مع مختارات من أحاديث رسول الله صلى الله عليه وعلى آله وصحبه أجمعين من كتاب الأربعون النووية

الأشعة في الفراغ

نوطه خاصة بأفكار الأشعة

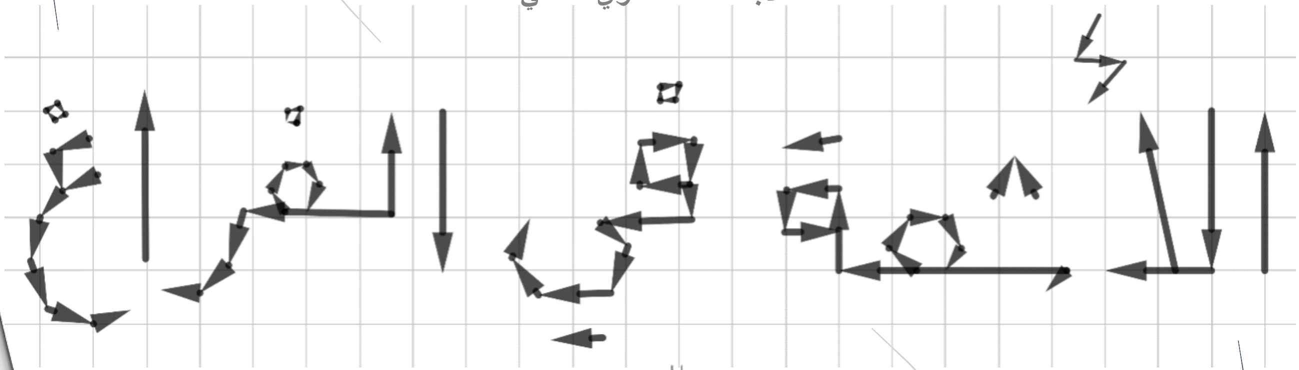
القسم الأول

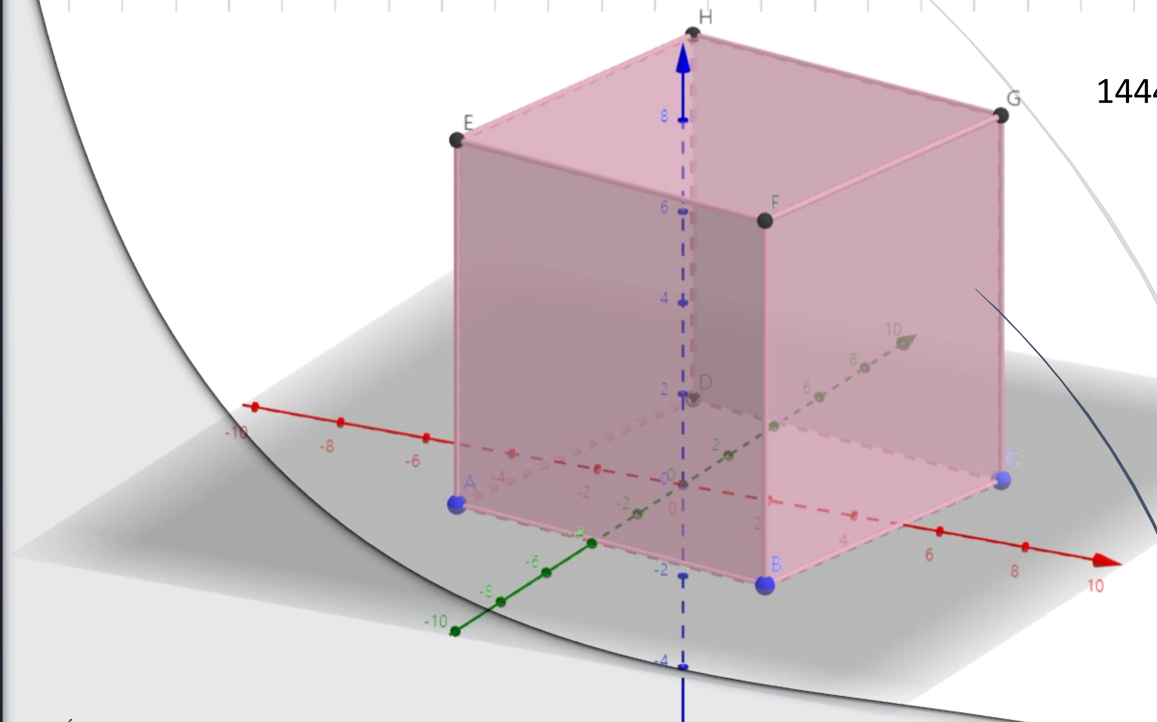
ذكر وشرح الأفكار المهمة + حل وتوضيح تدريبات ومسائل الوحدة الأولى + أمثلة إضافية ومسألة امتحانية

أ.د. برلنت صبري مطيط

وم. نور أشقر

لطلاب الثالث الثانوي العلمي





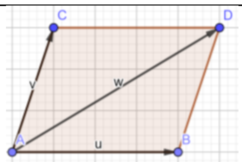
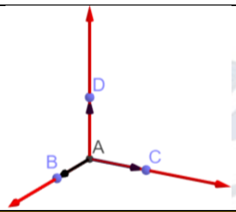
1444/4/13

لتحميل القسم الثاني والثالث يرجى زيارة الموقع أدناه

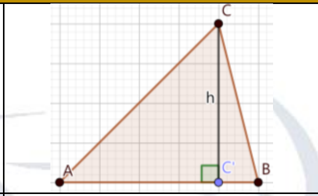
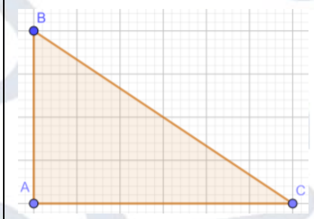
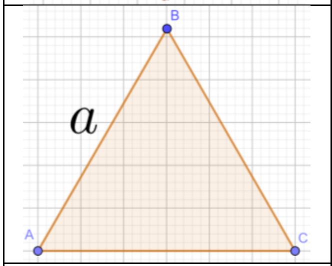
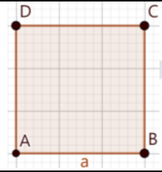
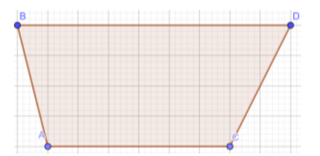
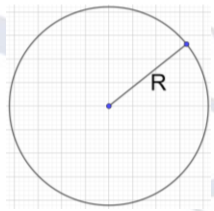
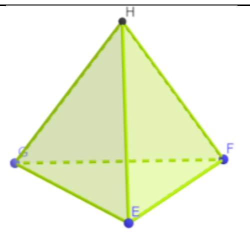
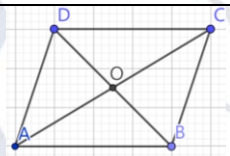
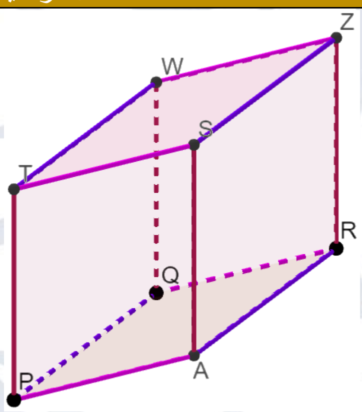
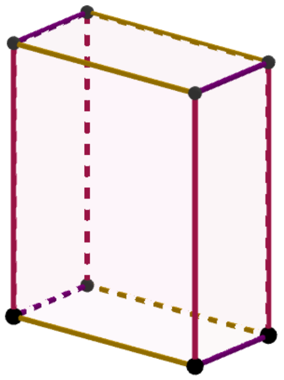
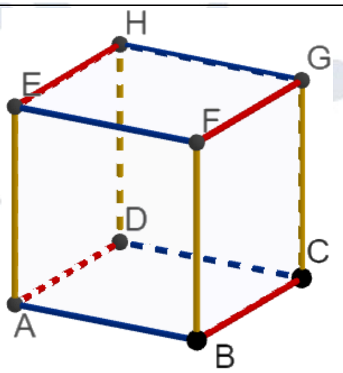
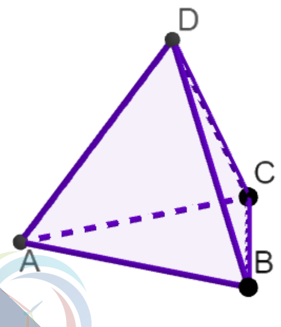
https://sites.google.com/site/appmaths2020/

