- (أ) 24
- (ب) 32
- (ج) 40
- (د) 60

إذا قال مسموح التكرار
نضرب $5 * 5 * 5$

وإذا اشترط اقل من 300
نضرب $5 * 5 * 2$

9:35 م

التكرار غير مسموح. تباديل
وإذا التكرار مسموح. مضروب 3
وإذا اشترط نحذف من عدد المنازل

Photo
Grid

كم عددًا طبيعيًا مكونة من ثلاث منازل وأصغر من 300 يمكن
تكوينه من الأرقام 3، 4، 5، 2، و 1 إذا كان التكرار غير مسموح

عدد الأرقام $n = 5$
عدد المنازل $r = 3$
ليكون تكرار
تباديل لأنهم ترتيب الأرقام

3 4 5

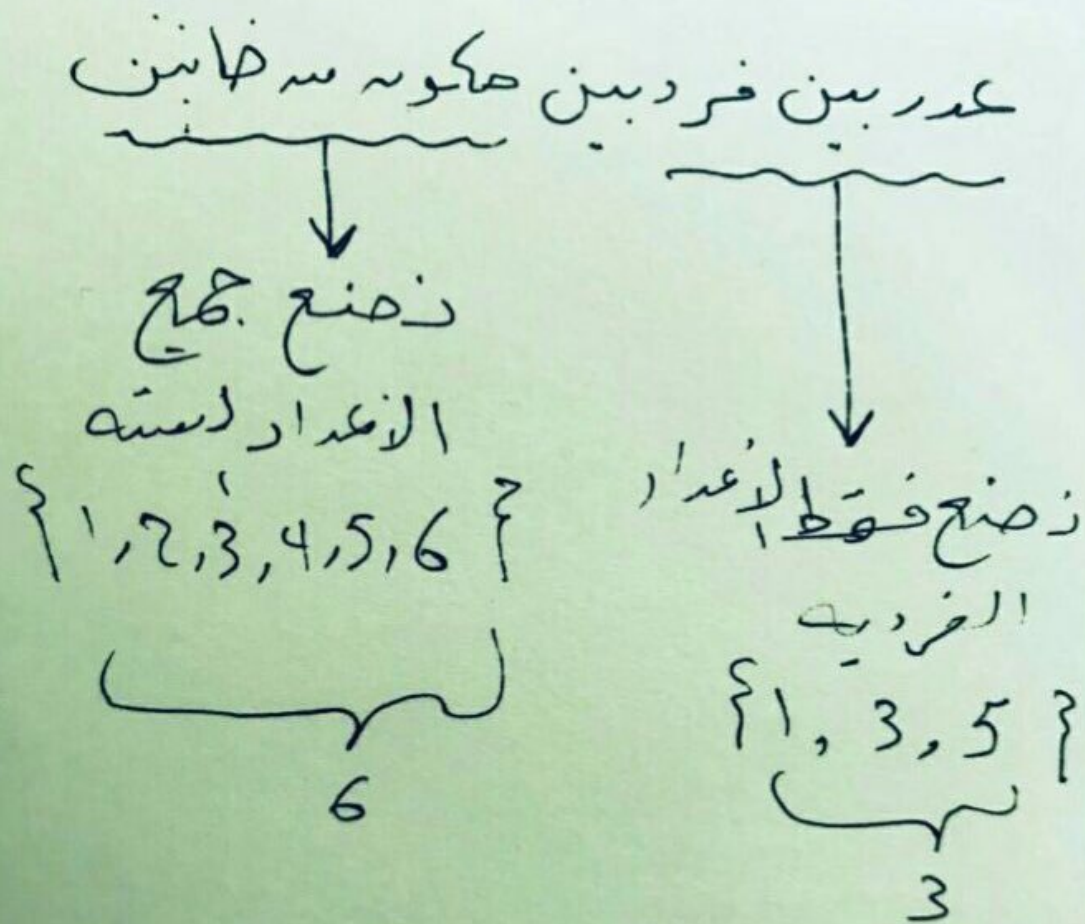
لكن إذا استند وقال أقل من 300 أي الأرقام

تصبح لثلاث أرقام 2 و 1

$$\begin{matrix} \text{مئات} & \text{عشرات} & \text{أحاد} \\ 2 & 4 & 3 \end{matrix} = 2 \times 4 \times 3 = 24$$

السؤال

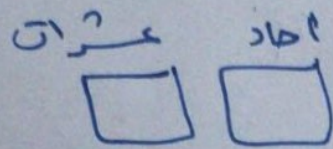
1. بكم طريقة يمكن كتابة عدد فردي مكون من خفتين من الأرقام {1,2,3,4,5,6} ؟



$$6 \times 3 = 18$$

Photo
Printer

۱- لکھم طریقہ یوں کتابتہ عدد فردی من خاستین من الأرقام
 { ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶ }



خاستین $r=2$

$n=6$

الشروط عدد فردی ← احاد فردی اما او ۳ و ۵

ثلاثة ارقام

عشراتی

6

احاد

3

$$= 6 \times 3 = 18$$

4 3 5

يسمح تكرار

مثل 33

55

11

❖ ملاحظات هامة جدا حول مسائل تكوين الأعداد:

- (١) يكون العدد زوجيا إذا كان رقم أحاده زوجيا ، أي أن يبدأ العدد بأحد الأرقام (صفر ، ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨) .
- (٢) يكون العدد فرديا إذا كان رقم أحاده فرديا ، أي أن يبدأ العدد بأحد الأرقام (١ ، ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩) .
- (٣) يكون العدد يقبل القسمة على ٥ (أي أن العدد من مضاعفات العدد ٥) إذا كان رقم أحاده (صفر أو ٥) .
- (٤) الأعداد الأولية هي الأعداد التي لا تقبل القسمة إلا على نفسها أو الواحد وهي (٢ ، ٣ ، ٥ ، ٧) .
- (٥) إذا لم يذكر المجموعة التي سنختار منها الأرقام نعتبرها المجموعة { صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ } .
- (٦) إذا لم يذكر في السؤال مع التكرار أو بدون تكرار نعتبر السؤال مع التكرار .
- (٧) إذا ذكر في السؤال أن العدد بأرقام مختلفة فإن السؤال بدون تكرار الأرقام .
- (٨) إذا وجد الصفر ضمن أرقام المجموعة فلا يجوز وضعه في آخر خانة من جهة اليسار ، أي أن الخانة الأخيرة من جهة اليسار مشروطة بعدم وضع الصفر فيها لأن الصفر على يسار أي عدد لا قيمة له .
- (٩) إذا وجدت خانة مشروطة نبدأ بها .
- (١٠) عند تكوين أي عدد نرسم مربعات تمثل عدد خانات أرقام العدد المطلوب وكل مربع يمثل خانة في العدد المطلوب ونضع داخل المربع عدد الطرق التي يمكن أن تملأ بها المنزلة الشاغرة (المربع) .

فمثلا: إذا كان المطلوب عدد من ثلاثة أرقام نقوم برسم ثلاثة مربعات وكل مربع يمثل خانة هي :

أحاد	عشرات	مئات
عدد	عدد	عدد
الطرق	الطرق	الطرق

خانات الأحاد ، والعشرات ، والمئات

❖ ملاحظة: لحل مسائل الأعداد نتبع مايلي:

أولاً : مع التكرار الأرقام : تملأ جميع الخانات بجميع الأرقام الموجودة في السؤال مع الانتباه للشرط والخانة الأخيرة

إذا وجد الصفر .

مثال: من المجموعة س = { ٢ ، ٥ ، ٨ ، ٠ } كم عدداً يمكن تكوينه من المجموعة س إذا كان العدد:

$$٨٤٤ = ٣ \times ٤ \times ٤ = \text{عدداً}$$

(نحذف الصفر)

٣	٤	٤
---	---	---

(أ) مكوناً من ثلاثة أرقام

$$١٤٤٤ = ٣ \times ٤ \times ٤ \times ٣ = \text{عدداً}$$

(نحذف الصفر)

٣	٤	٤	٣
---	---	---	---

(ب) زوجياً ومكوناً من أربعة أرقام

(٨ ، ٠ ، ٢)

10. بكم طريقة يمكن صف ست كتب بطريقة مستقيمة على أرفف مكتبة إذا كان 3 كتب حمراء و 2 بيضاء وكتب واحد أصفر؟

مثل السؤال هذا يكون حله

البسط مضروب العدد الكلي (عدد الكتب كلها 6)

المقام يكون مضروب عدد التكرار (مضروب 3 حمراء 2 × زرقاء)

٩٠٥٣

① البسط مضروب جميع الكتب
6!

② المقام مضروب الكتب المتكررة
3! × 2!

↓ حمراء ↓ زرقاء

$$\frac{6!}{3! \times 2!}$$

$$\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{6 \times 5 \times 4}{2 \times 1}$$

$$= 6 \times 10 = 60$$

١٠. كم طريقة يمكن صف ست كبت بطريقة مستقيمة على ارفق مكتبة اذا كانت ككبت حمراء ، ٢ بيضاء وواحد اصفر ؟

عدد الكبت = $n = 6$

$r_1 = 3$ حمراء

$r_2 = 2$ بيضاء

$r_3 = 1$ اصفر

تباديل بتكرار
لان تكرار الاحمر
وتكرار الابيض.

$$\frac{n!}{r_1! r_2! r_3!} = \frac{6!}{3! 2! 1!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 1}$$
$$= 6 \times 5 \times 2 = \boxed{60}$$

مفهوم أساسي

التباديل مع التكرار

عدد التباديل المتميزة لعناصر عددها n عندما يتكرر عنصر منها r_1 من المرات وآخر r_2 من المرات وهكذا ... فإنه يساوي

$$\frac{n!}{r_1! \cdot r_2! \cdot \dots \cdot r_k!}$$

مثال 3

الاحتمال والتباديل مع التكرار

برنامج ألعاب: في أحد برامج الألعاب يُعطى المتسابق أحرفاً مبعثرة، ويطلب منه تكوين كلمة وفق دلائل محددة. بافتراض أنك أعطيت الأحرف الآتية وطلب إليك إعادة ترتيبها لتكوّن اسم دولة إسلامية. فإذا اخترت تبديلاً لهذه الأحرف بصورة عشوائية، فما احتمال أن يكون الاسم الصحيح ماليزيا؟



الخطوة 1: هناك 7 أحرف يتكرر فيها الحرف (ا) مرتين، والحرف (ي) مرتين؛ ولذا فإن عدد التباديل المتميزة لهذه الأحرف هو:

$$\frac{7!}{2! \cdot 2!} = \frac{5040}{4} = 1260$$

وذلك باستعمال الآلة الحاسبة

قانونه لتوافيق لحل مسألة حصر

$$① \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

$$② \binom{n}{r} = \frac{nPr}{r!}$$

ملاحظة

$$\binom{a}{a} = 1 \quad \binom{a}{1} = a$$

$$\binom{5}{5} = 1$$

$$\binom{6}{1} = 6$$

$$\binom{a}{0} = 1$$

$$\binom{a}{a-1} = a$$

$$\binom{15}{0} = 1$$

$$\binom{4}{3} = 4$$

مثال

$$\star \binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3}{2} = 6$$

$$\star \binom{4}{2} = \frac{4P_2}{2!} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 \rightarrow \text{حصر } n, r \text{ مرتين}$$

$$\star \binom{9}{3} = \frac{\overset{3}{9} \times \overset{4}{8} \times 7}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times 1} = 12 \times 7 = 84 \rightarrow \text{حصر } n, r \text{ 3 مرات}$$

$$\star \binom{9}{3} = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{9!}{3!6!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times \cancel{6!}}{\cancel{3!} \times \cancel{6!}} = 84$$

11. عتبة ألوان فيها 11 لون إذا مزجت لونين كم لون جديد ؟

11 - عتبة ألوان سينج 11 لون إذا مزجت لونين كم لون جديد .

هزج لونين
نقش اللون الجديد

$$n = 11$$
$$r = 2$$
$${}^{11}C_2 = \frac{11 \times 10}{2} = \frac{110}{2} = 55$$

Photo
Grid

السؤال الارقام المتطابقة

999

888

777

666

555

444

333

222

111

000

12. تحمل ألواح السيارات في المملكة 3 حروف و 3 ارقام فكم عدد اللوحات التي تحمل 3 حروف متطابقة و 3 ارقام ليست جميعها متطابقة؟

(أ) 25200

(ب) 27720

(ج) 28000

(د) 28950

السؤال مكون من جزئين. حروف وارقام
نحل الحروف لحال.
والارقام لحال

نحذفها مع الحروف 28

نضربهم

اللوحات المحذوفة 280

Photo
Grid

٦. تحمل ألواح السيارات في المملكة ٣ حروف و ٣ أرقام فكم عدد اللوحات التي تحمل ٣ حروف متطابقة وثلاث أرقام ليست جميعها متطابقة

الحروف متطابقة

28	28	28
----	----	----

∴ عدد الحروف = 28

عدد الأرقام		
10	10	10

عدد الأرقام = 1000

عدد الأرقام المتطابقة = 10

عدد اللوحات المتطابقة = $10 \times 28 = 280$

عدد اللوحات = $1000 \times 28 = 28000$ جميعها

$$\begin{array}{r} 28000 \\ - 280 \\ \hline 27720 \end{array}$$

٩. عدد الأحرف = ٢٨

عدد الأرقام = ٩٩٠
التي هي المتطابقة

$$27720 = 990 \times 28 = (1000 - 10) \times 28$$

٧ (بكم طريقة يُمكن تكوين العدد: ٥٥٥٢٢٢٣٣٤ من الأرقام: ٥, ٢, ٣, ٢, ٥, ٢, ٣, ٤, ٥

$$\begin{array}{r} \text{عدد الطرق} = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2! \times 2! \times 1!} = \frac{9!}{3! \times 2! \times 2! \times 2!} = \frac{9!}{6 \times 8} = 720 \end{array}$$

حاصل ضرب مرات تكرار كل منهم
مثال: ٢! = ٢ × ١ = ٢

٨ (بكم طريقة يُمكن جلوس ستة أشخاص في صف واحد؟

$$6! = 720$$

٩ (بكم طريقة يُمكن أن يجلس سبعة أشخاص في صف إذا أصر اثنان منهم على الجلوس متجاورين؟

$$\begin{array}{l} \text{عدد جلوس الباقي في صف} \rightarrow 5! \times 2! \\ \text{عدد طرق التمازج} \end{array}$$

١٠ (بكم طريقة يُمكن اصطافاف ثمانية سيارات في موقف دائري؟

$$\begin{array}{l} \text{نقطة ثابت بدون مرجعية} \\ (n-1)! \\ = 7! \end{array}$$

بسم الله الرحمن الرحيم

تمارين خفيفة على مبدأ العد والتباديل والتوافيق

١- أرد شخص أن يضع رقم سري مكون من أربع خانات لجواله. كم عدد الطرق الممكنة إذا:

- لا توجد شروط على الرقم السري

$$\text{عدد الطرق} = 10^4 = 10000$$

- اشترط أن الخانة الأربعة لا تحتوي صفرا؟

١	٢	٣	٤
٩	٩	٩	٩

$$\text{عدد الطرق} = 9 \times 10 \times 10 \times 10$$

$$= 9000$$

- أرد أن الأرقام مختلفة؟

١	٢	٣	٤
١٠	٩	٨	٧

$$\text{عدد الطرق} = 10 \times 9 \times 8 \times 7$$

$$= 5040$$

٢- ما عدد الأعداد الفردية المكونة من منزلتين والتي يمكن تكوينها من المجموعة:

{2.1.4.9.3.5} إذا :

- سُمح بالتكرار؟

الأعداد الفردية = 4

١	٣
٥	٧

$$\text{عدد الأعداد} = 4 \times 4$$

$$= 16$$

- لم يُسمح بالتكرار؟

١	٣
٥	٧

$$\text{عدد الطرق} = 5 \times 4$$

$$= 20$$

٣- أرد ثلاثة أشخاص الخروج من باب لا يسع إلا فردا واحدا ؛ كم طريقة يتم بها الخروج؟

$$3! = 3 \times 2 \times 1$$

$$= 6$$

٤/ بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ومساعد وأمين من بين عشرون موظفاً؟

تبادل = عدد طرق
الطريقة الأولى: عدد طرق
 ${}^{20}P_3 = \frac{20!}{(20-3)!}$
 $= \frac{20!}{17!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 6840$

الطريقة الثانية:
ثلاث أعداد متتالية
 $= 20 \times 19 \times 18$

٥/ يتم تكوين لجنة خماسية من مجموعة بها سبعة معلمون وستة طلاب؛ أوجد عدد طرق تكوين اللجنة إذا:

- كانت اللجنة يجب أن تضم ثلاث طلاب ومعلمين اثنين؟

الطلاب = $\binom{6}{3} \times \binom{7}{2}$ معلمين
 $= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{7!}{2!5!}$
 $= 20 \times 21$
 $= 420$

- كانت اللجنة تضم ثلاثة معلمون على الأقل؟

معنا ذلك: معلمون وطلاب أو ٤ معلمين وطلاب أو ٥ معلمين بدون طلاب

$\text{عدد طرق} = \binom{7}{3} \binom{6}{0} + \binom{7}{4} \binom{6}{1} + \binom{7}{5} \binom{6}{2}$

- كان رئيس اللجنة ومساعدته من المعلمين والباقي طلاب؟

$\text{عدد طرق} = {}^7P_2 \times \binom{6}{3}$
 $= 7 \times 6 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3!}$
 $= 42 \times 20$
 $= 840$

٦ صندوق يحتوي على ٥ كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء؛ بكم طريقة يمكن سحب ثلاث كرات من الصندوق إذا كان من بينها كرة واحدة سوداء على الأقل؟
متأسفاً لا مجال:

$\text{عدد طرق} = \binom{3}{1} \binom{9}{2} + \binom{3}{2} \binom{9}{1} + \binom{3}{3} \binom{9}{0}$

٤/ بكم طريقة يمكن تكوين لجنة ثلاثية مكونة من رئيس ومساعد وأمين من بين عشرون موظفاً؟

تبادل = عدد طرق
الطريقة الأولى: عدد الطرق = ${}^{20}P_3 = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!} = 20 \times 19 \times 18 = 7440$

الطريقة الثانية:
ثلاث أعداد مختلفة
 $= 20 \times 19 \times 18$

٥/ يتم تكوين لجنة خماسية من مجموعة بها سبعة معلمون وستة طلاب؛ أوجد عدد طرق تكوين اللجنة إذا:

- كانت اللجنة يجب أن تضم ثلاث طلاب ومعلمين اثنين؟
الطلاب = $\left(\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right) \times \left(\begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right)$
 $= \frac{6!}{3!3!} \times \frac{7!}{2!5!}$
 $= 20 \times 21$
 $= 420$

- كانت اللجنة تضم ثلاثة معلمون على الأقل؟
معنا ذلك: معلمون وطلاب أو ٤ معلمين وطلاب أو ٥ معلمين بدون طلاب
عدد الطرق = $\left(\begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 6 \\ 0 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 6 \\ 1 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 7 \\ 5 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 6 \\ 2 \end{matrix} \right)$

- كان رئيس اللجنة ومساعدته من المعلمين والباقي طلاب؟
عدد الطرق = ${}^7P_2 \times \left(\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right)$
 $= 7 \times 6 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3!}$
 $= 42 \times 20$
 $= 840$

٦/ صندوق يحتوي على ٥ كرات بيضاء و ثلاث كرات سوداء وأربع كرات حمراء؛ بكم طريقة يمكن سحب ثلاث كرات من الصندوق إذا كان من بينها كرة واحدة سوداء على الأقل؟
من أساس الاحتمال:

عدد الطرق = $\left(\begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 9 \\ 2 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 9 \\ 1 \end{matrix} \right) + \left(\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right) \left(\begin{matrix} 9 \\ 0 \end{matrix} \right)$

الحل ٧

في حالة التكرار
مضروب ٧ أربع
مرات

(I) في حالة إمكانية التكرار :

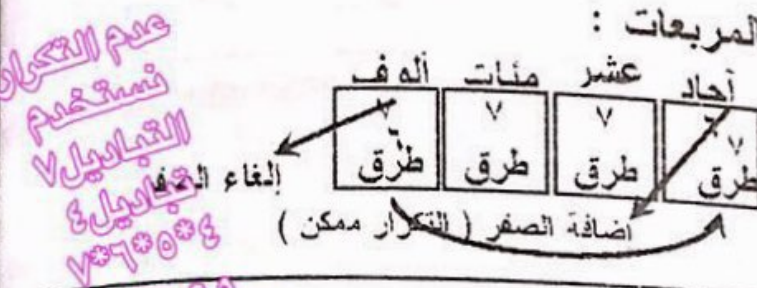
∴ عدد أرقام المجموعة ٧ (سبعة) أرقام :
المرحلة الأولى: يتم فيها ملئ خانة الألف بطرق عددها = ٦ طرق
(أحد الأرقام ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١)

المرحلة الثانية: ننتقل إلى شغل أي خانة مع إضافة الصفر
∴ يمكن ملئ خانة الآحاد بطرق عددها = ٧ طرق = عدد طرق

بقية الخانات (بأحد الأرقام ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠ التكرار ممكن)

يمكن ملئ خانة العشرات والمئات بطرق عددها = ٧ طرق
∴ عدد الطرق = عدد الأعداد = $7 \times 7 \times 7 \times 6 = 2058$

• نوضح ذلك بالمربعات :



مع حذف
الصفر تصبح
٧٦٥٤٣٢١

(II) في حالة إمكانية عدم التكرار :

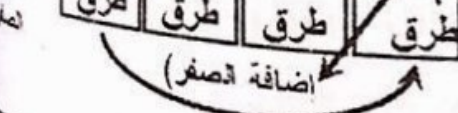
الخطوة الأولى : نملئ خانة الألف بطرق عددها = ٦ طرق
(يتم إلغاء الصفر منها لأنه ليس له معنى)

الخطوة الثانية : نملئ خانة الآحاد بطرق عددها = ٦ طرق
(يتم ببقيّة الأرقام مع إضافة الصفر لأن التكرار غير ممكن)

الخطوة الثالثة : نملئ خانة العشرات بطرق عددها = ٥ طرق
(يتم باستبعاد الرقم الذي تم اختياره كرقم للآحاد والألف ونشغل خانة العشرات ببقيّة الأرقام)

الخطوة الرابعة : نملئ خانة المئات بطرق عددها = ٤ طرق
(تتم باستبعاد الرقم الذي يتم اختياره كرقم للآحاد والألف والعشرات ونشغل خانة المئات ببقيّة الأرقام)

∴ عدد الأعداد
(عدد الطرق) = $6 \times 5 \times 4 \times 6 = 720$



طريقة ٧٢٠ =

[٣] كم عدد مؤلفاً من أربعة أرقام يمكن تكوينه من مجموعة الأرقام {٠، ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} في كل من الحالتين :
(I) التكرار ممكن (II) التكرار غير ممكن

ملاحظة هامة

في حالة وجود الصفر في مجموعة الأرقام لإيجاد عدد الأعداد فإن أول مرحلة نقوم بها هي أن نبدأ بملئ (شغل) الخانة الأخيرة مع إلغاء الصفر منها ثم نتنقل إلى ملئ (شغل) بقية الخانات مع إضافة الصفر .

