أكاديميا

سلسلة أكاديميا في الرياضيات

البنك الشامل في الاحتمالات للثالث الثانوي العلمي

تمارين امتحانية لكل أفكار المنهاج

الاختبارات الأربعة

النماذج الوزارية الستة 2017

النموذج الوزاري 2019

النماذج الوزارية الثلاثة 2020

كافة الدورات الامتحانية من 2017 الى 2022

اعداد المدرس : أحمد الشيخ عيسى مدير معهد أكاديميا

الرقة . هـ : 0998024183

التمرين 1 :

أولاً : إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{2}$ و $\mathbb{P}(B)=\frac{3}{4}$ و $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{2}{5}$

فاحسب $\mathbb{P}(B|A)$ و $\mathbb{P}(A|B)$ و $\mathbb{P}(A'\cap B')$ و $\mathbb{P}(A'\cup B')$ و استنتج $\mathbb{P}(B'|A')$

ثانياً : إذا كان $\mathbb{P}(A)=\frac{1}{3}$ و $\mathbb{P}(B|A)=\frac{1}{4}$ و $\mathbb{P}(B|A')=\frac{4}{5}$ فاحسب $\mathbb{P}(B)$

الحل :

أولاً : $\mathbb{P}(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{2}{5}\times\frac{2}{1}=\frac{4}{5}$, $\mathbb{P}(A|B)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{3}=\frac{8}{15}$

$$\mathbb{P}(A'\cap B')=\mathbb{P}(B\cup A)'=1-\mathbb{P}(A\cup B)=1-\big(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B)\big)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}\right)=\frac{3}{20}$$

$$\mathbb{P}(A'\cup B')=\mathbb{P}(B\cap A)'=1-\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{3}{5}\Longrightarrow\mathbb{P}(B'|A')=\frac{\mathbb{P}(A'\cap B')}{\mathbb{P}(A')}=\frac{3}{10}$$

ثانياً : $\mathbb{P}(B)=\mathbb{P}(B\cap A)+\mathbb{P}(B\cap A')=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B|A)+\mathbb{P}(A').\mathbb{P}(B|A')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{37}{60}$

التمرين 2 :

في تجربة رمي ثلاث قطع نقدية متوازنة نعرف الأحداث التالية :

الحدث A : ظهور الوجه H مرة واحدة فقط — الحدث B : ظهور الوجه H مرة واحدة على الأكثر

الحدث C : ظهور الوجه H مرة واحدة على الاقل — الحدث D : ظهور الوجه H مرتين على الاقل

جد كل من الاحتمالات التالية : $\mathbb{P}(A)\,,\mathbb{P}(B)\,,\mathbb{P}(C)\,,\mathbb{P}(D)\,,\mathbb{P}(A\cap C)\,,\mathbb{P}(A\backslash C)$

الحل :

$\Omega=(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(T,T,T),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)$

$A=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$B=\{(T,T,T),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$C=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$D=\{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T)\}$

$A\cap C=\{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$

$\mathbb{P}(A)=\frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(B)=\frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(C)=\frac{7}{8}$, $\mathbb{P}(D)=\frac{4}{8}$, $\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(A|C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}=\frac{\frac{3}{8}}{\frac{7}{8}}=\frac{3}{7}$

التمرين 3 :

نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة ونتأمل الأحداث :

الحدث A : العدد الظاهر زوجي و الحدث B : العدد الظاهر أولي و الحدث C : العدد الظاهر أكبر أو يساوي 3

❶ جد كل من الاحتمالات التالية : $\mathbb{P}(A)\,,\mathbb{P}(B)\,,\mathbb{P}(C)\,,\mathbb{P}(A\cap C)\,,\mathbb{P}(A\backslash C)$

❷ هل الحدثين A و C مستقلين احتماليا

الحل :

❶ $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{3,4,5,6\}$, $A\cap C=\{4,6\}$

$A=\{2,4,6\}$, $B=\{2,3,5\}$, $C=\{3,4,5,6\}$, $A\cap C=\{4,6\}$

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ ,\quad \mathbb{P}(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\ ,\quad \mathbb{P}(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\ ,\qquad \mathbb{P}(A|C)=\frac{\mathbb{P}(A\cap C)}{\mathbb{P}(C)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$$

❷ $\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, $\mathbb{P}(A\cap C)=\frac{1}{3}$

وبالتالي $\mathbb{P}(A\cap C)=\mathbb{P}(A)\times\mathbb{P}(C)$ فالحدثين A و C مستقلين احتماليا

التمرين 4 :

في تجربة رمي قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات نعرف متحول عشوائي يدل على عدد مرات ظهور الوجه T
جد قيم المتحول العشوائي وجدول قانونه الاحتمالي وانحرافه المعياري وتباينه

الحل :

$$\Omega = \{(H,H,H),(T,H,H),(H,T,H),(H,H,T),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$X = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \}$$

$X = \{0,1,2,3)$

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{1}{8}\ ,\ \mathbb{P}(X=1)=\frac{3}{8}\ ,\ \mathbb{P}(X=2)=\frac{3}{8}\ ,\mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{8}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{0\times1+1\times3+2\times3+3\times1}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

$$\mathbb{V}(X)=\frac{0\times1+1\times3+4\times3+9\times1}{8}-\frac{9}{4}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}\qquad,\quad \sigma(X)=\sqrt{\mathbb{V}(X)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

التمرين 5 :

نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6
نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1 ونحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6 ونخسر درجتين في بقية الحالات
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها.
اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X ، واحسب كلاً من $\mathbb{E}(X)$ و $\mathbb{V}(X)$.

الحل :

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}\quad ,\quad X=\{1,6,-2\}$$

$$(X=1)=\{1\}\ \Rightarrow \mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{6}$$

$$(X=6)=\{6\}\ \Rightarrow \mathbb{P}(X=6)=\frac{1}{6}$$

$$(X=-2)=\{2,3,4,5\}\Rightarrow \mathbb{P}(X=-2)=\frac{4}{6}$$

X	1	6	-2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1\times1+6\times1-2\times4}{6}=\frac{-1}{6}$$

$$\mathbb{V}(X)=\frac{1\times1+36\times1+4\times4}{6}-\frac{1}{36}=\frac{317}{36}$$

التمرين 6 :

نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين ونسجل رقمي الوجهين الظاهرين

ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين

اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه وتباينه وانحرافه المعياري

الحل :

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$X = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$\mathbb{P}(X=2) = \frac{1}{36}$, $\mathbb{P}(X=3) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(X=4) = \frac{3}{36}$, $\mathbb{P}(X=5) = \frac{4}{36}$

$\mathbb{P}(X=6) = \frac{5}{36}$, $\mathbb{P}(X=7) = \frac{6}{36}$, $\mathbb{P}(X=8) = \frac{5}{36}$

$\mathbb{P}(X=9) = \frac{4}{36}$, $\mathbb{P}(X=10) = \frac{3}{36}$, $\mathbb{P}(X=11) = \frac{2}{36}$, $\mathbb{P}(X=12) = \frac{1}{36}$

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{4\times1+9\times2+16\times3+25\times4+36\times5+49\times6+64\times5+81\times4+100\times3+121\times2+144\times1}{36} - 49 = \frac{35}{6}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{35}{6}}$$

التمرين 7 :

تتأمل حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة بالأعداد $3, 2, 2, 1, 1, 1$ نلقي هذا الحجر مرتين متتاليتين

الحدث A : ظهور وجهين مجموعهما أصغر تماما من 4

الحدث B : ظهور وجهين فرقهما معدوم

❶ كم عدد عناصر فضاء العينة

❷ أحسب : $\mathbb{P}(A)$ و $\mathbb{P}(B)$ و $P(B|A)$

❸ نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور العدد 3

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X و جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه

الحل :

+	1	1	1	2	2	3
1	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 2)	(1 , 3)
1	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 2)	(1 , 3)
1	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 1)	(1 , 2)	(1 , 2)	(1 , 3)
2	(2 , 1)	(2 , 1)	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 2)	(2 , 3)
2	(2 , 1)	(2 , 1)	(2 , 1)	(2 , 2)	(2 , 2)	(2 , 3)
3	(3 , 1)	(3 , 1)	(3 , 1)	(3 , 2)	(3 , 2)	(3 , 3)

❶ عدد فضاء العينة : $n(\Omega) = 6^2 = 36$

❷

$$\mathbb{P}(A) = \frac{21}{36}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{14}{36} \quad , \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{9}{36} \Rightarrow \mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{9}{21}$$

❸

$$X = \{0 , 1 , 2\}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 0) = \frac{25}{36} \quad , \quad \mathbb{P}\,(X = 1) = \frac{10}{36} \quad , \quad \mathbb{P}\,(X = 2) = \frac{1}{36}$$

x	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

$$E(X) = 0 + \frac{10}{36} \times 1 + \frac{1}{36} \times 2 = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= 0 + \frac{10}{36} \times 1 + \frac{1}{36} \times 4 - \frac{12}{36} = \frac{14}{36} - \frac{12}{36} = \frac{2}{36}$$

التمرين 8 :

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية بأحد العددين $+1$ أو -1

❶ احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر

❷ احسب احتمال ألا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين

$n(\Omega)$	Ω				المجموع
1	-1	-1	-1	-1	
2	-1	-1	-1	$+1$	
3	-1	-1	$+1$	-1	
4	-1	-1	$+1$	$+1$	0
5	-1	$+1$	-1	-1	
6	-1	$+1$	-1	$+1$	0
7	-1	$+1$	$+1$	-1	0
8	-1	$+1$	$+1$	$+1$	
9	$+1$	-1	-1	-1	
10	$+1$	-1	-1	$+1$	0
11	$+1$	-1	$+1$	-1	0
12	$+1$	-1	$+1$	$+1$	
13	$+1$	$+1$	-1	-1	0
14	$+1$	$+1$	-1	$+1$	
15	$+1$	$+1$	$+1$	-1	
16	$+1$	$+1$	$+1$	$+1$	

الحل :

❶ بفرض A الحدث أن يكون المجموع صفر :

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

❷ بفرض B الحدث :

أن لا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين :

$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

التمرين 9 :

صندوق يحوي 10 كرات، 6 بيضاء و4 سوداء نسحب من الصندوق كرتين على التتالي مع إعادة الكرة المسحوبة

❶ ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ❷ ما احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه

❸ ما احتمال الحصول على كرتين مختلفة اللون ❹ ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل

الحل :

❶ الحصول على كرتين بيضاوين : (w,w) بالتالي : $(A)=\frac{6^2}{10^2}=\frac{36}{100}$

❷ الحصول على كرتين من اللون نفسه : $(w,w),(b,b)$ بالتالي : $(B)=\frac{6^2+4^2}{10^2}=\frac{52}{100}$

❸ الكرتين مختلفة اللون هي : (w,b) بالتالي : $P(C)=\frac{6\times4}{10^2}\times 2=\frac{48}{100}$

❹ الحصول على كرة بيضاء على الأقل : $(w,b),(w,w)$ بالتالي : $(D)=\frac{6\times4}{10^2}\times 2+\frac{6^2}{10^2}=\frac{84}{100}$

طريقة ثانية (المتمم): ولا كرة بيضاء أي الكرتين سوداوين بالتالي : $P(C)=1-\frac{4^2}{10^2}=\frac{100}{100}-\frac{16}{100}=\frac{84}{100}$

التمرين 10 :

صندوق يحوي 10 كرات 6 بيضاء و4 سوداء نسحب من الصندوق كرتين على التتالي دون إعادة الكرة المسحوبة

❶ ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ❷ ما احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه

❸ ما احتمال الحصول على كرتين مختلفة اللون ❹ ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل

الحل :

❶ الحصول على كرتين بيضاوين : (w,w) بالتالي : $P(A)=\frac{P_6^2}{P_{10}^2}=\frac{30}{90}$