قَالَ رَسُولُ اللهِ ﷺ : " إِنَّمَا الأَعْمَالُ بِالنِّيَّاتِ ، وَإِنَّمَا لِكُلِّ امْرِىءٍ مَا نَوَى ، فَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ إِلَى اللهِ وَرَسُولِه فَهِجْرَتُهُ إِلَى اللهِ وَرَسُولِه ، وَمَنْ كَانَتْ هِجْرَتُهُ لِدُنْيَا يُصِيبُهَا ، أَو امْرَأَةٍ يَنْكِحُهَا ، فَهِجْرَتُهُ إِلَى مَا هَاجَرَ إِلَيْهِ"

-- ملخص للأفكار المهمة --

الأشعة			
تكتب مركبات الشعاع AB مساقط أفقية / عمودية	$\overrightarrow{AB}=((x_B-x_A),(y_B-y_A),(z_B-z_A))$		$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$
شعاعياً	$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}$		
نظيم الشعاع (طول الشعاع)	$\vec{u}(x_1,y_1,z_1)$ $\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$	$\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$	
شعاعين متساويين	$\vec{u}=\vec{v}$	لهما نفس المنحى ونفس الطول $\lVert\vec{u}\rVert=\lVert\vec{v}\rVert$ ونفس الجهة (تتساوى مركباتهم المتقابلة)	
شعاعين متعاكسين	$\vec{u}=-\vec{v}$	نفس المنحى ونفس الطول $\lVert\vec{u}\rVert=\lVert\vec{v}\rVert$ وجهتان متعاكستان	
جمع الأشعة 1) قاعدة متوازي الأضلاع	إذا كان للشعاعين نفس البداية	$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{ABCD\text{ قطر}}$	
2) قاعدة شال	إذا كان الشعاعين متعاقبين	(نهاية الأول هي بداية الثاني)	
ملاحظات	عند تغير الترتيب تتغير الإشارة $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$	جمع الأشعة تبديلي وتجميعي	
إذا لم يكن الشعاعين متعاقبين ولم يكن لهما نفس البداية، نستبدل أحدهما بشعاع آخر مساوٍ له حتى نتمكن من تطبيق شال أو متوازي الأضلاع. وإذا لم يكن ذلك ممكناً اختر معلماً كيفياً وحل المسألة.			
يتم جمع وطرح الأشعة عبر المساقط ويتم ضرب الشعاع بعدد عن طريق ضرب العدد بالمساقط			
انتبه إلى ترتيب رؤوس الأضلاع $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$	إذا لم تكن النقاط الأربعة A,B,C,D على استقامة واحدة وكان $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}\Leftrightarrow(ABCD)$ متوازي الأضلاع		
المعلم في الفراغ (تعيين إحداثيات من شكل بوجود معلم)			
المعلم متجانس	$(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ نقطة وثلاثة أشعة غير مرتبطة خطياً	الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ متعامدة مثنى $\lVert\vec{u}\rVert=\lVert\vec{v}\rVert=\lVert\vec{w}\rVert=1$	
مثال: اختيار معلم	في المعلم المتجانس يكون $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ $A(0,0,0),B(1,0,0),$ $C(0,1,0),D(0,0,1)$		
حساب مسافة			
بين نقطتين A و B (معلم متجانس)	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$		
بين نقطة ومستقيم (معلم متجانس)	$A(x_0,y_0)$ و $d:ax+by+c=0$	$\dfrac{\lvert ax_0+by_0+c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$	
بين نقطة ومستوي (معلم متجانس)	$A(x_0,y_0,z_0)$ و $\mathcal{P}:ax+by+cz+d=0$	$\dfrac{\lvert ax_0+by_0+cz_0+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$	
احداثيات منتصف قطعة مستقيمة $[AB]$	$\left(\dfrac{x_B+x_A}{2},\dfrac{y_B+y_A}{2},\dfrac{z_B+z_A}{2}\right)$		

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

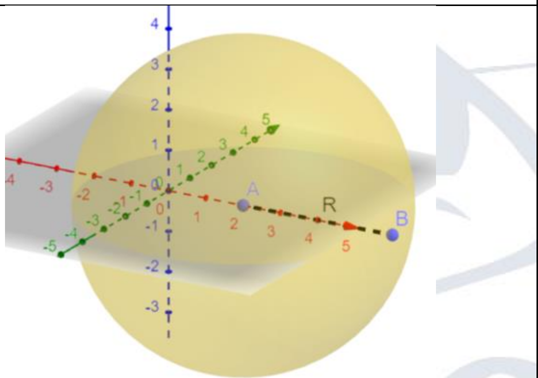
مساحات وحجوم شهيرة			
مساحة المثلث $= \frac{\text{القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2}$		مساحة المستطيل = الطول × العرض	
مساحة المثلث القائم = $\frac{\text{جداء طولي الضلعين القائمتين}}{2}$		مساحة المثلث متساوي الأضلاع (طول ضلعه a) $S = \frac{\sqrt{3}\, a^2}{4}$	
مساحة المربع $= (\text{طول الضلع})^2$		مساحة شبه المنحرف = الارتفاع × $\left(\frac{\text{القاعدة الكبرى} + \text{القاعدة الصغرى}}{2}\right)$	
مساحة الدائرة $S = \pi R^2$		حجم الهرم ورباعي الوجوه $= \frac{\text{الارتفاع} \times \text{مساحة القاعدة}}{3}$ $V = \frac{1}{3}.\delta.h$	
مساحة متوازي الأضلاع = القاعدة × الارتفاع		تذكرة: لإثبات أنّ الشكل الرباعي متوازي أضلاع: إما $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ أو $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ أو نثبت أنّ أقطاره متناصفة	
أشكال فراغية			
متوازي السطوح: مجسم ثلاثي الأبعاد له ستة أوجه كل وجه من أوجهه متوازي أضلاع (كل وجهين فيه متقابلين متوازيين وطبوقين)، (الزوايا ليست بالضرورة قائمة).		متوازي المستطيلات: هو مجسم أوجهه مستطيلات وكل وجهين متقابلين فيه طبوقين وأحرفه (متوازية إذا كانت متقابلة ومتعامدة إذا التقت برأس مشترك).	
المكعب: هو مجسم ثلاثي الأبعاد له ستة أوجه مربعة واثنا عشر حرفاً (حافة) وثمانية رؤوس، جميع أحرفه (حوافه) متساوية الطول (متوازية إذا كانت متقابلة ومتعامدة إذا التقت برأس مشترك).		رباعي الوجوه: مكون من أربع أوجه مثلثة.	

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

معادلة كرة

مركزها $A(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

1. المركز ونصف القطر معلومين نعوض مباشرة.
2. المركز معلوم وتمر بنقطة (نحسب R المسافة بين المركز والنقطة).
3. المركز معلوم وتمس مستوياً في نقطة (R المسافة بين المركز والمستوي)
4. طرفا قطراها معلومين (نحسب R بحساب المسافة وتقسيمها على 2، والمركز من احداثيات منتصف قطعة مستقيمة)



معادلة أسطوانة

محورها $(o,\vec{\imath})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(a,0,0),(b,0,0)$

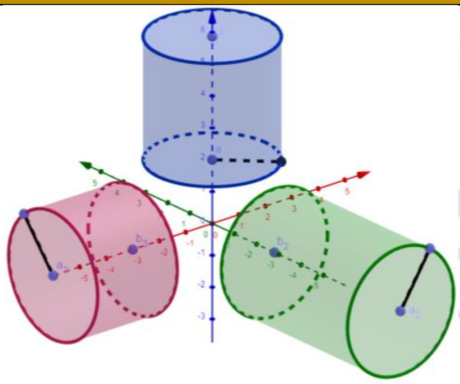
$$y^2+z^2=r^2\,,\qquad a\le x\le b$$

محورها $(o,\vec{\jmath})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(0,a,0),(0,b,0)$

$$x^2+z^2=r^2\,,\qquad a\le y\le b$$

محورها $(o,\vec{k})$ نصف قطرها r مركزي قاعدتيها $(0,0,a),(0,0,b)$

$$x^2+y^2=r^2\,,\qquad a\le z\le b$$



معادلة مخروط

رأسه O ومحوره $(o,\vec{\imath})$ ومركز قاعدته $(h,0,0)$ ونصف قطر القاعدة r

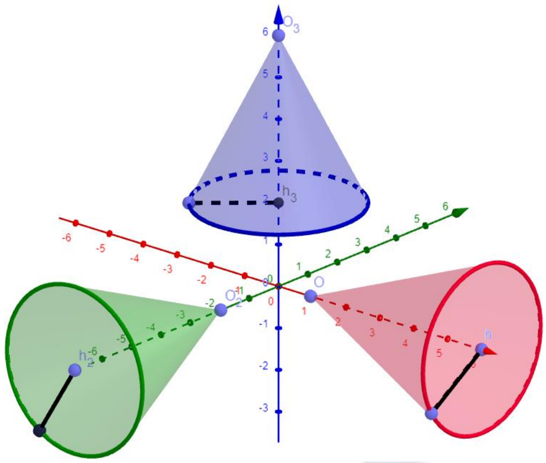
$$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0\,,\qquad 0\le x\le h$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{\jmath})$ ومركز قاعدته $(0,h,0)$ ونصف قطر القاعدة r

$$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0\,,\qquad 0\le y\le h$$

رأسه O ومحوره $(o,\vec{k})$ ومركز قاعدته $(0,0,h)$ ونصف قطر القاعدة r

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0\,,\qquad 0\le z\le h$$

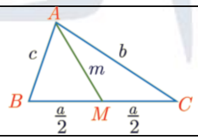
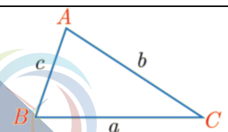