الحل ٥

(I) في حالة إمكانية التكرار :

∴ عدد أرقام المجموعة ٧ (سبعة) أرقام :

∴ المرحلة الأولى : يتم فيها ملئ خانة الألف بطرق عددها = ٦ طرق
(أحد الأرقام ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١ مع إلغاء الصفر)

• المرحلة الثانية : ننتقل إلى شغل أي خانة مع إضافة الصفر

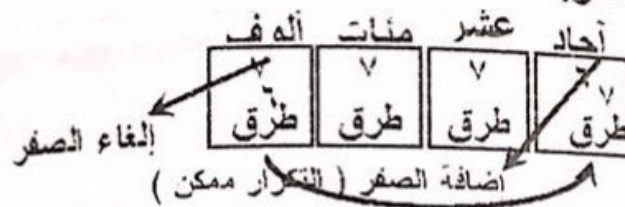
∴ يمكن ملئ خانة الآحاد بطرق عددها = ٧ طرق = عدد طرق

بقية الخانات (بأحد الأرقام ٦، ٥، ٤، ٣، ٢، ١، ٠ التكرار ممكن)

، يمكن ملئ خانة العشرات والمئات بطرق عددها = ٧ طرق

∴ عدد الطرق = عدد الأعداد = $6 \times 7 \times 7 \times 7 = 2058$

• نوضح ذلك بالمربعات :



(II) في حالة إمكانية عدم التكرار :

• الخطوة الأولى : نملئ خانة الألف بطرق عددها = ٦ طرق

(يتم إلغاء الصفر منها لأنه ليس له معنى)

• الخطوة الثانية : نملئ خانة الآحاد بطرق عددها = ٦ طرق

(يتم ببقيّة الأرقام مع إضافة الصفر لأن التكرار غير ممكن)

• الخطوة الثالثة : نملئ خانة العشرات بطرق عددها = ٥ طرق

(يتم باستبعاد الرقم الذي تم اختياره كرقم للآحاد والألف ونشغل خانة

العشرات ببقيّة الأرقام)

• الخطوة الرابعة : نملئ خانة المئات بطرق عددها = ٤ طرق

(تتم باستبعاد الرقم الذي يتم اختياره كرقم للآحاد والألف والعشرات

ونشغل خانة المئات ببقيّة الأرقام)

عدد الأعداد



$$6 \times 5 \times 4 \times 6 = \text{عدد الطرق}$$

$$720 = \text{طريقة}$$

(1) استعمال التباديل في حساب الإحتمال

تباديل دائرية

لها نقطة مرجعية

$$n!$$

بدون نقطة مرجعية

$$(n-1)!$$

التباديل مع التكرار

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!}$$

تباديل خطية

تباديل n من العناصر مأخوذ منها r من العناصر

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

تباديل n من العناصر

$$n!$$

(2) استعمال التوافيق في حساب الإحتمال

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)! r!}$$

2
بكم طريقة يمكن تكوين عدد من ثلاث خانان عشري
نتميز الى المجسنة {0, 2, 3, 5, 7, 9}
بحيث يقبل لقسمة 5 ؟

60 ١٤

72 ١٩

30 ١٤

36 ١٤

ملاحظات

① بالبنية لسؤال عدد الاحداد المكونة من ٢ مكانة
عكسية بصراحتك لم انتبه لكلمة تكرية وبالتالي

نكتبه هكذا: $\boxed{0} \cdot \boxed{} \boxed{} \boxed{}$

٢ طريقة ٦ طرق ٦ طرق = $6 \times 6 \times 6 = 216$
طريقة

* لو كانه لسؤال ^{لبنية} التكرار = $6 \times 5 \times 4 = 120$ طريقة

② بالبنية لسؤال لاهتملاده الإيجابية = $\frac{1}{2}$ وهو

تعتمد على مزاغ الفيت

* لو قلنا توجد سيجانه A, B إما انه يكونا مع A

أو معًا مع B وبالتالي امكان = $\left(\frac{1}{2}\right)$

Sultan

* * * أمونكته جدول مزاغ الفيت قائمنا لي

$\{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$

$$= \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)$$



سلسلة التبسيط

رؤية مبتكرة ... لفهم أسهل

للاستفسار: 920000882

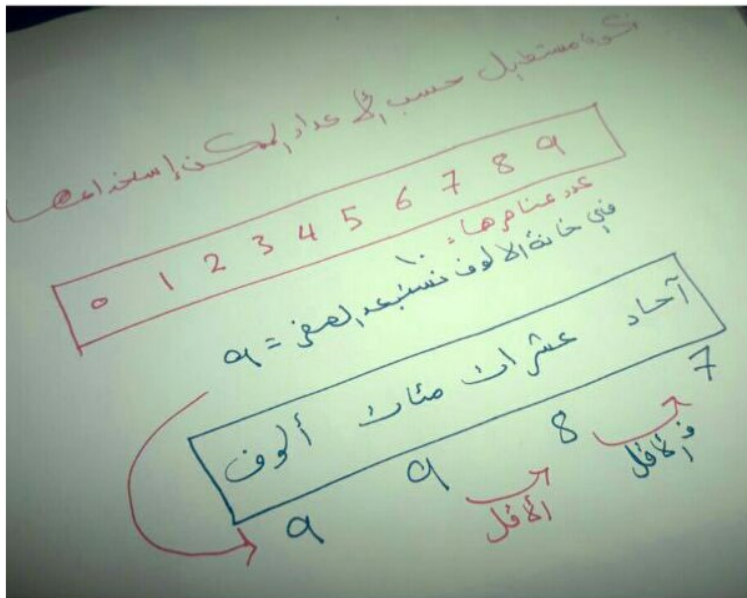
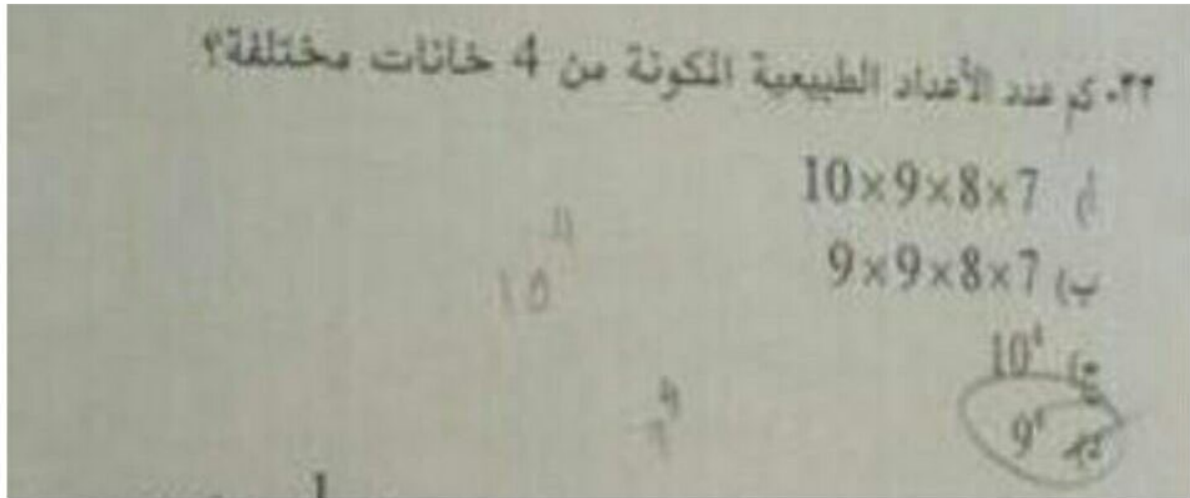
٣٣ اجتمع ٦ أشخاص اذا صافح كل شخص الآخر مرة واحدة فكم عدد المصافحات التي تمت

اجتمع ٦ أشخاص اذا صافح كل شخص الآخر مرة واحدة فكم عدد المصافحات التي تمت؟

$$n = 6$$
$$r = 2 \text{ المصافحة بين شخصين}$$

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = \frac{30}{2} = \underline{15}$$

Photo
Grid



اربع خانوات مختلفة. بدون تكرار تبديل
10 تبديل 4

$$10 * 9 * 8 * 7$$

لكن مستحيل الصفر في الالف
نحذف الصفر في الالف. تصبح 9 ارقام في
الالف

$$9 * 9 * 8 * 7$$

11:02

Photo
Grid

① في معمل الكيمياء اختيارت عينات رتبة عشوائية على مفرد دائري
كم عدد ~~الطرق~~ فكم طريقة يمكن ترتيب العينات بشكل دائري ؟
 $(n-1)!$

$$n=6$$

$$\text{عدد الطرق} = \cancel{(6-1)!} (n-1)!$$

$$(6-1)! = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

② نستعمل الأرقام 1-7 دون تكرار لعمل بطاقات للطلاب مكونة من 4 منازل

الترتيب مهم

7	6	5	4
---	---	---	---

$$\text{عدد البطاقات} = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$$

③ سيكون عدد من الأرقام 2 و 7 و 6 و 5 لها عدد طرق ~~تكون~~ الأرقام =
نلاحظ أن 2 مكرر 3 مرات
7 مكرر مرتين

$$n=7$$

$$r_1=3 \text{ بالسنة } 2$$

$$r_2=2 \text{ بالسنة } 7$$

$$\text{عدد الأرقام} = \frac{7!}{2! 3!} = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 2} = \frac{840}{12} = 70$$

④ يستطيع محمد أن يدعو حديقين له على القاء اذا كان لديه أربع اصدقاء
فما عدد طرق اختيار الأصدقاء ؟

نستخدم التوافيق لأن اختيار

$$n=4$$

$$r=2$$

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2} = 12$$

أريد مدرب كرة قدم اختيار 3 لاعبين من 10 لاعبين هم أعضاء الفريق
فما عدد طرق اختيار اللاعبين ؟

$$\binom{10}{3} = \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = \frac{720}{6} = 120$$

التباديل nPr :

- 1) ترشيح لمناصب محددة (سكرتير، رئيس، نائب، .. إلخ) .
- 2) توزيع أشخاص على عدد معين من الـ (كراسي، حجرات، .. إلخ) ,, وفي حالة أن عدد الأشخاص مساوي لعدد العينات نستخدم المضروب (!).

- العبارات المستخدمة:

(على التوالي (الترتيب) \ واحد وراء الآخر \ عشوائيا واحد وراء الآخر) + دون إحلال (دون إرجاع) = تباديل

التوافيق nCr :

- 1) تشكيل لجنة أو وفد أو فريق (جميع أعضائها متساوون)

2) توزيع هدايا أو ألعاب على أطفال

3) حل أسأله في اختبار

- العبارات المستخدمة:

(لم يهتم بالترتيب \ معا \ عشوائيا) + دون إحلال (دون إرجاع) = توافيق

١٤

$$\sim = X \text{ إذا } \left(\begin{matrix} 2n \\ 2 \end{matrix} \right) = 2 \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right) + X$$

١ (d) n (c) n^2 (b) n^3 (a)

$$\textcircled{a} \left(\begin{matrix} 2n \\ 2 \end{matrix} \right) = \frac{(2n)!}{2! (2n-2)!} = \frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2 \cdot (2n-2)!} = n(2n-1)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} 2n \\ 2 \end{matrix} \right) = 2n^2 - n.$$

$$\textcircled{b} 2 \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right) = 2 \cdot \frac{n!}{2! (n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = n(n-1) = n^2 - n$$

$$\therefore \left(\begin{matrix} 2n \\ 2 \end{matrix} \right) = 2 \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right) + X \Rightarrow 2n^2 - n = n^2 - n + X$$

$$\Rightarrow X = n^2$$

(b) هي

$$\left(\begin{matrix} 2n \\ 2 \end{matrix} \right) = 2 \left(\begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right) + X \text{ ؟ إذا } X$$

قانون
لـ (m choose r) = $\frac{m!}{r! \cdot (m-r)!}$

$$n! = n(n-1)(n-2) \dots 3 \times 2 \times 1$$

$$\frac{(2n)!}{2! \cdot (2n-2)!} = 2 \cdot \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} + X$$

$$\frac{2n(2n-1)(2n-2)!}{2! \cdot (2n-2)!} = 2 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} + X$$

$$\Rightarrow n(2n-1) = n(n-1) + X$$

$$\Rightarrow 2n^2 - n = n^2 - n + X$$

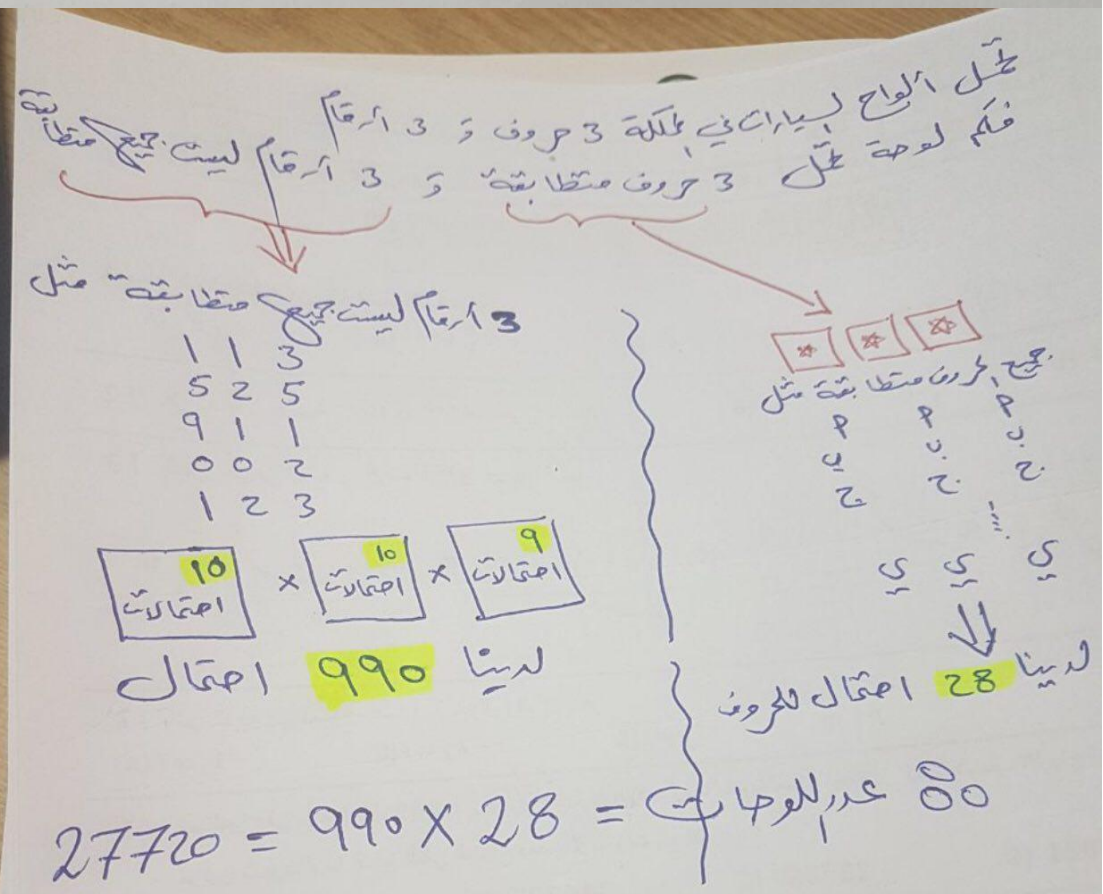
$$\Rightarrow 2n^2 - n^2 - n + n = X$$

$$\Rightarrow \boxed{n^2 = X}$$

تكوينه من الأرقام $\{1,2,3,4,5\}$ إذا كان التكرار غير مسموح؟

32 (ب)

60 (2)



نقاش

اليوم 25

(11) مسلمات الاحتمال ومفاهيمه :

الاحتمال المشروط :

إذا كانت A, B حادثتين غير مستقلتين فإن احتمال المشروط لوقوع الحادثة B إذا علم أن الحادثة A قد وقعت يعرف بالقانون :

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$$

مثال : عقد معلم حصة مراجعة اختيارية لطلابه لتحسين درجتهم في الاختبار وكانت النتيجة كما بالجدول المقابل ، فإذا اختير طالب عشوائي ، فما احتمال أن يكون قد تحسن علماً بأنه حضر المراجعة ؟

لم يتحسن	تحسن	
3	12	حضر المراجعة
6	4	لم يحضر المراجعة

نفرض أن A هي حادثة من حضروا المراجعة عدد عناصر يساوي 15 ونفرض أن B حادثة من تحسنت درجتهم $B \cap A$ حادثة من حضر المراجعة وتحسنت درجتهم ، عدد عناصر $(B \cap A)$ يساوي 12

$$\therefore p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{(B \cap A) \text{ عدد عناصر}}{(A) \text{ عدد عناصر}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

- ❖ إذا كانت $p(A)$ ترمز لاحتمال وقوع الحدث A فإن $0 \leq p(A) \leq 1$
- ❖ احتمال وقوع الحادثة المستحيلة يساوي 0 اما احتمال وقوع الحادثة المؤكدة يساوي 1 .
- ❖ الحادثة البسيطة هي الحادثة التي تحتوي على عنصر واحد فقط .
- ❖ إذا كان عدد عناصر الحدث A تساوي n وعدد عناصر فضاء التجربة يساوي N

$$p(A) = \frac{n}{N} = \frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}}$$

• احتمال الحوادث المستقلة :

التعبير اللفظي : نجد احتمال حادثتين مستقلتين يضرب احتمال الحادثة الأولى في احتمال الحادثة الثانية .
الرموز : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$

• احتمال الحوادث الغير مستقلة :

التعبير اللفظي : إذا كانت الحادثتان A و B غير مستقلتين فإن احتمال حدوثهما معاً هو حاصل ضرب احتمال الحادثة A في احتمال الحادثة B بعد حصول الحادثة A
الرموز : $p(A \cap B) = p(A) \times p\left(\frac{B}{A}\right)$

• الحوادث المتنافية :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

• الحوادث الغير متنافية :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

• الحوادث المكملة :

احتمال الحدث المكمل : إذا كان $p(A)$ احتمال وقوع الحدث A فإن .

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)$$

مثال : إذا كان احتمال سقوط 70% فأوجد احتمال عدم سقوطه ؟

A هو حدث سقوط المطر

\bar{A} هو حدث عدم سقوط المطر

$$P(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 70\% = 30\%$$

احتمال قطعة نفود

خطوات الحل:-

أولاً:- فراغ العينة = عدد الرميات

عدد الرميات n
عدد مرات ظهور صورة
أو عدد مرات ظهور كتابة

$$S = 2^n$$

ثانياً:- عدد مرات ظهور صورة = $\binom{n}{r}$

ثالثاً:- الاحتمال = $\frac{\text{عدد مرات ظهور الصورة}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{\text{ثانياً}}{\text{أولاً}}$

ملاحظة:- إذا تساوت n و r فيكون عدد الحوادث $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ مثلاً $1 \cdot \binom{6}{6} = \binom{6}{0}$

فيكون الاحتمال = $\frac{1}{\text{فراغ العينة}}$

السؤال:- رميت قطعة نفود مرتين فما احتمال ظهور صورتين $\frac{1}{4}$
• رميت قطعة نفود 4 مرات فما احتمال ظهور الصورة في الرميات الأربع $\frac{1}{16}$
• فما احتمال ظهور الصورة في كل مرة
• رميت قطعة نفود 6 مرات فما احتمال ظهور صورة في كل مرة $\frac{1}{64}$
• رميت قطعة نفود مرة واحدة فما احتمال ظهور صورة $\frac{1}{2}$
• رميت قطعة نفود ثلاث مرات فما احتمال ظهور صورة $\frac{1}{8}$

ملاحظة:- رميت قطعة نفود 3 مرات فما احتمال ظهور صورة واحدة

□ فراغ العينة = $2^3 = 2^3 = 8$ ، $r=1$
□ عدد مرات ظهور صورة واحدة = $\binom{n}{r} = \binom{3}{1} = 3$
□ الاحتمال = $\frac{3}{8}$

ملاحظة:- رميت قطعة نفود 7 مرات فما احتمال ظهور صورتين

□ فراغ العينة = $2^7 = 128$
□ عدد الحوادث = $\binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$
□ ثالثاً:- الاحتمال = $\frac{21}{128}$

رميت قطعة نفود 8 مرات فما احتمال ظهور صورتين

□ فراغ العينة = $2^8 = 256$
□ عدد الحوادث = $\binom{8}{2} = \frac{8 \times 7}{2} = 28$
□ الاحتمال = $\frac{28}{256} = \frac{7}{64}$

إذا رميت قطعة نقود مرتين فما احتمال ظهور -
 فراغ العينة = { (ص ص) ، (ص ك) ، (ك ص) ، (ك ك) } ^{صورتين} ، ^{صورة واحدة} ، ^{ولا صورة}

① احتمال ظهور صورتين = $\frac{(ص ص)}{4} = \frac{1}{4}$

② احتمال ظهور صورة واحدة = $\frac{(ص ك) (ك ص)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

③ احتمال عدم ظهور صورة ظهور كتابة فقط = $\frac{(ك ك)}{4} = \frac{1}{4}$



④ احتمال ظهور صورة على الأقل: نبدأ من صورة وأكثر
 احتمال صورة + احتمال صورتين

طريقة ٢ | $\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} =$ - عدم احتمال صورة = $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

⑤ احتمال ظهور صورة على الأكثر: نبدأ من صورة وأقل

احتمال ظهور صورة + احتمال عدم ظهور صورة = $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

إذا رميت قطعة نقود ثلاث مرات فما احتمال ظهور -

① فراغ العينة = { (ص ص ص) ، (ص ص ك) ، (ص ك ص) ، (ك ص ص) ، (ك ص ك) ، (ك ك ص) ، (ك ك ك) } ^{٣ صور} ، ^{صورة واحدة} ، ^{ولا صورة}

① احتمال ظهور ٣ صور = $\frac{(ص ص ص)}{8} = \frac{1}{8}$

② احتمال ظهور صورة واحدة = $\frac{(ص ك ك) (ك ص ك) (ك ك ص)}{8} = \frac{3}{8}$

③ احتمال ظهور صورتين = $\frac{(ص ص ك) (ص ك ص) (ك ص ص)}{8} = \frac{3}{8}$

④ احتمال عدم ظهور صورة ظهور كتابة فقط = $\frac{(ك ك ك)}{8} = \frac{1}{8}$

⑤ احتمال ظهور صورة على الأقل: نبدأ من صورة وأكثر

احتمال صورة + احتمال صورتين + احتمال ثلاث صور

- عدم ظهور صورة = $1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

⑥ احتمال ظهور صورة على الأكثر

احتمال ظهور صورة + احتمال عدم ظهور صورة = $\frac{1}{8} + \frac{7}{8} = \frac{8}{8} = 1$

احتمال سحب كرة واحدة أو كرتان من الصندوق

سحب كرتان

- على التوالي بدون إرجاع
أو سحب كرتان معا
عند الكسح من الفزانغ العينة
تنقص في السعة لثانية
- على التوالي مع الإرجاع
فزانغ العينة لا تنقص
في السعة لثانية

سحب كرة واحدة

نستخدم قانون الاحتمال لحروف
الاحتمال = عدد الكرات المطلوبة
مجموع الكرات

صندوق يحتوي على 5 كرات خضراء و 3 كرات بيضاء و 6 كرات صفراء اذا سحبنا كرة عشوائياً فما احتمال أن تكون :-

- ① خضراء :-
 - ② بيضاء :-
 - ③ خضراء أو بيضاء :-
 - ④ غير صفراء :-
- $$1] P(\text{خضراء}) = \frac{\text{عدد كرات الخضراء}}{\text{مجموع الكرات}} = \frac{5}{14}$$
- $$2] P(\text{بيضاء}) = \frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{مجموع الكرات}} = \frac{3}{14}$$
- $$3] P(\text{خضراء أو بيضاء}) = P(\text{خضراء}) + P(\text{بيضاء}) = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} = \frac{8}{14}$$
- $$4] P(\text{غير صفراء}) = 1 - P(\text{صفراء}) = 1 - \frac{6}{14} = \frac{14-6}{14} = \frac{8}{14}$$

ثانياً سحب كرتان مع الإرجاع

صندوق يحتوي على كرتين خضراوتين و 3 كرات بيضاء اذا سحبنا عشوائياً كرتان مع الإرجاع ما احتمال أن تكون :-

- ① بيضاء :-
 - ② خضراء :-
 - ③ بيضاء أو خضراء :-
 - ④ الكرة الأولى بيضاء والثانية خضراء :-
- $$P(\text{بيضاء}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$
- $$P(\text{خضراء}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$
- $$P(\text{بيضاء أو خضراء}) = P(\text{بيضاء}) + P(\text{خضراء}) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{25} + \frac{4}{25} = \frac{13}{25}$$
- $$P(\text{الكرة الأولى بيضاء والثانية خضراء}) = P(B) \times P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

الاحتمال

احتمال الحوادث

(مستقل - غير مستقل)

• يكون في السؤال حرف (و)
أو ما يدل عليه

غير مستقل
• تضرب

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$$

• في الحدث الثاني ينقص
السبب أو المقام أو كليهما

• الكلمات الدلالية :
" على التوالي - معاً -
بدونه ارجاع - واحدة تلو
الأخرى - أو ما سيبدل
على عدم الرجوع)

أصله
↓

مستقل
• تضرب

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

• لا ينقص السبب
والمقام

• الكلمات الدلالية
" مع الرجوع " -
أو ما سيبدل على
الرجوع

أصله
↓

أصله
↓

أصله
↓

مستقل

① احتمال أن يرمى محمد الكرة ويصيب الهدف هو $\frac{1}{3}$ ما
و احتمال أن يرمى أحمد الكرة ويصيب الهدف هو $\frac{1}{4}$ ، فما
احتمال أن يصيب الهدف كليهما معا ؟

② صندوق يحتوي كرتين خضراويتين و 3 كرات بيضاء اذا سحبت عشوائياً كرتان على التوالي مع الارجاع فما احتمال أن تكون كلتا الكرتين بيضاوين ؟

غير مستقل

① في إحدى المدارس الابتدائية يوجد في ملعب 7 طلاب من الصف الثالث و في هذا الصف الرابع و 4 من الصف الخامس و 6 من الصف السادس ، يتم اختيار طالبين لتنظيم لطلاب فما احتمال أنه الطالب الأول من الصف السادس و الطالب الثاني من الصف الثالث ؟

نستدل

« اختيار به و به ارجاع »

② صندوق يحتوي 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء ، اذا سحبت كرتان عشوائياً ما احتمال أن تكون احدهما بيضاء و الاخرى حمراء ؟

نستدل « سحب كرتين عشوائياً به و به ارجاع »

(حدث بسيط - حدث مركب)

الحوادث المركبة

متنافي (متنافي - غير متنافي)
• تكون في $A \cap B$ حرف (أو) أو ما يدل عليه

غير متنافي

• تكون هناك نواتج
مشتركة

(أي هذا المحرك أن تقع
الحادثتين بنفس الوقت)

متنافي

• إذا لم يكن هناك نواتج
مشتركة

(أي لا يمكن أن تقع
الحادثتين بنفس الوقت)

• مجموع

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

أمثلة
↓

أمثلة
↓

أحتمله
طا

أحتمله
ط

متناهي

① إذا رمي مكعب مرقم
من 1 إلى 6 مرة واحدة،
فإنه احتمال ظهور
عدد فردي أو العدد 6
في وجه المكعب هو ؟

* نَسْتَدِل :
ليس هناك نواتج مشتركة
بين 6 والعدد الفردي .