❷ الحصول على كرتين من اللون نفسه : $(w,w),(b,b)$ بالتالي : $P(B)=\frac{P_6^2+P_4^2}{P_{10}^2}=\frac{42}{90}$

❸ الكرتين مختلفة اللون هي : (w,b) بالتالي : $P(C)=\frac{P_6^1\times P_4^1}{P_{10}^2}\times 2=\frac{6\times4}{10\times9}\times 2=\frac{48}{90}$

❹ الحصول على كرة بيضاء على الأقل : $(w,b),(w,w)$ بالتالي : $P(D)=\frac{P_6^1\times P_4^1}{P_{10}^2}\times 2+\frac{P_6^2}{P_{10}^2}=\frac{78}{90}$

أو : المتمم ولا كرة بيضاء أي الكرتين سوداوين بالتالي : $P(C)=1-\frac{P_4^2}{P_{10}^2}=1-\frac{12}{90}=\frac{90}{90}-\frac{12}{90}=\frac{78}{90}$

التمرين 11 :

صندوق يحوي 10 كرات ، 6 بيضاء و 4 سوداء نسحب من الصندوق كرتين معا الكرة المسحوبة

❶ ما احتمال الحصول على كرتين بيضاوين ❷ ما احتمال الحصول على كرتين من اللون نفسه

❸ ما احتمال الحصول على كرتين مختلفة اللون ❹ ما احتمال الحصول على كرة بيضاء على الأقل

الحل :

❶ الحصول على كرتين بيضاوين : (w,w)

$$P(A)=\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{\frac{6\times5}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{15}{45}$$

❷ الحصول على كرتين من اللون نفسه : $(w,w)\,,(b,b)$

$$P(B)=\frac{\binom{6}{2}+\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{\left(\frac{6\times5}{2\times1}\right)+\left(\frac{4\times3}{2\times1}\right)}{\frac{10\times9}{2\times1}}=\frac{15+6}{45}=\frac{21}{45}$$

❸ الحصول على كرتين مختلفة اللون : (w,b)

$$P(C)=\frac{\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}=\frac{24}{45}$$

❹ الحصول على كرة بيضاء على الأقل :

الحصول على كرة بيضاء على الأقل : $(w,b)\,,(w,w)$:

$$P(D)=\frac{\binom{6}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{10}{2}}+\frac{\binom{6}{2}}{\binom{10}{2}}=\frac{24+15}{45}=\frac{39}{45}$$

(المتمم) : ولا كرة بيضاء أي الكرتين سوداوين :

$$P(D)=1-\frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}}=1-\frac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{10\times9}{2\times1}}=1-\frac{6}{45}=\frac{39}{45}$$

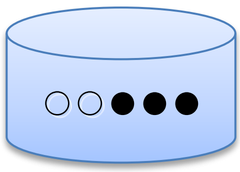
التمرين 12 :

يحتوي صندوق على خمس كرات : ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان

نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق.

نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عين مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.



الحل :

$$X=\{\,0\,,1\,,2\,\}$$

$$(X=0)=\{(\bullet,\bullet)\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10}$$

$$(X=1)=\{(\circ\,,\bullet)\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10}$$

$$(\mathrm{X}=2)=\{(\circ\,,\circ)\}\Rightarrow\mathbb{P}(\mathrm{X}=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

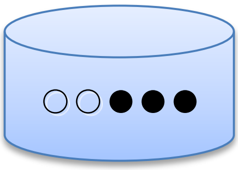
X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{m}x_iP_i=\frac{0\times3+1\times6+2\times1}{10}=\frac{4}{5}$$

$$\mathbb{V}(X)=\sum_{i=1}^{m}{x_i}^2\,P_i-\left(\mathrm{E}(x)\right)^2=\frac{0\times3+1\times6+4\times1}{10}-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

التمرين 13 :

يحتوي صندوق على خمس كرات : ثلاث كرات سوداء اللون، وكرتان بيضاوان



نسحب من الصندوق كرتين على التتالي ودون إعادة

نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة.

عين مجموعة قيم X، واكتب قانونه الاحتمالي، واحسب توقعه وتباينه.

الحل :

$X = \{0, 1, 2\}$

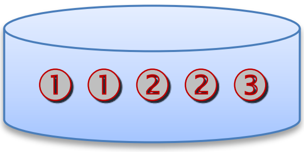
$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{P_3^2}{P_5^2} = \frac{3}{10} \quad , \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{P_2^1 \times P_3^1}{P_5^2} \times 2 = \frac{6}{10} \quad , \quad \mathbb{P}(X=2) = \frac{P_2^2}{P_5^2} = \frac{1}{10}$$

X	0	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{0 \times 3 + 1 \times 6 + 2 \times 1}{10} = \frac{4}{5} \quad , \quad \mathbb{V}(X) = \frac{0 \times 3 + 1 \times 6 + 4 \times 1}{10} - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$$

التمرين 14 :

يحتوي صندوق على خمس كرات :



اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3

نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من الصندوق

ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين

عين مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه وتباينه

الحل :

$X = \{2, 3, 4, 5\}$

$$(X=2) = \{(1,1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$$

$$(X=3) = \{(1,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$(X=4) = \{(1,3),(2,2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$$

$$(X=5) = \{(2,3)\}\ \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

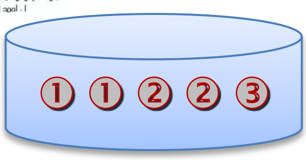
X	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{4 \times 1 + 9 \times 4 + 16 \times 3 + 25 \times 2}{10} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

التمرين 15 :

يحتوي صندوق على خمس كرات :



اثنتان تحملان الرقم 1 واثنتان تحملان الرقم 2 وواحدة تحمل الرقم 3

نسحب من الصندوق كرتين على التتالي ودون إعادة

ونسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع أرقام الكرتين المسحوبتين

عين مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه وتباينه

الحل :

$X = \{2, 3, 4, 5\}$

$(X = 2) = \{(1, 1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{10}$

$(X = 3) = \{(1, 2), (2, 1)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{4}{10}$

$(X = 4) = \{(1, 3), (3, 1), (2, 2)\} \Rightarrow \mathbb{P}(X = 4) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10}$

$(X = 5) = \{(2, 3), (3, 2)\}\ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{2}{10}$

X	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{10}}$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{2 \times 1 + 3 \times 4 + 4 \times 3 + 5 \times 2}{10} = \frac{18}{5}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{4 \times 1 + 9 \times 4 + 16 \times 3 + 25 \times 2}{10} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

التمرين 16 :

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

❶ نسحب عشوائياً كرة. ما احتمال أن تكون حمراء اللون ؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي ومع الإعادة

ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث

ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

الحل :

❶ بفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$ وبالتالي فإن عدد الكرات الكلي في الصندوق هو $4n$

بفرض أن الحدث R هو سحب كرة حمراء اللون وبالتالي : $\mathbb{P}(R) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$

❷ $X = \{0, 1, 2, 3\}$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{(3n)^0 (n)^3}{(4n)^3} = \frac{(n)^3}{(4)^3 (n)^3} = \frac{1}{64} \quad , \quad \mathbb{P}(X = 1) = 3\left(\frac{(3n)^1 (n)^2}{(4n)^3}\right) = \frac{9}{64}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = 3\left(\frac{(3n)^2 (n)^1}{(4n)^3}\right) = \frac{27}{64} \quad , \quad \mathbb{P}(X = 3) = \frac{(3n)^3 (n)^0}{(4n)^3} = \frac{27}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

التمرين 17 :

يحتوي صندوق على خمس كرات .
ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2
نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق .
يتكون فضاء العينة إذن من :
مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين و المأخوذة من بين خمسة عناصر .

❶ ما احتمال الحدث A : " للكرتين المسحوبتين اللون ذاته " ؟
❷ ما احتمال الحدث B :" مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3 " ؟
❸ ما احتمال الحدث B علماً أنَّ A قد وقع ؟

الحل :

❶ الحدث A إما كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين

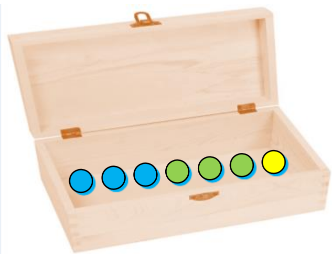
$$\mathbb{P}(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

❷ الحدث B كرة تحمل الرقم 1 وكرة تحمل الرقم 2 بالتالي $\mathbb{P}(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{\binom{2}{1}\times\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$

❸ $\mathbb{P}(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{2}{10}$ بالتالي $(B|A)=\frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}=\frac{2}{10}\times\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$

التمرين 18 :

يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء
نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق
ليكن X المتحول العشوائي الذي يُمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة



❶ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X ❷ احسب كلاً من $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$
❸ استنتج قيمة $\mathbb{P}(X=2)$ ❹ احسب توقع X وانحرافه المعياري

الحل :

❶ $X=\{1,2,3\}$

❷ $(X=1)=\{({\color{blue}\bullet},{\color{blue}\bullet},{\color{blue}\bullet}),({\color{green}\bullet},{\color{green}\bullet},{\color{green}\bullet})\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{56}$

$(X=3)=\{({\color{yellow}\bullet},{\color{blue}\bullet},{\color{green}\bullet})\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{12}{56}$

$(X=1)=\{({\color{blue}\bullet},{\color{blue}\bullet},{\color{blue}\bullet}),({\color{green}\bullet},{\color{green}\bullet},{\color{green}\bullet})\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=1)=\frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}}=\frac{5}{56}$

$(X=3)=\{({\color{yellow}\bullet},{\color{blue}\bullet},{\color{green}\bullet})\}\Rightarrow\mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}}=\frac{12}{56}$

❸ $\mathbb{P}(X=2)=1-\mathbb{P}(X=1)-\mathbb{P}(X=3)=1-\frac{5}{56}-\frac{12}{56}=\frac{39}{56}$

❹

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{1\times5+2\times39+3\times12}{56}=\frac{119}{56}=\frac{17}{8}$$

$$\mathbb{V}(X)=\frac{1\times5+4\times39+9\times12}{56}-\frac{289}{64}=\frac{269}{56}-\frac{289}{64}=\frac{1032}{3584}=\frac{129}{448}\quad,\quad\sigma(X)=\sqrt{\frac{129}{448}}$$

التمرين 19 :

يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء .
نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات . نتأمل المتحول العشوائي X الذي :
يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب : ثلاث كرات حمراء الحدث R_3)
ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب : كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2)
و أخيراً يأخذ القيمة 0 في بقية الحالات .

❶ احسب $\mathbb{P}(R_3)$ و $\mathbb{P}(R_2)$. ❷ عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه .

الحل :

❶ $X = \{5, 3, 0\}$

$$(R_3) = (X = 5) = \{(\bullet, \bullet, \bullet)\} \Rightarrow \mathbb{P}(R_3) = \mathbb{P}(X = 5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

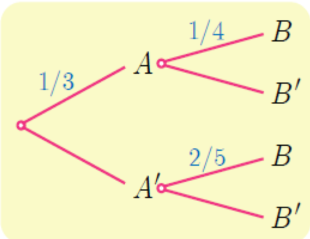
$$(R_2) = (X = 3) = \{(\bullet, \bullet, \bullet)\} \Rightarrow \mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(X = 3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

❷ $$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 5) - \mathbb{P}(X = 3) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}$$

X	5	3	0
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

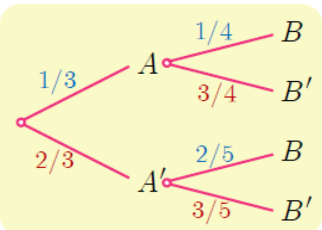
$$\mathbb{E}(X) = \frac{5\times1+3\times5+0\times6}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \quad , \quad \mathbb{V}(X) = \frac{25\times1+9\times5+0\times6}{12} - \frac{25}{9} = \frac{55}{18}$$

التمرين 20 :



استنادا الى الشكل المجاور عين الاحتمالات $P(A')$ و $P(B'|A)$ و $P(B'|A')$
واستنتج قيمة كل من $P(A \cap B)$ و $P(A \cap B')$ و $P(A' \cap B)$ و $P(A' \cap B')$

الحل :



$$P(A') = \frac{2}{3} \quad , \quad P(B'|A) = \frac{3}{4} \quad , \quad P(B'|A') = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \quad , \quad P(A \cap B') = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$P(A' \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{15} \quad , \quad P(A' \cap B') = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

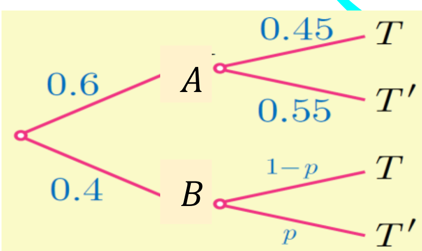
التمرين 21 :

في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب.

ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور، وأن 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب.

ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارس لعبة كرة المضرب؟

الحل :



بفرض A الحدث أن يكون ذكر فيكون $\mathbb{P}(A) = \frac{60}{100} = \frac{6}{10}$

بفرض B الحدث أن يكون أنثى فيكون $\mathbb{P}(B) = \frac{40}{100} = \frac{4}{10}$

بفرض T الحدث أن يمارس الطالب لعبة كرة المضرب

فيكون $\mathbb{P}(T) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10}$

فيكون لدينا المخطط الشجري التالي :

$$\mathbb{P}(T'|B) = P \ , \ \mathbb{P}(T) = \frac{6}{10} \times \frac{45}{100} + \frac{4}{10}(1 - P) = \frac{3}{10} \Rightarrow P = \mathbb{P}(T'|B) = \frac{925}{1000}$$

التمرين 22 :

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية.

عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح،

صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً وصنعت البقية الورشة B.

هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة معطوبة، في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة.

نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب.

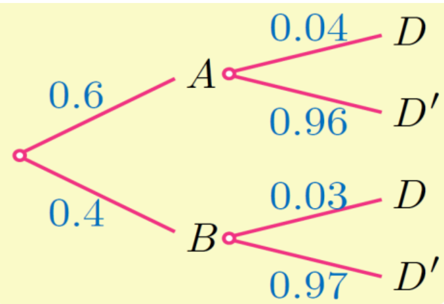
نرمز بالرمز A إلى الحدث «المصباح مصنوع في الورشة A »

وبالرمز D إلى الحدث «المصباح معطوب» .

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .　　❷ احسب احتمال أن يكون المصباح معطوباً .

❸ إذا كان المصباح معطوباً فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A .

الحل :



❶ $\mathbb{P}(A)=\frac{1200}{2000}=\frac{6}{10}\ ,\ \mathbb{P}(B)=\frac{800}{2000}=\frac{4}{10}$

❷ $\mathbb{P}(D)=\frac{6}{10}\times\frac{4}{100}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{100}=\frac{36}{1000}$

❸ $\mathbb{P}(A|D)=\frac{\mathbb{P}(A\cap D)}{\mathbb{P}(D)}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{4}{10}}{\frac{36}{100}}=\frac{24}{36}=\frac{2}{3}$

التمرين 23 :

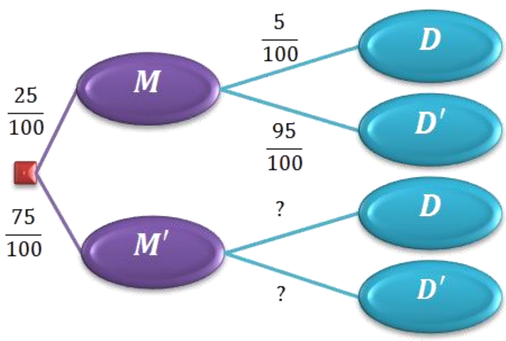
تبين دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين أنه أثناء فترة المسابقة يكون
احتمال أن يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع أحد الرياضيين له مساوياً 0.02
ويمكن لتناول بعض أدوية الرشح أن يؤثر في نتيجة الاختبار السابق .
يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة أدوية الرشح في الشتاء .
وبين هؤلاء يكون احتمال أن يُعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05 .
ليكن M الحدث " الرياضي يستعمل دواء الرشح "
وليكن D الحدث " نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية "
يجري اختيار أحد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين :
" الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية "
"الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح

الحل :

" الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية " هو : $M\cap D$

"الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً أنه لا يستعمل دواء الرشح" هو : $D\backslash M'$

$$\mathbb{P}(M\cap D)=\mathbb{P}(M)(D|M)=\frac{25}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{125}{10000}$$



$$\mathbb{P}(D\backslash M')=P$$

$$\mathbb{P}(D)=\frac{25}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{75}{100}\times P$$

$$\frac{2}{100}=\frac{125}{10000}+\frac{75}{100}\times P\Rightarrow\frac{75}{100}\times P=\frac{2}{100}-\frac{125}{10000}$$

$$P=\frac{75}{10000}\times\frac{100}{75}\Longrightarrow\mathbb{P}(D\backslash M')=P=\frac{1}{100}$$

التمرين 24 :

يضم نادي رياضي 80 سباحاً و 95 لاعب قوى و 125 لاعب جمباز .
يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط

❶ نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة . احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين :

a . الحدث A : "يمارس اللاعبون الثلاثة ألعاب قوى "

b . الحدث B : " يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة نفسها "

❷ نسبة الفتيات الذين يمارسون السباحة تساوي 45 % وبين الذين يمارسون ألعاب القوى 20 % وهي تساوي 68 % بين الذين يمارسون لعبة الجمباز .

a . نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي .

احسب P_1 : احتمال أن يكون فتاة تمارس إحدى ألعاب القوى .

احسب P_2 : احتمال أن يكون فتاة .

b . نختار عشوائياً فتاة من أعضاء النادي . احسب P_3 احتمال أن تكون لاعبة جمباز .

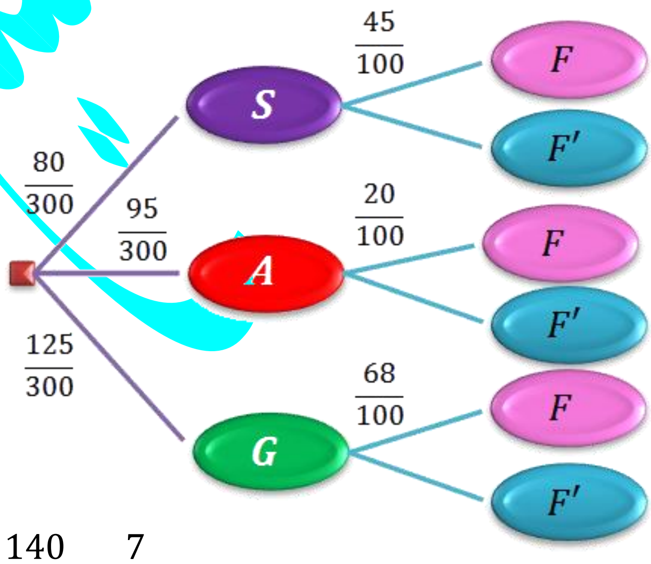
الحل :

❶

$$a\ )\quad \mathbb{P}(A)=\frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{27683}{891021}$$

$$b\ )\quad \mathbb{P}(B)\ =\frac{\binom{80}{3}+\binom{95}{3}+\binom{125}{3}}{\binom{300}{3}}=\frac{21533}{178204}$$

❷ نرسم المخطط الشجري باعتبار : S : لاعب سباحة A : لاعب قوى G : لاعب جمباز F : فتاة



$$a\ )\quad P_1=\mathbb{P}(F\cap A)=\mathbb{P}(A)(F|A)$$

$$=\frac{95}{300}\times\frac{20}{100}=\frac{19}{300}$$

$$P_2=\mathbb{P}(F)$$

$$P_2=\mathbb{P}(F\cap S)+\mathbb{P}(F\cap A)\ +\mathbb{P}(F\cap G)$$

$$=\frac{80}{300}\times\frac{45}{100}+\frac{95}{300}\times\frac{20}{100}+\frac{125}{300}\times\frac{68}{100}=\frac{140}{300}=\frac{7}{15}$$

$$b\ )\quad P_3=\mathbb{P}(G|F)=\frac{\mathbb{P}(F\cap G)}{\mathbb{P}(F)}=\frac{\frac{125}{300}\times\frac{68}{100}}{\frac{140}{300}}=\frac{17}{28}$$

التمرين 25 :

نتأمل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات حمراء

نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق

وبعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق

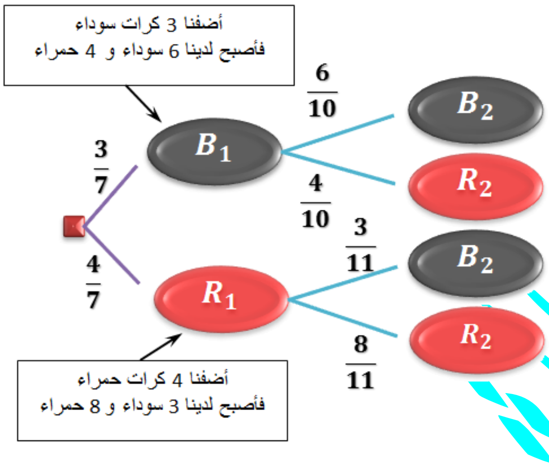
لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث : "الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون"

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

❷ احسب احتمال الحدث R_2

❸ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون

الحل :



❶ التمثيل الشجري

❷ اعتماداً على المخطط الشجري نجد:

$$P(R_2) = \frac{4}{7} \times \frac{8}{11} + \frac{3}{7} \times \frac{4}{10} = \frac{226}{385}$$

❸

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{7} \times \frac{4}{10}}{\frac{226}{385}} = \frac{33}{113}$$

التمرين 26 :

ليكن لدينا ثلاثة صناديق : الصندوق الأول يحوي خمس كرات زرقاء و كرة حمراء

و الصندوق الثاني يحوي أربع كرات زرقاء و كرتان حمراوان

و الصندوق الثالث يحوي ثلاث كرات زرقاء و ثلاث كرات حمراء

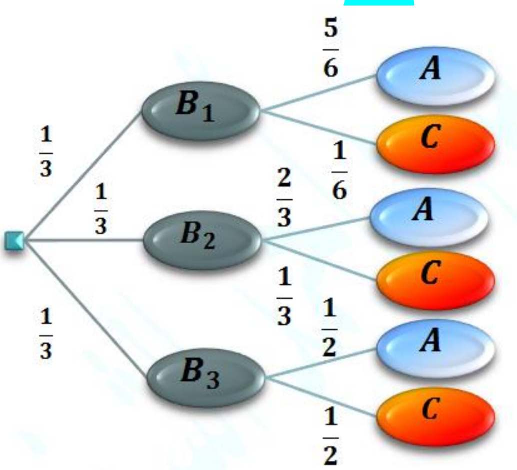
نختار عشوائياً واحداً من الصناديق ثم نختار منه كرة

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة

❷ احسب احتمال سحب كرة زرقاء اللون

❸ وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق الثاني

الحل :



بفرض الصندوق الأول B_1 و الصندوق الثاني B_2

و الصندوق الثالث B_3 و الكرة زرقاء A و الكرة حمراء C

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$$

$$\mathbb{P}(B_2|A) = \frac{\mathbb{P}(B_2 \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{12}{18}} = \frac{1}{3}$$

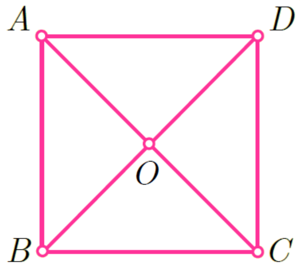
التمرين 27 :

نتأمل مربعاً $ABCD$ مركزه O . تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي

من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة أخرى وفق القواعد الآتية :

إذا كانت الجزيئة عند أحد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$

(فمثلاً من A يمكنها أن تنتقل إلى B أو D أو O).



