التكامل

$f(x)$		$F(x)$
2	$\longrightarrow$	$2x$
3	$\longrightarrow$	$3x$
$2x$	$\longrightarrow$	x^2
$3x^2$	$\longrightarrow$	x^3
e^x	$\longrightarrow$	e^x
$\frac{1}{x}$	$\longrightarrow$	$\ln(x)$

التابع الأصلي $F(x)$

نقول عن $F(x)$ أنه تابع أصلي للتابع $f(x)$ إذا حقق $F'(x)=f(x)$

تمرين 1:

حقق أن $F(x)=x(\ln(x)-1)$ هو التابع الأصلي للتابع $f(x)=\ln(x)$

$F'(x)=1.(\ln(x)-1)+\frac{1}{x}(x)$

$=\ln(x)-1+1$

$=\ln(x)=f(x)$

ومنه F هو التابع الأصلي للتابع $f(x)$

تمرين 2:

أثبت أن $F(x)=\tan^2(x)$ ، $G(x)=\frac{1}{\cos^2(x)}$ تابعان أصليان للتابع نفسه

$F(x)-G(x)=\tan^2(x)-\frac{1}{\cos^2(x)}$

$=\frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)}-\frac{1}{\cos^2(x)}$

$=\frac{\sin^2(x)-1}{\cos^2(x)}$

$F(x)-G(x)=\frac{-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$

$F(x)-G(x)=-1$

$F'(x)-G'(x)=0$

$F'(x)=G'(x)$

إذاً F ، G تابعان أصليان للتابع نفسه

تمرين: ليكن التابع $f(x)=x^2e^x$ جد a,b,c التي تحقق $F(x)=(ax^2+bx+c)e^x$ تابعاً أصلياً للتابع $f(x)$

$F'(x)=f(x)$

$(2ax+b)e^x+e^x(ax^2+bx+c)=x^2e^x$

$2ax+b+ax^2+bx+c=x^2$

$ax^2+(2a+b)x+b+c=1x^2$

$a=1$

بالمقارنة $2a+b=0 \Rightarrow b=-2a \Rightarrow b=-2$

$b+c=0 \Rightarrow c=-b \Rightarrow c=2$

$F(x)=(x^2-2x+2)e^x$

• قواعد التكامل:

المجموعة الأولى:

أسه بزيده

f	$F(x)$
a	ax
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} : n \neq -1$

أمثلة:

$x^2 \rightarrow \frac{x^3}{3}$

$x^5 \rightarrow \frac{x^6}{6}$

$\frac{1}{x^3} = x^{-3} \rightarrow \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{1}{-2x^2}$

$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}} \rightarrow \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

$(ax+b)^n$	$\frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}$

أمثلة:

$(3x-1)^4 \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x-1)^5}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{1-2x}} = (1-2x)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-2x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{1-2x}$

$g'(x) \cdot (g(x))^n$	$\frac{(g(x))^{n+1}}{n+1}$
مشتقه بإيده — تابع كله الأس	هو بإيده — أسه بزيده

$(2x) \cdot (x^2+1)^3 \rightarrow \frac{(x^2+1)^4}{4}$

تمرين: أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع الآتية:

1) $f(x) = 3x^4 - \frac{2}{x^2} + 7x - 1$

$f(x) = 3 \cdot x^4 - 2 \cdot x^{-2} + 7 \cdot x - 1$

$F(x) = 3 \cdot \frac{x^5}{5} - 2 \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 7 \cdot \frac{x^2}{2} - x$

$F(x) = \frac{3}{5}x^5 + \frac{2}{x} + \frac{7}{2}x^2 - x$

2) $f(x) = 4\sqrt{x} - \frac{5}{\sqrt{x}} + x$

$f(x) = 4(x)^{\frac{1}{2}} - 5(x)^{-\frac{1}{2}} + x$

$F(x) = 4 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 5 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^2}{2}$

$= \frac{8}{3}\sqrt{x^3} - 10\sqrt{x} + \frac{1}{2}x^2$

3) $f(x) = 4\sqrt{2x+1} - 3$

$f(x) = 4(2x+1)^{\frac{1}{2}} - 3$

$F(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)}{\frac{3}{2}} - 3x$

$F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{(2x+1)^3} - 3x$

4) $f(x) = \frac{e^x}{(e^x+1)^3}$

$f(x) = e^x(e^x+1)^{-3}$

$F(x) = \frac{(e^x+1)^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2(e^x+1)^2}$

/ /

الجدولة التالية : التركيبي بحالي

f	F
e^x	e^x
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$ التركيبي بحالي مقلوب أمثالي

أمثلة :

e^{3x-4} $\qquad$ $\frac{1}{3} e^{3x-4}$

f	F
$g'(x) \cdot e^{g(x)}$ أنا بالطلالي ومشتق بحالي	$e^{g(x)}$ التركيبي بحالي كامله ومشتق

مثال : $(2x+1) e^{x^2+x} \longrightarrow e^{x^2+x}$

تمرين : أوجد التابع الأصلي لكل من التوابع :

(1) $f(x) = e^{3x} - 4e^{-x}$

$F(x) = \frac{1}{3} e^{3x} - \frac{4}{-1} e^{-x}$

$= \frac{1}{3} e^{3x} + 4 e^{-x}$

(2) $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

$F(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

(3) $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

$f(x) = -\frac{1}{2}(-2x) e^{1-x^2}$

$F(x) = -\frac{1}{2} \cdot e^{1-x^2}$

(5) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$

$f(x) = \frac{1}{x}(\ln(x))'$

$F(x) = \frac{(\ln(x))^2}{2}$

(6) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$

$= \sin(x) \cdot (\cos(x))^{-3}$

$f = -(-\sin(x)) \cdot (\cos(x))^{-3}$

$F(x) = -\frac{(\cos(x))^{-2}}{-2} = \frac{1}{2\cos^2(x)}$

ط2 $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) \cos(x)} = \frac{1}{\cos^3(x)} \cdot (\tan(x))'$

$F(x) = \frac{\tan^2(x)}{2}$

(7) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

$f(x) = x(x^2+1)^{-\frac{1}{2}}$

$f(x) = \frac{1}{2} \frac{(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$