② عند رمي حجر نرد مرة واحدة،
احتمال ظهور عدد زوجي أو
عدد فردي ؟
« ليس بينها عناصر مشتركة »

غير متناهي

① احتمال إصابة هدف لنوع من
الصواريخ تساوي 0,8 ،
و تم إطلاق صاروخين على
هدف معين ، يفر من أنه
إصابة الصاروخ الأول
مستقلة عن إصابة الصاروخ
الثاني . فما احتمال
أنه يهدف عد أصيب ؟

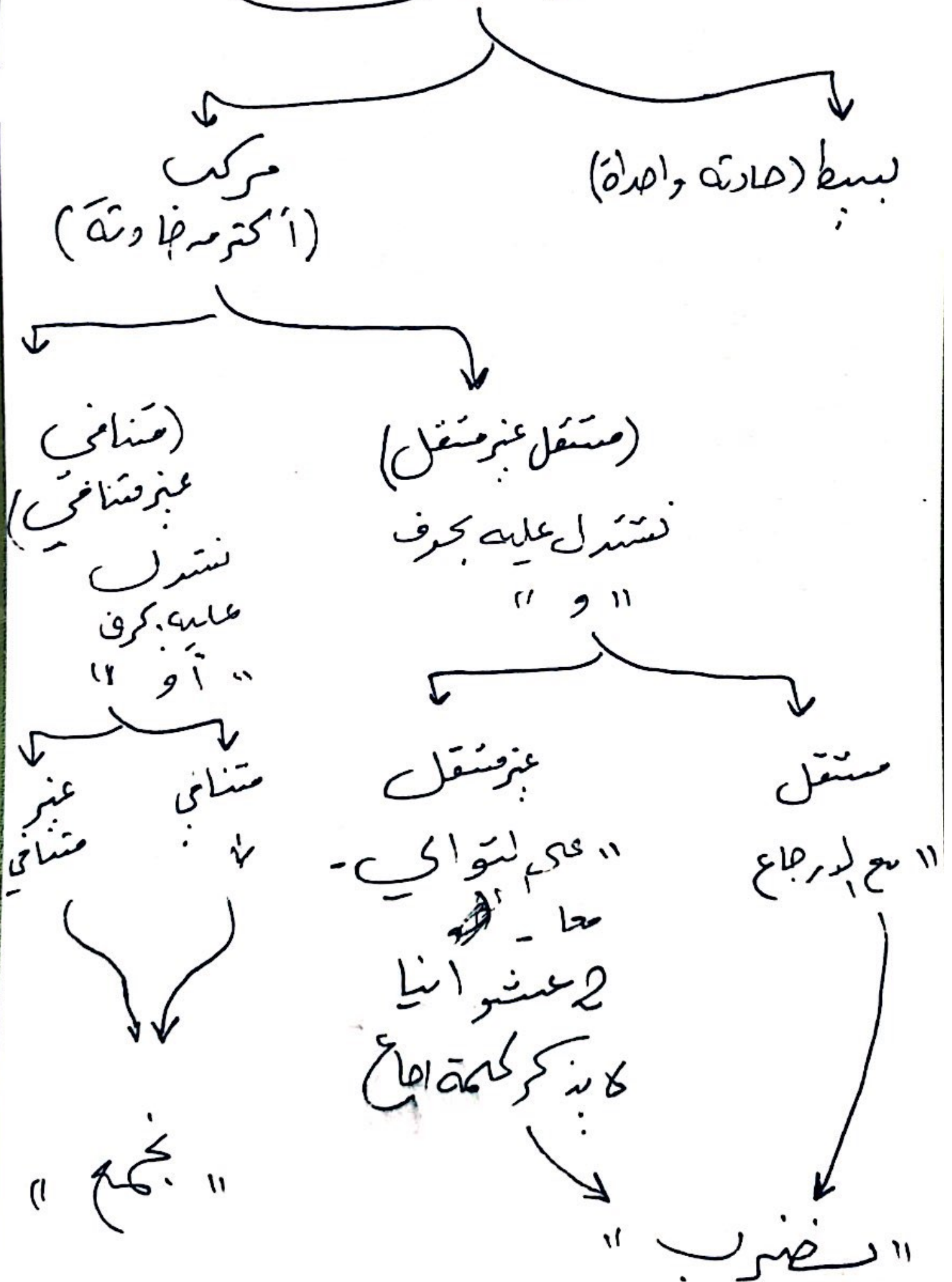
نَسْتَدِل : السؤل
أنه يهدف أصيب عن الصاروخ
الأول أو الثاني

هذا غير متناهي لأنه بينهم
حدث ناتج مشترك .

② عند رمي حجر نرد مرة واحدة
احتمال ظهور عدد زوجي أو
عدد أصغر من 3 ..

« 2 عدد زوجي وأصغر من 3
: غير متناهي بينهم عنصر مشترك »

الاصوات



الدِّهَالَات

- (أ) السَّجْعُ مَعَ التَّرْتِيبِ: هَرَاهُ لَعِيْنَةُ تَحِبُّ عَلَى الْكِتَابِ (لِوَادَةٍ تَكُونُ مُفْرَقًا)
- (ب) السَّجْعُ دُونَ تَرْتِيبٍ: هَرَاهُ لَعِيْنَةُ تَحِبُّ حَرْفَ وَاحِدَةٍ (مَعًا) (ذَنْفُ وَاحِدَةٍ)

* مِلَاقَطَةُ هَامَةٍ جَدًّا:

إِذَا كَانَ اخْتِيَارُ (سَجْعٍ) لَعِيْنَتِكَ غَيْرَ مُعَيَّنٍ فَرَمِهِ (مَعَ الْإِلْمَادَةِ أَوْ دُونَ الْإِلْمَادَةِ) وَلَمْ تَرُدَّ عِيَارَةَ لَفْظٍ عَلَى الْمَدَالِي (بِالْمَقَارِبِ أَوْ لِوَادَةٍ تَكُونُ الْفَرْقِ) خَانَنَا ذَمُّ صُلَاحٍ عَلَى أَنْ نَحْنُ اخْتِيَارُ (سَجْعٍ) دُونَ الْإِلْمَادَةِ وَدُونَ تَرْتِيبٍ.

(أ) السَّجْعُ مَعَ الْإِلْمَادَةِ		(ب) السَّجْعُ دُونَ الْإِلْمَادَةِ
مَعَ التَّرْتِيبِ		مَعَ التَّرْتِيبِ
نُتَقَدُّ مَبْدَأُ الْعَدِّ		نُتَقَدُّ مَبْدَأُ الْعَدِّ
n	n	n
$c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$	$p_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	$c_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$
تَقَارُفٌ	تَقَارُفٌ	تَقَارُفٌ

▼ الحوادث المستقلة وقوع الحادثة الاولى لا يؤثر ع
وقوع الحادثة الثانية
زي مثال صندوق الكور وتأخذي كوره وترجعها اذا
مع الارجاع

▼ الحوادث الغير مستقلة عكسها وقوع الحادثة
الاولى يؤثر ع وقوع الحادثة الثانية
زي مثال صندوق الكور تأخذي منه كورة بدون
ارجاع

بالحالتين هنا نستخدم الضرب

السؤال

1. في إحدى المدارس الابتدائية يوجد في الملعب 7 طلاب من الصف الثالث و 3 من الصف الرابع و 4 من الصف الخامس و 6 من الصف السادس تم اختيار طابئين لمساعدة المدرس في تنظيم الطلاب ، فما احتمال ان يكون الطالب الأول من الصف السادس والطالب الثاني من الصف الثالث

(أ) 1/10

(ب) 1/20

(ج) 42/380

(د) 42/400

...

● بالسؤال طالب ما احتمال ان يكون الطالب الاول من الصف السادس (و) الطالب الثاني من الصف الثالث

هنا اداة الربط (و) يعني نضرب

وتعتبر حوادث غير مستقلة لان وقوع الحادثة الاولى يؤثر بالثانية اذا اخذت طالب بينقص من عدد الطلاب

:

● الطلاب مدموجين مع بعض غير مستقلان

لأننا جمعنا الصفوف كلها
إذا اخترنا الطالب الاول. ثم نختار الطالب الثاني بدون رجوع الطالب الاول للمجموعه
السحبة الثانية فراغ العينه 19

4:00 م

$$6 \div 20 \times 7 \div 19 = 380$$

① نجمع عدد الطلاب

$$7 + 3 + 4 + 6 = 20$$

اكدته غير مستقلة لان فيها حرف

"و" واخذ طابئين دونه

الجامع

② احتمال انه يكره الطلاب

من الصف الاول

$$\frac{7}{20}$$

③ احتمال انه يكره الطلاب من الصف الثاني

السادس

$$\frac{6}{19}$$

$$\frac{7}{20} \times \frac{6}{19}$$

$$= \frac{42}{380}$$

نضرب

2. إذا كان احتمال أن يرمي محمد الكرة ويصيب الهدف هو $1/3$ ، و احتمال أن يرمي أحمد الكرة ويصيب الهدف هو $1/4$ ، فما احتمال أن يصيبا الهدف كليهما معا :

(أ) $1/12$

(ب) $7/12$

(ج) $5/12$

(د) $9/12$

• لان اصابة الهدف لاحمد مستقل عن اصابة الهدف
لمحمد لا تؤثر اذا مستقلة

$$1 \div 3 \times 1 \div 4 = 1 \div 12$$

• عكس السؤال الاول
الحادثة الاولى السادسة تؤثر عن الصف
الثالث
وفراغ العينه جمعنا الفصول ومنها الثالث

• يعني الغير مستقلة تبين لي بالسؤال بدون إرجاع
ايه الغير مستقلة والغير متنافية تبين بالسؤال
اذا ورد كلمة بدون ارجاع معا (اختار اثنين
عشوائيين)

3. رميت قطعة عملة 8 مرات ، فما احتمال ظهور الصورة مرتين :

(أ) $7/32$

(ب) $7/64$

(ج) $1/8$

(د) $5/16$

3-السؤال الثالث

قطعه نقود مرة واحدة عارفين فراغ العينه. اما
كتابه صورة (شعار)

لكن اذا اكثر من قطعه نقود. وخاصة العدد كبير

نحل بالخطوات

1/فراغ العينه

2/عدد اختيار الصور

3/ الاحتمال

احتمال قطعة نفقور

خطوات الحل:-

عدد الرميات

أولاً:- فراغ العينة = r

عدد الرميات n

عدد مرات ظهور صورة

أو عدد مرات ظهور كتابة

$$S = 2^n$$

$$\binom{n}{r}$$

ثانياً:- عدد مرات ظهور صورة = $\binom{n}{r}$

$$\frac{\text{عدد مرات ظهور الصورة}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{\text{ثانياً}}{\text{أولاً}}$$

ثالثاً:- الاحتمال =

رميت قطعة عملة 8 مرات فما احتمال ظهور الصورة مرتين

$$\text{فراغ العينة} = 2^8 = 256$$

$$n = 8$$

$$r = 2 \text{ صورتين}$$

$$\text{عدد كوارث} = \binom{n}{r} = \binom{8}{2}$$

$$= \frac{8!}{2! (8-2)!} = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7 \times 6!}{2! \times 6!}$$

$$\text{عدد الحوادث} = \frac{8 \times 7}{2} = 4 \times 7 = 28$$

$$P(\text{احتمال صورتين}) = \frac{\text{عدد الحوادث}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{28}{256} = \frac{28}{2^2 \times 2^6} = \frac{7}{64}$$

Photo Grid

هي قطع نقود ٣ مرات

{ (ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك) }

(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)

(ك، ص، ص)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)

هذا ٣ مرات

$$8 = 2^3$$

كيف لو أكتب

عدد لحيات
٢

نطبق القاعدة

4. احتمال إصابة الهدف لنوع من الصواريخ تساوي 0.8 ، وتم إطلاق صواريخين على هدف معين . بفرض أن إصابة الصاروخ الأول مستقلة عن إصابة الصاروخ الثاني فما احتمال أن الهدف قد أصيب :

(أ) 0.96

(ب) 0.92

(ج) 0.84

(د) 0.8

نضرب
↑
نجمع
↓

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= 0,8 + 0,8 - (0,8 \times 0,8)$$
$$= 1,6 - (0,64)$$
$$= 0,96$$

* نلاحظ هنا أن النتيجة 0,96 هي ناتج ضرب
* نلاحظ هنا أن النتيجة 0,96 هي ناتج جمع

▲ توضيح للسؤال الرابع ▲

▼ الحوادث متنافية لا يوجد بين الحادثة الاولى والثانية عناصر مشتركة

▼ والغير المتنافية توجد بينهم عناصر مشتركة
وهنا احتمال ان يصيب الهدف A أو احتمال ان يصيب الهدف B
أو اصابة الهدف كلاهما

إذاً حوادث غير متنافية

:

بالسؤال اطلاق صاروخين مستقلان

لكن استخدم قانون الحادثة الغير المتنافية لان واحد من الصاروخين يصيب الهدف

:

كأن صيغة السؤال ما احتمال اصابة الهدف بالصاروخ الأول أو الثاني

واحنا قلنا اذا فيه (أو) أو فهمنا من السؤال يعني متنافي أو غير متنافي

احتمال حادثتين غير متنافيتين

لفظي: إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فاحتمال وقوع A أو B يساوي مجموع احتماليهما مطروحاً منه احتمال وقوع A و B معاً.

إذا كانت الحادثتان A, B غير متنافيتين فإن

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

5. صندوق يحتوي على كرتين خضراويتين و 3 كرات بيضاء إذا سحبنا عشوائياً كرتين على التوالي مع الإرجاع ، فما احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاوين ؟

- (أ) $\frac{9}{25}$
 (ب) $\frac{6}{25}$
 (ج) $\frac{2}{5}$
 (د) $\frac{3}{5}$

خاتمة السؤال « كلا الكرتين بيضاوين »

يعني بيضاء وبيضاء



(مستقلة أو غير مستقلة)

بالسؤال على التوالي مع الإرجاع

إذاً مستقلة (نضرب)

① احتمال أنه تكون الكرة الأولى بيضاء

عدد الكرات البيضاء → 3

← 5
 الكرات
 كلها

② احتمال أنه تكون الكرة الثانية بيضاء

$\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

Photo
Grid

6. مقرر له شعبتان يختار منها (احمد - سامي) شعبة عشوائياً ، ما احتمال ان يكونا في نفس الشعبة ؟

- (أ) $\frac{3}{4}$
- (ب) $\frac{1}{8}$
- (ج) $\frac{1}{2}$
- (د) $\frac{1}{4}$

$$\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{1}{2}$$

← مرة واحدة يكونان في نفس الشعبة
← عدد الشعب

② بالنسبة لسؤال الاحتمال الإجابة = $\frac{1}{2}$ وهي تعتمد على مزاغ الفيت

* لو قلنا توجد شعبتان A, B إما انه يكونا مع A أو مع B وبالتالي الاحتمال = $\left(\frac{1}{2}\right)$

Sultan

* * * * * جدول مزاغ الفيت كالتالي

$\{(A, A), (A, B), (B, A), (B, B)\}$

$$= \frac{2}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)$$

▲ توضيحات للسؤال السادس ▲

تنحل بالتقاطع الحوادث مستقلة لكن لها احتمالين
لأنو طالب انهم يكونان من نفس الشعبة وهي
شعبتين

احتمال ان يكونان من الشعبة الاولى

$$1/2 \times 1/2 = 1/4$$

وا احتمال يكونان من الشعبة الثانية

$$1/2 \times 1/2 = 1/4$$

يكونان من نفس الشعبة

$$1/4 + 1/4 = 1/2$$

7. أظهرت دراسة احصائية أن 22 طالبا من كل 30 طالب يخفقون في حل المسائل الرياضية . إذا قدمت مسألة رياضية لعدد 600 طالب فكم عدد الطلبة المتوقع أن يجيبوا اجابة صحيحة

(أ) 80

(ب) 160

(ج) 220

(د) 420

عدد الطلاب الذين اجابوا اجابة صحيحة $8 = 22 - 30$

$$\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{8}{30} \times 600 = 160$$

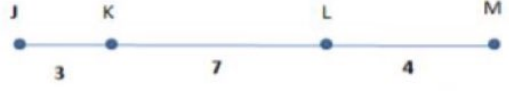
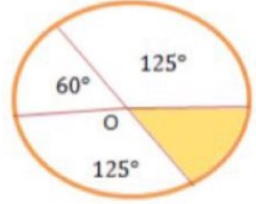
من كل 30 طالب 8 طلاب ينجحون

$$30 - 22 = 8$$
$$30 \rightarrow 8$$
$$600 \rightarrow x$$
$$\frac{30}{30} x = \frac{480}{30}$$
$$x = 160$$

Photo
Grid

السؤال	الحل
<p>1. في إحدى المدارس الابتدائية يوجد في الملعب 7 طلاب من الصف الثالث و 3 من الصف الرابع و 4 من الصف الخامس و 6 من الصف السادس تم اختيار طالبين لمساعدة المدرس في تنظيم الطلاب ، فما احتمال ان يكون الطالب الأول من الصف السادس والطالب الثاني من الصف الثالث؟</p> <p>(أ) 1/10 (ب) 1/20 (ج) 42/380 (د) 42/400</p>	<ul style="list-style-type: none"> • حوادث غير مستقلة تعني حدوث A يؤثر على حدوث B $P(A \cap B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$ <ul style="list-style-type: none"> • عدد الطلاب = 20 = 6 + 4 + 3 + 7 • احتمال الطالب الأول من الصف السادس = $\frac{6}{20}$ • احتمال الطالب الثاني من الصف الثالث = $\frac{7}{19}$ $P(A \cap B) = \frac{6}{20} \times \frac{7}{19} = \frac{42}{380}$
<p>2. إذا كان احتمال أن يرمي محمد الكرة ويصيب الهدف هو 1/3 ، و احتمال أن يرمي أحمد الكرة ويصيب الهدف هو 1/4 ، فما احتمال ان يصيبا الهدف كليهما معاً :</p> <p>(أ) 1/12 (ب) 7/12 (ج) 5/12 (د) 9/12</p>	<ul style="list-style-type: none"> • الحوادث المستقلة تعني حدوث A لا يؤثر على حدوث B $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$
<p>3. رميت قطعة عملة 8 مرات ، فما احتمال ظهور الصورة مرتين :</p> <p>(أ) 7/32 (ب) 7/64 (ج) 1/8 (د) 5/16</p>	<p>فراغ العينة = $2^8 = 256$</p> $C_2^8 = \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = \frac{56}{2} = 28$ <p>عدد الحوادث = 28</p> $\text{احتمال صورتين} = \frac{\text{عدد الحوادث}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{28}{256} = \frac{7}{64}$
<p>4. احتمال إصابة الهدف لنوع من الصواريخ تساوي 0.8 ، وتم إطلاق صاروخين على هدف معين . بفرض أن إصابة الصاروخ الأول مستقلة عن إصابة الصاروخ الثاني فما احتمال أن الهدف قد أصيب :</p> <p>(أ) 0.96 (ب) 0.92 (ج) 0.84 (د) 0.8</p>	$P(A) = 0.8 \quad , \quad P(B) = 0.8$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $= 0.8 + 0.8 - (0.8 \times 0.8)$ $= 1.6 - 0.64 = 0.96$
<p>5. صندوق يحتوي على كرتين خضراويتين و 3 كرات بيضاء إذا سحب عشوائياً كرتان على التوالي مع الإرجاع ، فما احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاوين ؟</p> <p>(أ) $\frac{9}{25}$ (ب) $\frac{6}{25}$ (ج) $\frac{2}{5}$ (د) $\frac{3}{5}$</p>	<p>فراغ العينة = $5 = 2 + 3$</p> <p>بما أن السحب مع الإرجاع إذن احتمال أن تكون كلا الكرتين بيضاوين:</p> <ul style="list-style-type: none"> • الحوادث المستقلة تعني حدوث A لا يؤثر على حدوث B $p(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

المعيار الخامس والسادس : ملف الاحتمالات

<p>مرة واحدة يكونان في نفس الشعبة</p> $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{1}{2}$ <p>عدد الشعبة</p>	<p>6. مقرر له شعبتان يختار منها (احمد - سامي) شعبة عشوائياً ، ما احتمال ان يكونا في نفس الشعبة ؟</p> <p>(أ) $\frac{3}{4}$ (ب) $\frac{1}{8}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{1}{4}$</p>
<p>عدد الطلاب الذين اجابوا اجابة صحيحة = $8 = 22 - 30$</p> $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{8}{30} \times 600 = 160$	<p>7. أظهرت دراسة احصائية أن 22 طالباً من كل 30 طالب يخفقون في حل المسائل الرياضية . إذا قُمت مسألة رياضية لعدد 600 طالب فكم عدد الطلبة المتوقع أن يجيبوا اجابة صحيحة</p> <p>(أ) 80 (ب) 160 (ج) 220 (د) 420</p>
<p>عدد النواتج الممكنة = $14 = 3 + 7 + 4$ عدد نواتج الحدث = 7</p> $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{7}{14} = \frac{1}{2}$	<p>8. إذا اختيرت النقطة X عشوائياً على \overline{JM} ، فأوجد احتمال أن تقع X على \overline{KL} .</p>  <p>(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{3}{7}$ (ج) $\frac{3}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$</p>
<p>مساحة الدائرة الصغرى = $\frac{r^2\pi}{r^2\pi} = \frac{2^2\pi}{4^2\pi} = \frac{4\pi}{16\pi} = \frac{1}{4}$ مساحة الدائرة الكبرى</p>	<p>9. اطلق شخص سهماً على هدف مكون من 3 دوائر متحدتاً المركز حيث طول نصف قطر الدائرة الأولى 2 سم ويزداد طول نصف قطر كل دائرة تالية بمقدار 1 سم فما احتمال اصابة الهدف في الدائرة الصغرى</p> <p>(أ) $\frac{1}{2}$ (ب) $\frac{1}{9}$ (ج) $\frac{1}{4}$ (د) $\frac{1}{3}$</p>
<p>• ايجاد المنطقة المظللة</p> $125 + 60 + 125 + x = 360$ $310 + x = 360$ $x = 360 - 310 = 50$ <p>• احتمال ان النقطة تكون داخل المنطقة المظللة</p> $\frac{\text{عدد نواتج الحدث}}{\text{عدد النواتج الممكنة}} = \frac{50}{360} = \frac{5}{36}$	<p>10. اذا اختيرت نقطة عشوائياً تقع داخل الدائرة فما احتمال أن تكون داخل المنطقة المظللة</p>  <p>(أ) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{5}{18}$ (ج) $\frac{5}{36}$ (د) $\frac{1}{9}$</p>

المعيار الخامس والسادس : ملف الاحتمالات

<ul style="list-style-type: none"> حوادث غير مستقلة تعني حدوث A يؤثر على حدوث B (لأنه سحب بدون أرجاع) $P(A \cap B) = P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$ <ul style="list-style-type: none"> احتمال احدهما بيضاء والاخرى حمراء تعني أن الكرة الاولى بيضاء والثانية حمراء أو الكرة الاولى حمراء والثانية بيضاء (أو) جمع , (و) ضرب $= P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right) + P(A) \times P\left(\frac{B}{A}\right)$ $= \left(\frac{3}{7} \times \frac{4}{6}\right) + \left(\frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) = \frac{2}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}$ <hr/> <ul style="list-style-type: none"> طريقة أخرى للحل: فراغ العينة = عدد طرق سحب كرتين من 7 كرات من الصندوق (لاتهتم بالترتيب) $C_2^7 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = 21$ <ul style="list-style-type: none"> A حادثة سحب كرتين واحدة بيضاء والاخرى حمراء $C_1^3 \times C_1^4 = 3 \times 4 = 12$ $\therefore P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$	<p>11. صندوق يحتوي 3 كرات بيضاء و 4 كرات حمراء إذا سحبت كرتان عشوائياً ما احتمال أن تكون احدهما بيضاء والاخرى حمراء ؟</p> <p>(أ) $\frac{3}{7}$</p> <p>(ب) $\frac{4}{7}$</p> <p>(ج) $\frac{3}{12}$</p> <p>(د) $\frac{4}{12}$</p>
<ul style="list-style-type: none"> فضاء العينة = 4 + 12 = 16 سحب علبة عصير مع عدم الارجاع = $\frac{4}{16}$ نقص من فضاء العينة علبة عصير واحدة ان عند سحب علبة حليب يكون فضاء العينة 15 سحب علبة حليب = $\frac{4}{5} = \frac{12}{15} = 0,80$ 	<p>12. صندوق مغلق يحتوي على 12 علبة حليب و 4 علب عصير . إذا سحب أحمد علبتين دون إرجاع وكانت العلبة الاولى علبة عصير فإن احتمال أن تكون العلبة الثانية علبة حليب يساوي :</p> <p>(أ) 0.80</p> <p>(ب) 0.75</p> <p>(ج) 0.70</p> <p>(د) 0.65</p>
<p>حوادث متنافية لأنه لا يوجد عناصر مشتركة بين الحادثتين</p> $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ $\frac{3}{6} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$	<p>13. إذا رمي مكعب مرقم من 1 إلى 6 مرة واحدة, فإن احتمال ظهور عدد فردي أو العدد 6 على وجه المكعب هو:</p>

ثالثاً - احتمال سحب كرتين بدون إرجاع

صندوق يحتوي على 5 كرات زرقاء و 4 كرات حمراء سحب من هاتين كرتين فما احتمال أن تكون:-
 ① زرقاء ② حمراء ③ زرقاء أو حمراء ④ أحدهما زرقاء والاخرى حمراء
 الطريقة الأولى:- الاحتمال المشروط:-

① احتمال أن تكون الكرتان زرقاء:-

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}$$

② احتمال أن تكون الكرتان حمراء:-

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(A/B) = \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{12}{72} = \frac{1}{6}$$

③ احتمال أن تكون الكرتان زرقاء أو حمراء:-

$$P(\text{زرقاء أو حمراء}) = P(\text{زرقاء}) + P(\text{حمراء}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} + \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{20}{72} + \frac{12}{72} = \frac{32}{72} = \frac{16}{36}$$

الطريقة الثانية:- الاحتمال بالتوافيق (3 خطوات):-

① احتمال أن تكون الكرتان زرقاء:-

② فراغ العينة:- عدد طرق سحب كرتين من مجموع الكرات:-

③ عدد الحوادث:- عدد طرق سحب كرتين من 5 زرقاء:-

④ الاحتمال = $\frac{\text{عدد الحوادث}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$

⑤ احتمال أن تكون الكرتان حمراء:-

② فراغ العينة = عدد طرق سحب كرتين من مجموع الكرات:-

③ عدد الحوادث:- عدد طرق سحب كرتين من 4 حمراء:-

④ الاحتمال = $\frac{\text{عدد الحوادث}}{\text{فراغ العينة}} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

⑤ احتمال أن تكون الكرتان حمراء أو زرقاء:-

$$P(\text{زرقاء أو حمراء}) = P(\text{زرقاء}) + P(\text{حمراء}) = \frac{5C_2}{9C_2} + \frac{4C_2}{9C_2} = \frac{10}{36} + \frac{6}{36} = \frac{16}{36}$$

أحدهما زرقاء والاخرى حمراء

② فراغ العينة = عدد طرق سحب كرتين من مجموع الكرات

$$9C_2 = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

ثانياً:- عدد الحوادث:- كرة زرقاء \times كرة حمراء

عدد طرق سحب كرة زرقاء = $5C_1 = 5$ عدد طرق سحب كرة حمراء = $4C_1 = 4$

ثالثاً:- الاحتمال = $\frac{4 \times 5}{9C_2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

نقاش

اليوم 26

إذا كان n عددًا طبيعيًا، فإن :

$$(a + b)^n = {}_nC_0 a^n b^0 + {}_nC_1 a^{n-1} b^1 + {}_nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots + {}_nC_n a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^n {}_nC_k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} a^{n-k} b^k$$

مفكوك ذات الحدين

ملخص المفاهيم

في مفكوك ذات الحدين $(a + b)^n$:

- عدد الحدود $n + 1$.
- أس n في الحد الأول هو n ، وكذلك أس b في الحد الأخير هو n .
- يقل أس n بمقدار واحد، ويزيد أس b بمقدار واحد في أي حدين متتاليين.
- مجموع الأسس في أي حد يساوي n دائماً.
- المعاملات في المفكوك متماثلة.

أضف إلى

مطوياتك

المحتوى الرياضي

الأنماط ونظرية ذات الحدين

لايجاد مفكوك $(n + b)$ ، فإن إشارة

كل حد في المفكوك تعتمد على إشارة

كل من n, b . فتكون إشارة الحدود

كلها موجبة إذا كانت إشارة n وإشارة b

موجبتين، وتكون إشارة الحدود الزوجية

سالبة إذا كانت إشارة b فقط سالبة.