الجداء السلمي في المستوي

للشعاعين $\vec{u}(x_1,y_1,z_1)\,,\vec{v}(x_2,y_2,z_2)$	$\boxed{1}\ \vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
$\boxed{3}\ \vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2]$	$\boxed{2}\ \vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

إذا كانت الزاوية بين الشعاعين صفراً يكون الشعاعان في جهة واحدة، وإن كانت مساوية لـ π فإنهما في جهتين متعاكستين

يمكن حساب الزاوية بين الشعاعين باستخدام	$\cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|}{\vec{u}.\vec{v}}$

مبرهنة المتوسط		علاقة الكاشي	
$b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$		$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$	

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نورأشقر +963943608577

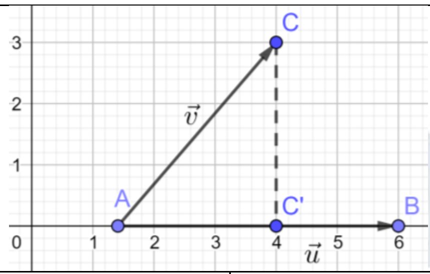
<table>
<tr><td colspan="2">

خاصة الاسقاط في الجداء السلمي

لا تتغير قيمة الجداء السلمي لشعاعين عند استبدال الشعاع بالمسقط القائم

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

</td><td colspan="2">



</td></tr>
<tr><td rowspan="2">خواص الجداء السلمي</td><td>$\boxed{3}\ \vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$</td><td>$\boxed{2}\ \vec{u}.\vec{v} = 0$
الشعاعان متعامدان $\Longrightarrow$</td><td>$\boxed{1}\ \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$</td></tr>
<tr><td>$\boxed{6}\ (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$</td><td>$\boxed{5}\ (a\vec{u}).(b\vec{v}) = a.b.(\vec{u}.\vec{v})$</td><td>$\boxed{4}\ \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">

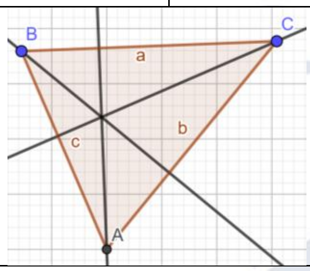
لإثبات أنَّ نقطة M هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC، نثبت أنَّ:

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB} = 0$

</td><td colspan="2">



</td></tr>
<tr><td colspan="2">

إثبات التعامد

يكون الشعاعان $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدان إذا كان جداؤهما السلمي مساوياً الصفر:

$\vec{u}.\vec{v} = 0 \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

</td><td colspan="2">

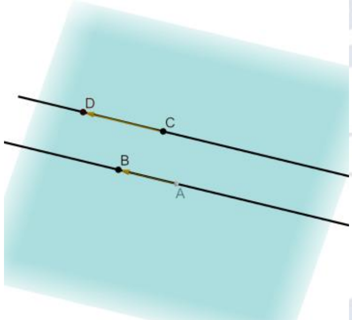
- لإثبات أنَّ مستقيم يعامد مستوي يكفي إثبات أنه يعامد مستقيمين متقاطعين فيه.
- إذا عامد شعاعٌ مستوياً فإنه يعامد كل شعاعٍ محتوى في هذا المستوي.
- كل شعاع يعامد مستوياً يُسمى بالشعاع الناظم $\vec{n}$.

</td></tr>
<tr><td colspan="4">الارتباط الخطي</td></tr>
<tr><td colspan="2">

الارتباط الخطي لشعاعين $\vec{u}(x_1, y_1, z_1), \vec{v}(x_2, y_2, z_2)$

يتم إثبات أنَّ $\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطين خطياً (متوازيين) بطريقتين (تختار احداها حسب المسألة)

</td><td colspan="2">



</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\boxed{1}\ \vec{u} = k.\vec{v}\ ;\ \ k \in \mathbb{R}^*$</td><td colspan="2">$\boxed{2}$ المركبات متناسبة $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
ونتجاهل حالة $\frac{0}{0}$ في حال ظهورها</td></tr>
<tr><td colspan="4">نستفيد من الارتباط الخطي لشعاعين</td></tr>
<tr><td colspan="2">1. لإثبات توازي مستقيمين: إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ مرتبطين خطياً فإنَّ المستقيمان $(AB), (CD)$ متوازيان، وبالتالي يشكلان مستوياً.</td><td colspan="2">2. لإثبات وقوع أو عدم وقوع ثلاثة نقاط A, B, C على استقامة واحدة، إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين، فإنَّ النقاط ليست على استقامة واحدة، وتشكل المستوي (ABC).</td></tr>
</table>

الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

ليكن $\vec{u},\vec{v}$ شعاعين غير مرتبطين خطياً، نقول عن الأشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً (تقع في مستوٍ واحد) إذا وجدنا عددين حقيقيين $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ بحيث يتحقق:

$$\vec{w}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$$

// نعوض مركبات الأشعة الثلاث في العلاقة السابقة فنحصل على ثلاث معادلات بمجهولين α,β نحصل على قيمهم بحل أول معادلتين ونتحقق من النتيجة في المعادلة الثالثة (إذا كانت محققة فالأشعة مرتبطة خطياً وتقع في مستوٍ واحد، وإن كانت غير محققة فالأشعة غير مرتبطة ولا تقع في مستوٍ واحد) //

نستفيد من الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

1. لإثبات وقوع أو عدم وقوع أربعة نقاط في مستوٍ واحد. تكون النقاط A,B,C,D واقعة في مستوٍ واحد إذا كانت ثلاثة أشعة مثل $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ مرتبطة خطياً، وإذا لم تكن مرتبطة خطياً فهي لا تقع بمستوٍ واحد (ويمكن اعتبارها رؤوس رباعي وجوه أو هرم ثلاثي).

2. لإثبات توازي مستقيم مع مستوٍ. نقول عن المستقيم d أنه يوازي المستوي $\mathcal{P}$ إذا كان المستقيم d يوازي أي مستقيم محتوى في المستوي $\mathcal{P}$.

مركز الأبعاد المتناسبة

مركز الأبعاد المتناسبة G لنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ تحقق

$$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\,;\ \alpha+\beta\neq 0$$

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\,\overrightarrow{AB}$$

يكون G منتصف AB إذا كان $\alpha=\beta$

مبرهنة: إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ وأياً كانت النقطة M عندئذٍ تتحقق العلاقة:

$$\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$$

تبقى هذه المبرهنة محققة من أجل ثلاثة أو أربعة نقاط.

مركز الأبعاد المتناسبة لثلاثة نقاط

G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ هي نقطة وحيدة تحقق

$$\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}\,;\ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

الخاصة التجميعية (نستفيد منها في تعيين مركز الأبعاد المتناسبة لثلاثة نقاط):

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ وكانت H مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta)$ فإنَّ G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)$.