③ $f(x)=\frac{5}{4x-1}$; $]\frac{1}{4},+\infty[$

$f(x)=\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{4x-1}$

$F(x)=\frac{5}{4}\ln|4x-1|$

بما أن $4x-1>0$ على المجال $]\frac{1}{4},+\infty[$

$F(x)=\frac{5}{4}\ln(4x-1)$

④ $f(x)=\frac{x^2+x}{x+3}$; $]-\infty,-3[$

بيان عكسي:
عندما تكون درجة البسط ≥ درجة المقام نقسم البسط على المقام قسمة إقليدية ثم نأخذ الناتج + $\frac{\text{الباقي}}{\text{المقسوم عليه}}$

$$\begin{array}{r|l} x^2+x & x+3 \\ \hline -(x^2+3x) & x-2 \\ -2x & \\ -(-2x-6) & \\ 6 & \end{array}$$

$f(x)=x-2+6\cdot\frac{1}{x+3}$

$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+6\ln|x+3|$

بما أن $x+3<0$ على $]-\infty,-3[$

$F(x)=\frac{x^2}{2}-2x+6\ln(-x-3)$

④ $f(x)=\frac{\cos(x)}{e^{\sin(x)}}$

$f(x)=\cos(x)\cdot e^{-\sin(x)}$

$f(x)=-(-\cos(x))\,e^{-\sin(x)}$

$F(x)=-e^{-\sin(x)}$

المجموعة الثالثة: بسطه مشتق مقامه

f	F(x)
$\frac{g'(x)}{g}$ بسطه مشتق مقامه	$\ln|g(x)|$ جوابها لوغاريتمي

مثال: $\frac{1}{x} \to \ln|x|$

تمارين: أوجد التابع الأصلي:

① $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$; $]-1,1[$

$f(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{-2x}{1-x^2}$

$F(x)=-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|$

بما أن $1-x^2>0$ على المجال $]-1,1[$ فإن:

$F(x)=-\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$

② $f(x)=\frac{3}{2x+1}$; $]-\infty,-\frac{1}{2}[$

$f(x)=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}$

$F(x)=\frac{3}{2}\ln|2x+1|$

بما أن $2x+1<0$ على المجال $]-\infty,-\frac{1}{2}[$

$F(x)=\frac{3}{2}\ln(-2x-1)$

⑧ $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}$

$f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} + \dfrac{1 \cdot e^{-x}}{(e^x - 1) \cdot e^{-x}}$

$= \dfrac{e^x}{e^x - 1} + \dfrac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$

$F(x) = \ln|e^x - 1| + \ln|1 - e^{-x}|$

⑨ $f(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(x)}$ $]0,1[$

$f(x) = \dfrac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}$

$F(x) = \ln|\ln(x)|$

بما أن $\ln(x) < 0$ على المجال $]0,1[$

$F(x) = \ln(-\ln(x))$

⑩ $f(x) = \tan(x)$

$= -\dfrac{-\sin x}{\cos x}$

$F(x) = -\ln|\cos(x)|$

⑤ $f(x) = \dfrac{3x+2}{2x-1}$ $]\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\begin{array}{r|l} & \frac{3}{2} \\ \hline 2x-1 & 3x+2 \\ & 3x \pm \frac{3}{2} \\ \hline & \frac{7}{2} \end{array}$$

$f(x) = \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{2} \cdot \dfrac{1}{2x-1}$

$= \dfrac{3}{2} + \dfrac{7}{4} \cdot \dfrac{2}{2x-1}$

$F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\ln|2x-1|$

بما أن $2x-1>0$ على المجال $]\frac{1}{2}, +\infty[$

$F(x) = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{4}\ln(2x-1)$

⑥ $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 4}$ $\mathbb{R}$

$F(x) = \ln|e^x + 4|$

بما أن $e^x + 4$ موجب دائماً

$F(x) = \ln(e^x + 4)$

⑦ $f(x) = \dfrac{2}{e^x + 1}$ $\mathbb{R}$

بيان ذكي :

عندما نشوف $\dfrac{\text{عدد}}{\text{أسي}}$ نضرب البسط والمقام بـ e عكس الإشارة

$f(x) = \dfrac{(2)e^{-x}}{(e^x + 1) \cdot e^{-x}}$

$= \dfrac{2e^{-x}}{1 + e^{-x}} = -2 \dfrac{-e^{-x}}{1 + e^{-x}}$

$F(x) = -2\ln|\underbrace{1 + e^{-x}}_{\text{موجب}}|$

$F(x) = -2\ln(1 + e^{-x})$

ملكة مكثفة	المجموعة الرابعة:
f	$F(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$g'(x)\cdot\sin(g(x))$	$-\cos(g(x))$
$g'(x)\cdot\cos(g(x))$	$\sin(g(x))$

قوانين مهمة

$$\sin^2(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2A)$$

$$\cos^2(A)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2A)$$

$$\sin(A)=2\sin\left(\frac{A}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\sin(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)]$$

$$\cos(A)\cdot\sin(B)=\frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)]$$

$$\cos(A)\cdot\cos(B)=\frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$

$$\sin(A)\cdot\sin(B)=-\frac{1}{2}[\cos(A+B)-\cos(A-B)]$$

تمرين: أوجد التابع الأصلي للتابع:

① $f(x)=\cos(3x)-4\sin(2x)$

$F(x)=\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{4}{2}\cos(2x)$

$=\frac{1}{3}\sin(3x)+2\cos(2x)$

⑪ $f(x)=\cot(x)$

$=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

$F(x)=\ln|\sin(x)|$

⑫ $f(x)=\frac{1}{x(1-\ln(x))}$; $]e,+\infty[$

$=\frac{\frac{1}{x}}{1-\ln(x)}$

$f(x)=-\frac{-\frac{1}{x}}{1-\ln(x)}$

$F(x)=-\ln|1-\ln(x)|$

على $]e,+\infty[$ يكون $1-\ln(x)<0$

$F(x)=-\ln(-1+\ln(x))$

7) $f(x) = \sin(5x)\cdot\cos(2x)$

$f(x) = \frac{1}{2}[\sin(7x) + \sin(3x)]$

$F(x) = \frac{1}{2}[-\frac{1}{7}\cos(7x) + -\frac{1}{3}\cos(3x)]$

$= -\frac{1}{14}\cos(7x) - \frac{1}{6}\cos(3x)$

8) $f(x) = \cos(3x)\cdot\cos(4)$

$f(x) = \frac{1}{2}[\cos(4x) + \cos(2x)]$

$F(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{4}\sin(4x) + \frac{1}{2}\sin(2x)]$