▲ ملاحظات على أهم النقاط في نظرية
ذات الحدين ▲

- عدد الحدود دائماً $1 +$
- إذا كان المطلوب الحد الأوسط أو الثابت
نقسم الأس على 2 ويكون هو أس ل a و b

①

ملاحظات

نظریه ذات جدید

از آنکه به مطلوب



که لقای او
که بود و است



الاس زدی

الاس زدی

لایه آن تر صد قتیله ۲ اولاً

ثم نفوذ في قانون

التواضع

$$\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

أحد كدود

الخامس، الرابع

... الخ

دائماً في أعلى

من كل المعطى

مثلاً مطلوب

أحد الرابع ..

و كدود من ٥ إلى ٩

لكن $r=3$

②

اذا كان له الجواب طه لتأب

نستخدم القانون :

$$r = \frac{n \cdot p}{p - q}$$

$$\left(x^2 + \frac{1}{x} \right)^9$$

$\begin{matrix} p \\ \downarrow \\ 2 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} n \\ \downarrow \\ 9 \end{matrix}$
 $\begin{matrix} q \\ \downarrow \\ -1 \end{matrix}$

سأله :

$$r = \frac{2 \cdot 9}{2 - (-1)}$$

أنس x مع لقا
 اذا، معناه تبس
 يكونه (-)

$$r = \frac{18}{3} = 6$$

نحوض بقانون لخواص

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{9!}{6!3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2} = 84$$

* إذا كان المطلوب الحد الأوسط

3 //

① نقسم الحد المعطى على 2
والناتج يكون أس للحددين ،
ويكون قيمته 2

مثال:

الحد الأوسط فنكون :

$$(2x + \frac{1}{2}y)^4$$

$$\frac{4}{2} = ② \rightarrow xy \text{ أس } 2 \rightarrow x^2 y^2$$

ونستبدع به كليات أي أسس أخرى ..

② نطبق التوزيع حيث أنه :

$$n = 4 , r = 2$$

$$\frac{4!}{2!(4-2)!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2! \cdot 2!} = \frac{12}{2} = 6$$

∴ الحد الأوسط

$$6x^2y^2$$

1

مفكوك ذات الحدين

ولفانسون / الحدال ٣١

$$a_{r+1} = \binom{n}{r} [\text{الحد الأول}]^{n-r} [\text{الحد الثاني}]^r$$

سأطرح الحد الثابت في مفكوك ذات الحدين $(x^2 + \frac{1}{x})^6$... الحد الأول x^2 الحد الثاني $\frac{1}{x}$

6 (d) 12 (c)

15 (b)

20 (a)

$$\begin{aligned} a_{r+1} &= \binom{6}{r} (x^2)^{6-r} \left(\frac{1}{x}\right)^r \\ &= \binom{6}{r} x^{12-2r} x^{-r} \end{aligned}$$

$\left(\frac{1}{x}\right) = x^{-1}$

$-2r - r = -3r$

$$= \binom{6}{r} x^{12-3r}$$

في الحد الثابت قوة (x) صاريه صفر

$$12 - 3r = 0 \Rightarrow -3r = -12 \Rightarrow r = 4$$

$$a_{4+1} = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$$

$$r = \frac{n \cdot p}{p - q} = \frac{6 \cdot 2}{2 - (-1)} = \frac{12}{3} = 4$$

طريقة أخرى

$n = 6$ = قوة المقدار
 $2 = p$ = قوة الحد الأول
 $-1 = q$ = قوة الحد الثاني

$$\binom{6}{4} = \frac{6!}{4! 2!} = 15$$

٢

سأعطي الحد الأوسط في مقلوب $(2x + \frac{1}{2}y)^6$

ترتيب الحد الأوسط = $\frac{n}{2} + 1 =$ عدد زوجي

$$\frac{6}{2} = (3)$$

$$a_{r+1} = \binom{n}{r} (\text{الحد الأول})^{n-r} (\text{الحد الثاني})^r$$

$$a_{3+1} = \binom{6}{3} (2x)^{6-3} (\frac{1}{2}y)^3$$

$$= \frac{6!}{3!3!} 8x^3 \frac{1}{8}y^3$$

$$= \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2 \cdot 2} x^3 y^3 = 20 x^3 y^3$$

النتيجة

سأعطي الحد الثابت في مقلوب $(x^2 + \frac{1}{x})^9$

$$a_{r+1} = \binom{9}{r} (x^2)^{9-r} (\frac{1}{x})^r$$

$$= \binom{9}{r} x^{18-2r} x^{-r}$$

$$= \binom{9}{r} x^{18-3r}$$

سأعطي

4

معامل الحد الثابت $X=0$

$$18 - 3r = 0 \Rightarrow \frac{-3r}{-3} = \frac{-18}{-3}$$

$$r = 6$$

(لغزف)
(طرفية دفزف)

$$r = \frac{n \cdot P}{P - q} = \frac{9 \cdot 2}{2 - (-1)} = \frac{18}{3} = 6$$

$$\binom{9}{6} = \frac{9!}{6! (9-6)!} = \frac{9!}{6! 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{6! \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= \frac{12 \times 4}{2 \times 1} = 24$$

$$= 3 \times 4 \times 7 = 84$$

نما الحد الأول في مقلول

$$\frac{n}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$n=4$$

$$r=2$$

نصف

$$\binom{4}{2} (2x)^{4-2=2} \left(\frac{y}{2}\right)^2$$

$$= \frac{4!}{2! 2!} (4x^2) \left(\frac{y^2}{4}\right)$$

$$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 2!}{2! \cdot 2 \cdot 1} x^2 y^2$$

$$= 6 x^2 y^2$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$$

$$\sum_{k=0}^6 \binom{6}{k} = 2^6$$

ملا مضا

الحد الثالث في مقلون $(5x + y)^5$

$$a_{k+1} = \binom{n}{r} (\text{الحد الأول})^{n-r} (\text{الحد الثاني})^r$$

ترتيب الحد

$$a_{r=2} \rightarrow 3 = \binom{5}{2} (5x)^{5-2=3} (y)^2$$

$$= \frac{5!}{2!(3!)} 125 x^3 y^2$$

$$= \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} 1250 x^3 y^2$$

كم الاعداد الواقعة بين 100 و 1000 التي لا تقبل القسمة على 10؟

زاداً نوجد الاعداد الواقعة بين 100 و 1000 .. $1000 - 100 = 900$
ثم نأخذ نعلم الاعداد على 10

$$\frac{900}{10} = 90$$

ثم نأخذ طرح الناتج من العدد الذي

$$900 - 90 = \boxed{810}$$

لوجدى الحد الخامس فى مفعول $(y+z)^{11}$

$$a_{r+1} = \binom{n}{r} (\text{الحد الاول})^{n-r} (\text{الحد الثاني})^r$$

$$\boxed{r=4} \leftarrow 5 \quad a_5 = \binom{11}{4} (y)^{11-4} (z)^4$$

$$= \frac{11!}{(11-4)! (4!)} \cdot y^7 z^4$$

$$= \frac{11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} y^7 z^4$$

$$\begin{array}{r} 1103 \times \\ 330 \end{array}$$

$$a_5 = 330 y^7 z^4$$

\Rightarrow

یعنی قیہ کر

مکان کے لحاظ سے منکون

$(5x + y)$

اگر وہ 5 کی ...

0, 1, 2, 3, 4, 5



ایک لکھ

2

الحد الخامس يقصد قيمة ٢

انتي اكتبى الارقام من 0 الى 11

وشوفى الحد الخامس كم تطلع قيمته

دائما اذا كانت الحدود من تبدأ من صفر
وطلب حد معين

مثلا

الثالث يكون قيمته 2

الرابع يكون قيمته 3

الخامس يكون قيمته 4

دائما أقل بواحد عن العدد المعطى

المثال في صفحتين

$$(5x + y)^5$$

نوجد أولاً قيمة $r = 2$ المثال

0, 1, 2, 3, 4, 5

نوجد قيمة $r = 2$ ، $n = 5$ أسد، صفحتين

$$\boxed{\frac{n!}{r!(n-r)!} x^{n-r} y^r} \Rightarrow \text{قانون}$$

$$\frac{5!}{2!(5-2)!} (5x)^{5-2} \cdot y^2$$

$$\frac{5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{2! \cdot 3!} \cdot 125x^3 \cdot y^2$$

$$= 1250x^3y^2$$



انتهينا من الجزء الأول عن نظرية ذات الحدين
(للمستوى الثاني فقط)

ونبدأ بالتقرير الرياضي (للمستوى الأول
والثاني)

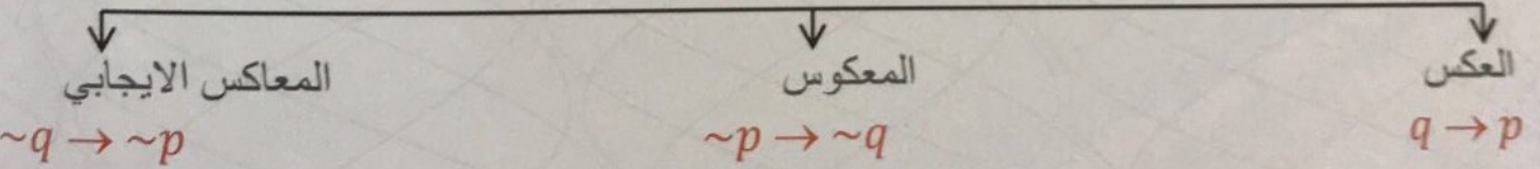
المعيار السابع : ملف المنطق والاستدلال الرياضي

السؤال	الحل
<p>1. ليكن $x \in Z$ ، اعتبر التقديرين : [عدد زوجي $p = x^2$] [عدد زوجي $q : x$] ، إن أفضل طريقة لبرهان أن $p \Rightarrow q$ هي بيان أن :</p> <p>(أ) $q \Rightarrow p$ (ب) $\sim q \Rightarrow p$ (ج) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (د) $\sim q \Rightarrow \sim p$</p>	
<p>2. التقرير $[p \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \vee q$ يكافئ التقرير</p> <p>(أ) $p \wedge q$ (ب) $p \vee q$ (ج) $\sim p \wedge q$ (د) $\sim p \vee q$</p>	
<p>3. $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ إذا كان :</p> <p>(أ) p صائب ، q صائب (ب) p خاطئ ، q صائب (ج) p صائب ، q خاطئ (د) p خاطئ ، q خاطئ</p>	

• العبارة الشرطية :

يرمز لعبارة (إذا كان ... فإن ...) بالرمز $p \rightarrow q$ ، بإعتبار أن p الفرض و q النتيجة .

العبارات المرتبطة بها :



مفهوم اساسي

العبارات الشرطية المرتبطة

العبارة	مكونة من	بالرموز	أمثلة
الشرطية	فرض معطى ونتيجة	$p \rightarrow q$	إذا تساوى قياس زاويتين فإنهما متطابقتان.
العكس	تبديل الفرض والنتيجة	$q \rightarrow p$	إذا تطابقت زاويتان فإن لهما القياس نفسه.
المعكوس	نفي كل من الفرض والنتيجة في العبارة الشرطية.	$\sim p \rightarrow \sim q$	إذا كان قياسا زاويتين غير متساويين فإنهما غير متطابقتين.
المعاكس الإيجابي	نفي كل من الفرض والنتيجة في عكس العبارة الشرطية.	$\sim q \rightarrow \sim p$	إذا كانت الزاويتان غير متطابقتين فإن قياسيهما غير متساويين.

▼ المعاكس الايجابي والعبارة الشرطية
تكون متكافئة

▼ عكس العبارة الشرطية ومعكوسها تكون
اما صحيحة معا أو خطأ معا

عكس العبارة الشرطية يكافئ منطقيا
معكوسها

السؤال	الحل
<p>ليكن $x \in \mathbb{Z}$ ، اعتبر التقريرين : [عدد زوجي $= x^2 = p$] [عدد زوجي $= x = q$] ، إن أفضل طريقة لبرهان أن $p \Rightarrow q$ هي بيان أن :</p> <p>$q \Rightarrow p$ $\sim q \Rightarrow p$ ($\sim p \Rightarrow \sim q$ ($\sim q \Rightarrow \sim p$ (</p>	<p>$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$</p>

السؤال الأول

يبغى برهان العبارة الشرطية

نبحث عن المعاكس الايجابي لها
لأن العبارة الشرطية ومعاكسها الايجابي
متكافئة

نبدل وننفي

Handwritten signature

٢٢. يعرف المكافئ العكسي للمعبارة $A \rightarrow B$ بأنه $\neg B \rightarrow \neg A$.

ما المكافئ العكسي للمعبارة: "إذا كان $X > 5$ فإن $X > 3$ "

أ) إذا كان $X > 3$ فإن $X > 5$

ب) إذا كان $X \leq 5$ فإن $X \leq 3$

ج) إذا كان $X < 3$ فإن $X < 5$

د) إذا كان $X \leq 3$ فإن $X \leq 5$

أكس أكبر من 3

يعني 4 و 5 و

نفيها أكس أقل من أو تساوي 3

توجد القيم التي موجودة 3 و 2 و 1
و

لو بدون علامة المساواة رقم 3 مراح يدخل
بالجواب

يبغى المعاكس

نبدل بين الفرض والنتيجة وننفي

يعني يكون الفرض X أقل من أو تساوي 3
والنتيجة X أقل من أو تساوي 5

المعيار السابع : ملف المنطق والاستدلال الرياضي

السؤال	الحل																				
<p>1. ليكن $x \in Z$ ، اعتبر التقديرين : [عدد زوجي $p = x^2$] [عدد زوجي $q : x = 2$] ، إن أفضل طريقة لبرهان أن $p \Rightarrow q$ هي بيان أن :</p> <p>(أ) $q \Rightarrow p$ (ب) $\sim q \Rightarrow p$ (ج) $\sim p \Rightarrow \sim q$ (د) $\sim q \Rightarrow \sim p$</p>	$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$																				
<p>2. التقرير $[p \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \vee q$ يكافئ التقرير ؟</p> <p>(أ) $p \wedge q$ (ب) $p \vee q$ (ج) $\sim p \wedge q$ (د) $\sim p \vee q$</p>	<div><div>$[p \vee (p \wedge (\sim p \vee q))] \vee q = p \vee q$</div><div>$p \wedge q$</div></div>																				
<p>3. $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ إذا كان :</p> <p>(أ) p صائب ، q صائب (ب) p خاطئ ، q صائب (ج) p صائب ، q خاطئ (د) p خاطئ ، q خاطئ</p>	<table><tr><th>p</th><th>q</th><th>$p \vee q$</th><th>$p \leftrightarrow q$</th></tr><tr><td>T</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr><tr><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>T</td><td>T</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>T</td></tr></table> <p>من الجدول: $p \vee q \equiv p \leftrightarrow q$ إذا كانت p صائب ، q صائب</p>	p	q	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	T	T	T	T	T	F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	T
p	q	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$																		
T	T	T	T																		
T	F	T	F																		
F	T	T	F																		
F	F	F	T																		

انتهى المعيار

5 و 6 و 7

نقاشات

المعيار

الثامن

نقاش

اليوم 27

①

المقتابعات

هندسية

مقتابعة هندسية صدها الأول a_1
وأساس r هي

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

a_1, a_2, a_3, a_4

الحد النوني في المقتابعة الهندسية

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

المقتابعة : 3, 6, 12, 24, 48, ...

هندسية صدها الأول : $a_1 = 3$

وأساس $r = \frac{6}{3} = 2$

الأساس = أي صدها
السابعوله مباشرة

الحد القاعد في المقتابعة الهندسية :

$$3, 6, 12, 24, \dots$$

$$a_8 = a_1 r^7$$

$$= 3 (2)^7$$

$$= 3 \times 128$$

$$= 384$$

الحل

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 = 3 \\ r = \frac{6}{3} = 2 \end{array} \right.$$

حسابية (عددية)

مقتابعة حسابية صدها الأول a_1
وأساس d هي

$$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

a_1, a_2, a_3, a_4

الحد العام للمقتابعة الحسابية (الحد النوني)

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

المقتابعة : 3, 6, 9, 12, 15, ...

حسابية صدها الأول : $a_1 = 3$

أساس $d = 6 - 3 = 3$

الأساس = أي صدها - السابوله مباشرة

الحد الثلاثون في المقتابعة الحسابية

$$9, 16, 23, 30, \dots$$

الحل

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{30} = a_1 + 29d \\ = 9 + 29 \times 7 \\ = 9 + 203 \\ = 212 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = 9 \\ d = 7 \end{array} \right.$$

②

المد الفوقي في المتتابعة

3, 6, 12, 24,

$a_1 = 3, r = \frac{6}{3} = 2$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3(2)^{n-1}$$

الحل

المد الفوقي للمتتابعة الحسابية :

12, 3, -6,

$a_1 = 12, d = 3 - 12 = -9$

الحل

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$= 12 + (n-1) \times -9$$

$$= 12 - 9n + 9$$

$$= -9n + 21$$

الوسط الهندسي لعدد n = حاصل ضربها $\pm \sqrt[n]{a_1 \times a_n}$

الوسط الحسابي لعدد n = مجموعهم \div عددهم

أوجد الوسط الهندسي للعدد 4, 16

الحل

$$\pm \sqrt{4 \times 16} = \text{الوسط الهندسي}$$

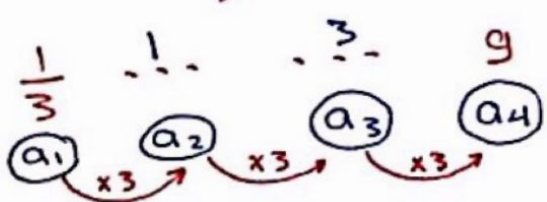
$$\pm \sqrt{64} =$$

$$\pm 8 =$$

ادخل وسطين هندسيين بين

$\frac{1}{3}, 9$

الحل



$$r = \sqrt[4-1]{\frac{a_4}{a_1}} = \sqrt[3]{9 \div \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9 \times 3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

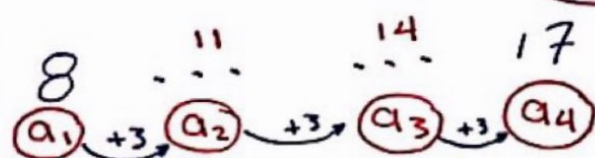
أوجد الوسط الحسابي للعدد 4, 16

الحل

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{4+16}{2} = \frac{20}{2} = 10$$

ادخل الوسطين الحسابيين بين العدد 8, 17

الحل



فرق الترتيب

$$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{17 - 8}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$$

فرق الترتيب

(3)

مجموع عدد n من حدود متتالية حسابية

معلومية صدها الأول a_1
وفاصل d

$$S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)d]$$

معلومية صدها الأول a_1
وصدها الأخير a_n

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

أوجد مجموع الخمسة عشرًا الأولى من المتتالية الحسابية

3, 5, 7, 9, ...

$$a_1 = 3, \quad d = 5 - 3 = 2$$

$$\begin{aligned} S_{50} &= \frac{50}{2} [2a_1 + 49d] \\ &= 25 [2 \times 3 + 49 \times 2] \\ &= 25 [104] \\ &= 2600 \end{aligned}$$

الحل

(4)

$$\sum_{k=1}^{12} (4k+2)$$

أوجد

الحل هذه متسلسلة حسابية [لأن k عدد الدرجة الأولى]

$$a_1 = 4(1) + 2 = 6, \quad d = 4, \quad n = 12 - 1 + 1 = 12$$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [2a_1 + 11d]$$

$$= 6 [2 \times 6 + 11 \times 4]$$

$$= 6 [56]$$

$$= 336$$

أوجد مجموع المتسلسلة $2 + 4 + 6 + \dots + 100$

$$a_1 = 2, \quad d = 4 - 2 = 2, \quad a_n = 100$$

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$100 = 2 + (n-1) \times 2$$

$$100 = \cancel{2} + 2n - \cancel{2}$$

$$100 = 2n$$

$$n = \frac{100}{2} = 50$$

$$S_{50} = \frac{50}{2} [a_1 + a_n]$$

$$= 25 [2 + 100]$$

$$= 25 [102]$$

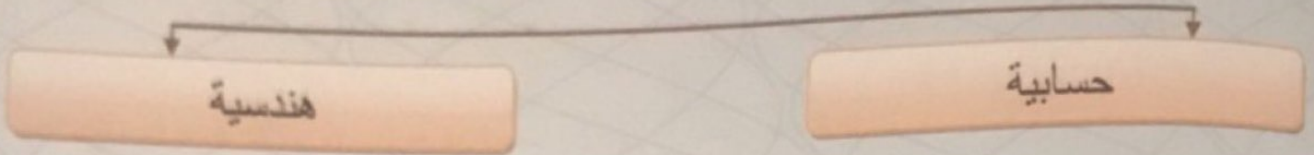
$$= \boxed{2550}$$

$$\begin{array}{r} 102 \times 25 \\ \underline{510} \\ 2040 \\ \hline 2550 \end{array}$$

١) المتتابعات :

المتتابعة :

هي مجموعة من الأعداد يوجد بينها فواصل تتبع نمط معين، ترتب كل عدد يسمى رقم الحد.



إذا وجدنا عدداً ثابتاً بحيث يكون قسمة أي حد لاحق على الحد الذي يسبقه يساوي مقداراً ثابتاً

مثال :

2, 4, 8, 16, 32, ... متابعه هندسية أساسها $2 = \frac{16}{8}$

إذا وجدنا عدداً ثابتاً بحيث يكون طرح أي حد لاحق من الحد الذي يسبقه يساوي مقداراً ثابتاً

مثال :

1, 6, 11, 16, ... متابعه حسابية أساسها $5 = 6 - 1$

لايجاد حد مطلوب :

$$\text{أساس المتتابعة} \quad r^{l-m} = \frac{a_l}{a_m}$$

$$\text{الحد النوني} \quad a_n = a_1 r^{n-1}$$

لايجاد حد مطلوب :

$$\text{أساس المتتابعة} \quad d = \frac{a_l - a_m}{l - m}$$

$$\text{الحد النوني} \quad a_n = a_1 + d(n - 1)$$

▲ أولاً : المتتابعات ▲

مجموعة أعداد يوجد بينها علامة الفاصلة
(،)
وتكون اما متتابعة حسابية أو هندسية أو غير
ذلك

تكون نوع الأسئلة

- معطى الحد الأول والآخر والمطلوب أحد الحدود
- معطى الحد الأول وأحد الحدود ويطلب الحد العام
- معطى متتابعة ويطلب أحد الحدود أو الحد التالي

Photo
Studio

اهم نقطه في المتتابعه هو ايجاد اساس المتتابعه
ايجاد أساس المتتابعة الحسابية

ب طرح الحد الثاني من الحد الأول

أما المتتابعة الهندسية ايجاد أساسها بقسمة
الحد الثاني على الحد الأول

اذا اعطانا متتابعه و ماكتب نوع المتتابعه
نحددها اما متتابعه هندسية او حسابية.
نوجد اساس. المتابعه بطرح حدين او بقسمة
حدين واذا طلع الاساس متساويه بالطرح
حسابية. واذا متساوية بالقسمة هندسية

حسابيه نطرح الحدود.
هندسية نقسم الحدود

كيف افرق بين هندسيه وحسابيه |
اذا كان حاصل طرح كل حد من الحد السابق
له عدد ثابت نقول متتابعة حسابية

واذا كان ناتج قسمة كل حد على الحد
السابق له نسبة ثابتة تكون متتابعة هندسية

او بداية السؤال يكتب متابعه حسابية
او يكتب متابعه هندسية
فقط نجاوب ع السؤال المطلوب باستخدام
القانون بالتعويض عن الحد النوني

Photo
Studio

محتاج:
أوجد الحد التالي
في المتتابعة

5, -6, -17, -28, ---

مثل السؤال هنا ماحدد نوع المتتابعه من خلال الأساس نلاحظ أنها حسابيه

5, -6, -17, -28, -39

$$-6 - 5 = -11$$

$$-17 - (-6) = -11$$

∴ الأساس -11

$$\boxed{-28 + 11 = -39}$$

Photo
Grid

3. متتابعة حسابية حدها الأول 27 وحدها السادس

12 فما هو الحد الرابع؟

(أ) 21

(ب) 18

(ج) 15

(د) 14

هنا معطى الحد الأول والحد الأخير

والمطلوب الحد الرابع

٥ - متتابعة حسابية حدها الأول (27) وحدها السادس (12) ما هو الحد الرابع ؟

نظروا حسابية $(6-1)d = 12 - 27$ \rightarrow فرق الرتب
أحد السادس - أحد الأول.

$5d = -15 \Rightarrow d = -3$

$\therefore a_4 = a_1 + (4-1)d = 27 + 3(-3) = 27 - 9 = 18$

a) 15
b) 9
c) 18
d) 27

▲ قلنا ستة ناقص واحد |

لأن القانون الأساسي لإيجاد الأساس في
المتتابعة الحسابية نطرح الحد الثاني من
الأول وهكذا

عشان كذا البسط نطرح الحدود وبالمقام
نطرح الرتب

قانون اساس المتتابعه يشبه قانون الميل

فرق الحدود على فرق الرتب

Photo
Studio

▲ نأخذ المتتابعة الهندسية

وايجاد الأساس لها عن طريق قسمة الحد
الثاني على الأول

ايجاد الأساس للمتتابعة
الهندسية

شرط. الاس موجب.
نطرح الرتبة الاكبر. ناقص
الرتبة الاصغر

Photo
Studio

الم الثاني في متتابعة

32, 8, 2, ----

الم الثاني في متتابعة

32, 8, 2, ----

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{4} = \text{الأساس}$$

$$2 \cdot \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{2}$$

نطلع الأساس
ثم نضربه في الم
الأخير

Photo
Grid

تنبيه!

النسب إذا وجدت نسبة
أحد الحدود إلى الحد
السابق له فجد بقية
النسب بالطريقة نفسها.

إرشادات للدراسة

النسبة بين كل حدين
متتاليين
الحد ÷ سابقه ابتداءً من
الحد الثاني.

إرشادات للدراسة

الفرق بين كل حدين
متتاليين

(الحد - سابقه) ابتداءً
من الحد الثاني .