إذا كانت G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

$$(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$$

فإن احداثيات G

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

مركز ثقل المثلث ABC هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط A,B,C عندما $\alpha=\beta=\gamma$

وهي نقطة تلاقي متوسطاته

G مركز ثقل للمثلث أو للنقاط A,B,C فإن إحداثيات G تكون:

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\ y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3},$$

$$z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

نستفيد من مركز الأبعاد المتناسبة

لإثبات وقوع ثلاثة نقاط على استقامة واحدة (نثبت أن إحدى هذه النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين)	لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد (نثبت أن إحدى هذه النقاط مركز أبعاد متناسبة للنقاط الباقية)	لإثبات تقاطع مستقيمين أو أكثر في نقطة واحدة (نثبت وجود مركز أبعاد مشترك بين نقطتين من كل مستقيم)

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نورأشقر +963943608577

المستقيم	
لتعيين مستقيم في المستوي نحتاج نقطة $A(x_0, y_0)$ وناظم $\vec{n}(a, b)$ أو شعاع توجيه $\vec{u}(-b, a)$	$ax + by + c = 0$
لتعيين مستقيم في الفراغ باستخدام المعادلات الوسيطية له نحتاج نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a, b, c)$:	$x = x_0 + at\,, \quad y = y_0 + bt\,,$ $z = z_0 + ct$
$t\left\{\begin{array}{l} t \in \mathbb{R} \text{ مستقيم} \\ t \in [0, \infty) \text{ نصف مستقيم} \\ t \in [0,1] \text{ قطعة مستقيمة} \end{array}\right.$	
الوضع النسبي لمستقيمين حسب شعاع التوجيه	
إذا كان الشعاعان مرتبطان خطياً فالمستقيمان إما متوازيان (المساواة بين احداثياتهما الوسيطية خاطئة) أو طبوقان (المساواة محققة) وفي الحالتين يقعان في مستوٍ واحد.	إذا كان الشعاعان غير مرتبطين خطياً فالمستقيمان إما متقاطعان (بالحل المشترك نحصل على نقطة التقاطع) ويكونان بمستوٍ واحد أو متخالفان (المساواة غير محققة أبداً) ولا يقعان في مستوٍ واحد.
المستوي	
لتعيين المستوي نحتاج إلى نقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ وناظم $\vec{n}(a, b, c)$	$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$
1. نقطة معلومة وناظم معلوم.	2. نقطة معلومة ويوازي مستوي (ناظم الأول يساوي الثاني).
3. نقطة معلومة ويعامد مستويين $\vec{n}.\vec{n}_1 = 0\,, \vec{n}.\vec{n}_2 = 0$.	4. نقطتين معلومتين ويعامد مستوي $\vec{n}.\vec{n}_1 = 0$.
5. ثلاثة نقاط معلومة (شعاعي توجيه (حيث يكون الناظم عمودي عليهم)).	
نثبت أنَّ مستويين متقاطعين من خلال إثبات الارتباط الخطي لناظم الأول والثاني $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ ، ونوجد معادلة الفصل المشترك بالحل المشترك وكتابة أحد المجاهيل بدلالة الباقي.	
معادلة المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$ (وهو مجموعة نقط الفراغ التي تبعد عن طرفي القطعة A, B نفس المسافة)	
1. بفرض $M(x, y, z)$ نقطة من المستوي، فإنَّ $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$.	2. نوجد منتصف القطعة المستقيمة (وهي نقطة من المستوي)، والشعاع $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم المستوي.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

قَالَ رَسُولُ اللهِ ﷺ: " إنَّ الحَلالَ بَيّنٌ وَإنَّ الحَرَامَ بَيّنٌ وَبَيْنَهُمَا أُمُوْرٌ مُشْتَبِهَات لاَ يَعْلَمُهُنَّ كَثِيْرٌ مِنَ النَّاس، فَمَن اتَّقَى الشُّبُهَاتِ فَقَدِ اسْتَبْرَأ لِدِيْنِهِ وعِرْضِه، وَمَنْ وَقَعَ فِي الشُّبُهَاتِ وَقَعَ فِي الحَرَامِ كَالرَّاعِي يَرْعَى حَوْلَ الحِمَى يُوشِكُ أَنْ يَقَعَ فِيْهِ. ألا وَإنَّ لِكُلّ مَلِكٍ حِمَىً . ألا وَإنَّ حِمَى اللهِ مَحَارِمُهُ، ألا وإنَّ فِي الجَسدِ مُضْغَةً إذا صَلَحَتْ صَلَحَ الجَسَدُ كُلُّهُ وإذا فَسَدَت فَسَدَ الجَسَدُ كُلُّهُ ألا وَهِيَ القَلْبُ"

-- الأشعة في الفراغ --

تعريف: يمتلك الشعاع $\overrightarrow{AB}$

- منحى هو منحى المستقيم AB
- اتجاهاً يتفق مع الانتقال من A إلى B
- طولاً هو المسافة من A إلى B

- تتساوى الأشعة عندما تمتلك: المنحى ذاته، الاتجاه ذاته، الطول ذاته
- إذا كان لدينا أربع نقاط A, B, C, D ولم تكن على استقامة واحدة، عندئذٍ:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \underbrace{\Leftrightarrow}_{\text{يكافئ}} ABCD \text{ متوازي أضلاع}$$

- أياً كانت A من الفراغ، أياً كان شعاع $\vec{u}$: توجد نقطة واحدة B تحقق $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$

الأشعة المرتبطة خطياً:

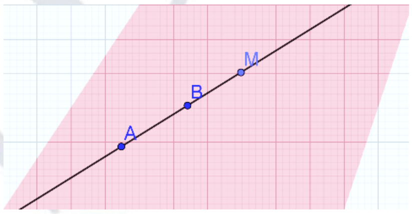
$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ **مرتبطين** خطياً أي أنهما **متوازيان**

مبرهنة:

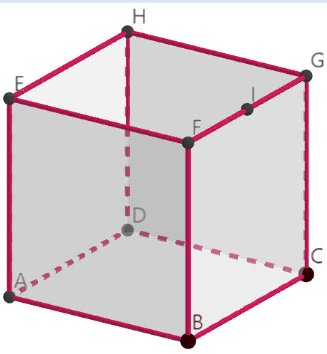
$$\vec{u},\vec{v} \text{ مرتبطين خطياً } \underbrace{\Leftarrow}_{\text{يؤدي}} \underbrace{\exists}_{\text{يوجد}}\ \alpha \underbrace{\in}_{\text{تنتمي}} \mathbb{R};\ \vec{u}=\alpha\vec{v}$$

- تكون النقط المختلفة A, B, C على استقامة واحدة إذا كان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ مرتبطين خطياً.
- A, B نقطتين مختلفتين، عندئذٍ المستقيم AB هو مجموعة النقاط M التي تجعل $\overrightarrow{AM}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً، أي مجموعة النقاط M

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}$$



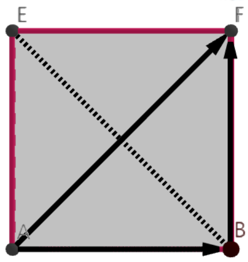
مثال (صفحة 14): مكعب $ABCDEFGH$ و I منتصف الحرف $[FG]$



الطلب الأول: عين النقطة M التي تحقق:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

الحل:



البداية من الطرف الأول للعلاقة

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$$

لكن $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BF}$ متوازي أضلاع

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AF}$$

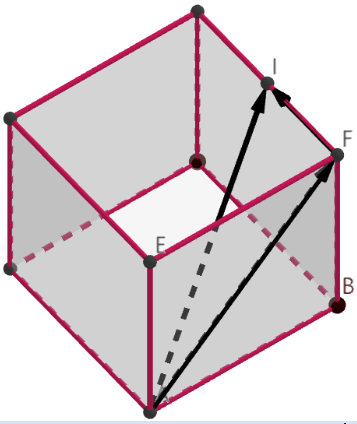
نعود للعلاقة

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FI}=\overrightarrow{AM}$$

$$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AM}$$

ومنه

$$I=M$$



الطلب الثاني: أثبت صحة العلاقة

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

الحل:

نبدأ من الطرف الأول وصولاً للثاني

نحاول إدخال F

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FB}$$

$$\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CF}}_{\text{الطرف الأول}}=\overrightarrow{AF}+\underbrace{\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{CF}}_{\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{FB}}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{CB}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

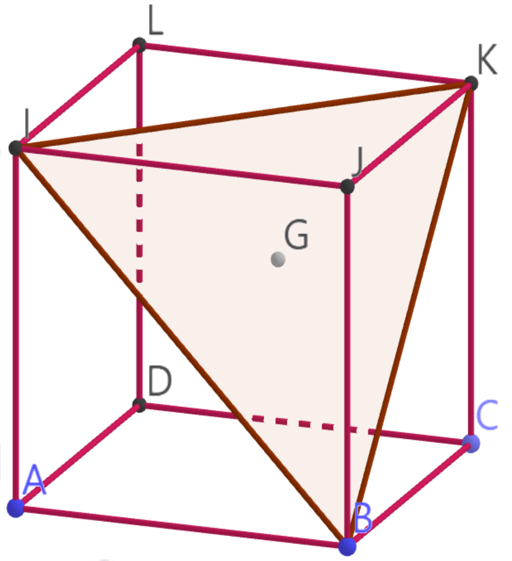
كيف نثبت وقوع نقاط على استقامة واحدة؟

الجواب .... من خلال الارتباط الخطي

مثال (صفحة 15): ليكن $ABCDIJKL$ متوازي سطوح وليكن G مركز ثقل المثلث BIK

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0} \qquad (1)$$

أثبت أن J,G,D على استقامة واحدة.