9) $f(x) = \sin^3(x)$

$= \sin(x)\cdot(\sin(x))^2$

$= \sin(x)\cdot(1 - \cos^2(x))$

$= \sin(x) - \sin(x)\cdot(\cos(x))^2$

$= \sin(x) + (-\sin(x))\cdot(\cos(x))^2$

$F(x) = -\cos(x) + \frac{(\cos(x))^3}{3}$

10) $f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^3(x)$

$f(x) = \sin^2(x)\cdot\cos^2(x)\cdot\cos(x)$

$= \sin^2(x)\cdot(1 - \sin^2(x))\cdot\cos(x)$

$= \cos(x)\cdot\sin^2(x) - \cos(x)\cdot\sin^4(x)$

$F(x) = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5}$

2) $f(x) = x^2 - \cos(x)$

$F(x) = \frac{x^3}{3} - \sin(x)$

3) $f(x) = \cos(x) - 3\sin(2x)$

$F(x) = \sin(x) + \frac{3}{2}\cos(2x)$

4) $f(x) = \sin^2(x)$

$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x)$

$F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)$

5) $f(x) = \cos^2(3x)$

$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(6x)$

$F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}\sin(6x)$

6) $f(x) = \cos^4(x)$

$= (\cos^2(x))^2 = (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x))^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}\cos^2(2x)$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{4}(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(4x))$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$f(x) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{8}\cos(4x)$

$F(x) = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$

$$(11)\quad f(x)=\sqrt{2-2\cos(2x)} \quad : \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$$
$$=\sqrt{2(1-\cos(2x))}$$
$$=\sqrt{2\times 2\sin^2(x)}$$
$$=\sqrt{4\sin^2(x)}$$
$$=2\sin(x)$$
$$F(x)=-2\cos(x)$$

• التكامل المحدد:

لحساب التكامل:
$$I=\int_a^b f(x)\,dx$$
1- نحسب $F(x)$ اعتماداً على المجموعات الأربعة

2- نجمع $[f(x)]_a^b = F(b)-F(a)$

تمرين:

احسب التكاملات المحددة:
$$(1)\quad I=\int_{-1}^{2} x^2-2x+3\,dx$$
$$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right]_{-1}^{2}$$

من خطوة المكاملة تذهب $\int$ و dx

$$=\left(\frac{8}{3}-4+6\right)-\left(-\frac{1}{3}-1-3\right)$$
$$=\frac{8}{3}+2+\frac{1}{3}+1+3$$
$$=3+2+1+3=9$$

$$(2)\quad J=\int_0^{\ln(2)} e^{2x}-2e^{x}\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^{x}\right]_0^{\ln(2)}$$
$$=\frac{1}{2}e^{2\ln(2)}-2e^{\ln(2)}-\left(\frac{1}{2}e^{0}-2e^{0}\right)$$
$$=\frac{1}{2}e^{\ln(4)}-2(2)-\frac{1}{2}+2$$
$$=2-4-\frac{1}{2}+2=-\frac{1}{2}$$

$$(3)\quad K=\int_1^{e}\frac{\ln^2(x)}{x}\,dx$$
$$=\int_1^{e}\frac{1}{x}\cdot(\ln(x))^2\,dx$$

عندما نضع مضمون التكامل نحافظ على إشارة $\int$ و dx

$$=\left[\frac{(\ln(x))^3}{3}\right]_1^{e}$$
$$=\frac{(\ln(e))^3}{3}-\frac{(0)^3}{3}$$
$$=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

$$(4)\quad L=\int_0^{\pi}\sin(2x)\cdot\sin(x)\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}-\frac{1}{2}\left[\cos(3x)-\cos(x)\right]dx$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}\sin(3x)-\sin(x)\right]_0^{\pi}$$
$$=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(0)-0-\left(\frac{1}{3}(0)-0\right)\right]$$
$$=-\frac{1}{2}(0)=0$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$$

$$\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} 2\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right| dx$$

ربع رابع

$\left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$ على المجال $\sin\frac{x}{2}$ سالب فإن

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -2\sin\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

اعتبرناها $\frac{1}{2}x$

$$= \left[2\times 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right]_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}$$

$$= 4\cos(\pi) - 4\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$= -4 - 4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -4 + 2\sqrt{2}$$

• التكامل بالتجزئة

نستخدم طريقة التجزئة لتكامل جداء تابعين

تذكرة لبعض تكاملات الجداء:

$\int g'\cdot(g)^n\, dx \rightarrow \frac{(g)^{n+1}}{n+1}$

$\int g'\cdot e^{g(x)}\, dx \rightarrow e^{g(x)}$

$\int g'\cdot \sin(g(x))\, dx \rightarrow -\cos(g(x))$

$\int \sin\cdot\cos\, dx \rightarrow$ قوانين التحويل

⑤ $M = \int_0^3 x|x-1|\, dx$

إذا احتوى التكامل على | | نفك القيمة المطلقة بدراسة إشارة مضمونها

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
الإشارة					

$$= \int_0^1 x(-x+1)\,dx + \int_1^3 x(x-1)\,dx$$

$$= \int_0^1 -x^2 + x\, dx + \int_1^3 x^2 - x\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 0 + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= 10 - \frac{2}{3} - \frac{9}{2} = \frac{60 - 4 - 27}{6} = \frac{29}{6}$$

⑥ $N = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{2 - 2\cos(x)}\, dx$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(x))}\, dx$$

$$= \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \sqrt{2\times 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}\, dx$$

وإن لم تكن من الحالات الأربعة السابقة نستخدم التجزئة:

$$I=\int_a^b \text{تابع} \times \text{تابع}\ dx$$

اشتق	
u	v'
u'	v

تكامل

$$\boxed{I=[u.v]_a^b-\int_a^b u'.v\,dx}$$

• من أشهر التكاملات التي نحلها بالتجزئة هي:

$\int$ مثلثي × صحيح (u: صحيح، v': مثلثي) ؛ $\int$ صحيح × أسي (u: صحيح، v': أسي)

$\int$ صحيح × ln (v': صحيح، u: ln) ؛ $\int$ صحيح × (درجة أولى)^n (u: صحيح، v': (درجة أولى)^n)

تمارين

احسب التكاملات الآتية:

① $I=\int_{-2}^{0}(2+x)e^{-2x}\,dx$

صحيح أسي

$u=2+x$	$v'=e^{-2x}$
$u'=1$	$v=-\frac{1}{2}e^{-2x}$

$I=[u.v]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}u'.v\,dx$

مكاملة ما نقرّب ليها

$=\left[-\frac{1}{2}(2+x)e^{-2x}\right]_{-2}^{0}-\int_{-2}^{0}-\frac{1}{2}e^{-2x}\,dx$

$=\left[-\frac{1}{2}(2+x)e^{-2x}\right]_{-2}^{0}-\left[\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-2}^{0}$

$=-\frac{1}{2}(2)e^{0}+\frac{1}{2}(0)-\left(\frac{1}{4}e^{0}-\frac{1}{4}e^{4}\right)$