Photo
Print

مثال 3

إيجاد الأوساط الحسابية

أوجد الأوساط الحسابية في المتتابعة: $-8, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, \underline{\quad}, 22, \dots$

الخطوة 1: بما أنه يوجد 4 حدود بين الحد الأول والحد الأخير؛ فإن عدد حدود المتتابعة $n = 6$ ، إذن $4 + 2 = 6$.

الخطوة 2: أوجد قيمة d

الحد النوني في المتتابعة الحسابية

$$a_n = a_1 + (n - 1) d$$

$$a_1 = -8, a_6 = 22, n = 6$$

$$22 = -8 + (6 - 1) d$$

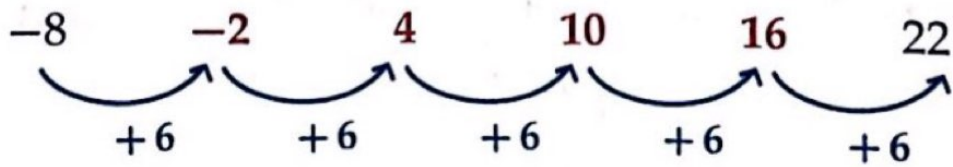
بإضافة 8 إلى الطرفين والتبسيط

$$30 = 5d$$

بقسمة الطرفين على 5

$$6 = d$$

الخطوة 3: استعمل d لإيجاد الأوساط الحسابية الأربعة المطلوبة.



إذن الأوساط الحسابية هي $-2, 4, 10, 16$

②

الحد النوني في المتتابعة

3, 6, 12, 24, ...

$a_1 = 3, r = \frac{6}{3} = 2$

$$a_n = a_1 r^{n-1} = 3(2)^{n-1}$$

الوسط الهندسي لعدد n = حاصل ضربها $\pm \sqrt[n]{\dots}$

أوجد الوسط الهندسي للعدد 4, 16

الحل

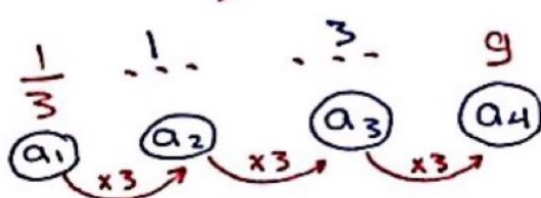
$\pm \sqrt{4 \times 16} =$ الوسط الهندسي

$\pm \sqrt{64} =$

$\pm 8 =$

ادخل وسطين هندسيين بين

$\frac{1}{3}, 9$



الحل

$$r = \sqrt[4-1]{\frac{a_4}{a_1}} = \sqrt[3]{9 \div \frac{1}{3}} = \sqrt[3]{9 \times 3} = \sqrt[3]{27} = 3$$

الحد النوني للمتتابعة الحسابية :

12, 3, -6, ...

$a_1 = 12, d = 3 - 12 = -9$

الحل

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$= 12 + (n-1) \times -9$

$= 12 - 9n + 9$

$= -9n + 21$

الوسط الحسابي لعدد n = مجموعهم / عددهم

أوجد الوسط الحسابي للعدد 4, 16

الحل

$10 = \frac{20}{2} = \frac{4+16}{2} =$ الوسط الحسابي

ادخل الوسطين الحسابيين بين العدد 8, 17

الحل



$d = \frac{a_4 - a_1}{4 - 1} = \frac{17 - 8}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3$

فرق الترتيبين

١٦- الوسط الهندسي بين العددين 4 و 16 :-

16, ..., 4
نظر $r^{3-1} = \frac{16}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$
أحد الثاني = $4 \cdot 2 = 8$

4 و 16
a) 12
b) 8
c) 10
 $\pm \sqrt{ab} = \sqrt{4 \times 16} = 2 \times 4 = 8$

١٧- الوسطين الهندسيين بين العددين 9 و $\frac{1}{3}$ هما :-

9, ..., ..., $\frac{1}{3}$

a) 6, 3
b) 1, 6
c) $\frac{1}{3}$, 3
d) 1, 3

الوسطين الهندسيين

$a_2 = \frac{1}{3} \times 3 = 1$
 $a_3 = 1 \times 3 = 3$

$r^{4-1} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3$

الأساس = 3

١٨- ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 162 :-

2, ..., ..., ..., 162
 $\times 3 \rightarrow 6 \rightarrow 18 \rightarrow 54$

$\sqrt{18 \times 2} = \sqrt{2 \times 2 \times 9} = 2 \times 3 = 6$
ثانياً

$\sqrt{162 \times 2} = \sqrt{4 \times 81} = 2 \times 9 = 18$
أولاً

ثالثاً
الأساس 3
 $18 \times 3 = 54$

$r^{5-1} = \frac{162}{2}$
 $r^4 = 81 \Rightarrow r = 3$
الوسط الأول = $2 \times 3 = 6$
الوسط الثاني = $6 \times 3 = 18$
الوسط الثالث = $18 \times 3 = 54$

مثال 3

إيجاد الأوساط الهندسية

أوجد ثلاثة أوساط هندسية بين العددين 2, 1250

الخطوة 1: بما أنه يوجد ثلاثة أوساط هندسية بين الحد الأول والحد الأخير، فإن عدد حدود المتتابعة هو $3 + 2 = 5$ ، ولذلك يكون $n = 5$

الخطوة 2: أوجد قيمة r

$$a_n = a_1 r^{n-1} \quad \text{الحد النوني في المتتابعة الهندسية}$$

$$a_n = 1250, a_1 = 2, n = 5 \quad 1250 = 2r^{5-1}$$

$$\pm 5 = r \quad \text{بقسمة الطرفين على 2، ثم إيجاد الجذر الرابع}$$

الخطوة 3: استعمل r لإيجاد الأوساط الهندسية الثلاثة:

$$\begin{array}{ccccccc} 2 & 10 & 50 & 250 & 1250 & \text{أو} & 2 & -10 & 50 & -250 & 1250 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \times 5 & \times 5 & \times 5 & \times 5 & & & \times -5 & \times -5 & \times -5 & \times -5 & \end{array}$$

إذن، الأوساط الهندسية هي: $-10, 50, -250$ أو $10, 50, 250$

▲ ثانيا : المتسلسلات ▲

مجموعة أعداد يكون بين الحدود اما (+) أو
(-) أو كليهما
من أنواعها :
متسلسلة حسابية
متسلسلة هندسية

$$\begin{aligned} 12, 19, 26 &\Rightarrow \text{متتابعة} \\ 12 + 19 + 26 &\Rightarrow \text{متسلسلة} \end{aligned}$$

يكون التركيز على المتسلسلة الهندسية

لأن الحسابية ماتجي كثير

Photo
Grid

المتسلسلة الهندسية :

غير منتهية

منتهية

متباعدة : ليس لها مجموع
 $|r| \geq 1$

مقاربة : لها مجموع
 $|r| < 1$

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r} \quad \text{أو} \quad S_n = \frac{a_1 - a_n r}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{a_1}{1 - r}$$

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (3^n)$$

$$|r| = 3 > 1$$

مثال:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

$$|r| = \frac{1}{2} < 1$$

مثال:

$$\sum_{n=0}^{10} 4 \left(\frac{1}{2^n}\right)$$

اللي ع اليمين المجموع الجزئي للمتسلسلة
الهندسية المنتهية

اكتر الاسئلة في القياس ع غير منتهية
ايجاد المجموع
تقاربية لها مجموع
تباعدية ليس لها مجموع

Photo
Studio

السؤال

1. المتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ هي متسلسلة :

(أ) متقاربة ومجموعها $\frac{1}{2}$

(ب) متقاربة ومجموعها 2

(ج) متقاربة ومجموعها 1

(د) متباعدة

الحل بخطوتين

ايجاد الاساس مباشرة من سيجما

اذا كسر اقل من الواحد تقاربية والخطوة

الثانية نوجد المجموع

اذا عدد صحيح اكبر من الواحد. تباعدية ليس

لها مجموع

الحل (ب) أساسها $1/2$ تقاربيه ومجموعها 2

١٢ - قيمة

$$S_r = \frac{a_1}{1-r}$$

متسلسلة غير منتهية ← متساوي: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 (r)^n$$

تقاربية $\rightarrow |r| = \frac{1}{2} < 1$ و $a_1 = 5$

$$\therefore S_n = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 5 \times 2 = 10$$

a) 5

b) $\frac{5}{2}$

c) 10

d) 20

$$..... = \sum_{N=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^N \quad .3$$

(أ) ∞

(ب) 0

(ج) 1

(د) 2

غير منتهية $\rightarrow \infty$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

الـ $\frac{1}{2}$ س
 \therefore متقارب

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$$

$$\frac{a_1}{1-r}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Photo
 = Good

5. مجموع المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$ يساوي

- (أ) $\frac{1}{3}$
- (ب) $\frac{1}{2}$
- (ج) $\frac{3}{2}$
- (د) 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

الأساس أقل من 1
∴ تقارب

$$a_1 = 3 \left(\frac{1}{2}\right)^1$$
$$= \frac{3}{2}$$
$$\frac{a_1}{1-r} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{3}{2} \times 2 = 3$$

2.

هي متتابعة : $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

- (أ) متباعدة
(ب) متقاربة ونهايتها 0
(ج) متقاربة ونهايتها 1
(د) متذبذبة (متناوبة) وليس لها نهاية

+ 88 + 45 + 102

-43 $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة

(أ) متباعدة

(ب) متقاربة ونهايتها 1

(ج) متقاربة ونهايتها 0

(د) متذبذبة (متناوبة) وليس لها نهاية

وممكن بالنظر

عندي سالب والعدد مرفوع ل n فاكيد الاس
الزوجي موجب والفردى بيطلع سالب

بتكون متذبذبه

Photo
Grid

2. قطع شخص مسافة A إلى B ، ثم قطع نصف ما قطع ، ثم قطع النصف الآخر ، ما نوع المتتابعة
- (أ) تايلور
(ب) هندسية
(ج) حسابية
(د) متذبذبة

من تكرار كلمة نصف

مباشرة نقول هندسية

Photo
Grid

السؤال

1. في المتتابعة الحسابية 4, 11, 18, ما أول حد مكون من 3 خانات ؟

- (أ) 100
- (ب) 101
- (ج) 102
- (د) 103

اهم مافي السؤال ايجاد. الاساس

واطلع الحدود. الى ان اوصل اول حد ف
المئات فوق 100

٤- في المتتابعة الحسابية --- 4, 11, 18, ما أول حد مكون من 3 خانات ؟

نوجد الأساس $11 - 4 = 7$

7/14

$$4 + 11 + 18 + 25 + 32 + 39 + 46 + 53 + 60 + 67 + 74 + 81 + 88 + 95 + 102$$

100
101
102
103

Photo
Grid

$$\underline{\underline{11}} = 7 + \textcircled{4} \quad \underline{\underline{131}}$$

70 من صناعه 70:

$$\textcircled{+4}$$

$$= 74 + 7 = 81 + 7 = 88$$

$$\begin{array}{r} +7 \\ \hline 95 \\ 7+ \\ \hline 102 \end{array}$$

المعيار الثامن : المتتابعات

السؤال	الحل
<p>1. في المتتابعة الحسابية , 4, 11, 18, ما أول حد مكون من 3 خانات ؟</p> <p>(أ) 100 (ب) 101 (ج) 102 (د) 103</p>	$a_n = a_1 + (n - 1)d$ $d = 11 - 4 = 7$ <p>بالتجريب الخيارات يقبل القسمة على 7</p> $100 = 4 + 7x \Rightarrow x = \frac{96}{7} = 13,7 \quad \leftarrow \text{لا يقبل القسمة}$ $101 = 4 + 7x \Rightarrow x = \frac{97}{7} = 13,8 \quad \leftarrow \text{لا يقبل القسمة}$ $102 = 4 + 7x \Rightarrow x = \frac{98}{7} = 14 \quad \leftarrow \text{يقبل القسمة}$ $100 = 4 + 7x \Rightarrow x = \frac{99}{7} = 14,1 \quad \leftarrow \text{لا يقبل القسمة}$ <p>طريقة اخرى للحل</p> $4, 11, 18, \dots$ $4 + 7 = 11$ $4 + 2(7) = 18$ $4 + 3(7) = 25$ <p style="text-align: center;">.</p> <p style="text-align: center;">.</p> <p style="text-align: center;">.</p> $4 + 14(7) = 102$
<p>2. $\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ هي متتابعة :</p> <p>(أ) متباعدة (ب) متقاربة ونهايتها 0 (ج) متقاربة ونهايتها 1 (د) متذبذبة (متناوبة) وليس لها نهاية</p>	$\left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}_{n=1}^{\infty} = -1, \frac{1}{2}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ <p>المتتابعة متذبذبة وليس لها نهاية</p>

4. أوجد مجموع أول 100 عدد طبيعي

(أ) 4500

(ب) 4750

(ج) 4950

(د) 5050

مجموع أول 100 عدد طبيعي

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

$$d = 1$$

$$a_1 = 1$$

$$a_n = 100$$

نطبق صيغة المجموع

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n] = \frac{100}{2} [1 + 100]$$

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 \dots \dots + 999 - 1000 + 1001 = \quad (3)$$

(ب) - 501

(د) 500

(ج) 501

(ب) -1001

هذا حله بالنظر

عندنا 1001

نصها موجب ونصها سالب

اخر حد موجب راح يكون الحل موجب

مثال عن المتسلسلة الهندسية المنتهية. لان حدد
مجموع اربعة حدود فقط تعويض القانون

١٥- ما مجموع الأربعة حدود الأولى للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 12(-\frac{1}{3})^n$ غير منتهية.

طريقة ثانية -

$$S_4 = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$= \frac{12 - 12(-\frac{1}{3})^4}{1 - (-\frac{1}{3})}$$

$$= \frac{12(1 + \frac{1}{3})}{(1 + \frac{1}{3})}$$

$$= 12 \sum_{n=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^n$$

$\begin{matrix} \nearrow n=0 \\ \nearrow n=1 \\ \nearrow n=2 \\ \nearrow n=3 \end{matrix}$

$$= 12 \left[(-\frac{1}{3})^0 + (-\frac{1}{3})^1 + (-\frac{1}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^3 \right]$$

$$= 12 \left[\overset{\times 27}{1} - \overset{\times 9}{\frac{1}{3}} + \overset{\times 3}{\frac{1}{9}} - \frac{1}{27} \right] = 12 \left[\frac{27 - 9 + 3 - 1}{27} \right]$$

$$= 12 \left[\frac{30 - 10}{27} \right] = \frac{12 \times 20}{27} = \frac{240}{27} = \boxed{\frac{80}{9}}$$

a) $\frac{1280}{81}$

b) $\frac{320}{27}$

c) $\frac{80}{9}$

d) $\frac{80}{81}$

Photo
Grid

١٤- أي من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة وأوجد المجموع :-

١- $16 + 8 + 4 + \dots$ $\frac{a_2}{a_1}$ بالقسمة

متقاربة $|r| = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} < 1$ $\leftarrow S_n = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16(2)}{2-1} = 32$

٢- $\sum_{k=1}^{\infty} 18 \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}$

متقاربة $|r| = \frac{4}{5} < 1$ $\leftarrow S_n = \frac{18}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{18(5)}{5-4} = 90$

٣- $8 + 12 + 18 + \dots$

متباعدة $|r| = \frac{12}{8} > 1$ ليس لها مجموع

السط > المقام
متقاربة
السط < المقام
متباعدة

سوال بشكل اخر هل هي متقاربة او متباعدة و
ايجاد المجموع؟

نوجد ار بالقسمة وقيمة الحد الاول موجود

واذا متقاربه نوجد المجموع

مجموع حسابي

$$\sum_{k=1}^{12} (4k-2) =$$

$a_1 = 4(1) - 2 = 2$, $d = 4$, $n = 12 - 1 + 1 = 12$

$$S_{12} = \frac{12}{2} [2a_1 + 11d]$$

$$= 6 [2 \times 2 + 11 \times 4]$$

$$= 6 \times 48$$

$$= 288$$

$4 \Rightarrow d$
 وهو الفرق
 تبدأ بحرف من 1
 $a_1 = 4(1) - 2 = 2$
 $a_2 = 4(2) - 2 = 6$
 $6 - 2 = 4$ وهو الفرق

<p>مجموع قياسات المثلث $180^\circ =$</p> <p>a_1, a_2, a_3</p> <p>$36^\circ + 36^\circ + d + 36^\circ + 2d = 180^\circ$</p> <p>$108^\circ + 3d = 180^\circ$</p> <p>$3d = 180^\circ - 108^\circ = 72$</p> <p>$d = \frac{72}{3} = 24$</p> <p>الزاوية الكبرى $a_3 = 36 + 2(24) = 36 + 48 = 84^\circ$</p>	<p>(١١) تشكل قياسات زوايا المثلث أدناه متتابعة حسابية ، إذا كان قياس الزاوية الصغرى 36° ، فما قياس الزاوية الكبرى ؟</p> <p>(أ) 75° (ب) 90°</p> <p>(ج) 97° (د) 84°</p>
---	---

المثلث مكون من ثلاث زوايا ومجموع الزوايا
تساوي 180
اصغر زاوية 36

بما انها متتابعة
الزاوية الثانية. تساوي 36 زائد الاساس d
الزاوية الثالثة. الزاوية الثانية زائد الاساس
d

٤

١- متتابعة حسابية حدها الأول (27) وحدها السادس (12) ماهو الحد الرابع ؟

فرق الرتب
أحد السادس - أحد الأول

$$(6-1)d = 12 - 27$$

نظري حسابية

$$5d = -15 \Rightarrow d = -3$$

- a) 15
b) 9
c) 18
d) 27

$$\therefore a_4 = a_1 + (4-1)d = 27 + 3(-3) = 27 - 9 = 18$$

٢- متتابعة هندسية حدها الأول (2) وحدها السادس (64) ماهو الحد الثالث ؟

نظري

$$r^{6-1} = \frac{64}{2}$$

نقم

$$r^5 = 32 \Rightarrow r = 2$$

$$\therefore a_3 = a_1 r^{3-1} = 2(2)^2 = 2(4) = 8$$

- a) 8
b) 4
c) 32
d) 20

$\times \frac{3}{4}$
 $8, 6, \frac{9}{2}, \frac{27}{8}, \dots$

٧- ما الحد التالي في المتتابعة الهندسية :-

نوجد فقط الأساس r بالقسمة :-

$$r = \frac{6 \div 2}{8 \div 2} = \frac{3}{4} \text{ و } \frac{a_3}{a_2} = \frac{9}{2} \div 6 = \frac{9}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

- a) $\frac{11}{8}$ b) $\frac{9}{4}$
c) $\frac{27}{16}$ d) $\frac{81}{32}$

$$\text{الحد التالي} = \frac{27}{8} \times \frac{3}{4} = \frac{81}{32}$$

$$124, 119, 114, 109, \dots$$

٨- ما ترتيب حد صالب في المتتابعة :-

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$d = 124 - 119 = -5$$

بتجريب الخيارات

- a) 24
b) 25
c) 26
d) 27

$$a_{24} = 124 + (24-1)(-5) = 124 - 115 \text{ موجب } \times$$

$$a_{25} = 124 + (25-1)(-5) = 124 - 120 \text{ موجبه } \times$$

$$a_{26} = 124 + (26-1)(-5) = 124 - 125 = -1 \leftarrow$$

(1) $x+2$, (2) $x+5$, (3) $2x+5$, ----

٩- قيمة أحد الثامن في المتتابعة الحسابية :-

نوجد أولاً الأساس (d)

$$d = \text{أحد الثاني} - \text{أحد الثاني} = (x+5) - (x+2) = 3 \Rightarrow d = 3 \rightarrow (1)$$

$$\text{أحد الثاني} - \text{أحد الثاني} = (2x+5) - (x+5) = 2x - x \Rightarrow d = x \rightarrow (2)$$

$$a_1 = 3 + 2 = 5 \leftarrow \text{بالمقارنة } x = 3$$

$$a_8 = a_1 + 7d = 5 + 7(3) = 5 + 21 = 26$$

- a) 26
b) 25
c) 27
d) 30

$$5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26$$

37/40

تشكل قياسات زوايا المثلث أدناه متتابعة حسابية إذا كانت قياس الزاوية

الصغرى (36°) . فما قياس الزاوية الكبرى؟

طريقة أخرى: $n=3$, $S_n=180$, $a_n=?$

$$S_n = \frac{n}{2} [a_1 + a_n]$$

$$180 = \frac{3}{2} [36 + a_3]$$

$$180 \times \frac{2}{3} = 36 + a_3$$

$$a_3 = 120 - 36 \Rightarrow a_3 = 84$$

مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180^\circ$

$$a_1 + a_2 + a_3 = 180$$

$$36 + (36 + d) + (36 + 2d) = 180$$

$$3(36) + 3d = 180 = 3(60)$$

$$\div 3 \Rightarrow 36 + d = 60 \Rightarrow d = 60 - 36 = 24$$

$$= 36 + 2(24) = 36 + 48 = 84$$

- a) 75°
b) 90°
c) 97°
d) 84°

11- إذا كان الحد الأول في متسلسلة هندسية متساوي (5) وأساسها (2) ومجموعها (1275) فإن عدد حدودها -

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$1275 = \frac{5 - 5(2)^n}{1 - 2} = \frac{5(2)^n - 5}{1}$$

$$1275 + 5 = 5(2)^n \Rightarrow 1280 = 5(2)^n$$

$$2^n = \frac{1280}{5} = 256 \Rightarrow 2^n = 2^8 \Rightarrow n = 8$$

- a) 7
b) 8
c) 9
d) 10

12- $(1-2) + (3-4) + 5-6 + 7-8 + \dots -1000 + 1001 = \dots$

$$\begin{array}{l} \text{الأعداد الموجبة} \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 999 + 1001 \\ \text{الأعداد السالبة} \rightarrow -2 -4 -6 -8 - \dots -1000 \end{array}$$

$$(-1) \text{ مكرر } 500 \text{ مرة.}$$

$$(-1) \times 500 + 1001 = -500 + 1001 = 501$$

- a) 501
b) -501
c) 1000

13- قيمة $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{2^n}$ متساوي -

$$S_r = \frac{a_1}{1-r}$$

متسلسلة غير منتهية

$$\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 (r)^n$$

$$a_1 = 5, |r| = \frac{1}{2} < 1 \rightarrow \text{تقاربية}$$

$$\therefore S_n = \frac{5}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{\frac{1}{2}} = 5 \times 2 = 10$$

- a) 5
b) $\frac{5}{2}$
c) 10
d) 20

١٤- أي من المتسلسلات الآتية متقاربة أو متباعدة أو وجد المجمع :-

١- $16 + 8 + 4 + \dots$ وجد r بالقسمة $\frac{q_2}{q_1}$

متقاربة $\leftarrow |r| = \frac{8}{16} = \frac{1}{2} < 1$ $\star S_n = \frac{16}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{16(2)}{2-1} = \boxed{32}$

٢- $\sum_{k=1}^{\infty} 18 \left(\frac{4}{3}\right)^{k-1}$

متقاربة $\leftarrow |r| = \frac{4}{3} < 1$ $\star S_n = \frac{18}{1 - \frac{4}{3}} = \frac{18(3)}{3-4} = \boxed{90}$

٣- $8 + 12 + 18 + \dots$

متباعدة $\leftarrow |r| = \frac{12}{8} > 1$ ليس لها مجمع

السط > المقام
متقاربة
السط < المقام
متباعدة

١٥- ما مجمع الأربعة حدود الأولى للمتسلسلة $\sum_{n=0}^{\infty} 12 \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ غير منتهية.

طريقة ثانية :-

$$S_4 = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$$

$$= \frac{12 - 12 \left(-\frac{1}{3}\right)^4}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}$$

$$= \frac{12 \left(1 + \frac{1}{81}\right)}{\left(1 + \frac{1}{3}\right)}$$

$$= 12 \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$= 12 \left[\left(-\frac{1}{3}\right)^0 + \left(-\frac{1}{3}\right)^1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^3 \right]$$

$$= 12 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} \right] = 12 \left[\frac{27 - 9 + 3 - 1}{27} \right]$$

$$= 12 \left[\frac{30 - 10}{27} \right] = \frac{12 \times 20}{27} = \frac{240}{27} = \boxed{\frac{80}{9}}$$

a) $\frac{1280}{81}$

b) $\frac{320}{27}$

c) $\frac{80}{9}$

d) $\frac{80}{81}$

١٦- الوسط الهندسي بين العددين 4 و 16 :-

نظر $r^{3-1} = \frac{16}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r=2}$

الحد الثاني = $4 \cdot 2 = \boxed{8}$

4 و 16 و ... و 4

$\pm \sqrt{ab} = \sqrt{4 \times 16} = 2 \times 4 = 8$

a) 12

b) $\boxed{8}$

c) 10

١٧- الوسطين الهندسيين بين العددين 9 و $\frac{1}{3}$ هما :-

$\frac{1}{3}$ و ... و ... و 9

$r^{4-1} = \frac{9}{\frac{1}{3}} \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow \boxed{r=3}$

الأساس = 3

a) 6, 3

b) 1, 6

c) $\frac{1}{3}$, 3

d) $\boxed{1, 3}$

الوسطين الهندسيين

$a_2 = \frac{1}{3} \times 3 = 1$

$a_3 = 1 \times 3 = 3$

١٨- ثلاثة أوساط هندسية بين 2 و 162 :-

2 $\xrightarrow{\times 3}$ 6 $\xrightarrow{\times 3}$ 18 $\xrightarrow{\times 3}$ 54 $\xrightarrow{\times 3}$ 162

$\sqrt{18 \times 2} = \sqrt{2 \times 2 \times 9} = 6$ ثانية

$\sqrt{162 \times 2} = \sqrt{4 \times 81} = 2 \times 9 = 18$ أو ثالثة

الأساس 3 $18 \times 3 = 54$

$r^{5-1} = \frac{162}{2}$

$r^4 = 81 \Rightarrow \boxed{r=3}$

الوسط الأول = $2 \times 3 = 6$

الوسط الثاني = $6 \times 3 = 18$

الوسط الثالث = $18 \times 3 = 54$

نقاش

اليوم 28



أولا النهاية عندما تؤول إلى نقطة
(كثرة حدود -نسبية - جذرية -قيمة مطلقة -
تحتوي على قوى -دوال خاصة)
النهاية عندما تؤول الى ما لا نهاية

النهاية تنقسم الى قسمين
1/النهاية عند النقطة
التعويض المباشر.
في حاله حالات عدم التعيين
نستخدم قاعدة لوبيتال. او تحليل او ضرب
في المرافق

2/ النهاية عند ما لانهاية وسالب ما لانهاية

السؤال

1. اوجد $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7)$

- (أ) 9
(ب) 37
(ج) 149
(د) 51

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^3 + 5x^2 - 7)$$

تعويد مباشر عن كل $x \rightarrow 2$

$$3(2)^3 + 5(2)^2 - 7$$

$$= 3 \times 8 + 5 \times 4 - 7$$

$$= 37$$

Photo
Grid

2. اوجد $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

- (أ) 3
- (ب) 0
- (ج) 6
- (د) -6
- (هـ)

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

تعويض مباشر = $\frac{(3)^2 - 9}{3 - 3}$

غير معرفة = $\frac{0}{0}$

: نستخدم قاعدة لوبيتال
"لو بيتال"

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = 2(3) = 6$$

Photo
= good

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} \cdot 10$$

- 0 (ا)
- $\frac{1}{2}$ (ب)
- 1 (ج)
- 2 (د)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

نسبت 3 لویٹا :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3}{2x} = \frac{4(1)}{2(1)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = 7$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{2x + 1}{1} = \frac{2(1) + 1}{1} = 3$$

Photo
Grid

حالات عدم التعيين :

عندما يكون ناتج التعويض المباشر في الدوال النسبيه يساوي $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ أو $\infty - \infty$.
نرى معالجتها :

- نحل كل من البسط والمقام إن أمكن ثم نختصر المقادير المتطابقة .
- نضرب في المرافق بسطاً ومقاماً إذا كانت حالة عدم تعيين وتحتوي على جذر .
- نستخدم قاعدة لوبيتال : نشتق البسط لوحده ونشتق المقام لوحده .

13. قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x}$ تساوي

(أ) -8

(ب) 0

(ج) 8

(د) ∞

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4+x)^2 - 16}{x} = \frac{(4+0)^2 - 16}{0} = \frac{0}{0}$$

سنستخدم لوبيتال ..

$$\frac{2(4+x)}{1} = \frac{2 \times 4 + 2 \times x}{1}$$

$$= 8 + 2 \times 0$$

$$= 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2} = .5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x-2}$$

* مقدار، بسط نفسه مقدار،
المقام .

* صفر لقيه بالطلقة : $x-2$

$$x = 2$$

هو نفسه ما تؤول إليه *

عبارة غير موجودة

ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} = \frac{0}{0} \text{ غير موجود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{2-x} = \frac{0}{0} \text{ غير موجود}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2x-4|}{2x-4} = \frac{0}{0} \text{ غير موجود}$$

في حالة دالة القياس نعيد تعريف الدالة
ننظر الى صفر القياس ونقطة النهاية
اذا وقعت نقطة النهاية يمين صفر القياس
نختار الدالة الاولى
اذا وقعت نقطة النهاية يسار صفر القياس.
نختار الدالة الثانية
اما اذا كانت نقطة النهاية هي نفسها صفر
القياس. النهاية غير موجودة

Photo
Grid

11. قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

(أ) -1

(ب) 0

(ج) 1

(د) غير موجودة

من أسئلة مباشر :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

نغير تعريف البقية التي داخل المقام

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x}, \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x}$$

$$\frac{x}{x} = 1 \text{ و } \frac{-x}{x} = -1$$

$$1 \neq -1$$

∴ النهاية غير موجودة .

Photo
Grid

طريقه تعريف القيمه المطلقه

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{x - 2}$$

يكون الحفاض نفس الحفاض في التعريفين

مرة موجب

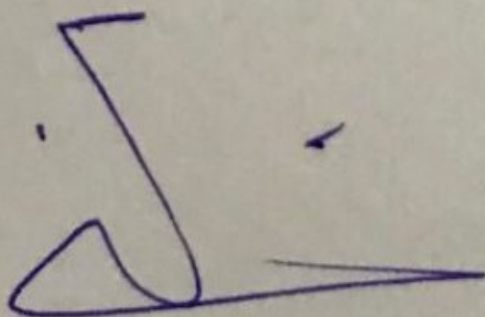
$$\frac{x - 2}{x - 2}$$

مرة سالب

$$\frac{-(x - 2)}{(x - 2)}$$

$$1 \neq -1$$

غير موجوده



$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x}$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x|}{x}$$

لو كانت النقطة غير الصفر

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = 1 \\ -\frac{x}{x} = -1 \end{cases}$$

توضيح اذا كانت النهايه تؤول الى نقطه غير صفر القياس

حين الصفر
الدالة الاولى

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|}{x} = \boxed{1}$$

حين الصفر
الدالة الثانية

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{-x}{x} = \boxed{-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = 0$$

⑥ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1}$

$$\frac{e^0 - 1}{1} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Photo
Grid

4. اوجد : $\lim_{x \rightarrow 2} e^{x+2}$

(أ) 0

(ب) e^4

(ج) 1

(د) e^3

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} e^{x+2}$$

$$= e^{2+2} = e^4$$

Photo
Grid

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{1} = \frac{e^0 - 1}{1} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} e^{x+2} = e^{2+2} = e^4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{0 - 1}{1} = \frac{0}{0}$$

$$e^x \xrightarrow{\text{جَمْعُ}} e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$$

لوبيتال

3. اوجد : $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 1}$

(أ) $\frac{3}{7}$

(ب) 0

(ج) ∞

(د) $-\frac{5}{6}$

النهاية عندما تؤول الى ما لانهاية

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 5x^2 + 2}{7x^5 + 6x^3 - 3x + 2}$$

درجة البسط 4

درجة المقام 5

∴ درجة البسط أقل من درجة المقام

∴ النهاية = 0

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + 3x - x^2)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (4 + 3x - x^2)$$

نوع النهايه لا كبرانس

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x^2$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = -\infty$$

Photo
Grid

إذا كانت قوتك إلى $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^6 + 2$$

الأس زوجي = ∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 5$$

الأس فردي = $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3$$

الأس فردي

$\therefore -\infty$

عند حساب الترتيب عند ∞ أو $-\infty$ - يجب مراعاة السَّيِّ

① إشارة معامل أكبر من

② درجة كثير الحدود.

$$* \lim_{x \rightarrow \infty} x - x^3 = -\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - x^3 = -(-\infty)$$

8. اذا كانت $f(x) =$

$$\begin{cases} \frac{x-1}{x+1}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$$

ماهي قيمة a التي تجعل الدالة f متصلة :

(أ) -1

(ب) 2

(ج) 1

(د) -2

اولا قيمة الداله عند قيمة اكس موجودة

ثانيا. النهاية موجودة

ثالثا.

قيمة الداله من اولاً. تساوي قيمة النهاية

قيمة a التي تجعل الدالة متصلة

تقريب $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x+1} & x \neq -1 \\ a & x = -1 \end{cases}$

ليغير الدالة عند $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{2x}{1} = 2(-1) = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ \ln(n+1) - \ln(n) \} =$$

$\ln 2$.

Q

1.

2.

الحل :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{n+1}{n} \right)$$

$$\ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right)$$

$$d, d^{\sim} \text{السبط} = d, d^{\sim} \text{الضلع}$$

معامل التربة

ثابت $\ln\left(\frac{1}{1}\right) = \ln(1) = 0 \Rightarrow$

خواص اللوغاريتم

إذا كانت عملية طرح نحولها الى قسمة

وإذا عملية جمع نحولها الى ضرب

ونطلع اللن برى

تصير عندنا نهاية تؤول الى مالانهاية

درجة البسط مساوية لدرجة المقام اذا نقسم
معامل n في البسط على معامل n في المقام

$1/1$ ونوجد اللن (1) وهو معروف انه يساوي 0

إذا تضايه وبعض الدوال لو غاير يتم اوداله متعلقه اوجذريه
يندل بين التضايه والدالة .

$$\lim \log f(x) = \log \lim f(x)$$

$$\lim \sin f(x) = \sin \lim f(x)$$

$$\lim \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim f(x)}$$

① حل
 $x \rightarrow 4$

$$\frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$$

ينصّب 2

$$2 \times 2 = 4$$

اكس:

② حل
 $x \rightarrow 16$

$$\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$$

$$4 \times 2 = 8$$

اكس:

③ حل
 $x \rightarrow 9$

$$\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

$$3 \times 2 = 6$$

اكس:

Sultan

ملاحظة:

الهدايا قدّمها لك، صديقتي وينصّب

سلسلة التبسيط

رؤية مبتكرة ... لفهم أسهل

للاستفسار: 920000882

$$\lim_{x \rightarrow a} = \frac{x - a}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$$

سوال ۱

Sultan

حل ۲:

$$\lim_{x \rightarrow 25} \frac{x - 25}{\sqrt{x} - 5}$$

هـ ۲۵

$$x=1$$

ش / مقيمة k التي تجعل الدالة متصلة .

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & x < 1 \\ 3kx & x \geq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} \text{نهاية عند} \\ \text{نهاية ليمية} = \end{matrix}$$

$$f(x) = \begin{cases} k^2 x & x < 1 \\ 3kx & x \geq 1 \end{cases}$$

نلتزم بمقطع الشرط الثاني

النهاية ليمية = النهاية اليمنى

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (3kx) = \lim_{x \rightarrow 1^-} k^2 x$$

$$3k = k^2$$

$$3k - k^2 = 0$$

$$k(3-k) = 0$$

$$\boxed{k=0} \quad \text{أو} \quad \boxed{k=3}$$

Photo
Grid

تَوُول

∞

الأس فردی

الأس زوجی

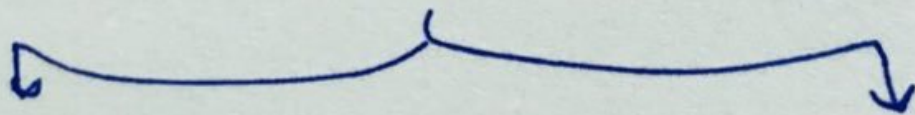
∞

∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \overset{3}{x} \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \overset{4}{x} \rightarrow -\infty$$

تَوُول
 $-\infty$



الأس فردی

الأس زوجی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \overset{3}{x} \rightarrow -(-\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \overset{4}{x} \rightarrow -(\infty)$$

∞

$-\infty$

قوانين النهايات

النهاية تقول إلى النقطة :-

إذا اقتربت قيم $f(x)$ من قيمة وحيدة L كلما اقتربت قيم x من C من كلا جهتين فإن نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من C هي L

$$\lim_{x \rightarrow C} f(x) = L$$

النهاية من اليمين $\lim_{x \rightarrow C^+} f(x) = L_1$
النهاية من اليسار $\lim_{x \rightarrow C^-} f(x) = L_2$

إذا كانت نهاية اليمين = نهاية اليسار \leftarrow النهاية موجودة
إذا كانت نهاية اليمين \neq نهاية اليسار \leftarrow النهاية غير موجودة.

مثال :-

$$1] \lim_{x \rightarrow -3} x = -3$$

$$2] \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt{x+3} = \sqrt{-1+3} = \sqrt{2}$$

$$3] \lim_{x \rightarrow 1} |x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{if } x \geq 1 \\ 1-x & \text{if } x < 1 \end{cases}$$

تغير الدالة عند $x=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0$$

النهاية موجودة و تساوي الصفر

حالات عدم تعيين :-

ندعوض المباشري في الدوال النسبية نتج
موجة $(\frac{0}{0})$ أو $(\frac{\infty}{\infty})$ وهي كمية غير محددة

قواعد التبسيط :-

التحليل \textcircled{f} ضرب مرافق المقام
قاعدة لوبيتال (استقار السبب والمقام)

$$1] \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+1}{x^2+3} = \frac{5+1}{25+3} = \frac{6}{28}$$

$$2] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$$

طريقة تحليل وكان لوبيتال

النهاية تقول إلى (∞) أو $(-\infty)$:-

أولاً - نهاية دوال القوى عند (∞) :-

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = (\infty)^n = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} (-\infty)^n = \infty & \text{زوجي } n \\ (-\infty)^n = -\infty & \text{فردية } n \end{cases}$$

مثال :-

$$1] \lim_{x \rightarrow \infty} x^7 = \infty \quad 2] \lim_{x \rightarrow -\infty} x^4 = \infty \quad \text{زوجي } n$$

$$3] \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \quad \text{فردية } n$$

ثانياً - نهاية دوال كثيرة الحدود عند (∞) :-

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} a_n x^n = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \begin{cases} \infty & \text{زوجي } n \\ -\infty & \text{فردية } n \end{cases}$$

مثال :-

$$1] \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^6 + 3x^5 + 8) = \infty \quad \text{زوجي } n$$

ثالثاً - نهاية الدوال النسبية $P(x)$ عند ∞ :-

درجة البسط < درجة المقام	درجة البسط > درجة المقام	درجة البسط = درجة المقام
$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x) = 0$	$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = \infty$	$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} P(x) = \frac{\text{معلم أكبر أس في البسط}}{\text{معلم أكبر أس في المقام}}$
مثال :- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x^4+1} = 0$	مثال :- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^2}{2x-1} = \infty$	مثال :- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3-2x^2}{2x^3+4x} = \frac{7}{2}$

مثال :-
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3-2x^2}{2x^3+4x} = \frac{7}{2}$
درجة البسط = 3
درجة المقام = 3

* عند حساب النهاية عند $(-\infty)$ فالدوال الكسرية
يجب في حالة أنه درجة البسط < ص المقام
عنه الناتج $= \{-\infty \text{ أو } \infty\}$ لذلك يجب مراعاة التالي

- ① إذا كان معامل x (من البسط والمقام)
- ② نضع درجة البسط - درجة المقام ونفوض
من أجله غير مهم قيمة x بـ $(-\infty)$

مثال ②
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7x^3 + 1}{x^2 + 4x}$$

الحل: ∞

مثال ③
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 + 1}{x + 4}$$

الحل: ∞ $3(-\infty)^4 = \infty$ $3x^4$

مثال ④
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - x^2}{3x^2 - 1}$$

الحل: $-\infty$ $\frac{2}{3}(-\infty) = -\infty$

مثال: ①
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 1}{x^2 + 4x}$$

الحل: دهمني الحد ذو
أكبر أس في البسط والمقام
وفي البسط المهم فقط
بـ $7x^3$ والمقام x^2
① إذا كان معامل x في
موضوعة (7) وايضاً ①
معامل x^2

② إذا لم توجد الفرق ① $3 - 2 = 1$

$$\frac{7}{1}(x) = 7(-\infty) = -\infty$$



سلسلة التبسيط
رؤية مبتكرة ... لفهم أسهل
للاستفسار: 920000882

Sultan

تابع النهاية

ثالثاً - نهاية المتتابعات -

a) $a_n = \frac{3n+1}{n+5} = \frac{3}{1}$ درجة بسط $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+5} = 3$ درجة مقام

b) $b_n = \frac{5}{n^4} \left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} \right] = \frac{5n^2(n^2+2n+1)}{4n^4} = \frac{5n^4+10n^3+5n^2}{4n^4}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} b(n) = \frac{5n^4}{4n^4} = \frac{5}{4}$

c) $c_n = \frac{4}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{n^2+1} = 0$ درجة بسط > درجة مقام

رابعاً - بعض النهايات الخاصة -

1) $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$

2) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = e^\infty = \infty$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \frac{e^0 - 1}{0} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = \frac{e^0}{1} = 1$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos 0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{1} = 0$

7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin 0}{0} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$

8) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\ln x} = \frac{1-1}{\ln 1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x = 1$

مثال -

$x=2$ عند $F(x) = \begin{cases} 5x+5; & x > 2 \\ 2-x; & x \leq 2 \end{cases}$

① نوجد $f(c)$ عند $x=2$

$f(2) = f(c) = (2-2) = 0$

التعويض في الدالة التي تنتمي $x=2$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 5x+5 = 15$ ②

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2-x = 0$

اليمين \neq اليسرى

النهاية غير موجودة

الدالة غير متصلة عند $x=2$

الاتصال

تكون الدالة متصلة عند النقطة c إذا كانت -

① $f(c)$ موجودة

② النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

③ أي أن $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ موجودة

④ $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

أنواع عدم الاتصال -

① اتصال قفزي \leftarrow نهاية ليميني \neq نهاية اليسار

② اتصال قابل للإزالة \leftarrow نهاية موجودة ولكن لا تساوي

$f(c)$

③ اتصال لا نهائي إذا كانت $f(c)$ غير موجودة ولنهاية غير موجودة.

تمارين على النهايات والاتصال

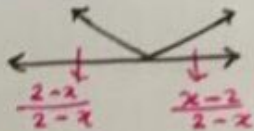
$$[1] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x^3 + 1}{x^2 + 4x} = \frac{7(0) + 1}{0^2 + 4(0)} = \frac{1}{0} = \infty$$

$$[2] \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^3 - x^2 + 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x^2 - x + 5)}{x} = 5$$

$$[3] \lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 - x - 20}{x + 4} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x - 1}{1} = 2(-4) - 1 = -9$$

$$[4] \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 3x - 10}{x^2 + 5x + 6} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x - 3}{2x + 5} = \frac{-4 - 3}{-4 + 5} = -7$$

$$[5] \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x - 2|}{2 - x} = \begin{cases} \frac{x - 2}{2 - x} = -1 & ; x \geq 2 \\ \frac{2 - x}{2 - x} = 1 & ; x < 2 \end{cases}$$



النهاية اليسرى \neq النهاية اليمنى

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x - 2}{2 - x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{2 - x} = 1$$

$$= -1 \neq 1$$

النهاية غير موجودة.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|3x - 6|}{6 - 3x}$$

غير موجودة.

$$[6] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 2|}{2 - x} = \frac{2 - x}{2 - x} = -1$$

(1) تقع سيارة 2 مختار الدال الثانية.

$$[7] \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x - 2|}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2 - x}{2 - x} = 1$$

النهاية اليسرى فقط

$$[8] \lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x - 2|}{2 - x} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 2}{2 - x} = -1$$

مختار الدالة الأولى

$$[8] \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 1}{1} = 3$$

$$9 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^5 - 32}{x - 2} = \frac{32 - 32}{2 - 2} = \frac{0}{0} \quad \text{كثير منقطة} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{5x^4}{1} = 5(2)^4 = 80$$

$$10 \quad \lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2 - 25}{x + 5} = \frac{25 - 25}{-5 + 5} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x}{1} = 2(-5) = -10$$

$$2(-5) = -10 \quad \text{نضرب بعد في 2}$$

$$11 \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3} = \frac{9 - 9}{\sqrt{9} - 3} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow 9} 2\sqrt{x} = 2\sqrt{9} = 6$$

ملاحظة: $2\sqrt{9} = 2(3) = 6$

$$12 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x}} = (0 - \sqrt{2}) = -\sqrt{2} \notin \mathbb{R}$$

عامل مشترك
النهاية غير موجودة.

$$13 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7}{5x + 7} = -\infty$$

لوجود سالب
سالب $-\frac{3}{5}$
درجة البسط < درجة المقام

$$14 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x - 10} = 0$$

درجة البسط > درجة المقام

$$15 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 6}{x^2 - x} = \infty$$

درجة البسط < درجة المقام

$$16 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3 - 6}{x^2 - x} = (-1)^{3-2} \infty = -\infty$$

$$17 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 8x + 2}{8x + 2} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

درجة البسط = درجة المقام

$$18 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \ln(n+1) - \ln n \} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{n+1}{n} \right\} = \ln \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \right\} = \ln(1) = 0$$

بينك بين اللوغاريتم والنهاية.

$$19 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \sqrt{\infty^2 + 1} - \infty = \infty - \infty$$

كمية غير معينة

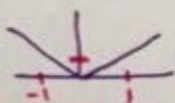
$$\xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{x^2}{x^2 + 1}} - 1 = \sqrt{1} - 1 = 0$$

مشتقة
درجة البسط

20) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x}{x^2 + 3} = \frac{e^\infty + \infty}{\infty + 3} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{2x} \xrightarrow{\text{لوبيتال}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{2} = \infty$
 نشتد هرتين طرف x^2

21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = \frac{3}{2}$
 1°

22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + 4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{2x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{2x}$
 $= \frac{5}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2} + \frac{4}{2} = \frac{9}{2}$
 1°

23) إذا كان $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ فإن المذ في الدالة متماثل حول -1.
 a) محور x
 b) محور y
 c) نقطة الاصل
 d) المستقيم $y=x$

 $\lim_{x \rightarrow -1} |x| = \lim_{x \rightarrow 1} |x|$

24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{x}\right)^2 = 5^2 = 25$
 0°

25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(4 + \frac{7}{x}\right) \left(2 + \frac{5}{x}\right) = 2 \cdot 4 = 8$

تجارب على الاتصال

26) $\lim f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & ; x \neq 1 \\ a & ; x = 1 \end{cases}$

ما قيمة a التي تجعل $f(x)$ دالة متصلة على \mathbb{R} ؟

نكتفي فقط بل الشرط الثاني للاتصال وجود النهاية

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 1 \cdot 2 = 2$ $a = 2$

27

$k^2 = 3k$

$k^2 - 3k = 0$

$k(k-3) = 0$

$k=0$ $k=3$

$f(x) = \begin{cases} k^2 x & ; x < 1 \\ 3kx & ; x \geq 1 \end{cases}$ ما قيمة k التي تجعل الدالة متصلة أكبر أو أصغر

النهاية اليمنى = النهاية اليسرى

$\lim_{x \rightarrow 1^+} 3kx = \lim_{x \rightarrow 1^-} k^2 x \Rightarrow 3k - k^2 = 0$
 $k(3-k) = 0 \Rightarrow k=0$ أو $k=3$

28) قيمة الثابت c التي تجعل الدالة متصلة $f(x) = \begin{cases} x+3 & ; x \leq 2 \\ cx+6 & ; x > 2 \end{cases}$

اليمين = اليسرى $\Rightarrow 2+3 = 2c+6 \Rightarrow 2c = 5-6 \Rightarrow c = -\frac{1}{2}$

نقاش

اليوم 29

٤) الاشتقاق :

الدالة y	$y = a$	$y = ax$	$y = x^n$
المشتقة y'	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{dy}{dx} = a$	$\frac{dy}{dx} = n x^{n-1}$

أوجد المشتقة الأولى للدالة

1) $y = x^3 \implies y' = 3x^2$

2) $y = 6\sqrt[3]{x} \implies y = 6(x)^{\frac{1}{3}} \implies y' = 6 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}$
 $= 2x^{-\frac{2}{3}}$

مثال

الحل

الدالة	$y = f(x) \pm g(x)$
المشتقة	$\frac{dy}{dx} = f'(x) \pm g'(x)$

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = 5x^3 + 7x - 2$

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2 + 7$$

مثال :

الحل :

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = x^{-5} + x^{\frac{2}{3}}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -5x^{-5-1} + \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} \\ &= -5x^{-6} + \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

مثال :

الحل :

أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3}$

لا بد من تعديل الدالة :

$$\begin{aligned} y &= x^{\frac{2}{3}} + x^{-3} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}-1} + (-3x^{-3-1}) \\ &= \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} - 3x^{-4} \end{aligned}$$

مثال :

الحل :

قوانين التفاضل

١ تعريف المشتقة :- $m = f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

مثال ١- أوجد $f'(x)$ إذا كان $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$

$f'(x) = \cos x \iff F(x) = \sin x$

$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{3(x+h)} - e^{3x}}{h}$

مثال ١- أوجد $f'(x)$ إذا كان

$f'(x) = 3e^{3x} \iff F(x) = e^{3x}$

قوانين الاشتقاق :-

١ $y' = \frac{dy}{dx} = nx^{n-1} \iff y = f(x) = x^n$

مثال :-

① $y' = 3x^2 \iff y = x^3$

② $y' = 5x^4 + 3 \iff y = x^5 + 3x + 5$

③ $y' = 5 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} \iff y = 5(x)^{\frac{1}{3}} \iff y = 5\sqrt[3]{x}$

$y' = \frac{5}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\iff y' = \frac{5}{3} x^{-\frac{2}{3}} \iff y = 5 \cdot \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1}$

٢ مشتقة حاصل ضرب دالتين

$F(x) = F_1 F_2$

$F'(x) = \underbrace{F_1(x)}_{\text{الاولى}} \underbrace{F_2'(x)}_{\text{مشتقة الثانية}} + \underbrace{F_2(x)}_{\text{الثانية}} \underbrace{F_1'(x)}_{\text{مشتقة الاولى}}$

مثال :-

$f(x) = (3x-2)(4x+1)$
 $f'(x) = (3x-1)(4) + (4x+1)(3) = 24x - 1$

$F'(x) = \frac{\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$F(x) = \frac{F_1}{F_2}$

مثال $y = \frac{x^7}{2x-1} \Rightarrow y' = \frac{(2x-1)(7x^6) - x^7(2)}{(2x-1)^2} = \frac{12x^7 - 7x^6}{(2x-1)^2}$

مثال ٢ $\frac{14x^7 - 7x^6 - 2x^7}{(2x-1)^2}$

٣ مشتقة دالة مرفوعة لأس

$F'(x) = n[f(x)]^{n-1} f'(x)$

$F(x) = [f(x)]^n$

مثال ١-

$F(x) = (x^5 + 2x^3 + 1)^7$

$F'(x) = 7(x^5 + 2x^3 + 1)^6 \cdot (5x^4 + 6x^2 + 0)$

مشتقة الدالة

مشتقة ما بداخل التوس

مثال: مشتقة العدد الثابت صفر

$$P(x) = 3$$

$$P'(x) = 0$$

مشتقة القوى:

نزل الأس ونطرح منه واحد

مثال:

$$P(x) = x^4$$

$$P'(x) = 4x^3$$

مشتقها

مشتقة حاصل الجمع ..
تشت كل واحد كالتالي
مثال:

$$P(x) = 4x^2 + 2$$

$$P'(x) = 2 \cdot 4x^1 + 0$$

$$= 8x$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = 5x^3 + 4 \quad (a)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 5(3)x^{3-1} \\ &= 15x^2 \end{aligned}$$

أوجد مشتقة كل دالة مما يأتي:

$$f(x) = x^9 \quad (a)$$

الدالة المعطاة	$f(x) = x^9$
قاعدة مشتقة القوة	$f'(x) = 9x^{9-1}$
بسّط	$= 9x^8$

Photo
Grid

6. اوجد المشتقة:

$$y = \sqrt[3]{x^7}$$

$$y = \sqrt[3]{x^7}$$

عند تحويل جذر إلى أس
نقسم الأس لداخلي
على الخارجي

$$y = x^{\frac{7}{3}}$$

$$\dot{y} = \frac{7}{3} x^{\frac{7}{3} - 1}$$

$$= \frac{7}{3} x^{\frac{4}{3}}$$

نضرب في 3

$$= \frac{7}{3} \sqrt[3]{x^4}$$

وعلين يكون على صورة الصورة

Photo
Grid

4. إذا كانت $f(x) = \frac{7}{2} \sqrt[3]{x^2}$ فإن $\dot{f}(x)$ يساوي؟

(أ) $\frac{21}{2}$

(ب) $\frac{10x^{\frac{5}{3}}}{35x^{45}}$

(ج) $\frac{10}{35}$

(د) $\frac{35x^{\frac{2}{3}}}{6}$

$$f(x) = \frac{7}{2} \sqrt[3]{x^2}$$

$$= \frac{7}{2} (x)^{\frac{2}{3}}$$

$\frac{5}{3} \times \frac{7}{2} (x)^{\frac{5}{3}-1}$

$5-3=2$

$\frac{2}{3}$

$$f'(x) = \frac{35}{6} x^{\frac{2}{3}}$$

Photo
Grid

5. اوجد مشتقة :

$$y = (x^2 + 1)^6$$

$$y = (x^2 + 1)^6$$

قاعدة مشتقة القوس :
مشتقة لقوس في مشتقة خارجها
القوس

$$y' = 6 (x^2 + 1)^{6-1} \cdot \underbrace{2x}_{\text{مشتقة}}$$

$$y' = 12x (x^2 + 1)^5$$

Photo
Grid

8. اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت

$$y = (x^3 + 1)(2x^3 - 2)$$

(أ) $2x$

(ب) $12x^5$

(ج) $10x^4 + 6x^2 - 4x$

(د) $6x^2$

①
 $y = (x^3 + 1)(2x^3 - 2)$
↓
مشتقة
↓
 $3x^2$
↓
الأول

②
 $y = (x^3 + 1)(2x^3 - 2)$
↓
مشتقة
↓
 $6x^2$
↓
الثاني

ما هو استنتاج حاصل ضرب
الأول \times مشتقة الثاني + مشتقة الأول \times الثاني

$$(x^3 + 1)(6x^2) + 3x^2(2x^3 - 2)$$
$$6x^5 + 6x^2 + 6x^5 - 6x^2$$
$$= 12x^5$$

Photo
Grid

15. إذا كانت

$y = (\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})$ فإن y تساوي :

(أ) -1

(ب) 1

(ج) $(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1)(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}})$

(د) $(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1) + (1 - \frac{1}{2\sqrt{x}})$

كقوله من فرغ صر بعين

$$y = (\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})$$

$$y = (1^2 - \sqrt{x}^2)$$

$$y = \begin{array}{c} 1 \\ \downarrow \\ 0 \end{array} - \begin{array}{c} x \\ \downarrow \\ 1 \end{array}$$

النتيجة
التي تأتي

Photo
Grid

$$h(x) = \frac{x^2 + 8}{x^3 - 2}$$

افترض أن: $f(x) = x^2 + 8$, $g(x) = x^3 - 2$.