وإذا كانت الجزيئة في O

فإنها تقفز إلى أي من الرؤوس A، B ، C ، D باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزيئة في A . في حالة $n \geq 1$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث :

" الجزيئة في O بعد القفزة رقم n " وليكن $P_n = \mathbb{P}(E_n)$ ، (إذاً $p_1 = \frac{1}{3}$)

يُطلب إيجاد علاقة تُفيد في حساب P_{n+1} انطلاقاً من P_n ثم حساب P_n بدلالة n .

الحل :

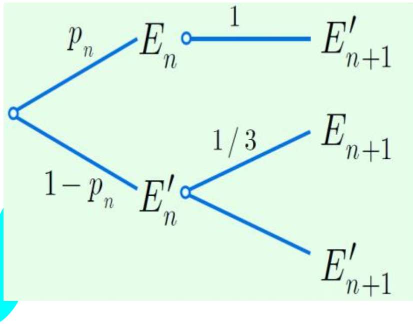
نرمز E_n للحدث "الجزيئة في O بعد القفزة رقم n " فيكون E'_n الحدث "الجزيئة في أحد الرؤوس بعد القفزة رقم n "

اذا كانت الجزيئة في مركز المربع بعد القفزة رقم n فإنها بعد القفزة رقم $n+1$ ستقفز حكما إلى أحد الرؤوس

وبالتالي فإن انتقالها سيكون حدث أكيد واحتماله 1

أما اذا كانت الجزيئة في أحد رؤوس المربع بعد القفزة رقم n فإنها بعد القفزة رقم $n+1$:

إما أن تقفز إلى أحد الرأسين المجاورين أو إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$ ومنه المخطط الشجري :



$$P_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) \Longrightarrow P_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - P_n)$$

$$x = \frac{1}{3}(1 - x) \Rightarrow x = \frac{1}{4} = a \Longrightarrow$$

$$t_n = P_n - a \Longrightarrow t_n = P_n - \frac{1}{4}$$

$$t_{n+1} = P_{n+1} - \frac{1}{4} \Longrightarrow$$

$$t_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - P_n) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{3} t_n$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $-\frac{1}{3}$ وحدها الأول $t_1 = P_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = -\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n \Rightarrow P_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{4}$$

التمرين 28 :

❶ ليكن a عدداً حقيقياً نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة بشرط البدء $u_1 = a$ والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$

a. لتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ المتتالية المعرفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$ أثبت أن $(v_n)_{n\geq 1}$ هندسية وعيّن أساسها ثم عبر عن v_n بدلالة n

b. استنتج صيغة u_n بدلالة n و a ثم احسب $lim_{n\to\infty} u_n$

❷ غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف

أياً كان العدد n $(n \geq 1)$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث : "نسي المدرس مفتاح غرفة الصف في اليوم n "

لنضع $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ ، $q_n = \mathbb{P}(E'_n)$

نفترض أنه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$

وإذا لم ينسَ المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال أن ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$.

a. أثبت أنه في حالة $n \geq 1$ لدينا $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$

b. استنتج صيغة p_{n+1} بدلالة p_n ثم استفد من (1) لتحسب p_n بدلالة n و p_1 أتتعلق نهاية المتتالية $(p_n)_{n\geq 1}$ بقيمة p_1

الحل :

❶ a. $v_n = 13u_n - 4$ وبالتالي $v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$ ومنه :

$$v_{n+1} = 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4 = \frac{52}{10} - \frac{39}{10}u_n - \frac{40}{10} = \frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n$$

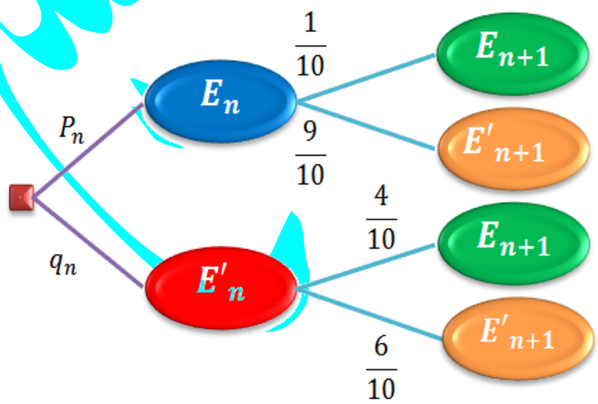
$$= \frac{-3}{10}(13u_n - 4) = \frac{-3}{10}v_n \Rightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{-3}{10}$$

وبالتالي v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{-3}{10}$ وحدها الأول $v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4$

$$v_n = v_1 q^{n-1} \Rightarrow v_n = (13a - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}$$

b.
$$u_n = \frac{1}{13}v_n + \frac{4}{13} = \frac{1}{13}(13a - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13} \Rightarrow u_n = \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$$



❷ a.
$$P_{n+1} = \mathbb{P}(E_{n+1}) = \mathbb{P}(E_n \cap E_{n+1}) + \mathbb{P}(E'_n \cap E_{n+1}) = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n$$

b.
$$P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n) \Rightarrow P_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$$

بالاستفادة من ❶ $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$ و $u_n = \left(a - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$

بما أن $P_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n$ (بالمقارنة بين P_{n+1} و u_{n+1} نستنتج صيغة P_n)

$P_n = \left(P_1 - \frac{4}{13}\right)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + \frac{4}{13}$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{4}{13}$ ولا تتعلق بـ P_1

التمرين 29 :

تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تُلقيها ، تكرر سعاد التجربة عدداً من المرات

عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يُصبح احتمال نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$

وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$

نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها

نتأمل أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n ، الحدثين الآتيين :

A_n : "نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n " و B_n : "فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n "

ونعرف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$

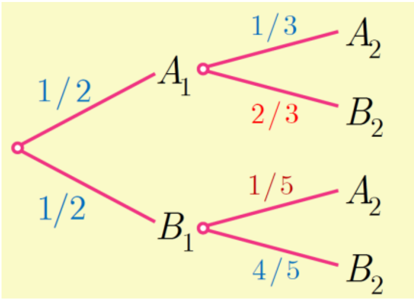
❶ عين p_1 وبرهن أنَ $p_2 = \frac{4}{15}$ ❷ أثبت أنه أياً كانت $n \geq 2$ كان $p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{5}$

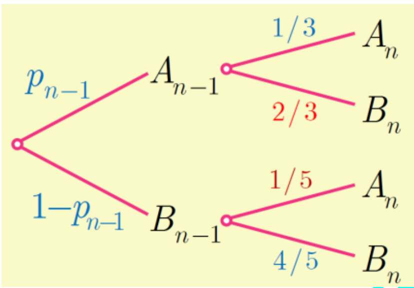
❸ نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار u_n بالعلاقة $u_n = p_n - \frac{3}{13}$

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 و أساسها q

❹ استنتج قيمة u_n ثم p_n بدلالة n ثم احسب $lim_{n\to\infty} p_n$

الحل :





❶ بما أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى

يساوي احتمال فشلها نجد أن $P_1 = \frac{1}{2}$

$$P_2 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{4}{15}$$

❷

$$P_n = P(A_n) = \frac{1}{3}P_{n-1} + \frac{1}{5}(1 - P_{n-1}) = \frac{2}{15}P_{n-1} + \frac{1}{5}$$

❸

$$u_{n+1} = P_{n+1} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15}P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13}$$

$$= \frac{2}{15}P_n - \frac{2}{65} = \frac{2}{15}\left(P_n - \frac{3}{13}\right) = \frac{2}{15}u_n$$

نستنتج أن المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ متتالية هندسية $\frac{2}{15}$

وحدها الأول $u_1 = P_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$

❹ لما كانت المتتالية $(U_n)_{n\geq 1}$ هندسية فإن

$$u_n = \frac{7}{26} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = \frac{105}{52} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n} \Rightarrow P_n = u_n + \frac{3}{13} = \frac{105}{52} \times \left(\frac{2}{15}\right)^{n} + \frac{3}{13}$$

ولما كان $-1 < \frac{2}{15} < 1$ استنتجنا أن $lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{15}\right)^n = 0$ وعليه يكون $lim_{x\to\infty} P_n = \frac{3}{13}$

التمرين 30 :

نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية. ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 6$ (عدد مرات الرمي) و $p = \frac{1}{6}$ (احتمال ظهور 6 في الرمية الواحدة لحجر النرد)

ولدينا $r = 3$ (عدد مرات ظهور 6)

$$\mathbb{P}\,(X = k) = \binom{n}{k}.(p)^k.(1-p)^{n-k} \Rightarrow \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{6}{3}.\left(\frac{1}{6}\right)^3.\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$$

التمرين 31 :

نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية ليكن A الحدث : «الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل» ما احتمال A

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 8$ و (عدد مرات الرمي) $p = \frac{1}{2}$ (احتمال ظهور عدد زوجي في الرمية الواحدة)

ولدينا $r \geq 3$ (عدد مرات ظهور العدد الزوجي المطلوب)

يعطى القانون الاحتمالي للتجربة البرنولية $\mathbb{P}\,(X = k) = \binom{n}{k}.(p)^k.(1-p)^{n-k}$

$$\mathbb{P}\,(X = k) = \binom{8}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^k.\left(\frac{1}{2}\right)^{8-k} = \binom{n}{k}.\left(\frac{1}{2}\right)^8 \Rightarrow$$

$$\mathbb{P}\,(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}\,(X < 3) = 1 - \Big(\mathbb{P}\,(X = 2) + \mathbb{P}\,(X = 1) + \mathbb{P}\,(X = 0)\Big)$$

$$= 1 - \left(\binom{8}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{1}.\left(\frac{1}{2}\right)^8 + \binom{8}{0}.\left(\frac{1}{2}\right)^8\right) = \frac{219}{256}$$

التمرين 32 :

يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار

يكسب A الدور الواحد باحتمال يساوي 0.6

يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

الحل :

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 9$ و (عدد مرات اللعب) $p = 0.6$ (احتمال أن يكسب A في الدور الواحد)

يكسب B المباراة إذا كانت خسارة A خمسة مرات أو أكثر

وهذا يعني أن يربح A أربع مباريات كأقصى حد

$$\mathbb{P}\,(X \leq 4) = \mathbb{P}(X = 4) + \mathbb{P}(X = 3) + \mathbb{P}(X = 2) + \mathbb{P}\,(X = 1) + \mathbb{P}\,(X = 0)$$

$$= \binom{9}{4}.(0.6)^4.(0.4)^5 + \binom{9}{3}.(0.6)^3.(0.4)^6 + \binom{9}{2}.(0.6)^2.(0.4)^7$$

$$+\binom{9}{1}.(0.6)^1.(0.4)^8 + \binom{9}{0}.(0.6)^0.(0.4)^9 \approx 0.2666$$

التمرين 33 :

نُكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقد متوازنتين ونسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين

احسب احتمال كل من الحدثين

A : " الحصول ثلاث مرات على الوجهين H " و B : " الحصول على وجهين H مرة على الأقل "

الحل :

في الرمية الواحدة لقطعتي النقود يكون $\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$

وظهور الشعار على قطعتي النقود هو $S = \{(H,H)\}$ لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 10$ و $p = \frac{1}{4}$

قانونه الاحتمالي $\mathbb{P}\,(X = k) = \binom{n}{k}.(p)^k.(q)^{n-k}$ حيث $k = 4$, $q = \frac{3}{4}$

$$\mathbb{P}\,(A) = \mathbb{P}\,(X = 3) = \binom{10}{3}.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\left(\frac{1}{4}\right)^3.\left(\frac{3}{4}\right)^7 = 120.\frac{(3)^7}{(4)^{10}}$$

$$\mathbb{P}\,(B) = \mathbb{P}\,(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}\,(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}.\left(\frac{1}{4}\right)^0.\left(\frac{3}{4}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

التمرين 34 :

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر .

نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي

❶ ما احتمال أن يظهر وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد ؟

❷ ما احتمال أن يظهر وجه أحمر مرة على الأقل ؟

❸ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعد عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها ؟

الحل :

❶ في الرمية الواحدة لحجر النرد

الحدث R : ظهور وجه أحمر ، فيكون $P(R) = \frac{1}{3}$ ويكون R_k هو ظهور الوجه الأحمر في المرة k

الحدث B: ظهور وجه أسود ، فيكون $P(B) = \frac{2}{3}$ ويكون B_k هو ظهور الوجه الأسود في المرة k

الحدث A: ظهور وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء حجر نرد فيكون :

الالقاء	الاول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
النتيجة	B_1	B_2	B_3	B_4	R_5
الاحتمال	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$A = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap B_4 \cap R_5$ بما أن هذه الأحداث مستقلة احتمالياً : $P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$

❷ الحدث C : ظهور الوجه الأحمر مرة على الأقل .

نأخذ الحدث المعاكس C' : ظهور الوجه الأسود خمس مرات وبالتالي :

الالقاء	الاول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس
النتيجة	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
الاحتمال	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$P(C) = 1 - P(C') = 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = 1 - \frac{32}{243} = \frac{211}{243}$$

طريقة ثانية :

$$P(C) = \mathbb{P}(X \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(X < 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 0) \Rightarrow P(C) = 1 - \left(\binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^5\right) = 1 - \left(\frac{32}{243}\right) = \frac{211}{243}$$

❸ $X = \{0,1,2,3,4,5\}$ لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n = 5$ و $p = \frac{2}{3}$ قانونه الاحتمالي

$$\mathbb{P}\,(X = k) = \binom{n}{k}.(p)^k.(1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{5}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243} \quad , \quad \mathbb{P}(X = 1) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{10}{243}$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \binom{5}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{40}{243} \quad , \quad \mathbb{P}(X = 3) = \binom{5}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{80}{243}$$

$$\mathbb{P}(X = 4) = \binom{5}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{80}{243} \quad , \quad \mathbb{P}(X = 5) = \binom{5}{5}\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}$$

X	0	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

التمرين 35 :

لدينا صندوق يحتوي على كرة بيضاء واحدة تحمل الرقم (1) و 3 كرات سوداء تحمل الأرقام (1 , 1 , 2).
نسحب عشوائياً كرتين معاً .
ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الكرات البيضاء المسحوبة .
و Y المتحول الذي يمثل مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين :
❶ اكتب قيم كل من X و Y و اكتب قانون الزوج (X , Y) ❷ استنتج قانوني كل من X و Y هل هما مستقلان احتماليا؟

الحل :

❶ $X = \{0,1\} \quad , Y = \{2,3\}$

$$\mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \quad , \quad \mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 2) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6}$$

$$\mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{2}{6} \quad , \quad \mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{1}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6}$$

X \ Y	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	

$$\mathbb{P}\,(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{1}{6}$$

المتحولين غير مستقلين احتمالياً

التمرين 36 :

نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (X, Y) من المتحولات العشوائية،
أكمله وبين إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

الحل :

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{10}$
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{7}{10}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	

$$\mathbb{P}\,(X = 0) \times \mathbb{P}(Y = 0) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{10} = \frac{1}{10} \neq \mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 0) = \frac{1}{20}$$

المتحولين غير مستقلين احتمالياً

التمرين 37 :

أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X, Y)
علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	0.2
2				0.4
قانون Y	0.3			

الحل :

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.8	0.4
1	0.06	0.1	0.04	0.2
2	012	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3	0.5	0.2	

التمرين 38 :

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي .
تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يُعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي :

x	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً
نرمز بالرمز E إلى الحدث" يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل " احسب احتمال الحدث E .

الحل :

لإنجاز الرحلة كاملة في ثلاثة أيام أو اقل نحن أمام الخيارات التالية :

- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 1) \cap ((X_B = 1)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يوم والمرحلة الثانية في يومين $(X_A = 1) \cap ((X_B = 2)$
- إنجاز المرحلة الأولى في يومين والمرحلة الثانية في يوم $(X_A = 2) \cap ((X_B = 1)$

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((X_A = 1) \cap ((X_B = 1)) + \mathbb{P}((X_A = 1) \cap ((X_B = 2)) + \mathbb{P}((X_A = 2) \cap ((X_B = 1))$$

بما أن الأحداث مستقلة احتمالياً نجد

$$\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}((X_A = 1) \times ((X_B = 1)) + \mathbb{P}((X_A = 1) \times ((X_B = 2)) + \mathbb{P}((X_A = 2) \times ((X_B = 1))$$

$$= 0.2 \times 0.2 + 0.2 \times 0.3 + 0.5 \times 0.2 = 0.2$$

التمرين 39 :

نُلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها .

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2 ، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4

❶ عيّن القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S .

❷ عيّن القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y .

❸ عيّن القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) .

❹ أيكون المتحولان العشوائيان Y, X مستقلين احتمالياً .

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

الحل :

❶ $S = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S هو :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}(S = s)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

❷ بواقي القسمة على 2 وفق الجدول التالي :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X باقي القسمة عل 2	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$X = \{0,1\}$

$$X = 0 \Leftrightarrow S = \{2,4,6,8,10,12\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(X = 0) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$X = 1 \Leftrightarrow S = \{1,3,5,7,9,11\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(X = 1) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

X	0	1
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

بواقي القسمة على 4 وفق الجدول التالي :

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Y باقي القسمة عل 4	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

$Y = \{0,1,2,3\}$

$$Y = 0 \Leftrightarrow S = \{4,8,12\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y = 0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$Y = 1 \Leftrightarrow S = \{1,5,9\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y = 1) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

$$Y = 2 \Leftrightarrow S = \{2,6,10\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y = 0) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

$$Y = 3 \Leftrightarrow S = \{3,7,11\} \Rightarrow \mathbb{P}\,(Y = 1) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

Y	0	1	2	3
$\mathbb{P}(Y = y)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$

❸ جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y)

s	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X باقي القسمة عل 2	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**
Y باقي القسمة عل 4	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**	**1**	**2**	**3**	**0**

$\mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 0) \Leftrightarrow S = \{4,8,12\}\ \ , \mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 0) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 2) \Leftrightarrow S = \{2,6,10\}\ \ , \mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 2) = \frac{1}{4}$

$\mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 1) \Leftrightarrow S = \{5,9\}\ \ , \mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 3) \Leftrightarrow S = \{3,7,11\}\ \ , \mathbb{P}\,(X = 1 \cap Y = 3) = \frac{5}{18}$

X \ Y	0	1	2	3	قانون X
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{5}{18}$	$\frac{1}{2}$
قانون Y	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{18}$	

❹ من الجدول نجد أن $\mathbb{P}\,(X = 0 \cap Y = 0) \neq \mathbb{P}\,(X = 0) \times \mathbb{P}\,(Y = 0)$

فالمتحولان X و Y غير مستقلين احتمالياً

الاختبار 1

المسألة الثانية :

يحوي صندوق 6 بطاقات مرقّمة بالأرقام $1\,,2\,,3\,,4\,,5\,,6$
نسحب منها عشوائيّاً بطاقتين على التتالي دون إعادة
ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يدل على أصغر رقمي البطاقتين المسحوبتين.
❶ عيّن مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X ، واكتب جدول قانونه الاحتمالي.
❷ احسب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$.

الحل :

	1	2	3	4	5	6
1		1	1	1	1	1
2	1		2	2	2	2
3	1	2		3	3	3
4	1	2	3		4	4
5	1	2	3	4		5
6	1	2	3	4	5	

❶ مجموعة قيم المتحوّل العشوائي X هي $X=\{1\,,2\,,3\,,4\,,5\}$
و جدول قانونه الاحتمالي هو :

x	1	2	3	4	5
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{10}{30}$	$\frac{8}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{4}{30}$	$\frac{2}{30}$

❷ حساب التوقّع الرياضي $\mathbb{E}(X)$ والتباين $\mathbb{V}(X)$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i P_i=\frac{1\times 10+2\times 8+3\times 6+4\times 4+5\times 2}{30}=\frac{70}{30}=\frac{7}{3}$$

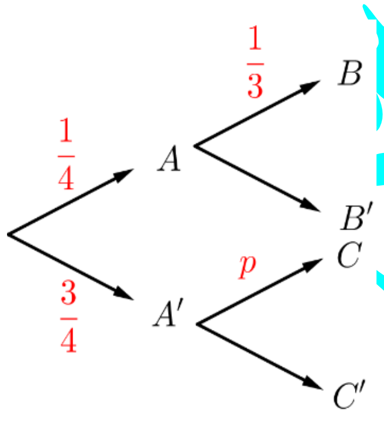
$$\mathbb{V}(X)=\sum_{i=1}^{m} {x_i}^2\, P_i-\big(E(x)\big)^2=\frac{1\times 10+4\times 8+9\times 6+16\times 4+25\times 2}{30}-\frac{49}{9}=\frac{210}{135}$$

الاختبار 2

السؤال الثالث :

ليكن A و B مرتبطين بتجربة عشوائية معروضة بالمخطّط الشجري المجاور.
كيف نختار قيمة p حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً

الحل



حتّى يكون الحدثان A و B مستقلّين احتماليّاً يجب أن يتحقّق :

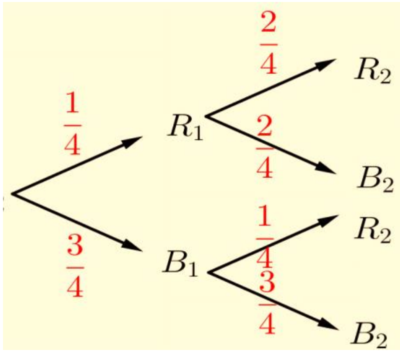
$$\mathbb{P}(A\cap B)=\mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\cdot p\right)$$

$$\frac{3}{4}p=\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\Rightarrow p=\frac{1}{3}$$

المسألة الثانية :

لدينا n صندوقاً $u_1, u_2, \cdots, u_n$ حيث u_1 يحوي ثلاث كرات زرقاء وكرة حمراء واحدة
وكل صندوق من الصناديق الباقية يحوي كرتين زرقاوين وكرة واحدة حمراء
نسحب كرة من الصندوق u_1 ثمّ نضعها في الصندوق u_2
ثمّ نسحب كرة من الصندوق u_2 ونضعها في الصندوق u_3 وهكذا ...
نسحب كرة من الصندوق u_{n-1} ونضعها في الصندوق u_n
يرمز R_k إلى الحدث (الكرة المسحوبة من الصندوق u_k حمراء)



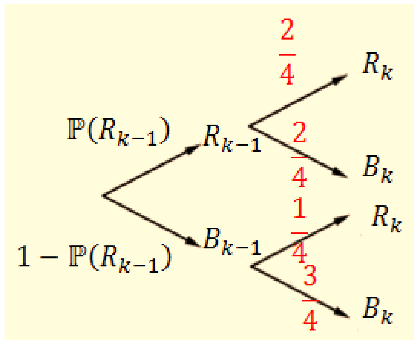
❶ احسب $\mathbb{P}(R_1)$
❷ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$
❸ أثبت أنّ $\mathbb{P}(R_k) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$ في حالة $2 \le k \le n$
❹ نعرّف $x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$
a . أثبت أنّ المتتالية $(x_k)_{k\ge1}$ هندسيّة. عيّن أساسها وحدّها الأوّل
b . اكتب x_k بدلالة k واستنتج $\mathbb{P}(R_k)$ بدلالة k