$=-1-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{4}$

$=-\frac{5}{4}+\frac{e^4}{4}=\frac{e^4-5}{4}$

② $J=\int_0^{\pi}x.\cos(x)\,dx$

صحيح مثلثي

$u=x$	$v'=\cos x$
$u'=1$	$v=\sin(x)$

$J=[uv]_a^b-\int_a^b u'v\,dx$

$=[x\sin x]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin x\,dx$

$=[x\sin x]_0^{\pi}+[\cos(x)]_0^{\pi}$

$=\pi(0)-0(0)+(-1-1)=-2$

تمرين: أوجد التابع الأصلي للتابع:

① $f(x)=\frac{x}{\sqrt{2x+1}}$; $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$

$f(x)=x.(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

صحيح × (درجة أولى)^n

$u = x$	$v' = (2x+1)^{-\frac{1}{2}}$
$u' = 1$	$v = \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2x+1}$

$$F(x) = u.v - \int u'.v\,dx$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \int (2x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$= x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{(2x+1)^3}$$

$$F(x) = x\sqrt{2x+1} - \frac{1}{3}\sqrt{(2x+1)^3}$$

(2) $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$

$$f(x) = x^{-2}.\ln(x)$$

$u = \ln(x)$	$v' = x^{-2}$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

$$F(x) = u.v - \int u'.v\,dx$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{x}\ln(x)\right] - \int -\frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x) + \int x^{-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x}\ln(x) + \frac{x^{-1}}{-1}$$

$$F(x) = -\frac{1}{x}\ln(x) - \frac{1}{x}$$

تمرين 1: احسب التكامل:

$$S = \int_1^e x^2 \ln(x)\,dx$$

$$\boxed{S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - \underbrace{\int_1^e \ln(x)\,dx}_{I}} \quad (*)$$

$$I = \int_1^e 1.\ln(x)\,dx$$

$u = \ln(x)$	$v' = 1$
$u' = \frac{1}{x}$	$v = x$

$$I = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\,dx$$

$$I = [x\ln(x)]_1^e - [x]_1^e$$

نعوض في $*$:

$$S = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e - [x\ln(x)]_1^e + [x]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - (e(1) - 0) + (e - 1)$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3} - e + e - 1$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{4}{3} = \frac{e^3 - 4}{3}$$

تمرين 2:

أوجد التابع الأصلي للتابع:

$$f(x) = x^2.e^x$$

$u = x^2$	$v' = e^x$
$u' = 2x$	$v = e^x$

$$\boxed{F(x) = x^2e^x - \int 2xe^x\,dx} \quad (*)$$

/ /

$g(x) = 2x e^{x}$

$u = 2x$	$v' = e^{x}$
$u' = 2$	$v = e^{x}$

$G(x) = 2xe^{x} - \int 2e^{x}$

$G(x) = 2xe^{x} - 2e^{x}$

بالتعويض في $F(x)$ (x):

$F(x) = x^2 e^{x} - (2xe^{x} - 2e^{x})$

$F(x) = x^2 e^{x} - 2xe^{x} + 2e^{x}$

تمرين: احسب التكاملات:

$M = \int_0^{\pi} e^{x} \cos(x)\, dx$

$N = \int_0^{\pi} e^{x} \sin(x)\, dx$

$u = e^{x}$	$v' = \cos(x)$
$u' = e^{x}$	$v = \sin(x)$

$M = [e^{x} \sin x]_0^{\pi} - \underbrace{\int_0^{\pi} e^{x} \sin(x)\, dx}_{N}$

$M = e^{\pi}(0) - e^{0}(0) - N$

$M + N = 0$ ---- (1)

$N = \int_0^{\pi} e^{x} \sin(x)\, dx$

$u = e^{x}$	$v' = \sin x$
$u' = e^{x}$	$v = -\cos(x)$

$N = [-e^{x}\cos(x)]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\pi} e^{x}\cos(x)\, dx}_{M}$

$N - M = -e^{\pi}(-1) + e^{0}(1)$

$N - M = e^{\pi} + 1$ ---- (2)

بجمع (1) و (2) نجد:

$2N = e^{\pi} + 1 \Rightarrow N = \frac{e^{\pi}+1}{2}$

بالتعويض في (1) نجد:

$M = \frac{-e^{\pi} - 1}{2}$

• التكامل بطريقة الكسور الجزئية

تذكر لبعض التكاملات الكسرية:

$\int \frac{x^2+x}{x+3}\, dx \rightarrow$ قسمة إقليدية

$\int \frac{2}{2x+1}\, dx \rightarrow$ بجعل البسط مشتقاً

$\int \frac{2}{(x+3)^2}\, dx \rightarrow$ نرفع المقام للبسط

$\int \frac{2}{e^{x}+1}\, dx \rightarrow$ نضرب بـ e بعكس الإشارة

وفي حال كانت:

1- درجة البسط < درجة المقام

2- البسط ≠ مشتق مقامي

3- المقام ليس من الشكل $(\ )^{n}$

/ /

عندئذ نستخدم طريقة الكسور الجزئية الآتية.

مثال: احسب التكامل

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}\,dx$$

نحلل المقام

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}=\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-1}$$