لنثبت أن $\overrightarrow{DJ}$ و $\overrightarrow{DG}$ مرتبطين خطياً

من العلاقة (1) ندخل D حسب علاقة شال لجمع الأشعة،

ثم ندخل للعلاقة الجديدة J فقط لحدين ونترك الثالث

نستفيد للحد الثالث من تساوي الأقطار

الحل:

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GK}=\vec{0}$$

$$(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DB})+(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DI})+(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DK})=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GD}+\underbrace{\overrightarrow{DB}}_{\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JB}}+\underbrace{\overrightarrow{DI}}_{\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JI}}+\underbrace{\overrightarrow{DK}}_{=\overrightarrow{AJ}\ \text{أقطار مكعب}}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{AJ}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{DJ}+\underbrace{\left(\underbrace{\overrightarrow{JB}}_{\overrightarrow{IA}\ \text{متوازي أضلاع}}+\underbrace{\overrightarrow{JI}+\overrightarrow{AJ}}_{\overrightarrow{AI}}\right)}_{=0}=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{GD}+2\overrightarrow{DJ}=\vec{0}$$

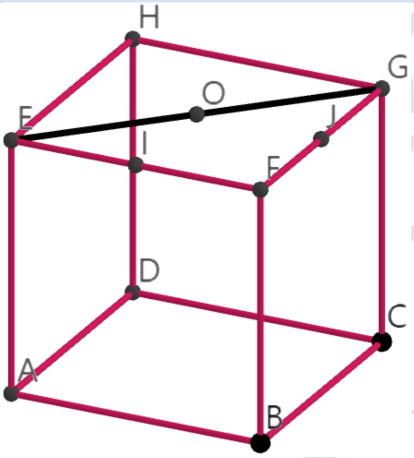
$$-3\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{DJ}$$

$$3\overrightarrow{DG}=2\overrightarrow{DJ}$$

فالنقاط J,G,D على استقامة واحدة.

تدرب (1) (صفحة 16): $ABCDEFGH$ مكعب، I منتصف الحرف $[EF]$ و J منتصف الحرف $[FG]$

بين إذا كانت M المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب. وعلل إجابتك.



$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DH}$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}}_{A\ \text{نتركها}}+\underbrace{\overrightarrow{DH}}_{\text{هنا العمل}}$$

$\overrightarrow{DH}=\overrightarrow{BF}$ متقابلان في المكعب

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}$$

M تنطبق على F

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

$$\underbrace{\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}}_{A\ \text{نتركها}}+\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\text{خاصة قطري مربع}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underbrace{\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AC}}_{\text{قطري متوازي أضلاع}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}$$

M تنطبق على G

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}$

$$\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{DG}}_{A\ \text{ندخل}}$$

$\overrightarrow{DG}=\overrightarrow{AF}$ متوازي أضلاع $AFGD$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AE}$$

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\underbrace{\overrightarrow{BF}}_{=\overrightarrow{AE}\ \text{متساويان في المكعب}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AE}}$$

لا نستفيد من $\overrightarrow{GE}$، ندخل O منتصف $\overrightarrow{GE}$

+963943608577 نور أشقر
+963941114148 برلنت مطيط
berlantcommunication@gmail.com

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE}$$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AO} + \underbrace{\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{OE}}_{=0}$$

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AO}$$

إذاً M لا تقع على الرؤوس.

$\boxed{5}$ $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AG}}_{B \text{ ندخل}} + \underbrace{\overrightarrow{HB}}_{G \text{ ندخل}}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB})$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \underbrace{\overrightarrow{HG}}_{=\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GB}}_{=0}\right)$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$$

M تنطبق على B

الطلب الثاني: حدد موقع N المحققة للمساواة الشعاعية:

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}}_{AF \text{ قطر في } ABEF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$$

إذاً N هي J

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AD}} + \overrightarrow{HJ} = \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD}}_{=\overrightarrow{AH} \text{ قطر } AEHD} + \overrightarrow{HJ}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$$

إذاً N هي J

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$$\overrightarrow{AN} = \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF}}_{=\overrightarrow{AF} \text{ حسب شال أشعة متعاقبة}} + \underbrace{\overrightarrow{GH}}_{\overrightarrow{FE}} + \overrightarrow{EI}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} \underbrace{=}_{\text{تعاقب أشعة}} \overrightarrow{AI}$$

إذاً N هي I

الطلب الثالث: عبر عن المجموع الشعاعي بشعاع واحد باستخدام نقطتين من الشكل حصراً

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}$

استخدم فكرة تعاقب لثلاثة أشعة

$$\overrightarrow{BF} + \underbrace{\overrightarrow{EC}} = \overrightarrow{BF} + (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BC})$$

$$= \underbrace{\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FB}}_{=0} + \overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{EH}\ (\text{مكعب})}$$

$$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{EG} \text{ قطر}$$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \underbrace{(\overrightarrow{AI} + \cancel{\overrightarrow{IE}}) + (\overrightarrow{AI} + \cancel{\overrightarrow{IF}})}_{\overrightarrow{EF} \text{ لأن } I \text{ منتصف}} = 2\overrightarrow{AI}$$

$\boxed{4}$ $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$

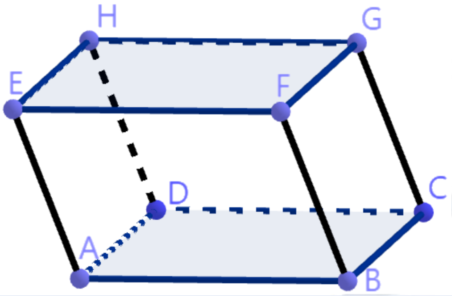
$$\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{EG}}_{F \text{ إدخال حسب شال}} + \overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) + \overrightarrow{JF}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{FG}}_{\overrightarrow{FJ}} + \overrightarrow{JF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \underbrace{\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{JF}}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI}$$

تدريب (2) (صفحة 16):

متوازي سطوح $ABCDEFGH$



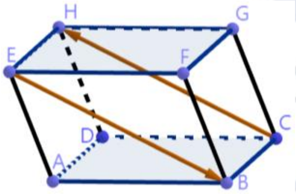
الطلب الأول: أثبت صحة ما يلي:

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$

نجد من قاعدة أقطار متوازي الأضلاع

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EB}$$

$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$$



$\boxed{2}$ $\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CF} = \vec{0}$

لدينا $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DE}$ ، إذاً

$$\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

$$\underbrace{\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG}}_{\overrightarrow{CH}} + \overrightarrow{EB} = \underbrace{\overrightarrow{CH} + \overrightarrow{EB}} = \vec{0}$$

قطران متوازيان متعاكسان (متساويان بإشارة (-))

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$\boxed{4}\quad \overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$

طريقة (1): نغير الترتيب

$$\underbrace{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}}_{\text{قطر } \overrightarrow{EG}}+\overrightarrow{FB}=\underbrace{\overrightarrow{EG}}_{\text{الأقطار متساوية } \overrightarrow{HF}}+\overrightarrow{FB}$$

$$=\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{HB}\underbrace{=}_{\text{أقطار } HFBD}\overrightarrow{FD}$$

طريقة (2):

$$\underbrace{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}}_{\overrightarrow{FA}}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FA}+\underbrace{\overrightarrow{FG}}_{\overrightarrow{GD}}$$

$$\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{FD}$$

الطلب الثاني: وضِع النقاط P,Q,R بحيث يكون:

$\boxed{1}\quad \overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE})=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AH})$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{BG})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\underbrace{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\underbrace{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AG})}_{\text{ليسا في متوازي أضلاع}}$$

لتكن O منتصف $[BG]$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG})$$

$$=\frac{1}{2}\left(2\,\overrightarrow{AO}+\underbrace{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OG}}_{\text{قطر } =\vec{0}}\right)$$

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}(2\,\overrightarrow{AO}+\vec{0})=\overrightarrow{AO}$$

إذاً P هي O.

$\boxed{2}\quad \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AC}}+\overrightarrow{AE}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

حيث $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{=\overrightarrow{EG}}$ قطر متوازي الأضلاع

و $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{EG}$ قطران متوازيان

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EG})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AG}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

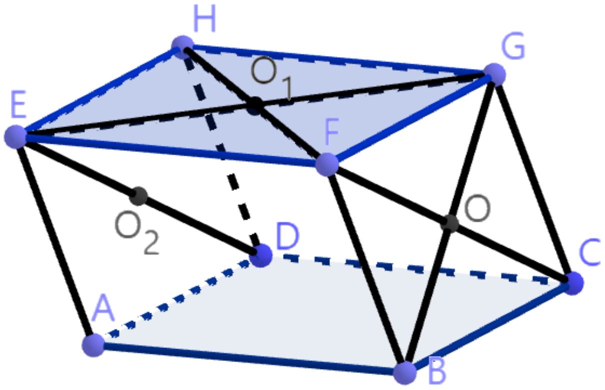
لتكن O_1 منتصف $[GE]$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{AE})$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1G}+\overrightarrow{AO_1}+\overrightarrow{O_1E})$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AO_1}+\underbrace{\overrightarrow{O_1G}+\overrightarrow{O_1E}}_{=\vec{0}}\right)=\overrightarrow{AO_1}$$

إذاً Q هي O_1.