الحل :

❶ $\mathbb{P}(R_1) = \frac{1}{4}$

❷
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}.\frac{2}{4} + \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{5}{16} \\ \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} = \frac{5}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{P}(R_2) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_1) + \frac{1}{4}$$

❸
$$\mathbb{P}(R_k) = \frac{2}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}\left(1 - \mathbb{P}(R_{k-1})\right)$$
$$= \frac{2}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_{k-1}) + \frac{1}{4}$$



❹ $a)$ $x_k = \mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}$
$$x_{k+1} = \mathbb{P}(R_{k+1}) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}\mathbb{P}(R_k) + \frac{1}{4} - \frac{1}{3}$$
$$= \frac{1}{4}\,\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}\left[\mathbb{P}(R_k) - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{4}x_k$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{4}$ حدّها الأوّل $x_1 = \mathbb{P}(R_1) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}$ بالتالي

b) $x_k = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}$
$$\mathbb{P}(R_k) = x_k + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$$

السؤال الرابع :

يحوي صندوق ثلاث كرات سوداء و خمس كرات بيضاء،
عند سحب كرة سوداء يخسر اللاعب نقطة واحدة، وعند سحب كرة بيضاء ينال نقطتين.
يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة. ما احتمال أن يحصّل اللاعب نقطة واحدة فقط؟

الحل :

يسحب اللاعب كرتين على التتالي دون إعادة فيحصل على نقطة واحدة فقط اذا سحب كرة بيضاء وكرة سوداء

$$\mathbb{P}(A) = \frac{P_5^1 \times P_3^1}{P_8^2} \times 2 = \frac{5 \times 3}{8 \times 7} \times 2 = \frac{15}{28}$$

المسألة الثانية :

يواجه حارس مرمى عدداً من ضربات الجزاء
إذا صد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.8
وإذا لم يصد ضربة الجزاء n فإن احتمال أن يصد ضربة الجزاء $n+1$ يساوي 0.6
نفترض أن احتمال أن يصد أول ضربة جزاء يساوي 0.7
ليكن A_n الحدث « يصد حارس المرمى ضربة الجزاء n »

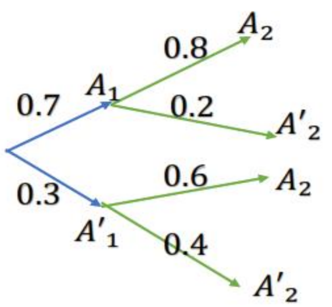
❶ احسب $\mathbb{P}(A_2|A_1)$ و $\mathbb{P}(A_2|A_1')$ ❷ استنتج أنّ $\mathbb{P}(A_2) = 0.74$

❸ نعرّف $p_n = \mathbb{P}(A_n)$:

① برهن أن $p_{n+1} = (0.2)p_n + 0.6$

② لنعرف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ بالصيغة $u_n = p_n - 0.75$ بيّن أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها 0.2
ثم استنتج عبارة p_n بدلالة n ثمّ احسب $lim_{n\to+\infty} p_n$

الحل :

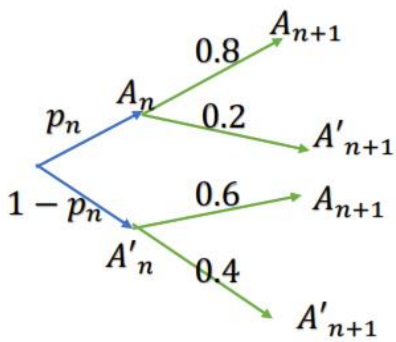


من المخطط الشجري يمكن أن نجد بسهولة

❶ $\mathbb{P}(A_2|A_1) = 0.8 \quad , \quad \mathbb{P}(A_2|A_1') = 0.6$

❷ $\mathbb{P}(A_2) = 0.7 \times 0.8 + 0.3 \times 0.6 = 0.56 + 0.18 = 0.74$

❸



①
$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n(0.8) + (1-p_n)(0.6) \\ &= (0.8)p_n - (0.6)p_n + 0.6 \\ &= 0.2p_n + 0.6 \end{aligned}$$

②
$$\begin{aligned} u_n &= p_n - 0.75 \\ u_{n+1} &= p_{n+1} - 0.75 = 0.2p_n + 0.6 - 0.75 \\ &= 0.2p_n + 0.6 - 0.75 = 0.2p_n - 0.15 \\ &= 0.2(p_n - 0.75) = 0.2u_n \end{aligned}$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها 0.2
وحدّها الأوّل : $u_1 = p_1 - 0.75 = 0.70 - 0.75 = -0.15$ بالتالي :

$$u_n = u_1 . q^{n-1} = -0.15 \times (0.2)^{n-1} = -\frac{0.15}{0.2}(0.2)^n = -0.75(0.2)^n$$

$$p_n = u_n + 0.75 = -0.75(0.2)^n + 0.75 = 0.75(1 - (0.2)^n)$$

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} 0.75(1 - (0.2)^n) = 0.75 \times (1 - 0) = 0.75$$

المسألة الثانية :

نتأمّل صندوقين. يحتوي الصندوق الأوّل على (3) كرات مرقّمة بالأعداد $1\,,2\,,3$
ويحتوي الصندوق الثاني على (4) كرات مرقّمة بالأعداد $2\,,3\,,4\,,5$
نسحب عشوائيّاً كرة من الصندوق الأوّل ثمّ كرة من الصندوق الثاني والمطلوب :

❶ اكتب فضاء العيّنة المرتبط بهذا الاختبار.

❷ ليكن A الحدث " إحدى الكرتين المسحوبتين على الأقل تحمل رقم (3) "
وليكن B الحدث " مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين أكبر تماماً من (5) "
هل الحدثان A و B مستقلان احتماليّاً ؟ علّل إجابتك.

❸ نعرّف متحوّلاً عشوائيّاً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين،
اكتب مجموعة قيم X واكتب قانون جدوله الاحتمالي ثمّ احسب توقّعه الرياضي وتباينه

الحل :

❶

$$\Omega = \{(1,2)\,,(1,3),(1,4)\,,(1,5)\,,(2,2)\,,(2,3)\,,(2,4)\,,(2,5)\,,(3,2)\,,(3,3)\,,(3,4)\,,(3,5)\}$$

❷

$$A = \{(1,3)(2,3)(3,2)(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1,5)(2,4)(2,5)(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Rightarrow \mathbb{P}(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(3,3)(3,4)(3,5)\} \quad \Rightarrow \mathbb{p}(A \cap B) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$$

و الحدثان A و B مستقلان احتماليّاً لأنّ $\mathbb{p}(A \cap B) = \mathbb{P}(A).\mathbb{P}(B)$

❸

$$X(\Omega) = \{3\,,4\,,5\,,6\,,7\,,8\,\}$$

x	3	4	5	6	7	8
$\mathbb{P}(X = x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{1}{12}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i = \frac{3+8+15+18+14+8}{12} = \frac{66}{12} = \frac{11}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2\, P_i - \left(E(x)\right)^2 = \frac{9+32+75+108+98+64}{12} - \frac{121}{4} = \frac{23}{12}$$

النموذج الوزاري الأول

السؤال الثاني :

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية
الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي لـ X

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$					$\frac{16}{81}$

❶ ما عدد الاختبارات في التجربة؟
❷ أكمل الجدول المجاور
❸ احسب التوقّع الرياضي وتباين المحوّل العشوائي X

الحل :

❶ عدد الاختبارات في التجربة هو $n = 4$

❷ من الجدول نجد : $p^4 = \frac{16}{81} \Longrightarrow p = \frac{2}{3}$ ولدينا

$$\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k . q^{n-k} = \binom{4}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k . \left(\frac{1}{3}\right)^{4-k}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{3}\right)^0 . \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=1) = \binom{4}{1}\left(\frac{2}{3}\right)^1 . \left(\frac{1}{3}\right)^3 = (4)\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{27}\right) = \frac{8}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \binom{4}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2 . \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$\mathbb{P}(X=3) = \binom{4}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^3 . \left(\frac{1}{3}\right)^1 = (4)\left(\frac{8}{27}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{32}{81}$$

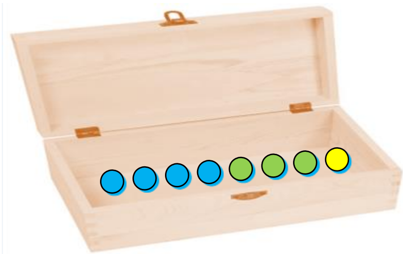
$$\mathbb{P}(X=4) = \binom{4}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4 . \left(\frac{1}{3}\right)^0 = (1)\left(\frac{16}{81}\right)(1) = \frac{16}{81}$$

k	0	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X=k)$	$\frac{1}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{16}{81}$

❸

$$\mathbb{E}(X) = n.p = 4 \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \quad , \quad \mathbb{v}(X) = n.pq = 4 \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{8}{9}$$

التمرين الرابع :



يحتوي صندوق على أربع كرات زرقاء وثلاث كرات خضراء وواحدة بيضاء
نسحب عشوائياً وفي آنٍ معاً ثلاث كرات من الصندوق
ليكن X المتحول العشوائي الذي يُمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة

❶ ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X
❷ احسب كلاً من $\mathbb{P}(X=1)$ و $\mathbb{P}(X=3)$
❸ استنتج قيمة $\mathbb{P}(X=2)$
❹ احسب توقع X وانحرافه المعياري

الحل :

❶

$$X = \{1, 2, 3\}$$

❷

$$(X=1) = \{({\color{blue}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{blue}\bullet}), ({\color{green}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{green}\bullet})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

$$(X=3) = \{({\color{yellow}\circ}, {\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

$$(X=1) = \{({\color{blue}\bullet}, {\color{blue}\bullet}, {\color{blue}\bullet}), ({\color{green}\bullet}, {\color{green}\bullet}, {\color{green}\bullet})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{4}{3}+\binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56}$$

$$(X=3) = \{({\color{yellow}\circ}, {\color{blue}\bullet}, {\color{green}\bullet})\} \Rightarrow \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{1}{1}\binom{4}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

❸

$$\mathbb{P}(X=2) = 1 - \mathbb{P}(X=1) - \mathbb{P}(X=3) = 1 - \frac{5}{56} - \frac{12}{56} = \frac{39}{56}$$

❹

x	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i = \frac{1\times 5 + 2\times 39 + 3\times 12}{56} = \frac{119}{56} = \frac{17}{8}$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 P_i - \left(E(x)\right)^2 = \frac{1\times 5 + 4\times 39 + 9\times 12}{56} - \frac{289}{64} = \frac{269}{56} - \frac{289}{64} = \frac{1032}{3584} = \frac{129}{448}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{\frac{129}{448}}$$

المسألة الأولى :

صندوق يحتوي على على ثلاث كرات حمراء وأربع كرات سوداء
نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آن معاً
وليكن الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل
والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل احسب الاحتمالات التالية :

❶ A و B و $A|B$

❷ إذا كان X متحوّل عشوائي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة
اكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه

الحل :

❶ الحدث A الحصول على كرة حمراء على الأقل فالمتمم أن تكون الكرات الثلاث سوداء

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = 1 - \frac{\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

والحدث B الحصول على كرتين سوداوين على الأقل أي : (كرتين سوداوين وواحدة حمراء) أو (الثلاث سوداء)

$$\mathbb{P}(B) = \frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1} + \binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{\frac{4\times3}{2\times1}\times3 + \frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}}{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}} = \frac{18+4}{35} = \frac{22}{35}$$

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{\binom{4}{2}\binom{3}{1}}{\binom{7}{3}}}{\frac{22}{35}} = \frac{\frac{18}{35}}{\frac{22}{35}} = \frac{18}{22} = \frac{9}{11}$$

❷ $X = \{\,0\,,1\,,2\,,3\,\}$

$$\mathbb{P}(X=0) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{4}{35} \quad , \quad \mathbb{P}(X=1) = \frac{\binom{3}{1}\binom{4}{2}}{\binom{7}{3}} = \frac{18}{35}$$

$$\mathbb{P}(X=2) = \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{12}{35} \quad , \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{1}{35}$$

❹

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i = \frac{0\times4 + 1\times18 + 2\times12 + 3\times1}{35} = \frac{45}{35} = \frac{9}{7}$$

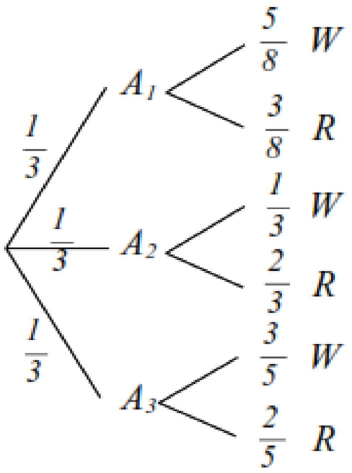
$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2\, P_i - \left(E(x)\right)^2 = \frac{0\times4 + 1\times18 + 4\times12 + 9\times1}{35} - \frac{81}{49}$$

$$= \frac{75}{35} - \frac{81}{49} = \frac{15}{7} - \frac{81}{49} = \frac{105-81}{49} = \frac{24}{49}$$

النموذج الوزاري الرابع

السؤال الرابع :

في المخطّط الشجري المرسوم جانباً الرمز W يدل على الكرات البيضاء والرمز R على الكرات الحمراء حيث يتم عشوائيّاً اختيار كرة واحدة.