من الفرض $f(x) = x^2 + 8$

قواعد مشتقات القوة ، والثابت ، والمجموع $f'(x) = 2x$

من الفرض $g(x) = x^3 - 2$

قواعد مشتقات القوة ، والثابت ، والفرق $g'(x) = 3x^2$

استعمل $f(x), f'(x), g(x), g'(x)$ لإيجاد مشتقة $h(x)$.

قاعدة مشتقة القسمة $h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$

عوض $= \frac{2x(x^3 - 2) - (x^2 + 8)3x^2}{(x^3 - 2)^2}$

فك الأقواس ، ثم بسط $= \frac{-x^4 - 24x^2 - 4x}{(x^3 - 2)^2}$

أوجد المشتقة الأولى للدالة

$$y = \frac{4x^2 - x}{2x - 1}$$

المشتق

$$y = \frac{4x^2 - x}{2x - 1} \rightarrow \begin{matrix} (8x - 1) \\ (2) \end{matrix}$$

المقام مشتق البسط

$$y' = \frac{(8x - 1)(2x - 1) - 2(4x^2 - x)}{(2x - 1)^2}$$

المقام

$$\begin{array}{r} 8x - 1 \\ 2x - 1 \\ \hline 16x^2 + 1 \\ - 2x - 8x \end{array}$$

$$= \frac{16x^2 - 10x + 1}{(2x - 1)^2}$$

البسط

$$= \frac{(16x^2 + 1 - 10x) - (8x^2 - 2x)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{8x^2 - 8x + 1}{(2x - 1)^2}$$

PhotoGrid

$$y = \frac{4x^2 - x}{2x - 1} \rightarrow \begin{array}{l} \text{مشتق البسط} \\ (8x - 1) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} \text{مشتق المقام} \times 2 \\ \text{كل نغوصد بالقانون} \end{array}$$

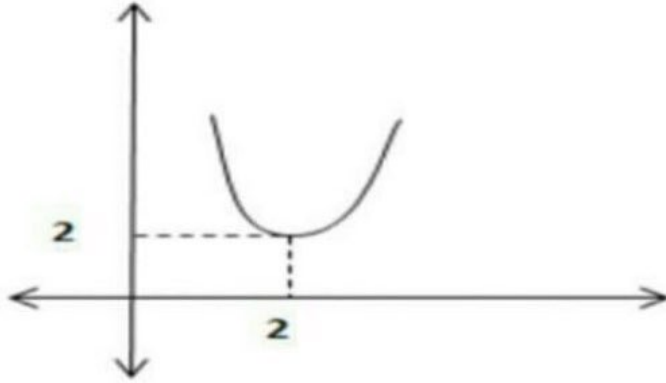
$$y' = \frac{(2x - 1)(8x - 1) - (4x^2 - x)(2)}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{16^2 - 2x - 8x + 1 - 8x^2 + 2x}{(2x - 1)^2}$$

$$y' = \frac{8x^2 - 8x + 1}{(2x - 1)^2}$$



12. إذا كان الرسم التالي للدالة $f(x)$ فإن مشتقتها تساوي :

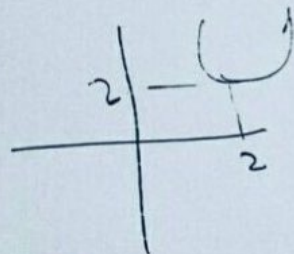


من الرسم النقطة $(2, 2)$
 انحناء رأسي لنفسه
 انحناء أفقي
 يعني
 عكس كاسه

$$P(x) = (x - 2)^2 + 2$$

$$P'(x) = 2(x - 2) + 0$$

$$P'(x) = 2x - 4$$



من خواص القطع
 المكافئ
 فتحة القطع لأعلى
 لا حد له، له قمة، لا زوايا
 لا من له، له، له، له

Photo
Grid

3. إذا كانت
 $g(-3) = 5, f(-3) = 1, g(-3) = 3, f(-3) = 2$
 فإن $(fg)'(-3)$ تساوي :
 13 أ
 14 ب
 15 ج
 16 د

$$\begin{aligned}(fg)'(-3) &= f'(-3) \cdot g(-3) + g'(-3) f(-3) \\ &= 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \\ &= 3 + 10 \\ &= 13\end{aligned}$$

إذا كانت

$$\begin{aligned}f(-3) &= 2 & g(-3) &= 3 \\ f'(-3) &= 1 & g'(-3) &= 5\end{aligned}$$

فإن

$$\begin{aligned}\text{① } (fg)'(-3) &= f'g + g'f \\ &= 2(5) + 3(1) = 10 + 3 = 13\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{② } \left(\frac{f}{g}\right)'(-3) &= \frac{gf' - g'f}{(g')^2} \\ &= \frac{3(1) - 2(5)}{(3)^2} = \frac{3 - 10}{9} = -\frac{7}{9}\end{aligned}$$

السبب

Photo
Grid

2. اعتبر الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، حيث $a > 0$ أي العبارات التالية قد لا تكون صحيحة :

(أ) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) < 0$

(ب) يوجد x_0 بحيث $f(x_0) > 0$

(ج) يوجد x_0 بحيث $\dot{f}(x_0) < 0$

(د) يوجد x_0 بحيث $\dot{f}(x_0) > 0$

هنا يبغى العبارة الخاطئة

جميع العبارات ممكنة ما عدا

$$f'(x) < 0$$

لانه معطيني بالسؤال a موجب و اذا اشتقيت
الدالة بتعطيني دالة من الدرجة الثانية
اذن المشتقة موجبه اكبر الصفر وليست اصغر
 $f'(x) > 0$

9. اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y^2 = xy + 2x^2$

(أ) $\frac{2y-x}{y+4x}$

(ب) $2y - x$

(ج) $\frac{y+4x}{2y-x}$

(د) $y + 4x$

وش الاشتقاق الضمني ؟
اشتق عادي بالنسبة ل x
مشتقه الاكس ب 1
واذا جيت عند واي اشتقها واحط dy/dx

هنا الاكس والواي ضمن بعض
اذا جات الواي والاكس مع بعض
اشتق اشتقاق ضمني

$$(x)'=1$$

$$(y)'=dy/dx$$

Photo
Grid

$$y' = xy + 2x^2$$

نقسم طرفي المعادلة
بـ y

$$2y \frac{dy}{dx} = 1xy + x \frac{dy}{dx} + 4x$$

$$2y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = y + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} [2y - x] = y + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 4x}{2y - x}$$

ايجاد $\frac{dy}{dx}$

لا يمكن فصل واي عن ايس

استفاد من صيغة مشتق x و y

اذا اشتقينا y ← نضيف
بجده $\frac{dy}{dx}$

~~$2y \frac{dy}{dx}$~~

بالاستقامة $\Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = x \frac{dy}{dx} + y + 4x$

حاصل ضرب x و y $\frac{dy}{dx}$

$$2y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} = y + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} (2y - x) = y + 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y + 4x}{2y - x}$$

Photo
Grid

10. اوجد $\frac{dy}{dx}$ إذا كانت $y = e^2$

- (أ) $2e^2$
- (ب) e^3
- (ج) $2e$
- (د) 0

هنا مانعتبرها دالة اسية لانه لا يوجد متغير ف الاس

اي اس 2 عدد ثابت
ومشتقة العدد الثابت بصفر

Photo
Grid

11. اوجد $\frac{dz}{dy}$ إذا كانت $z = xy + x^2y + y^2x$

(أ) $x + x^2 + 2xy$

(ب) $1 + x^2 + 2y$

(ج) $y + 2xy + y^2$

(د) $1 + 2xy + x^2$

هنا اشتقاق جزئي بالنسبة لـ y

اشتق حسب المطلوب وكل ما عده اعتبره ثابت
والمطلوب هنا بالنسبة لـ y يعني اعتبر الاكس
ثابت

Handwritten solution on a blue background:

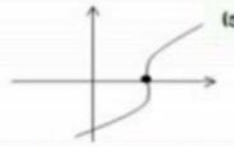
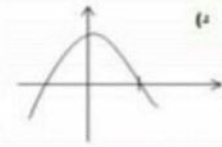
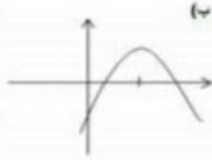
$$z = xy + x^2y + y^2x$$
$$\frac{dz}{dy} = x + x^2 + 2yx$$

Annotations in the handwritten solution:

- Under xy : $\frac{d}{dy} xy = x$ (labeled "معامل y ")
- Under x^2y : $\frac{d}{dy} x^2y = x^2$ (labeled "معامل y ")
- Under y^2x : $\frac{d}{dy} y^2x = 2yx$ (labeled "مشتق y^2 ")

السؤال

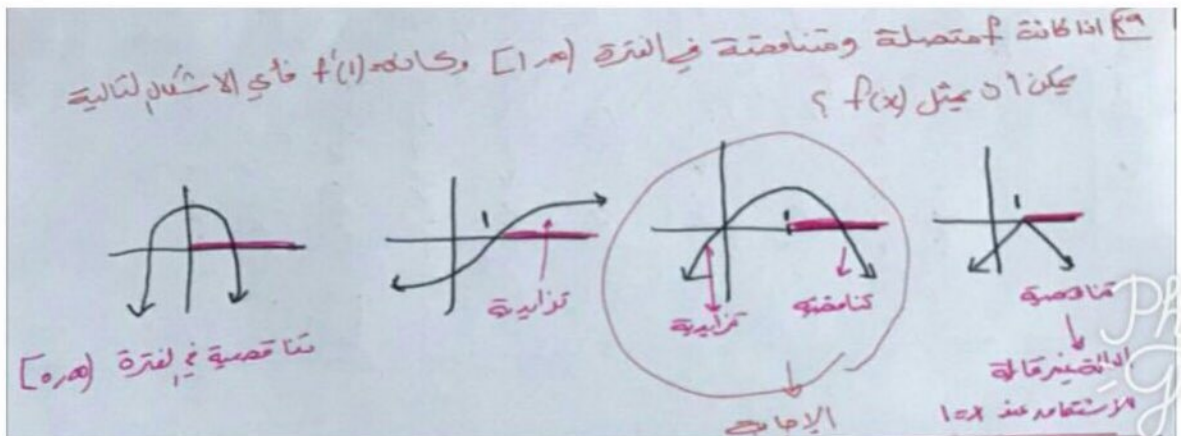
1. إذا كانت الدالة f متصلة ومتناقصة في الفترة $[1, \infty)$ ، وكان $f(1) = 0$ ، فأَي الأشكال التالية يمكن أن يمثل $f(x)$ ؟



معطينا بالسؤال ان الدالة متناقصة في الفترة من 1 الى موجب ما لانهاية ومنها نستبعد الخيار ج و د لان الدالة في (ج) متزايدة و(د) متناقصة من الصفر الى موجب ما لانهاية

يبقى عندي أ وب
الاحظ ان أ دالة مقياس والمشتقة غير معرفة عند 1

اذن الاجابه ب



7. اوجد نقطة الانقلاب للدالة :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

(أ) (16,4)

(ب) (2,7)

(ج) (3,18)

(د) (4,16)

نقطة الانقلاب نوجدتها من اصفار المشتقة
الثانية

نشق الدالة مرتين ونساوي المشتقة الثانية
بالصفر

ثم نعوض بالنتائج في الدالة الاصلية

وش معنى انقلاب

يحدث عندها تغير في إشارة الانحناء؛ أي أن
المنحنى يتغير من كونه محدباً إلى أعلى
(انحناء موجب) ويصير محدباً إلى أسفل
(انحناء سالب)، أو العكس.

Photo
Grid

نقطة الانقلاب نوجدتها من اصفار المشتقة الثانية...
نقطة الانقلاب =

(x,y)

x عبارة صفر المشتقة الثانية

ولاعبارة عن قيمة الدالة عند صفر المشتقة

$$F(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$$

لوجد المشتقة الثانية وصفرها ثم نضع في الدالة لاصلها

$$F'(x) = 3x^2 - 24x + 36$$

المشتقة الاولى

$$F''(x) = 6x - 24$$

المشتقة الثانية

$$6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$$

صفر المشتقة الثانية

$$F(4) = (4)^3 - 12(4)^2 + 36(4)$$

نضع في الدالة لاصلها

$$= 16$$

نقطة الانقلاب (4, 16)

(ROCO)[®]

Photo
Grid

14. إذا كانت $y = e^{2x+1}$ فإن $\frac{d^{100}y}{dx^{100}}$ عند $x=0$ تساوي

- (أ) $200e$
 (ب) $e^{2^{100}}$
 (ج) $100^2 e$
 (د) 0

$$y = e^{2x+1}, x=0$$

دالة أُسية مُضَاعَفَة = مشتقة الدرس x الدالة نفسها

المشتقة الأولى $y' = 2e^{2x+1}$

المشتقة الثانية $y'' = 2 \cdot 2e^{2x+1} = 2^2 e^{2x+1}$

المشتقة الثالثة $y''' = 2 \cdot 2 \cdot 2e^{2x+1} = 2^3 e^{2x+1}$

المشتقة 100 $\frac{dy^{100}}{dx^{100}} = 2^{100} e^{2x+1}$

عند $x=0$ $\frac{dy^{100}}{dx^{100}} = 2^{100} e^{2(0)+1}$

$$= 2^{100} e$$

Photo
Grid

هنا نبدأ نوجد المشتقة الاولى لدالة الاسية
وهي عبارة عن مشتقة الاس في الدالة الاسية
نفسها

مشتقة الاس ب 2 وننزل الدالة مثل ما هي

ثم نوجد المشتقة الثانية ويكون مشتقه الاس ب
2 في 2 في الدالة نفسها
هذا بيساوي 2 اس 2 في الدالة الاصلية

وعندما نوجد المشتقة الثالثة بنلاحظ انها
تساوي 2 اس 3 في الدالة الاصلية

وهكذا الى المشتقة 100
بتكون 2 اس 100 في الدالة الاصلية

نعوض بقيمة اكس بصفر
تطلع ب 2 اس 100 فـ e

٥) مشتقة الدوال المثلثية :-

$$1) f(x) = \sin(3x+1)$$

$$f'(x) = \cos(3x+1) \cdot (3)$$

مشتقة الزاوية مشتقة الدالة

$$2) f(x) = \tan x^{-2}$$

$$f'(x) = (\sec^2 x^{-2}) \cdot (-2x^{-3}) = -\frac{2\sec^2 x}{x^3}$$

مشتقة الدالة مشتقة الزاوية

$$3) f(x) = \sec(3x^2+1)$$

$$f'(x) = \sec(3x^2+1) \tan(3x^2+1) \cdot (6x)$$

مشتقة الدالة مشتقة الزاوية

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x \\ \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x \\ \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x \\ \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x \end{aligned}$$

٦) الدوال الأسية واللوغاريتمية :-

$$y = \ln x$$

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x$$

$$y' = \frac{1}{x \cdot \log_a a}$$

$$y = e^x$$

$$y = e^x$$

$$y = a^x$$

$$y = a^x \log a$$

أمثلة :-

$$1) y = 2(3)^{3x+1} \Rightarrow y' = 2(3)^{3x+1} \cdot (3) \cdot \log 3$$

لوالأس مشتقة الأس الدالة الأسية

$$2) y = e^{5x^2+x} \Rightarrow y' = e^{5x^2+x} \cdot (10x+1)$$

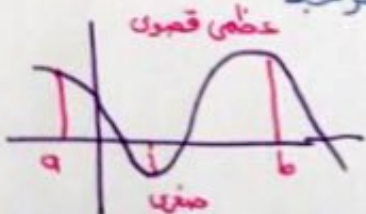
مشتقة الأس الدالة الأسية

$$3) y = \ln(5x+1) = y' = \frac{1}{5x+1} \cdot (5)$$

$$4) y = \ln \frac{3}{3x^2} \Rightarrow y' = \ln 3 - \ln 3x^2 = 0 - \frac{1}{3x^2} (6x) = -\frac{6x}{3x^2} = -\frac{2}{x}$$

٧) نظرية القيمة القصوى :-

إذا كانت $f(x)$ متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$
فإن لها قيمة عظمى وصغرى على الفترة $[a, b]$
وذلك إما عند إحدى طرفي الفترة أو عند إحدى
النقاط الحرجة



مثال :-

$$f(x) = 2x^2 + 8x \quad ; \quad [-5, 0]$$

لايجاد النقط الحرجة

$$f'(x) = 4x + 8 \quad f'(x) = 0$$

$$4x + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$$

عظمى

$$f(-5) = 2(-5)^2 + 8(-5) = 10$$

$$f(0) = 0$$

$$f(-2) = 8 - 16 = -8$$

صغرى

$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sec x \text{ مقلوب } \cos x$$

تقاربن على الامتداد

اذا كانت $f(x) = \tan^2 x$ فإن $f'(x)$

$$f(x) = (\tan x)^2 \Rightarrow f'(x) = 2 \tan x \sec^2 x$$

$$f'(\frac{\pi}{4}) = 2 \tan(\frac{\pi}{4}) \sec^2(\frac{\pi}{4}) = 2(1) (\frac{2}{\sqrt{2}})^2 = 4$$

قيمة النهاية $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ متساوي

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

اذا كانت $f(-3) = 2$ و $g(-3) = 3$

$f'(-3) = 1$ و $g'(-3) = 5$

فإن $(fg)'(-3)$ متساوي

$$(fg)' = f g' + g f'$$

$$= 2 \cdot 5 + 3 \cdot 1 = 10 + 3 = 13$$

أوجد مشتقة الدالة

1 $y = \ln(x^2 - e) \Rightarrow y' = \frac{1}{x^2 - e} \cdot (2x)$

2 $y = \ln(\ln x) \Rightarrow y' = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$

3 $y = e^{\sqrt{x}} \rightarrow y' = e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

4 $y = e^{x^2} \rightarrow y' = e^{x^2} \cdot (2x) = 2x e^{x^2}$

5 $y = \sqrt{2-x} \Rightarrow y' = \frac{-1}{2\sqrt{2-x}}$

6 $y = \frac{5x^2}{(x+1)^2} \Rightarrow y = \frac{5}{x^2(x+1)} = \frac{5}{x^3 + x^2}$

مشتقة باستخدام قاعدة الخبز

$$y' = \frac{-5(3x^2 + 2x)}{(x^3 + x^2)^2} = \frac{-15x - 10}{x^2 + x}$$

1 معادلة ميل منحنى $y = 2x^2$ عند

أي نقطة عليه $y' = 4x$

2 ما ميل مماس منحنى $y = x^3 + 7$ عند النقطة $(3, 34)$

$$y' = 3x^2 \rightarrow y'(3) = 3(3)^2 = 27$$

3 مشتقة الدالة

$$f(x) = (-7x^2 + 4)(x - 2)$$

$$y' = (-7x^2 + 4)(1) + (x - 2)(-14x) = -7x^2 + 4 - 14x^2 + 28x = -21x^2 + 28x + 4$$

4 ما مشتقة الدالة $f(x) = 5\sqrt[3]{x^8}$

$$y = 5(x)^{\frac{8}{3}}$$

$$y' = 5 \cdot \frac{8}{3} x^{\frac{8}{3} - 1} = \frac{40}{3} x^{\frac{5}{3}}$$

5 إذا كان $y = x^x$ فإن y' متساوي

بأخذنا للطرفين $\log y = \log x^x$

$$\log y = x \log x$$

بالاشتقاق $\frac{1}{y} y' = \log x + x \cdot \frac{1}{x}$

$$y' = x^x [\log x + 1]$$

6 إذا كانت $y = (\sqrt{x} + 1)(1 - \sqrt{x})$ فإن y'

$$y = -(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)$$

$$y = -(x - 1) \Rightarrow y' = -1$$

7 إذا كانت $2x + 4y = 2$ فإن المشتقة متساوي

$$x + 2y = 1 \Rightarrow 2y = 1 - x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1-x}{2} \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}$$

نقاش

اليوم 30

٥) التكامل :

لتكن u و v دالتين قابله للإشتقاق في x :

$$\int a \, dx = ax + c$$

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int k u \, dx = k \int u \, dx$$

$$\int [u \pm v] \, dx = \int u \, dx \pm \int v \, dx$$

أحسب التكاملات التالية

مثال:

$$\begin{aligned} 1) \int (5x^3 + 2x^2 + 7x - 2) \, dx \\ = \frac{5x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{7x^2}{2} - 2x + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int \left(5x^4 + \frac{2}{x^2} + \sqrt{x} - 2 \right) \, dx \\ = \int \left(5x^4 + 2x^{-2} + x^{\frac{1}{2}} - 2 \right) \, dx \\ = \frac{5x^5}{5} + \frac{2x^{-1}}{-1} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2x + c \\ = x^5 - \frac{2}{x} - \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - 2x + c \end{aligned}$$

$$\int (ax + b)^n \, dx = \frac{(ax + b)^{n+1}}{a(n+1)} + c$$

أحسب التكاملات التالية

مثال:

$$\begin{aligned} \int (5x + 11)^2 \, dx &= \frac{(5x + 11)^3}{5(3)} + c \\ &= \frac{(5x + 11)^3}{15} + c \end{aligned}$$

جد تکامل کل ممایلی:

2. $\int x^{-5} dx$.