(1) $\quad(x-1)\quad$ $(x-2)$

$$x+3=a(x-1)+b(x-2)$$

نعوض $\boxed{x=1}$ نعوضه

$$4=a(0)+b(-1)$$

$$b=-4$$

نعوض $\boxed{x=2}$ نعوضه

$$5=a(1)+b(0)$$

$$a=5$$

$$\frac{x+3}{(x-2)(x-1)}=5\frac{1}{x-2}-4\frac{1}{x-1}$$

$$I=\int_{-1}^{0}5\frac{1}{x-2}-4\frac{1}{x-1}\,dx$$

$$I=\left[5\ln|x-2|-4\ln|x-1|\right]_{-1}^{0}$$

$$=5\ln(2)-4\ln(1)-(5\ln(3)-4\ln(2))$$

$$=5\ln(2)-0-5\ln(3)+4\ln(2)$$

$$=9\ln(2)-5\ln(3)$$

تمرين: أوجد التابع الأصلي للتابع

$$f(x)=\frac{x^2+4}{x^2-4}$$

$$x^2-4\,\overline{)\,x^2+4}\quad 1$$

$$\frac{-x^2\mp4}{8}$$

$$f(x)=1+\frac{8}{x^2-4}$$

$$f(x)=1+\frac{8}{(x+2)(x-2)}\quad\ldots(*)$$

$$\frac{8}{(x+2)(x-2)}=\frac{a}{x+2}+\frac{b}{x-2}$$

(1) $\quad(x-2)\quad$ $(x+2)$

$$8=a(x-2)+b(x+2)$$

$8=4b\Rightarrow b=2$ نعوض $x=2$

$8=-4a\Rightarrow a=-2$ نعوض $x=-2$

$$\frac{8}{(x+2)(x-2)}=\frac{-2}{x+2}+\frac{2}{x-2}$$

نعوض في $(*)$

$$f(x)=1-2\frac{1}{x+2}+2\frac{1}{x-2}$$

$$F(x)=x-2\ln|x+2|+2\ln|x-2|$$

/ /

• إثبات متراجحة باستخدام التكامل المحدد

مبرهنة: إذا كانت $0 \le x \le a$

أثبت أن $\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{1+x} \le 1$

ثم استنتج أن $\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$

لدينا $0 \le x \le a$

$$1 \le 1+x \le 1+a$$

$$\frac{1}{1+a} \le \frac{1}{1+x} \le 1$$

نكامل أطراف المتراجحة

$$\int_0^a \frac{1}{1+a}\,dx \le \int_0^a \frac{1}{1+x}\,dx \le \int_0^a 1\,dx$$

$$\left[\frac{1}{1+a}x\right]_0^a \le \left[\ln(1+x)\right]_0^a \le [x]_0^a$$

$$\frac{a}{1+a} - 0 \le \ln(1+a) - \ln(1) \le a - 0$$

$$\frac{a}{1+a} \le \ln(1+a) \le a$$

مبرهنة: إذا كانت $b > 0$

أثبت أن $\sin(b) \le b$

ثم أثبت أن $\cos(b) \ge 1 - \frac{b^2}{2}$

نعلم أن $\cos(x) \le 1$

$$\int_0^b \cos(x)\,dx \le \int_0^b 1\,dx$$

$$[\sin x]_0^b \le [x]_0^b$$

$$\sin(b) - \sin(0) \le b - 0$$

$$\sin(b) \le b$$

لدينا $\sin(x) \le x$

$$\int_0^b \sin x\,dx \le \int_0^b x\,dx$$

$$[-\cos(x)]_0^b \le \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^b$$

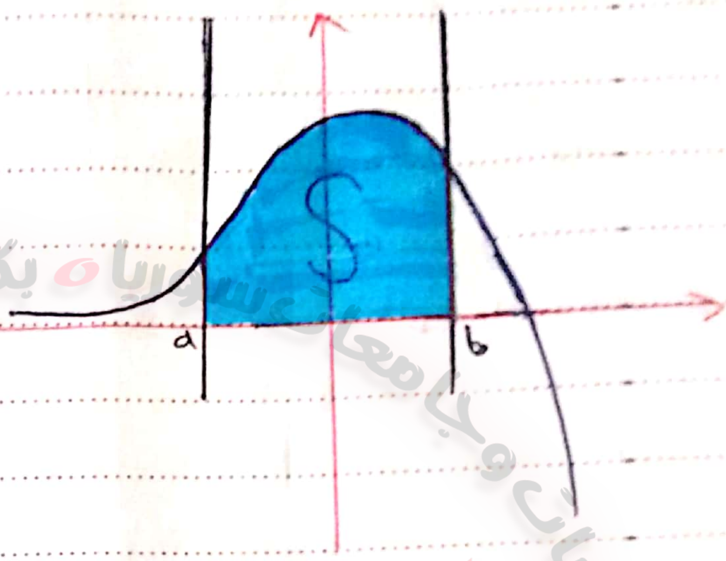
$$-\cos(b) + \cos(0) \le \frac{b^2}{2} - 0$$

$$-\cos(b) + 1 \le \frac{b^2}{2}$$

$$-\cos(b) \le -1 + \frac{b^2}{2} \quad \times(-1)$$

$$\cos(b) \ge 1 - \frac{b^2}{2}$$

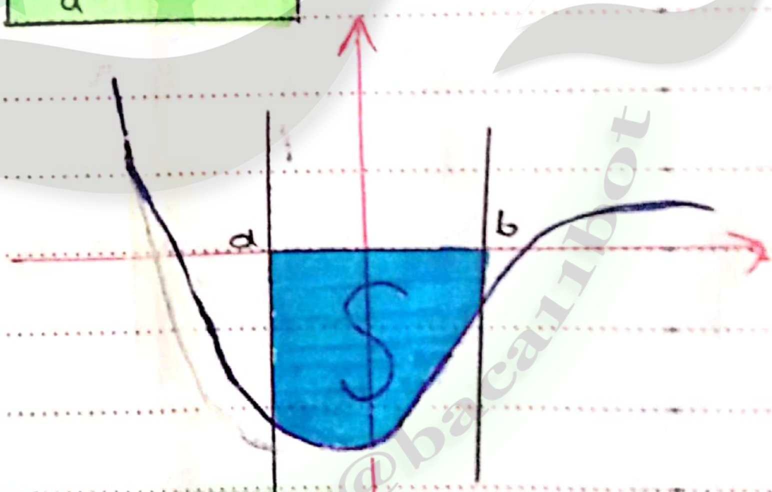
• حساب مساحة سطح:



لحساب المساحة المحصورة بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x=a$ و $x=b$

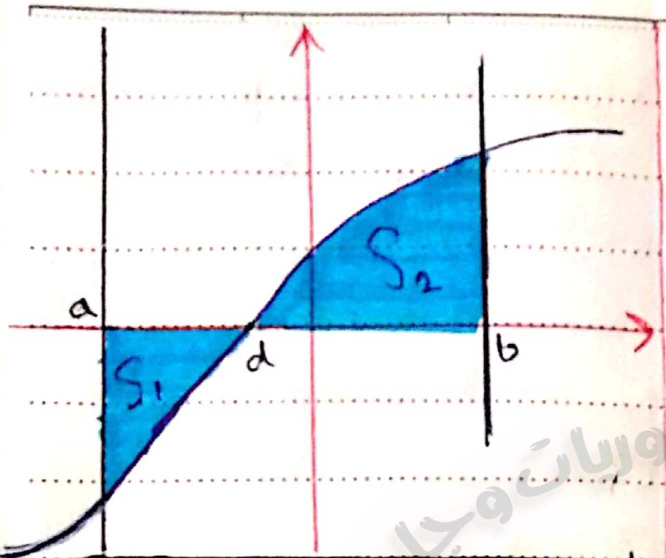
$$\boxed{S=\int_a^b +f(x)\,dx}$$

S فوق محور الفواصل



$$\boxed{S=\int_a^b -f(x)\,dx}$$

S تحت محور الفواصل



$$\boxed{S=\int_a^d -f(x)\,dx+\int_d^b +f(x)\,dx}$$

لحساب d نحل المعادلة $\boxed{f(x)=0}$

مسألة أولى: ليكن التابع:

$f(x)=(2-x)e^{+x}\ ;\ \mathbb{R}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② أوجد معادلة المماس في نقطة تقاطع C_f مع محور التراتيب.