❶ ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء.

❷ إذا كانت الكرة المسحوبة حمراء فما احتمال أن تكون من الصندوق الأوّل.

الحل :

❶ بفرض الحدث B الكرة المسحوبة حمراء :

$$\mathbb{p}(B) = \frac{1}{3}.\frac{3}{8} + \frac{1}{3}.\frac{2}{3} + \frac{1}{3}.\frac{2}{5} = \frac{173}{360}$$

❷ بفرض الحدث A الكرة المسحوبة من الصندوق الأوّل :

$$\mathbb{p}(A|B) = \frac{\mathbb{p}(A \cap B)}{\mathbb{p}(B)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{8}}{\frac{173}{360}} = \frac{45}{173}$$

النموذج الوزاري الخامس

التمرين الرابع :

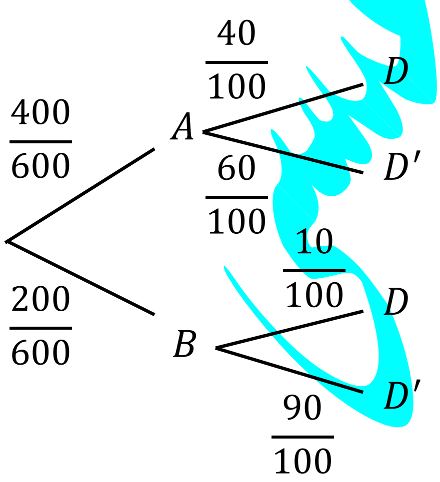
يشتري محل للأدوات الكهربائيّة 400 مصباح من المصنع A و 200 مصباح من المصنع B، نعلم أنّ نسبة المصابيح المعطوبة في انتاج A هي 40% وفي إنتاج B هي 10% نسحب عشوائياً مصباحاً.

❶ ما احتمال أن يكون المصباح معطوباً.

❷ إذا علمت أنّ المصباح معطوب ما احتمال أن يكون من المصنع B

الحل :

الحل :



❶

$$\mathbb{P}(D) = \frac{400}{600} \times \frac{40}{100} + \frac{200}{600} \times \frac{10}{100}$$
$$= \frac{2}{3} \times \frac{4}{10} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{10} = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$$

❷

$$\mathbb{P}(B|D) = \frac{\mathbb{P}(B \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{10}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{1}} = \frac{1}{9}$$

التمرين الثاني :

صندوق يحوي خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء.
نسحب عشوائيّاً من الصندوق ثلاث كرات معاً.
نتأمّل المتحوّل العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء
ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتان حمراوان وكرة خضراء والقيمة صفر فيما عدا ذلك.
عين القانون الاحتمالي للمتغيّر العشوائي X، واحسب توقّعه وتباينه.

الحل :

$$X = \{5, 3, 0\}$$

$$\mathbb{P}(X=5) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12} \quad , \quad \mathbb{P}(X=3) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

$$\mathbb{P}(X=0) = 1 - \mathbb{P}(X=5) - \mathbb{P}(X=3) = 1 - \frac{1}{12} - \frac{5}{12} = \frac{6}{12}$$

x	5	3	0
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{6}{12}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{m} x_i P_i = \frac{5\times 1 + 3\times 5 + 0\times 6}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^{m} {x_i}^2 P_i - (E(x))^2 = \frac{25\times 1 + 9\times 5 + 0\times 6}{12} - \frac{25}{9} = \frac{55}{18}$$

التمرين الرابع :

نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية | | | | | بأحد العددين 0 أو 3

❶ ليكن الحدث A (مجموع الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي 6)
وليكن B (عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين) أحسب $P(A)$ ثم $P(B|A)$

❷ نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة عدد الخانات التي كتب فيها العدد 3
أكتب القانون الاحتمالي واحسب التوقّع الرياضي والتباين

الحل :

❶ عدد فضاء العينة: $n(\Omega) = 2^4 = 16$

الحدث A : مجموعة الأعداد التي كتبت في الخانات يساوي 6
يقع هذا الحدث عند ظهور عددان صفر وعددان 3
بغض النظر عن الترتيب

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

الحدث B : عدم ظهور العدد ذاته في خانتين متجاورتين

$$A \cap B = \{0303\,,3030\}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(\Omega)} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{3}$$

$n(\Omega)$	Ω				المجموع
1	0	0	0	0	
2	0	0	0	3	
3	0	0	3	0	
4	0	0	3	3	6
5	0	3	0	0	
6	0	3	0	3	6
7	0	3	3	0	6
8	0	3	3	3	
9	3	0	0	0	
10	3	0	0	3	6
11	3	0	3	0	6
12	3	0	3	3	
13	3	3	0	0	6
14	3	3	0	3	
15	3	3	3	0	
16	3	3	3	3	

❷

$$X = \{0\,,1\,,2\,,3\,,4\} \quad , \quad P(X=0) = \frac{1}{16} \quad , \quad P(X=1) = \frac{4}{16}$$

$$P(X=2) = \frac{6}{16} \quad , \quad P(X=3) = \frac{4}{16} \quad , \quad P(X=4)\frac{1}{16}$$

x	0	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$

$$E(X) = n.p = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

$$V(X) = n.p.q = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1$$

دورة 2017 الأولى

التمرين الثالث :

نلقي قطعة نقود غير متوازنة ثلاث مرات متتالية ، بحيث يكون احتمال ظهور الشعار في كل مرة يُساوي $\frac{1}{3}$

نُعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد مرات ظهور الشعار

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي وتباينه

الحل :

$X=\{0\,,1\,,2\,,3\}$ تجربة برنولية $n=3\,,p=\frac{1}{3},q=\frac{2}{3}$ قانونه الاحتمالي $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$

$P(X=1)=\binom{3}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1.\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12}{27}$ ، $P(X=0)=\binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0.\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$P(X=3)=\binom{3}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3.\left(\frac{2}{3}\right)^0=\frac{1}{27}$ ، $P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2.\left(\frac{2}{3}\right)^1=\frac{6}{27}$

التوقع الرياضي $E(X)=n.p=3\times\frac{1}{3}=1$ و التباين $V(X)=n.p.q=3\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

دورة 2017 الثانية

المسألة الثالثة :

يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع الأقلام . وعندما ورد طلب لعدد من الأقلام قدره 1000 قلم ،

صنعت الورشة A منها 600 وصنعت البقية الورشة B وهناك نسبة 5% من أقلام الورشة A غير صالحة للاستعمال

في حين تكون نسبة 2% من أقلام الورشة B غير صالحة للاستعمال

نسحب عشوائياً قلماً من الطلب ، نرمز بالرمز A إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة A)

وبالرمز B إلى الحدث (القلم مصنوع في الورشة B) وبالرمز D إلى الحدث (القلم غير صالح للاستعمال)

❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة ❷ احسب احتمال أن يكون القلم صالح للاستعمال

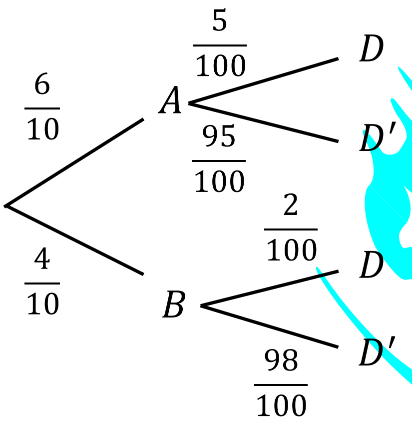
❸ إذا كان القلم صالحاً للاستعمال فما احتمال أن يكون مصنوعاً في الورشة A

❹ نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً وليكن X المتحول العشوائي

الذي يُمثل عدد الأقلام المسحوبة الصالحة للاستعمال ، احسب $\mathbb{P}(X=0)$

الحل :

❶



❷ $\mathbb{P}(D')=\frac{6}{10}\times\frac{95}{100}+\frac{4}{10}\times\frac{98}{100}=\frac{962}{1000}$

❸ $\mathbb{P}(A|D')=\frac{\mathbb{P}(A\cap D')}{\mathbb{P}(D')}=\frac{\frac{6}{10}\times\frac{95}{100}}{\frac{962}{1000}}=\frac{570}{962}$

❹ نسحب عشوائياً من الورشة A قلمين معاً فيكون

$X=0$ يدل على أنه لا يوجد اقلام صالحة من بين المسحوبات بالتالي القلمين المسحوبين غير صالحين

عدد الاقلام الغير صالحة في الورشة A هو $600\times\frac{5}{100}=30$ بالتالي :

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{\binom{30}{2}}{\binom{600}{2}}=\frac{30\times29}{600\times599}=\frac{29}{20\times599}$$

دورة 2018 الأولى

التمرين الثالث :

ليكن X متحول عشوائي يمثل عدد النجاحات في تجربة برنولية ، الجدول غير المكتمل المجاور هو القانون الاحتمالي للمتحول X الممثل لثلاث نجاحات ، فإذا علمت أن احتمال النجاح يساوي $\frac{2}{3}$

k	0	1	2	3
$P(X=k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27}$	...	...