$\boxed{3}\quad \overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

لدينا في متوازي الأضلاع

$$-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{DE}}\right)-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DO_2}+\overrightarrow{CD}$$

$$=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DO_2}=\overrightarrow{CO_2}$$

حيث O_2 منتصف $[DE]$

إذاً R هي O_2.

الطلب الثالث: عيّن شعاعاً يساوي

$$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BF}$$

وأثبت أنّ هذا الشعاع مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{AH}$.

$$\underbrace{\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BG}$$

بما أن $\overrightarrow{BG}$ يوازي $\overrightarrow{AH}$ في متوازي السطوح فهما مرتبطان.

الطلب الرابع: أوجد شعاعاً

$$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FB}$$

وأثبت أنّ هذا الشعاع مرتبط خطياً بالشعاع $\overrightarrow{DF}$.

$$\underbrace{\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FG}}_{\text{قطر في } GFED}+\overrightarrow{FB}=\underbrace{\overrightarrow{FH}+\overrightarrow{FB}}_{\text{قطر في } FBHD}=\overrightarrow{FD}$$

بما أن $\overrightarrow{FD}$ و $\overrightarrow{DF}$ لهما ذات الحامل فهما مرتبطان خطياً.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

--الارتباط الخطي لثلاثة أشعة--

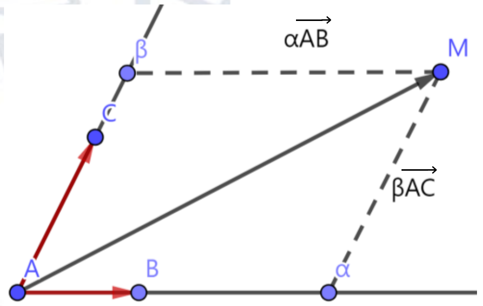
مبرهنة (3): لتكن C, B, A ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة عندئذٍ المستوي (ABC) هو مجموعة النقاط M المعرفة بالعلاقة:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$$

حيث $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

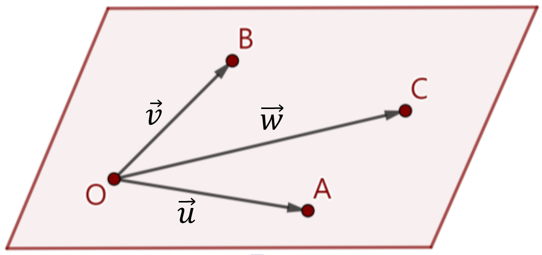
ونقول إنَّ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ شعاعا توجيه في المستوي (ABC)

يتعين مستوٍ P $\begin{cases} \text{نقطة} \\ \text{شعاعين غير مرتبطين خطياً} \end{cases}$



تعريف:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطين خطياً $\Leftrightarrow$ إذا وجدت نقطة O تجعل الأشعة $\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}, \overrightarrow{OC} = \vec{w}$ تقع في مستوٍ واحد.



ملاحظة:

إذا كان $\vec{u}, \vec{v}$ مرتبطين خطياً عندئذٍ تكون النقاط O, A, B على استقامة واحدة، عندئذٍ يوجد (مستوٍ) يحوي $\overrightarrow{OA}$ والنقطة C ، وعندئذٍ $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطين خطياً.

مبرهنة:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاثة أشعة وبفرض $\vec{u}, \vec{v}$ ليسا مرتبطين خطياً، عندئذٍ:

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ مرتبطين خطياً $\Leftrightarrow$

$$\exists\, a, b \in \mathbb{R}, \qquad \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

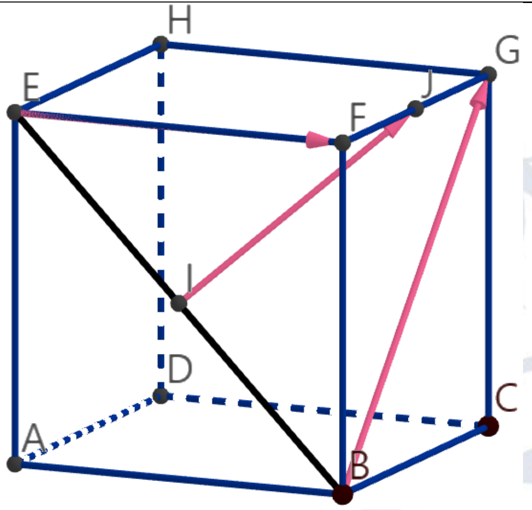
مثال (صفحة 18): مكعب $ABCDEFGH$، I منتصف الحرف $[BE]$ و J منتصف الحرف $[FG]$ ، أثبت أن $\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ مرتبطة خطياً.

$\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ غير مرتبطين خطياً

نكتب $\overrightarrow{IJ}$ بدلالتهم

$\begin{cases} \overrightarrow{EF} \text{ ينتمي للمستوي } ABFE \\ \overrightarrow{BG} \text{ ينتمي للمستوي } BFGC \end{cases}$ $\Leftarrow$ متعامدان $\Leftarrow$ غير مرتبطان

وبالتالي $\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{EF}$ متعامدان، وبالتالي غير مرتبطان خطياً.



ولدينا حسب علاقة شال:

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FJ} \qquad (1)$$
$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GJ} \qquad (2)$$

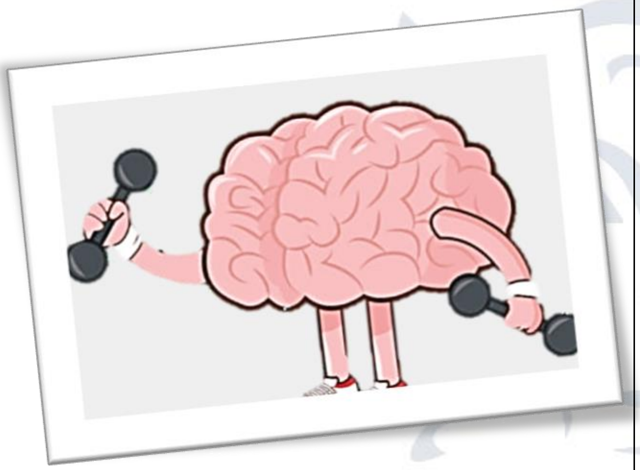
بجمع (1) , (2) نجد:

$$2\overrightarrow{IJ} = \underbrace{\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IB}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} + \underbrace{\overrightarrow{FJ} + \overrightarrow{GJ}}_{=\vec{0}}$$

$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

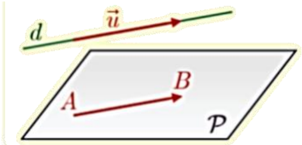
وهو المطلوب.

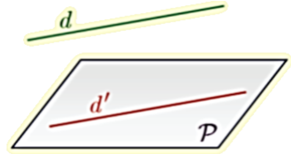


+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

كيف نثبت توازي مستقيم ومستو؟

كيف نثبت توازي مستقيم ومستو؟





شعاعياً

$\vec{u}$ شعاع توجيه لـ d نجد A و B في المستوي يحققان $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$

هندسياً

نجد مستقيم في المستوي يوازي المستقيم الأول

كيف نثبت توازي مستويين؟

كيف نثبت توازي مستويين؟

شعاعياً

نوجد شعاعين غير مرتبطين في الأول $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$

نوجد شعاعين غير مرتبطين في الثاني $\overrightarrow{A'B'},\overrightarrow{A'C'}$ بحيث

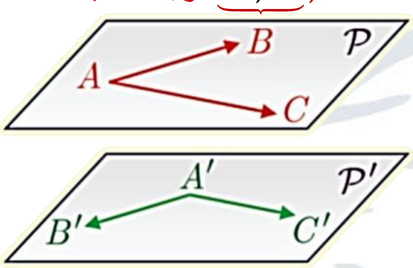
$\underbrace{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\,,\overrightarrow{A'B'}$ مرتبطة خطياً

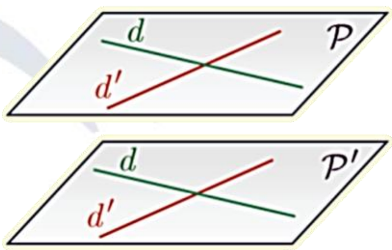
$\underbrace{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\,,\overrightarrow{A'C'}$ مرتبطة خطياً

هندسياً

نثبت مستقيمين متقاطعين في الأول

يوازيان مستقيمين متقاطعين في الثاني





تدرب (1) (صفحة 20):

A,B,C ثلاث نقط متمايزة في الفراغ. هل الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطياً؟

نعم لأننا يمكن أن نكتب حسب علاقة شال

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

تدرب (2) (صفحة 20):

A,B,C ثلاث نقط متمايزة في الفراغ.