③ أثبت أن المشتقات من مراتب عليا للتابع f تعطى بالعلاقة $f^{(n)}(x)=(2-n-x)e^{x}$

④ ارسم الخط البياني للتابع f

⑤ احسب المساحة المحصورة بين C_f ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$ ، $x=2$

الحل: f م م ش على $]-\infty,+\infty[$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=(+\infty)(0)$ عدم تعيين

$f(x)=2e^{x}-xe^{x}$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0-0=0$

$y=0$ معادلة مقارب افقي موازي $x'x$

في جوار $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

$$f'(x) = -1 \cdot e^x + e^x(2-x)$$
$$= e^x(-1+2-x)$$
$$= e^x(1-x) = 0$$
$$e^x > 0 \quad 1-x=0 \Rightarrow x=1$$
$$f(1) = e$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

$f(1)=e$ قيمة كبرى

2- $x=0 \Rightarrow y_0 = f(0) = 2$

$$m = f'(0) = 1(1-0) = 1$$
$$y - y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow y-2 = 1(x-0)$$
$$\Delta : y = x+2$$

3- $f^{(n)}(x) = (2-n-x)e^x$

نثبت صحة العلاقة لأجل $n=1$

$$f^{(1)}(x) = (2-1-x)e^x = (1-x)e^x = f'(x)$$

محققة

نفرض صحتها لأجل n

$$f^{(n)}(x) = (2-n-x)e^x \quad ①$$

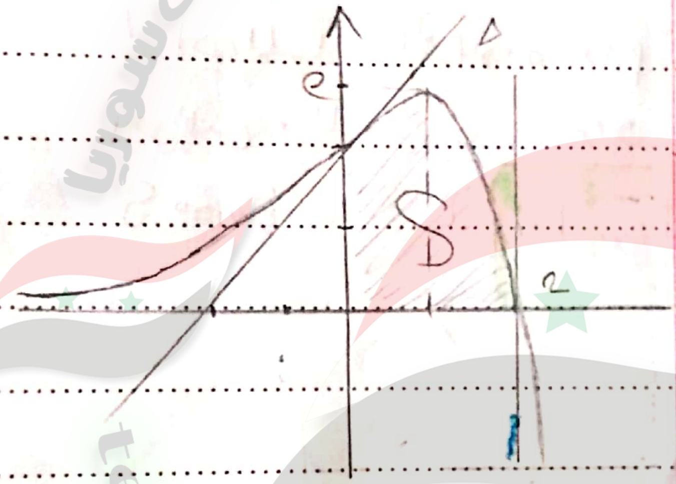
نثبت صحتها لأجل $n+1$

$$f^{(n+1)} \stackrel{?}{=} (2-n-1-x)e^x$$
$$\stackrel{?}{=} (1-n-x)e^x$$

ننطلق من ① ونشتق الطرفين

$$\left(f^{(n)}(x)\right)' = \left((2-n-x)e^x\right)'$$
$$f^{(n+1)}(x) = (-1)e^x + e^x(2-n-x)$$
$$= e^x(-1+2-n-x)$$
$$= e^x(1-n-x) = f_2$$

فالعلاقة محققة أياً كانت $n \geq 1$



محصورة مع المحاور

$$S = \int_0^2 f(x)\,dx$$
$$S = \int_0^2 (2-x)e^x\,dx$$

$u = 2-x$	$v' = e^x$
$u' = -1$	$v = e^x$

$$S = (2-x)e^x + \int e^x\,dx$$
$$= \left[(2-x)e^x + e^x\right]_0^2$$
$$= 0 \cdot e^2 + e^2 - (2e^0 + e^0)$$
$$S = e^2 - 3$$

مسألة ٣: ليكن التابع:

$f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$ $]-1,3[$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

② احسب $f(x)+f(2-x)$ واستنتج أن $A(1,0)$ مركز تناظر.

③ أوجد معادلة المماس لـ C في A وادرس وضعه النسبي.

④ ارسم الخط البياني للتابع f.

⑤ أوجد $F(x)$ تابعاً أصلياً للتابع f واحسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين $x=0$, $x=1$

① f م م ش ع م $]-1,3[$

$\lim_{x\to -1} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to 3} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{4}{(x+1)(3-x)} > 0$

x	-1 $\qquad\qquad$ 3
f'	$+$
f	$-\infty \nearrow +\infty$

② $f(x)+f(2-x) = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{3-x}{3-2+x}\right)$

$= \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + \ln\left(\frac{3-x}{x+1}\right)$

$= \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\cdot\frac{3-x}{x+1}\right) = \ln(1) = 0$

$A(1,0) \Rightarrow a=1 \quad b=0$

$2a-x = 2-x$

بما أن $-1<x<3$

$1>-x>-3$

$3>2-x>-1$

$2-x \in D_f$

$f(2a-x)+f(x) = f(2-x)+f(x) = 0 = 2b$

إذاً $A(1,0)$ مركز تناظر

$x=1 \qquad y=0$

$m = f'(1) = \frac{4}{(2)(2)} = 1$

$y-0 = 1(x-1) \Rightarrow y = x-1$

$g(x) = f(x) - y_\Delta = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) - x + 1$

$g'(x) = \frac{4}{(x+1)(3-x)} - 1$

$= \frac{4-(x+1)(3-x)}{(x+1)(3-x)}$

$= \frac{4-3x+x^2-3+x}{(x+1)(3-x)}$

$g'(x) = \frac{x^2-2x+1}{(x+1)(3-x)} = \frac{(x-1)^2}{(x+1)(3-x)} \geq 0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow g(1)=0$

x	-1 $\qquad$ 1 $\qquad$ 3
g'	$+$ $\quad 0 \quad$ $+$
g	$\nearrow$ $g(x)<0$ $\quad 0 \quad$ $\nearrow$ $g(x)>0$

$F(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + \ln|x+1| + 3\ln|3-x|$

$S = \int_0^1 -f(x)\,dx$

$= \left[-F(x)\right]_0^1$

$= -\left[x\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) + \ln(x+1) + 3\ln(3-x)\right]_0^1$