❶ جد $P(X=3), P(X=2)$

❷ ما التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X

❸ ما تباين المتحول العشوائي X

الحل :

❶ لدينا تجربة برنولية $n=3$, $p=\frac{2}{3}$ بالتالي $q=\frac{1}{3}$ و $P(X=K)=\binom{n}{k}p^k.q^{n-k}$

$$P(X=3)=\binom{3}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^3.\left(\frac{1}{3}\right)^0=\frac{8}{27} \quad , \quad P(X=2)=\binom{3}{2}.\left(\frac{2}{3}\right)^2.\left(\frac{1}{3}\right)^1=\frac{12}{27}$$

❷ التوقع الرياضي : $E(X)=n.p=3\times\frac{2}{3}=2$

❸ التباين : $V(X)=n.p.q=3\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$

دورة 2018 الثانية

التمرين الثاني :

صندوق يحوي (9) كرات متماثلة منها (4) كرات خضراء و (5) كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات معاً ، نتأمل المتحول العشوائي الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب ثلاث كرات حمراء والقيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب كرتين حمراوين وكرة خضراء والقيمة صفر ما عدا ذلك والمطلوب :

اكتب مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي

الحل :

$$X=\{5,3,0\}$$

$$\mathbb{P}(X=5)=\frac{\binom{5}{3}}{\binom{9}{3}}=\frac{10}{84} \quad , \quad \mathbb{P}(X=3)=\frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}}=\frac{40}{84}$$

$$\mathbb{P}(X=0)=1-\big(\mathbb{P}(X=5)+\mathbb{P}(X=3)\big)=1-\frac{50}{84}=\frac{34}{84}$$

x	5	3	0
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{10}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{34}{84}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{m}x_iP_i=\frac{5\times10+3\times40+0\times34}{84}=\frac{170}{84}$$

التمرين الثاني :

صندوق يحوي 5 كرات متماثلة ثلاث كرات حمراء اللون تحمل الأرقام 2 , 1 , 0
وكرتان بيضاء اللون تحمل الأرقام 1 , 0 نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة من هذا الصندوق ،

❶ الحدث A الكرتان المسحوبتان لهما اللون ذاته ، احسب $P(A)$

❷ نعرف متحولا عشوائياً X يدل على مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين
عين مجموعة قيم المتحول العشوائي X واكتب جدول قانونه الاحتمالي واحسب توقعه الرياضي.

الحل :

❶ الحدث A إما كرتين حمراوين أو كرتين سوداوين

$$\mathbb{P}(A)=\frac{P_3^2+P_2^2}{P_5^2}=\frac{3\times 2+2\times 1}{5\times 4}=\frac{8}{20}$$

❷ $X=\{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}(X=0)=\frac{P_2^2}{P_5^2}=\frac{2}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=1)=\frac{P_2^1\times P_2^1}{P_5^2}\times 2=\frac{8}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{P_2^2+(P_2^1\times P_1^1)\times 2}{P_5^2}=\frac{6}{20}$$

$$\mathbb{P}(X=3)=\frac{P_2^1\times P_1^1}{P_5^2}\times 2=\frac{4}{20}$$

x	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{2}{20}$	$\frac{8}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{4}{20}$

$$\mathbb{E}(X)=\sum_{i=1}^{m}x_iP_i=\frac{0\times 2+1\times 8+2\times 6+3\times 4}{20}=\frac{32}{20}=\frac{8}{5}$$

التمرين الرابع :

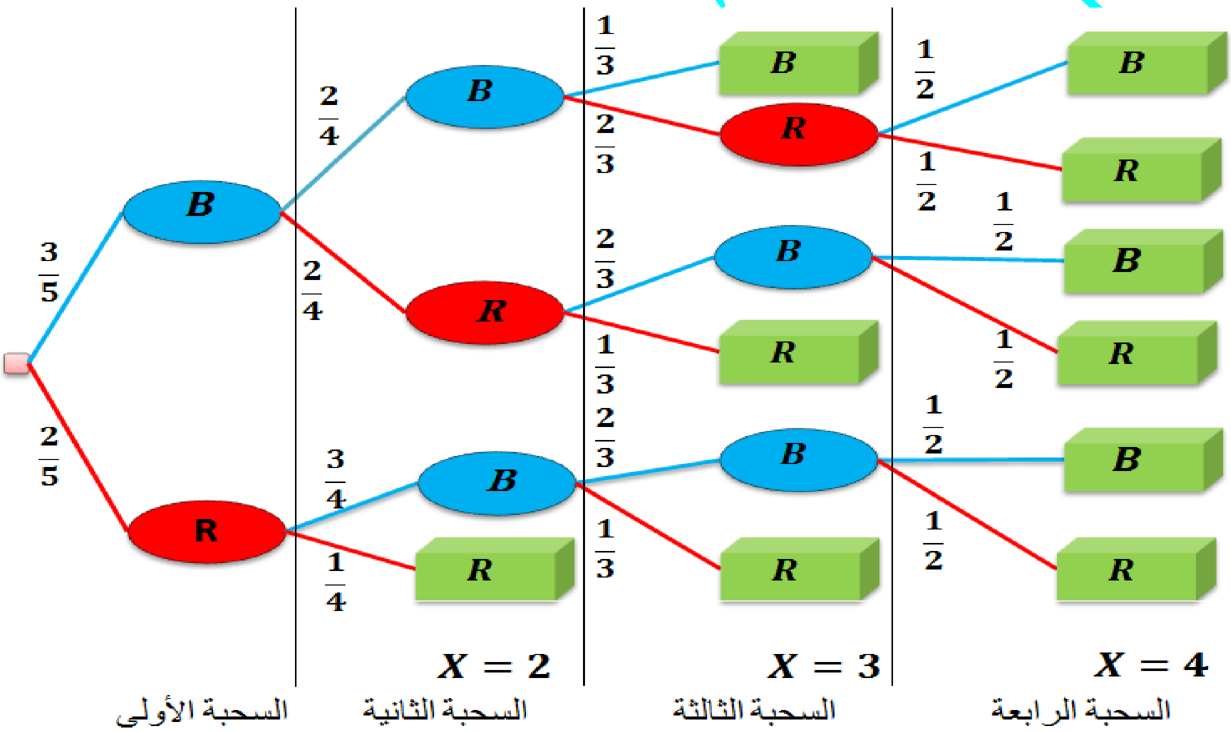
صندوق يحتوي على خمس كرات منها كرتان حمراوان وثلاث كرات زرقاء

نكرر عملية سحب عشوائيا لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة

عين مجموعة القيم التي يأخذها X واكتب جدول القانون الاحتمالي للمتحول X واحسب توقعه الرياضي

الحل :



$$\mathbb{P}(X=2)=\frac{1}{4}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{10}\quad,\quad \mathbb{P}(X=3)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$\mathbb{P}(X=4)=1-\big(\mathbb{P}(X=2)+\mathbb{P}(X=3)\big)=1-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}=\frac{6}{10}$$

x	2	3	4
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$

$$\mathbb{E}(X)=\frac{2\times1+3\times3+4\times6}{10}=\frac{35}{10}$$

دورة 2021 الأولى

السؤال السادس :

نتأمل حجر نرد متوازن فيه أربعة وجوه ملونة بالأسود ووجهان ملونان بالأحمر .

نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي

نعرف متحولا عشوائيا X يدل على عدد الوجوه السوداء التي نحصل عليها والمطلوب :

❶ أكتب قيم المتغير العشوائي X واحسب $P(X=0)$

❷ أحسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي وتباينه

الحل :

❶ $X=\{0,1,2,3,4,5\}$

لدينا هنا تجربة برنولية وسيطاها $n=5$ و $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$ ومنه $q=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ قانونه الاحتمالي

$$\mathbb{P}\,(X=k)=\binom{n}{k}.(p)^k.(q)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}\,(X=0)=\binom{5}{0}.\left(\frac{2}{3}\right)^0.\left(\frac{1}{3}\right)^5=\frac{1}{243}$$

❷ التوقع الرياضي : $E(X)=n.p=5\times\frac{2}{3}=\frac{10}{3}$ التباين : $V(X)=n.p.q=5\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{10}{9}$

دورة 2021 الثانية

السؤال السادس :

يحتوي صندوق على كرات حمراء وكرات بيضاء. عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة أضعاف عدد الكرات البيضاء

المطلوب :

❶ نسحب عشوائياً من الصندوق كرة. ما احتمال أن تكون بيضاء اللون ؟

❷ نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي مع الإعادة

ونعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات البيضاء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاثة

اكتب مجموعة قيم X و جدول القانون الاحتمالي

الحل :

❶ بفرض عدد الكرات البيضاء n فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$ وبالتالي فإن عدد الكرات الكلي في الصندوق هو $4n$

بفرض أن الحدث W هو سحب كرة حمراء اللون وبالتالي : $\mathbb{P}(W)=\frac{n}{4n}=\frac{1}{4}$

❷ $X=\{0,1,2,3\}$

$$\mathbb{P}\,(X=0)=\frac{(3n)^3}{(4n)^3}=\frac{27}{64}\quad,\quad \mathbb{P}\,(X=1)=3\left(\frac{(n)^1(3n)^2}{(4n)^3}\right)=\frac{27}{64}$$

$$\mathbb{P}\,(X=2)=3\left(\frac{(n)^2(3n)^1}{(4n)^3}\right)=\frac{9}{64}\quad,\quad \mathbb{P}\,(X=3)=\frac{(n)^3}{(4n)^3}=\frac{1}{64}$$

X	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{1}{64}$

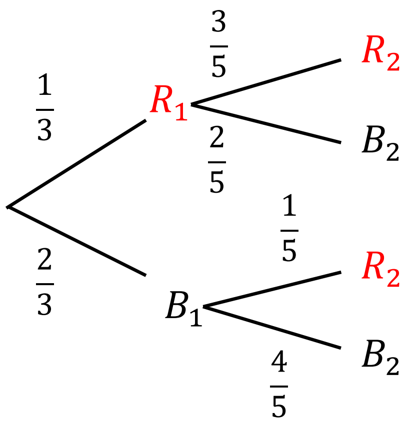
دورة 2022 الأولى

السؤال الثالث :

صندوق يحتوي كرتين زرقاوين وكرة حمراء واحدة
نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها ونعيدها إلى الصندوق ثم نضيف كرتين من الون ذاته الى الصندوق .
ثم نسحب مجدداً كرة من الصندوق .
الحدث R_1 الكرة المسحوبة في المرة الاولى حمراء اللون ، الحدث R_2 الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون
❶ أعط تمثيلاً شجرياً للتجربة و احسب احتمال الحدث R_2 .
❷ إذا كانت الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء ما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى زرقاء

الحل :

❶ التمثيل الشجري



❷ اعتماداً على المخطط الشجري نجد:

$$P(R_2) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$$

❸

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{5}$$

دورة 2022 الثانية

التمرين الثالث :

لدينا صندوق يحتوي على ثلاث بطاقات ملونة
واحدة زرقاء تحمل الرقم (2) وبطاقتان حمراوان تحملان الرقمين $1 , 0$
نسحب بطاقتين على التتالي دون اعادة ونعرف المتحولين العشوائيين X و Y كالاتي :
X يدل عدد البطاقات الحمراء المسحوبة .
Y يدل على مجموع رقمي البطاقتين المسحوبتين والمطلوب :
❶ اكتب قيم X و قانونه الاحتمالي
❷ اكتب قيم Y و قانونه الاحتمالي
❸ اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X , Y) أيكون المتحولان X و Y مستقلان احتماليا؟ لماذا ؟

الحل :

طريقة أولى لإيجاد قانون X و Y :

$X = \{1,2\}$

$$\mathbb{P}\,(X = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{2}{3} \quad , \quad \mathbb{P}\,(X = 2) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

$Y = \{1 ,2 ,3\}$

$$\mathbb{P}\,(Y = 1) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3} \;,\; \mathbb{P}\,(Y = 2) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3} ,\; \mathbb{P}\,(Y = 3) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$$

❶

$X = \{1,2\}$

$\mathbb{P}\,(X=1) = \dfrac{P_2^1 \times P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$, $\mathbb{P}\,(X=2) = \dfrac{P_2^1}{P_3^2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

X	1	2
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

❷

$Y = \{1\,,2\,,3\}$

$\mathbb{P}\,(Y=1) = \dfrac{P_1^1 \times P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$, $\mathbb{P}\,(Y=2) = \dfrac{P_1^1 \times P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

$\mathbb{P}\,(Y=3) = \dfrac{P_1^1 \times P_1^1}{P_3^2} \times 2 = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

X	1	2	3
$\mathbb{P}(X=x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

❸

$X \backslash Y$	1	2	3	قانون X
1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
قانون Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	

$\mathbb{P}\,(X=1) \times \mathbb{P}(Y=1) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{9} \neq \mathbb{P}\,(X=1 \cap Y=1) = 0$

المتحولين غير مستقلين احتمالياً