E نقطة تحقق $\boxed{\overrightarrow{BE}=4\overrightarrow{BC}}$ و F نقطة تحقق $\boxed{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}}$

هل تقع النقاط F,E,C,B,A في مستوٍ واحد؟

$\boxed{1}$ نثبت أن E نقطة تقع في المستوي (ABC)

$\boxed{2}$ نثبت أن F نقطة تقع في المستوي (ABC)

عندئذٍ تكون النقاط F,E,C,B,A في مستو واحد

نثبت $\boxed{1}$ من خلال الارتباط الخطي $\overrightarrow{BE},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ ، لدينا

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

لدينا من نص التمرين $\overrightarrow{BC}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$ ومنه:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BE}$$

نثبت $\boxed{2}$ من خلال الارتباط الخطي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AF}$ ، لدينا

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

نعلم أنّ $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}$ ومنه $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE}-\overrightarrow{BA}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(4\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\right)$$
$$=2\overrightarrow{BC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

لدينا $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ ومنه $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AF}=2\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

وهو المطلوب.

تدرب (3) (صفحة 20):

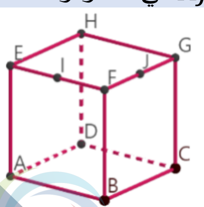
$ABCDEFGH$ مكعب. I منتصف الحرف $[EF]$ و J منتصف الحرف $[FG]$

الطلب الأول: هل تنتمي J للمستوي (ABI)؟

كلا، J تنتمي للمستوي $(CBFG)$ وهو عامودي على المستوي (ABI)

الطلب الثاني: هل تقع الأشعة $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}$ في مستو واحد؟

J لا تنتمي للمستوي (ABI) فالأشعة $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AB}$ لا تقع في مستو واحد



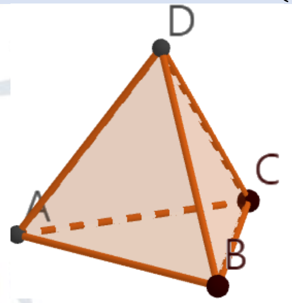
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

تدرب (4) (صفحة 20):

$ABCD$ رباعي وجوه. M نقطة محققة للعلاقة

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$$

عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$. واستنتج أنَّ M تنتمي للمستوي (ABC) .



$$\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\text{ندخل } B \text{ باستخدام شال}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{DC}}_{\text{ندخل } B \text{ باستخدام شال}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\underbrace{\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\cancel{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DB}}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$$

$\overrightarrow{AM}$ مرتبط مع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ ومنه $\overrightarrow{AM}$ يقع في المستوي (ABC)

تدرب (5) (صفحة 20):

$ABCDEFGH$ مكعب. فيه M نقطة تحقق:

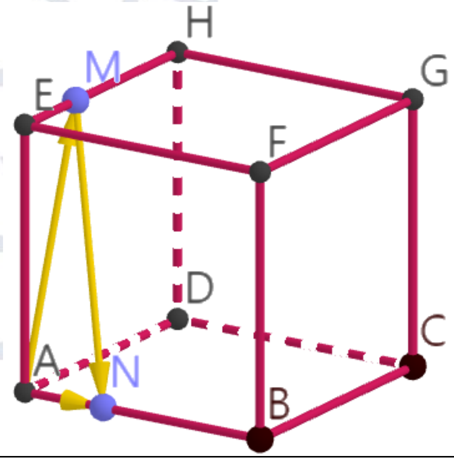
$$\overrightarrow{EM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\qquad(1)$$

و N نقطة تحقق:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\qquad(2)$$

الطلب الأول: أثبت أن $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

نكتب $\overrightarrow{MN}$ بالاستفادة من شال ثم نستخدم العلاقة الأولى بعد ادخال A والعلاقة الثانية بعد ادخال D



$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}\Longrightarrow$$

$$\boxed{\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}}\qquad(*)$$

لدينا من (1)

$$\underbrace{\overrightarrow{EM}}=\frac{1}{3}\underbrace{\overrightarrow{EH}}$$

$$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AH}\right)$$

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\underbrace{\overrightarrow{AH}}$$

$$\overrightarrow{AM}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\underbrace{\left(\overrightarrow{EH}-\overrightarrow{EA}\right)}$$

$$\overrightarrow{AM}=-\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\qquad(3)$$

ومن (2) نجد:

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\left(\underbrace{\overrightarrow{AD}}+\overrightarrow{DB}\right)$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{DB}\right)$$

$$\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\qquad(4)$$

نعوض $(3),(4)$ في $(*)$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}$$

$$=\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}-\left(-\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EH}\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

و هو المطلوب.

الطلب الثاني: هل الأشعة $\overrightarrow{HB},\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EA}$ مرتبطة خطياً؟

استفد من الطلب السابق ($\overrightarrow{MN}$ هي المفتاح)

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(\underbrace{\overrightarrow{DH}}_{=-\overrightarrow{EA}}+\overrightarrow{HB}\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{HB}\right)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$$

فالأشعة $\overrightarrow{HB},\overrightarrow{MN},\overrightarrow{EA}$ مرتبطة خطياً.

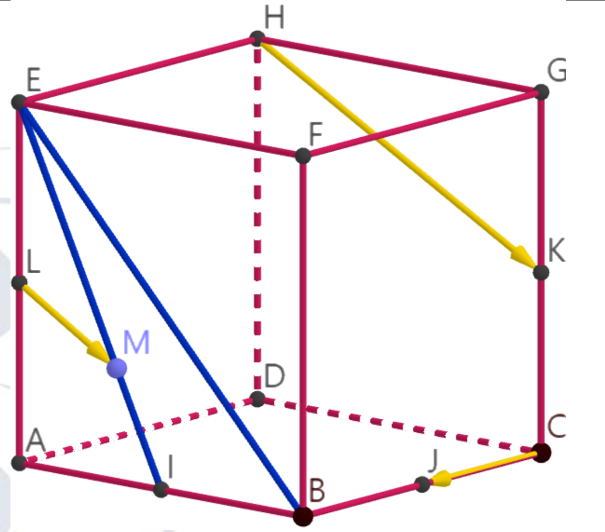
تدرب (6) (صفحة 20):

$ABCDEFGH$ مكعب. I و J و K و L بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و$[AE]$. و M النقطة المحققة للعلاقة:

$$3\,\overrightarrow{EM}=2\,\overrightarrow{EI}$$

الطلب الأول: لماذا M هي مركز ثقل المثلث AEB ؟

+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com



AEB مثلث فيه EI متوسط

كي نثبت أنَّ M مركز ثقل للمثلث AEB نثبت أنها تقع على المتوسط بنسبة معينة (تبعد عن E (رأس المتوسط) مسافة قدرها ثلثي طول المتوسط)

لدينا

$$3\,\overrightarrow{EM} = 2\,\overrightarrow{EI} \Longrightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\,\overrightarrow{EI}$$

إذاً M مركز ثقل للمثلث AEB

طريقة ثانية: بأن تثبت أنَّ $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

؟

الطلب الثاني: هل الأشعة $\overrightarrow{HK}, \overrightarrow{CJ}, \overrightarrow{LM}$ مرتبطة خطياً؟

$\overrightarrow{CJ}$ هي مفتاح الحل

$\overrightarrow{CJ}$ عمود على $ABFE$ ، $\overrightarrow{CJ}$ عمود على $\overrightarrow{LM}$

$\overrightarrow{CJ}$ عمود على $CDHG$ ، $\overrightarrow{CJ}$ عمود على $\overrightarrow{HK}$

إذاً لا يمكن كتابة $\overrightarrow{CJ}$ بدلالتهم

إذاً غير مرتبطين خطياً

إذاً غير واقعين بمستوٍ واحد

--المعلم في الفراغ--

تدرب (1) (صفحة 24):

تتأمل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$ و $E(3,9,2)$ و $F(8,13,3)$ في معلم للفراغ $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

الطلب الأول: احسب إحداثيات منتصفات القطع المستقيمة $[AB]$ و $[CD]$ و $[EF]$.

$$[AB]\text{منتصف}\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right) = \left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$$

$$[CD]\text{منتصف}\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right) = \left(-1,\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$$

$$[EF]\text{منتصف}\left(\frac{x_E+x_F}{2},\frac{y_E+y_F}{2},\frac{z_E+z_F}{2}\right) = \left(\frac{11}{2},11,\frac{5}{2}\right)$$

الطلب الثاني: احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x_D - x_C \\ y_D - y_C \\ z_D - z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \\ z_F - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

الطلب الثالث: عين إحداثيات النقطة K بحيث يكون الرباعي $ABCK$ متوازي أضلاع.