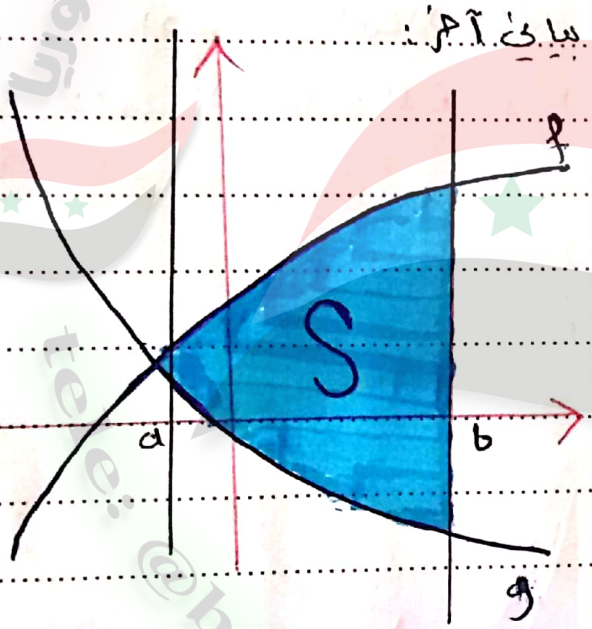
$= -\left[1\ln(1) + \ln(2) + 3\ln(2) - (0 + \ln(1) + 3\ln(3))\right]$

$= -\left[4\ln(2) - 3\ln(3)\right]$

$= -4\ln(2) + 3\ln(3)$

• حساب المساحة بين C_f و C_g:

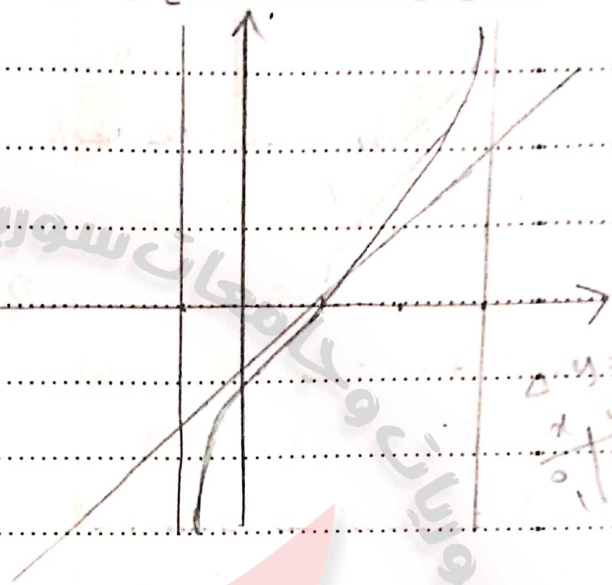
بياني آخر:



$$\boxed{S = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx}$$

C يقطع Δ على المجال $]-1,1[$

C فوق Δ في $]1,3[$



$\Delta: y = x-1$

x	y
0	-1
1	0

$f(x) = 1 \cdot \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right)$

$u = \ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) \quad v' = 1$

$u' = \frac{4}{(x+1)(3-x)} \quad v = x$

$F(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) - \int \frac{4x}{(x+1)(3-x)}\,dx$

$\frac{4x}{(x+1)(3-x)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{(3-x)}$

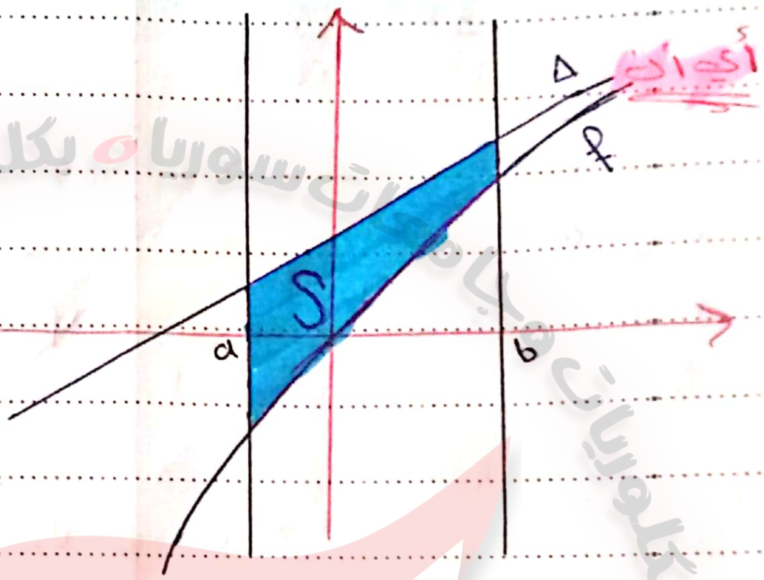
$4x = a(3-x) + b(x+1)$

$x = 3 \Rightarrow 12 = 4b \Rightarrow b = 3$

$x = -1 \Rightarrow -4 = 4a \Rightarrow a = -1$

$F(x) = x\ln\left(\frac{x+1}{3-x}\right) - \int -\frac{1}{x+1} + 3\frac{1}{3-x}\,dx$

بين التابع و أن يكون خط مستقيم «مقارب - مماس - خط عشوائي»



المساحة بين f و Δ والمستقيمين: $x=a$ ، $x=b$

$$\boxed{S=\int_a^b y_\Delta - f(x)\,dx}$$

مثال: ليكن التابع

$$f(x)=x-1+\frac{\ln(x)}{x}$$

1) اثبت أن $\Delta: y=x-1$ مقارب مائل له وادرس وضعه النسبي

2) احسب المساحة المحصورة بين C و Δ والمستقيمين $x=e$ ، $x=1$

$$f(x)-y_\Delta=x-1+\frac{\ln(x)}{x}-x+1$$
$$=\frac{\ln(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_\Delta)=0$$

$\Rightarrow \Delta: y=x-1$

مقارب مائل عند $+\infty$

$$f(x)-y_\Delta=\frac{\ln(x)}{x}=0$$
$$\ln(x)=0 \Rightarrow x=1$$
$$f(1)=1-1+\frac{0}{1}=0$$

x	0	1	e	$+\infty$
$f(x)-y_\Delta$	$-$	0	$+$	
الوضع النسبي	C تحت Δ	0	C فوق Δ	

حسب دراسة الوضع النسبي C فوق Δ على المجال $]1,e[$

$$S=\int_1^e f(x)-y_\Delta\,dx$$
$$=\int_1^e \frac{\ln(x)}{x}\,dx$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}\cdot(\ln(x))'\,dx=\left[\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_1^e$$
$$=\frac{(\ln(e))^2}{2}-\frac{(\ln(1))^2}{2}$$
$$=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow S=\frac{1}{2}$$

مسألة:

ليكن التابع:

$$f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1} \quad ; \mathbb{R}$$

1) اثبت أن f يكتب بالشكلين

$$f_1(x)=1-\frac{2}{e^x+1} \quad , \quad f_2(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}-1$$

2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

3) اثبت أن f فردي.