4. $\int \sqrt{x} dx$.

$$\textcircled{2} \int x^{-5} dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + C$$

$$= \frac{1}{-4} x^{-4} + C$$

$$= -\frac{1}{4x^4} + C$$

$$\textcircled{4} \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} + C$$

* نحوه لایس هم تکامل هم نرجه

جزر

$$\int (x-1)^2 dx = .6$$

$$\frac{1}{x-2} + c \quad (a)$$

$$2(x-2)^3 + c \quad (b)$$

$$\frac{(x-2)^3}{3} + c \quad (c)$$

$$x^2 - x + c \quad (d)$$

$$(6) \int (x-1)^2 dx =$$

$$\frac{(x-1)^{2+1}}{2+1} + C$$

$$\frac{(x-1)^3}{3} + C \quad \text{الحل ج.}$$

* ملاحظة: بالملف فيه خطأ في الخيار ج

$$\frac{(x-2)^3}{3} + c \quad \text{تدريلا من}$$

$$\frac{(x-1)^3}{3} \quad \text{الى}$$

$$\int (x^2 + 2x)^3 (2x + 2) dx = .1$$

$$6(x^2 + 2x) + c \quad (i)$$

$$\frac{(x^2 + 2x)^4}{4} + c \quad (b)$$

$$\frac{(x^2 + 2x)^4}{4} - \frac{(2x + 2)^2}{2} + c \quad (c)$$

$$\frac{(x^2 + 2x)^4}{4} (x^2 + 2x) + c \quad (d)$$

$$\int (x^2 + 2x)^3 (2x + 2) dx$$

الدالة

المشتقة

- عند تكامل دالة مرفوعة للأس في مشتقتها انضرب في

للأس 1 ونقسم على الأس الجديد

$$= \frac{(x^2 + 2x)^{3+1}}{3+1} + c = \frac{(x^2 + 2x)^4}{4} + c$$

$$\int (x^2 + 2x)^3 (2x + 2) dx =$$

الدالة الأصلية $x^2 + 2x \rightarrow 2x + 2$ مشتقة

نكامل فقط الدالة الأصلية ونجاء هل مشتقة

$$\int (x^2 + 2x)^3 = \frac{(x^2 + 2x)^{3+1}}{3+1} + C$$

$$= \frac{1}{4} (x^2 + 2x)^4 + C$$

خذي الدالة ذات الاس الاكبر

واشتقي المقدار اللي داخل القوس

لو طلع نفس المقدار الثاني تكون الدالة في مشتقتها

احيانا ياخذو عامل مشترك ويحذفوه هنا لازم انتي تجيبه وتضربي خارج التكامل في مقله به

Photo
Grid

$(2+x^2) \rightarrow$ الدالة الأصلية

$2x \rightarrow$ مشتقها

صوبه دمج السؤال فقط
2
وكن مضيف

$$\frac{1}{2} \int 2x (2+x^2)^2$$

إذا أضفنا 2 × 2 بد أن مضيف $\frac{1}{2}$

فأخرج التكاملاً

$$\frac{1}{2} \int \underbrace{(2+x^2)^2}_{\text{نأخذ صافف}} \leftarrow$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(2+x^2)^3}{3} + C$$

$$= \frac{1}{6} (2+x^2)^3 + C$$

$$1. \int_1^2 3x^2 dx .$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 3x^2 dx &= \frac{3}{3} x^3 \Big|_1^2 \\ &= (2)^3 - (1)^3 \\ &= 7 \end{aligned}$$

Photo
Grid

3. إذا كان $\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x}) dx = 1$ فما قيمة k :

(أ) -2

(ب) 0

(ج) -1

(د) 1

$$\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x}) dx = 1$$

$$\left[\frac{kx^{2+1}}{2+1} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right]_0^1 = 1$$

$$\left[\frac{kx^3}{3} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1$$

$$\left[\frac{k}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = 1$$

نلاحظ

$$\frac{k}{3}(1) + \frac{2}{3}(1) - \left(\frac{k}{3}(0) + \frac{2}{3}(0) \right) = 1$$

$$\frac{k}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\frac{k}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{k = 1}$$

2. أوجد قيمة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2}$

(أ) 0

(ب) 1

(ج) ∞

(د) غير معرف

او ممكن نحلها بطريقة ثانية

لو نلاحظ حدود التكامل من سالب الى موجب

والدالة النهائية فردية مباشرة الحل صفر

عبارة عن تكامل دالة اسية مرفوعة لاس ومضروبه في مشتقة الاس

ولكن ينقص المشتقة سالب 2
لذلك نضرب خارج التكامل بسالب نص
وداخل التكامل بسالب 2

ويكون ناتج التكامل عبارة عن تكامل الدالة
الاسية

ثم نعوض بحدود التكامل

Photo
Grid

١٠٣. اوجد قيمة التكامل $\int_1^2 (x - 1) dx$

$\frac{1}{4}$ ○

$\frac{1}{3}$ ○

$\frac{1}{2}$ ○

$\frac{1}{5}$ ○

The image shows a handwritten solution on a green background. It starts with the integral $\int_1^2 (x-1) dx$ and shows the antiderivative $\frac{1}{2}(x-1)^2$ evaluated from 1 to 2. The calculation is $\frac{1}{2}(2-1)^2 - \frac{1}{2}(1-1)^2$, which simplifies to $\frac{1}{2}$. A 'Photo Grid' watermark is visible in the bottom right corner of the handwritten area.

$$\int_1^2 (x-1) dx = \frac{1}{2} (x-1)^2 \Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2} (2-1)^2 - \frac{1}{2} (1-1)^2$$
$$= \frac{1}{2}$$

8. أوجد قيمة التكامل $\int_1^2 |x - 1| dx$

- (أ) 1
- (ب) $\frac{1}{2}$
- (ج) 0
- (د) $\frac{3}{2}$

اولا نعيد تعريف دالة المقياس عن يمين ويسار
صفر القيمة المطلقة
ونأخذ الدالة التي تنتمي لها فترة التكامل
ونكاملها

ثم نعوض بحدود التكامل

Photo
Grid

أوجد قيمة التكامل

$$\int_1^2 |x-1| dx$$

أولاً: نعيد تعريف دالة القيمة المطلقة وتأخذ الفترة

$$|x-1|$$

$$\int_1^2 |x-1| dx$$

أولاً: نعيد تعريف دالة القيمة المطلقة وتأخذ الفترة

المستوى تنقسم الفترة حدود التكامل

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ 1-x & x < 1 \end{cases}$$

حدود التكامل تنقسم للفترة $x \geq 1$ إذنا تأخذ

المعادلة الأولى ونكاملها

$$\int_1^2 x-1 dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_1^2$$

$$= \frac{(2)^2}{2} - 2 - \left[\frac{1}{2} - 1 \right]$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2}$$

7. أوجد $\int_2^2 2(x^2 + 1)^3 x dx$

(أ) 156.25

(ب) 125

(ج) 0

(د) 625

صفر مباشرة اذا تساوت حدود التكامل

4. إذا كان $\int_1^6 f(x)dx = 2$ فإن $\int_3^6 f(x)dx = 5$ ، فماذا يساوي $\int_1^3 2f(x)dx$:

- (أ) -6
- (ب) 3
- (ج) 6
- (د) -3

بإستخدام خاصية توزيع حدود التكامل
ثم نعوض بقيم التكاملات المعطاه

ومنها نوجد قيمة التكامل بالفترة من 1 الى 3
ونضربه في 2

Photo
Grid

من خواص التكامل

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_1^6 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$$

معطى \downarrow بالستوان

$$2 = x + 5$$

$$x = -3$$

$$\therefore \int_1^3 2f(x) dx = 2 \int_1^3 f(x) dx = 2 \times (-3)$$

المطلوب \downarrow

$$= -6$$

من خواص التكامل

$$\int_1^6 f(x) dx = 2, \int_3^6 f(x) dx = 5$$

$$\int_1^3 2f(x) dx = ??$$

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

$$\int_1^6 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$$

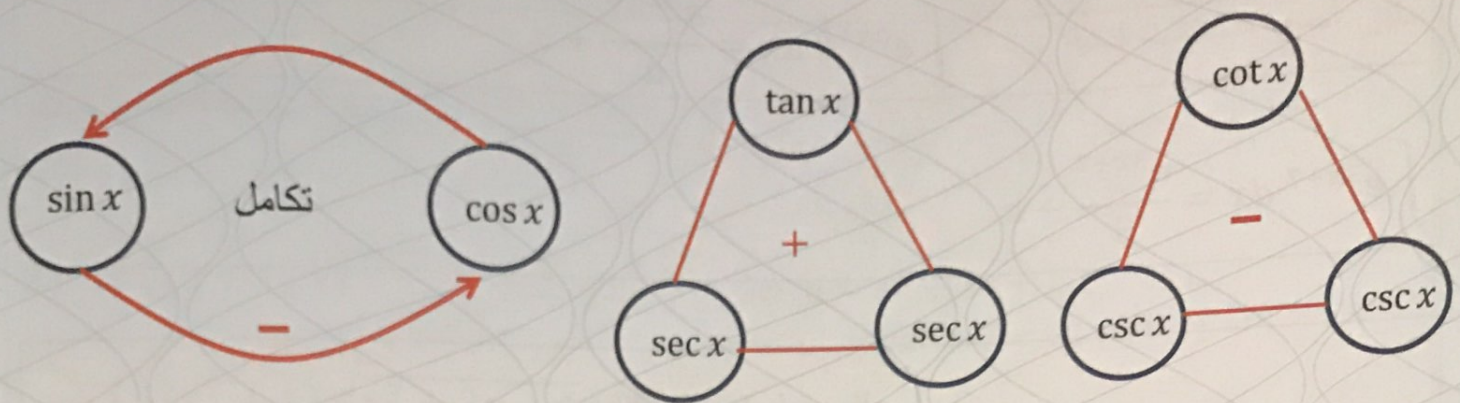
$$2 = \int_1^3 f(x) dx + 5$$

$$\int_1^3 f(x) dx = -3$$

$$\Rightarrow \int_1^3 2f(x) dx = 2 \int_1^3 f(x) dx = 2 \times (-3) = -6$$

Photo
Grid

تكامل الدوال المثلثية :



تكامل حاصل ضرب أي دالتين يساوي الدالة الثالثة في المثلث مع مراعاة الاشارات.

$\int \sin u \, dx = \frac{-\cos u}{u'} + c$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$	$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$
$\int \cos u \, dx = \frac{\sin u}{u'} + c$	$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$	$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$

$$\int \sin(x^2) x dx \quad .12$$

$$-\frac{1}{2} \cos(x^2) + c \quad (i)$$

$$\cos(x^2) \frac{x^2}{2} + c \quad (ii)$$

$$\frac{\sin^2(x^2)}{2} + c \quad (iii)$$

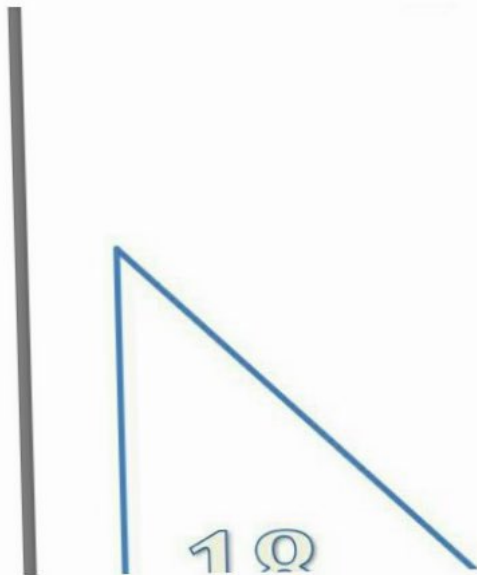
$$\frac{\cos^2(x)}{2} + c \quad (iv)$$

$$\frac{1}{2} \int 2x \sin(x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} [-\cos x^2] + c$$

$$= -\frac{1}{2} \cos x^2 + c$$

Photo
Grid



$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$\frac{3\sin^2 x}{2\cos^3 x} + C$$

$$\frac{1}{\cos^3 x} + C$$

$$\frac{1}{\cos x} + C$$

$$\ln |\cos x|$$

$$\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx$$

$$= \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx$$

$$= \int \tan x \sec x dx$$

$$= \sec x + C$$

$$= \frac{1}{\cos x} + C$$

Photo
Grid

5. إذا قذف جسم لأعلى ، يتم حساب أعلى نقطة يصل إليها المقذوف باستخدام :

- (أ) التفاضل
- (ب) التكامل
- (ج) الدالة الأسية
- (د) الدالة اللوغاريتمية

نستخدم التكامل في إيجاد المسافة او المساحة

بينما التفاضل في إيجاد السرعة

Photo
Grid

$$\int (5x+3)^{20} dx$$

الحل: :: الدالة من الدرجة n (أي a في $(ax+b)^n$)

$$\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1) \times \underset{\substack{\downarrow \\ \text{معامل } x}}{a}} + C$$

$$\therefore \int (5x+3)^{20} dx$$

$$= \frac{(5x+3)^{21}}{(21)(5)} + C = \frac{(5x+3)^{21}}{105} + C$$

$$\textcircled{2} \int (5x^2+3)^2 dx =$$

تفكك سريع

$$\int (25x^4 + 30x^2 + 9) dx$$

$$= x^5 + 10x^3 + 9x + C$$

Sultan

$$\textcircled{3} \int (x^2-4x+4)^{20} dx =$$

ملاحظة

حيلة صعبة هذه الدالة يمكن تبسيطها (20) في عملية بسيطة
الخطوة الأولى مربع كامل

$$\int (x-2)^{40} dx$$

$$\int (x-2)^{40} dx = \frac{(x-2)^{41}}{41} + C$$

$$\int (x^2 + x^3) dx \neq \int (x^2 + x^3)^2 dx$$

يوجد فرق كبير بينهم

Sultan

$$\textcircled{1} \int x^2 + x^3 dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$\textcircled{2} \int (x^2 + x^3)^2 dx = \int (x^4 + 2x^5 + x^6) dx$$

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{2x^6}{6} + \frac{x^7}{7} + C$$

Sultan



سلسلة التبسيط

رؤية مبتكرة ... لفهم أسهل

للاستفسار: 920000882

قواعد التكامل

① الدوال الأصلية والتكامل

$$\int f(x) dx = F(x)$$

$$① \int 5x^4 dx = \frac{5x^5}{5} + C$$

$$② \int x^{\frac{7}{5}} dx = \frac{x^{\frac{7}{5}+1}}{\frac{7}{5}+1} + C$$

$$= \frac{x^{\frac{12}{5}}}{\frac{12}{5}} + C = \frac{5}{12} x^{\frac{12}{5}}$$

$$③ \int \frac{1}{x^6} dx = \int x^{-6} dx = \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C$$

$$= \frac{x^{-5}}{-5} + C = -\frac{1}{5x^5} + C$$

② قاعدة (u) :- لتكن u قابلة للاشتقاق في x و n عدد مخالف -1 فيكون لدينا القلعة التالية

$$\int u' u^n dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$$

المشتقة الدالة

$$① \int \underbrace{6x^2}_{\text{المشتقة}} (\underbrace{2x^3-6}_{\text{الدالة}})^4 dx$$

$$= \frac{(2x^3-6)^5}{5} + C$$

$$② \int (x^2+1) \sqrt{x^3+3x+1} dx$$

$$u = x^3+3x+1 \Rightarrow u' = 3x^2+3 = 3(x^2+1)$$

$$\therefore \frac{1}{3} \int 3(x^2+1) \sqrt{x^3+3x+1} dx$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(x^3+3x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \sqrt{(x^3+3x+1)^3} + C$$

③ قاعدة (u) :-

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق في x فيكون لدينا بالقانون التالي :-

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln|u| + C$$

$$① \int \frac{2(2x^3+1)}{x^4+2x+1} dx$$

$$u = x^4+2x+1 \Rightarrow u' = 4x^3+2 = 2(2x^3+1)$$

$$\therefore \frac{1}{2} \int \frac{4x^3+2}{x^4+2x+1} dx$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^4+2x+1| + C$$

$$② \int \frac{4x e^{2x^2}}{e^{2x^2}+5} dx$$

$$u = e^{2x^2}+5 \Rightarrow u' = 4x(e^{2x^2})$$

المشتقة الدالة

$$\therefore \frac{1}{4} \int \frac{4x e^{2x^2}}{e^{2x^2}+5} dx = \frac{1}{4} \ln(e^{2x^2}+5) + C$$

④ قواعد تكامل الدوال المثلثية :-

$$\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + C$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + C$$

$$\int \sec^2 x dx = \tan x + C$$

$$\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$$

$$\int \sec x \tan x = \sec x + C$$

$$\int \csc x \cot x = -\csc x + C$$

$$\tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln \cos x$$

⑥ خواص التكامل :-

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (2)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (1)$$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \quad (3)$$

مثال: احسب التكامل التالي

$$\int_{-1}^2 |x| dx$$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-1}^2 |x| dx = \int_{-1}^0 -x dx + \int_0^2 x dx$$

$$= -\frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2$$

$$= +\frac{1}{2} + \frac{2^2}{2} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$$

⑦ المساحة تحت المنحنى :-

مثال: اوجد مساحه تحت المنحنى $y = 4x^3$ والمحور x بين $x=1$ و $x=3$

$$\int_1^3 4x^3 dx = 4 \frac{x^4}{4} \Big|_1^3 = (3)^4 - (1)^4 = 81 - 1 = 80$$



$$\int_{-1}^2 (-x^2 + 10) dx$$

$$= -\frac{x^3}{3} + 10x \Big|_{-1}^2 = \left(-\frac{2^3}{3} + 10(2) \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} - 10(-1) \right)$$

$$= -\frac{8}{3} + 20 - \frac{1}{3} + 10 = -\frac{3+30}{3} = -\frac{33}{3} = -11$$

⑧ تكامل الدالة الأسية :-

① $\int e^x dx = e^x + c$

② $\int x e^x dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$

$\Rightarrow u = e^{x^2} \quad u' = 2x e^{x^2}$

تستخدم في حالة ليس الدالة في مشتقتها

$$I_2 = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

$$I_1 = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x$$

⑨ التكامل بالتجزئ :-

$$\int x^2 e^x dx$$

$$u = x^2 \quad dv = e^x dx$$

$$du = 2x \quad v = e^x$$

$$I_1 = uv - \int v du = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx$$

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

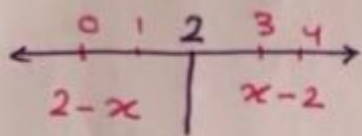
$$du = dx \quad v = e^x$$

خصائص دالة المقياس -

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & ; x \geq 0 \\ -x & ; x < 0 \end{cases}$$

التكامل الاتصال النهاية

أولاً - النهاية



$$f(x) = |x-2| = \begin{cases} x-2 & ; x \geq 2 \\ -(x-2) & ; x < 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x-2| = \lim_{x \rightarrow 0} (2-x) = 2-0 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} |x-2| = \lim_{x \rightarrow 4} (x-2) = 4-2 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} |x-2| = \lim_{x \rightarrow 2} \begin{cases} \xrightarrow{\text{اليمنى}} \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) = 0 \\ \xrightarrow{\text{اليسرى}} \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x) = 0 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} \text{النهاية} \\ \text{موجودة} \end{array} \right\}$$

ثانياً - الاتصال

الدالة متصلة عند جميع الأعداد الحقيقية لتتحقق الشروط الثلاثة $x=2$

$$1) f(2) = (2-2) = 0$$

$$f(x) = x-2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \begin{cases} \xrightarrow{\text{اليمنى}} \\ \xrightarrow{\text{اليسرى}} \end{cases} = 0 \quad \text{النهاية موجودة}$$

$$3) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

ثالثاً - الاشتقاق :-

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & ; x \geq 2 \\ -1 & ; x < 2 \end{cases} \quad \begin{matrix} f'(2^+) = 1 \\ f'(2^-) = -1 \end{matrix}$$

الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $x=2$

إبغاً - التكامل :-

$$\int_{-2}^4 |x-2| dx = \int_{-2}^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx$$

$$\int_3^4 |x-2| dx = \int_3^4 (x-2) dx$$

$$\int_0^1 |x-2| dx = \int_0^1 (2-x) dx$$

$$\boxed{1} \int 4x^7 dx = 4 \int x^7 dx = 4 \frac{x^8}{8} + C = \boxed{\frac{1}{2}x^8 + C}$$

$$\boxed{2} \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3}\right) - \left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\boxed{3} \int (9x - x^3) dx = 9 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + C$$

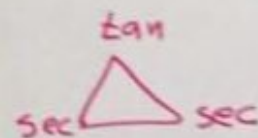
$$\boxed{4} \int (16x^3 - 6x^2) dx = 16 \frac{x^4}{4} - 6 \frac{x^3}{3} + C = 4x^4 - 2x^3 + C$$

$$\boxed{5} \frac{1}{2} \int 2(2x+5)^4 dx = \frac{1}{2} \frac{(2x+5)^5}{5} = \frac{1}{10} (2x+5)^5 + C$$

$$\boxed{6} \int (x-2)^2 dx = \frac{(x-2)^3}{3} + C$$

$$\boxed{7} \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| \quad \begin{matrix} u = \cos x \\ u' = -\sin x \end{matrix}$$

$$\boxed{8} \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} dx$$



$$= \int \tan x \sec x dx = \boxed{\sec x + C}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2i} \int \frac{\sin x}{(\cos x)^2} dx &= - \int \frac{(-\sin x)}{1} \cdot (\cos x)^{-2} dx = - \left(\frac{\cos x}{-1} \right)^{-1} + C \\ &= \frac{1}{\cos x} + C = \boxed{\sec x + C} \end{aligned}$$

$$\boxed{9} \frac{1}{4} \int 4e^{4x} dx = \frac{1}{4} e^{4x} + C$$

$$\boxed{10} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x^2} dx$$

$u = -x^2 \rightarrow$ مشتق لاسي فقط
 $u' = -2x$

$$= -\frac{1}{2} \int (-2x) e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_{-\infty}^{\infty}$$

الاس السالب
تزل في المقام

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{e^{x^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{e^{\infty}} - \frac{1}{e^{\infty}} \right] = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty} \right] = -\frac{1}{2} [0] = \boxed{0}$$

$$\boxed{11} \frac{1}{4} \int 4x^3 \cos(x^4 + 2) dx$$

$u = x^4 + 2 \rightarrow$ مشتق الراوية فقط
 $u' = 4x^3$

$$= \frac{1}{4} [\sin(x^4 + 2)] + C$$

تكمال Sin و Cos

$$\boxed{12} \frac{1}{2} \int (2x) \sin x^2 dx = \frac{1}{2} [-\cos x^2] + C \quad \int x \sin x^2 dx$$

$$\boxed{13} \int_0^1 \int_0^1 xy dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 xy dx \right] dy$$

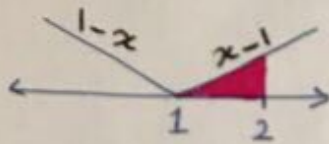
نظرا بالنسبة لـ x و y ثابت

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left[\frac{y}{2} \right] dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y dy = \frac{1}{2} \left[\frac{y^2}{2} \right] = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$\boxed{14} \int e^{2x-5} dx$$

$$= \frac{1}{2} \int 2e^{2x-5} dx = \frac{1}{2} [e^{2x-5}] + C = \frac{e^{2x-5}}{2} + C$$

15 $\int_1^2 |x-1| dx$



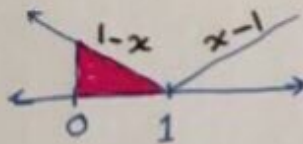
$$f(x) = \begin{cases} x-1 & ; x \geq 1 \\ -(x-1) & ; x < 1 \\ (1-x) & \end{cases}$$

نختار الدالة الأولى $\therefore \int_1^2 |x-1| dx = \int_1^2 (x-1) dx = \left. \frac{x^2}{2} - x \right|_1^2$

$$= \left[\left(\frac{2^2}{2} - 2 \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 \right) \right] = \left[(2-2) - \left(-\frac{1}{2} \right) \right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

التكامل قطع موجي لأن دالة المقاييس تقع أعلى المحور السيني

16 $\int_0^1 |x-1| dx$ نختار الدالة الثانية $\int_0^1 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx$

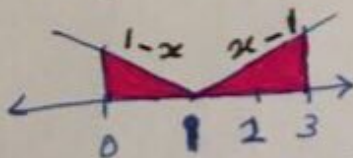


$$= \left. x - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 = \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) - (0) \right] = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$\int_0^1 |x-1| dx = \int_0^1 (x-1) dx = \left. \frac{x^2}{2} - x \right|_0^1 = \left[\frac{1}{2} - 1 \right] = \boxed{-\frac{1}{2}} = \boxed{+\frac{1}{2}}$

نكامل عادي. → نختار الموجب فقط

17 $\int_0^3 |x-1| dx \rightarrow$ مجموع تكاملين لأن يتغير تعريف الدالة عند $x=1$



$$\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

$$= \left. x - \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left. \frac{x^2}{2} - x \right|_1^3$$

$$= \left[\left(1 - \frac{1}{2} \right) \right] + \left[\left(\frac{9}{2} - 3 \right) - \left(\frac{1}{2} - 1 \right) \right] = \frac{1}{2} + \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$= \boxed{\frac{5}{2}}$$

١٨) إذا كان $\int_0^2 kx dx = 6$ فما قيمة k ؟

$$k \int_0^2 x dx = 6 \Rightarrow k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = 6 \Rightarrow k \left[\frac{4}{2} - 0 \right] = 6 \Rightarrow \frac{2k}{2} = \frac{6}{2} \Rightarrow \boxed{k=3}$$

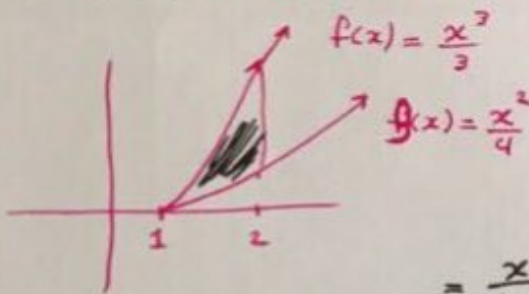
١٩) إذا كان $\int_0^3 mx dx = 9$ فما قيمة m ؟

$$m \int_0^3 x dx = 9 \Rightarrow m \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 9 \Rightarrow \frac{m}{2} [9 - 0] = 9 \Rightarrow \frac{9m}{2} = 9 \Rightarrow m = 2 \Rightarrow \boxed{m=2}$$

٢٠) إذا كان $\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x}) dx = 1$ فما قيمة k ؟

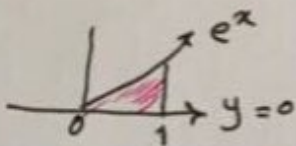
$$\int_0^1 (kx^2 + \sqrt{x}) dx = 1 \Rightarrow \left[\frac{kx^3}{3} + \frac{2}{3}x^{3/2} \right]_0^1 = 1 \Rightarrow \frac{k}{3} + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow 2k + 3 = 6 \Rightarrow k = \frac{3}{2}$$

٢١) ما مساحة المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x)$ و $g(x)$ في الفترة $1 \leq x \leq 2$ ؟



$$I = \int_1^2 [g(x) - f(x)] dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{12} - \frac{x^4}{12} \right]_1^2 = \left[\left(\frac{8}{12} - \frac{16}{12} \right) - \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{12} \right) \right] = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

٢٢) ما مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = e^x$ و $y = 0$ في الفترة $0 \leq x \leq 1$ ؟



$$\int_0^1 e^x dx = e^x \Big|_0^1 = e^1 - e^0 = \boxed{e-1}$$

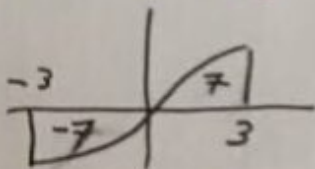
٢٣) إذا كان $\int_1^3 f(x) dx = 5$ فما $\int_3^1 f(x) dx$ ؟

$$\int_3^1 f(x) dx = -5$$

$$\int_2^2 x^4 dx = 0$$

٢٤) إذا كانت f دالة فردية على الفترة $[-3, 3]$ وكانت $\int_{-3}^0 f(x) dx = 7$ فما $\int_0^3 f(x) dx$ ؟

$$\int_{-3}^3 f(x) dx = 0 \Rightarrow \int_0^3 f(x) dx = -7$$



$$\int \frac{1 + \sin 2\theta}{\sin \theta + \cos \theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} & \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x + \cos x} dx \\ &= \int (\sin x + \cos x) dx \\ &= -\cos x + \sin x + C \end{aligned}$$

Photo
Grid