4) ارسم الخط البياني للتابع f.

5) احسب المساحة المحصورة بين والمنحنية

$x=0$, $x=\ln(3)$, $y=1$

-1

$$f_1(x)=\frac{1}{1}-\frac{2}{e^x+1}$$

$$=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

$$f_2(x)=\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{1}{1}$$

$$=\frac{2e^x-e^x-1}{e^x+1}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

-2 f ج ع م $]-\infty,+\infty[$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=1-\frac{2}{\infty}=1-0=1$$

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^2}$$

$$=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$f'(x)>0$ ، f متزايد

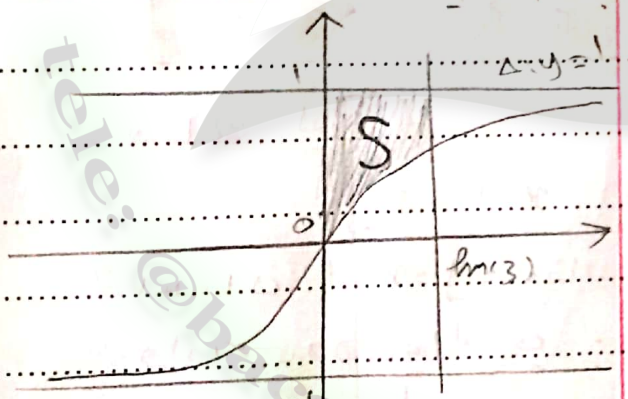
x	$-\infty$		$+\infty$
f'		$+$	
f	-1	$\nearrow$	1

-3 $x\in\mathbb{R} \Rightarrow -x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=\frac{(e^{-x}-1)(e^x)}{(e^{-x}+1)(e^x)}=\frac{1-e^x}{1+e^x}$$

$$=-\frac{e^x-1}{e^x+1}=-f(x)$$

إذاً f فردي



$$S=\int_0^{\ln(3)} y_\Delta - f(x)\,dx$$

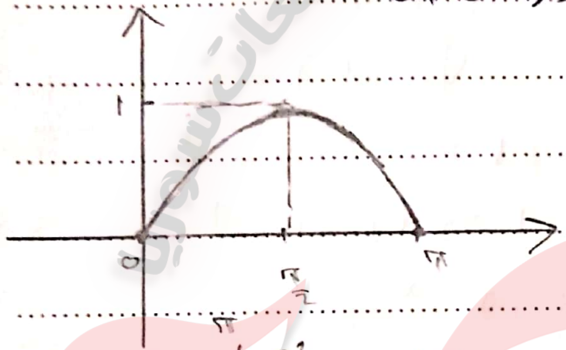
$$=\int_0^{\ln(3)} 1-f(x)\,dx$$

/ /

حساب حجم دوران سطح حول محور الفواصل:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

مثال: ارسم الخط البياني للتابع $f(x)=\sin(x)$ على المجال $[0,\pi]$ ثم احسب حجم دوران السطح الناتج حول محور الفواصل



$$V=\pi\int_0^{\pi} f^2(x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\sin^2(x)\,dx$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin(2x)\right]_0^{\pi}$$

$$=\pi\left[\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}(0)-(0-0)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi^2}{2}$$

$$=\int_0^{\ln(3)}\frac{1}{1}-\frac{e^x-1}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln(3)}\frac{e^x+1-e^x+1}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln(3)}\frac{2}{e^x+1}\,dx$$

$$=\int_0^{\ln(3)}-2\,\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}\,dx$$

$$=\left[-2\ln\left[1+e^{-x}\right]\right]_0^{\ln(3)}$$

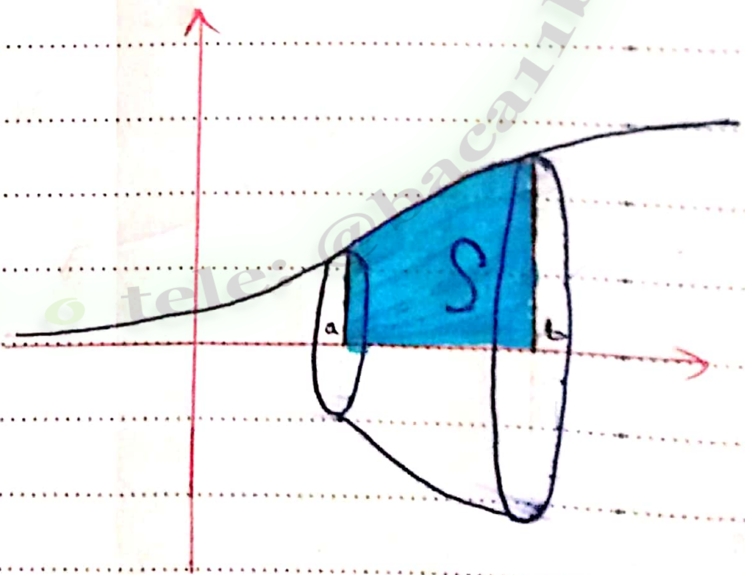
$$=-2\ln(1+e^{-\ln(2)})+2\ln(1+e^{0})$$

$$=-2\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+2\ln(2)$$

$$=2\ln(2)-2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$=2\left(\ln(2)-\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right)=2\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

حساب حجم دوران سطحين:



مسألة:

ليكن التابع :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$$

احسب حجم دورانا السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيمين :

$x = 0$ $\quad x = 1$

$$V = \pi \int_0^1 f^2(x)\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 x^2 + 2x\sqrt{x^2+1} + x^2 + 1\, dx$$

$$= \pi \int_0^1 2x^2 + 1 + 2x\,(x^2+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= \pi \left[\frac{2x^3}{3} + x + \frac{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\frac{2x^3}{3} + x + \frac{3}{2}\sqrt{(x^2+1)^3}\right]_0^1$$

$$= \pi \left[\cancel{\frac{2}{3}} + 1 + \frac{2}{3}\sqrt{8} - \left(0 + 0 + \cancel{\frac{2}{3}}\right)\right]$$

$$= \pi \left[1 + \frac{4\sqrt{2}}{3}\right]$$

$$V = \frac{3 + 4\sqrt{2}}{3}\pi$$