$ABCK$ متوازي أضلاع $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$

إذا فرضنا $K(x,y,z)$ فإنَّ:

$$\overrightarrow{KC} = \begin{pmatrix} -x \\ -2-y \\ 2-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}$$

$$\Longrightarrow x = 1,\quad y = 4,\quad z = 1$$

ومنه $K(1,4,1)$.

الطلب الرابع: جد مركبات كل من الشعاعين

$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD}$ و $\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF}$

$$\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CD} = 3\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{EF} = 2\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ -\frac{7}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

it's easy

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

تدرب (2) (صفحة 24):

في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ. نعطي إحداثيات أربع من رؤوس متوازي السطوح $ABCDEFGH$ المرسوم جانباً، وهي $A(2,1,-1)$ و $B(1,3,-1)$ و $C(-3,2,0)$ و $E(3,-1,3)$. جد إحداثيات الرؤوس الأربعة الأخرى.

$A(2,1,-1)$	$B(1,3,-1)$	$C(-3,2,0)$	$E(3,-1,3)$

في متوازي الأضلاع، نعلم أنَّ:

$$\boxed{\vec{AE}=\vec{BF}}$$

$$(x_E-x_A,y_E-y_A,z_E-z_A)=(x_F-x_B,y_F-y_B,z_F-z_B)$$

$$(1,-2,4)=(x_F-1,y_F-3,z_F+1)$$

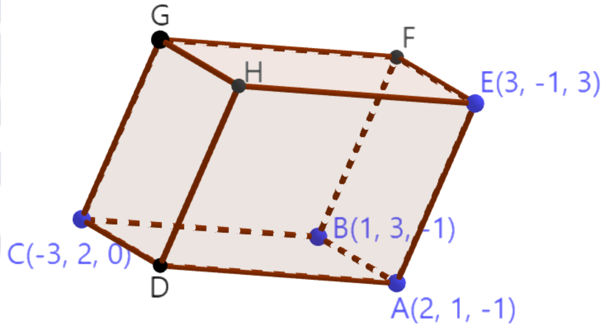
$$\Rightarrow\begin{cases}x_F-1=1\Rightarrow x_F=2\\ y_F-3=-2\Rightarrow y_F=1\\ z_F+1=4\Rightarrow z_F=3\end{cases}\Rightarrow\boxed{F(2,1,3)}$$

$$\boxed{\vec{AD}=\vec{BC}}$$

$$(x_D-x_A,y_D-y_A,z_D-z_A)=(x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B)$$

$$(x_D-2,y_D-1,z_D+1)=(-4,-1,1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_D-2=-4\Rightarrow x_D=-2\\ y_D-1=-1\Rightarrow y_D=0\\ z_D+1=1\Rightarrow z_D=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{D(-2,0,0)}$$



$$\boxed{\vec{FG}=\vec{BC}}$$

$$(x_G-x_F,y_G-y_F,z_G-z_F)=(x_C-x_B,y_C-y_B,z_C-z_B)$$

$$(x_G-2,y_G-1,z_G-3)=(-4,-1,1)$$

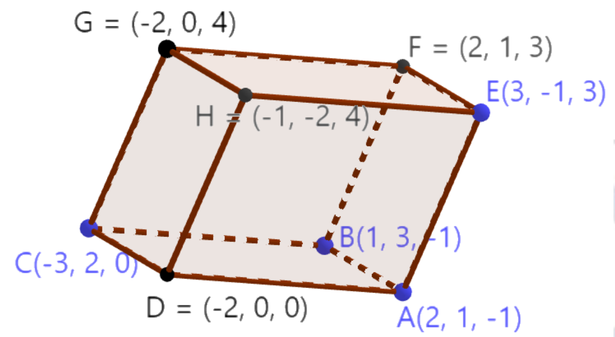
$$\Rightarrow\begin{cases}x_G-2=-4\Rightarrow x_G=-2\\ y_G-1=-1\Rightarrow y_G=0\\ z_G-3=1\Rightarrow z_G=4\end{cases}\Rightarrow\boxed{G(-2,0,4)}$$

$$\boxed{\vec{EH}=\vec{FG}}$$

$$(x_H-3,y_H+1,z_H-3)=(-4,-1,1)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_H-3=-4\Rightarrow x_H=-1\\ y_H+1=-1\Rightarrow y_H=-2\\ z_H-3=1\Rightarrow z_H=4\end{cases}$$

$$\Rightarrow\boxed{H(-1,-2,4)}$$



تدرب (3) (صفحة 24):

لدينا في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ للفراغ، النقاط $A(3,0,-1)$ و $B(-2,3,2)$ و $C(1,2,-2)$.

الطلب الأول: جد إحداثيات النقطة I منتصف $[AB]$.

$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)\Rightarrow I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

الطلب الثاني: جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة إلى C.

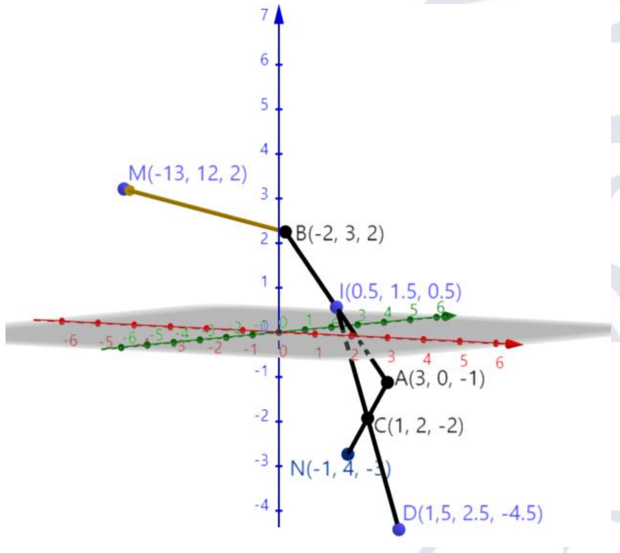
D نظيرة I بالنسبة إلى C، أي أنَّ:

$$\vec{IC}=\vec{CD}$$

$$(x_C-x_I,y_C-y_I,z_C-z_I)=(x_D-x_C,y_D-y_C,z_D-z_C)$$

$$\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{5}{2}\right)=(x_D-1,y_D-2,z_D+2)$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_D-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x_D=\frac{3}{2}\\ y_D-2=\frac{1}{2}\Rightarrow y_D=\frac{5}{2}\\ z_D+2=-\frac{5}{2}\Rightarrow z_D=-\frac{9}{2}\end{cases},\ \boxed{D\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2},-\frac{9}{2}\right)}$$



"المعلم ليس بالضرورة متجانس"

الطلب الثالث: جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة:

$$\vec{BM}=\vec{AB}+3\,\vec{AC}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\,\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} x_M + 2 \\ y_M - 3 \\ z_M - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M + 2 = -5 - 6 \Rightarrow x_M = -13 \\ y_M - 3 = 3 + 6 \Rightarrow y_M = 12 \\ z_M - 2 = 3 - 3 \Rightarrow z_M = 2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{M(-13,12,2)}$$

الطلب الرابع: جد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة

$$\overrightarrow{NA} = 2\,\overrightarrow{NC}$$

$$\overrightarrow{NA} = 2\,\overrightarrow{NC}$$

$$\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CA} = 2\,\overrightarrow{NC}$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{NC} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CN}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_N - 1 \\ y_N - 2 \\ z_N + 2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \boxed{N(-1,4,-3)}$$

تدرب (4) (صفحة 24):

لدينا النقطتان $A(2,3,-2)$ و $B(5,-1,0)$. جد إن أمكن، في كل حالة، إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة

$\boxed{1}$ $\overrightarrow{MA} = 2\,\overrightarrow{AB}$

$$\begin{pmatrix} 2 - x_M \\ 3 - y_M \\ -2 - z_M \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2 - x_M = 6 \Rightarrow x_M = -4 \\ 3 - y_M = -8 \Rightarrow y_M = 11 \\ -2 - z_M = 4 \Rightarrow z_M = -6 \end{cases} , \boxed{M(-4,11,-6)}$$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{BA} = \vec{0}$$ أياً كانت M ,

وهذا يناقض الفرض، إذاً لا يوجد M تحقق المساواة.

$\boxed{3}$ $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$3\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BA}$$

$$\begin{pmatrix} x_M - 5 \\ y_M + 1 \\ z_M \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_M - 5 = -9 \Rightarrow x_M = -4 \\ y_M + 1 = 12 \Rightarrow y_M = 11 \\ z_M = -6 \Rightarrow z_M = -6 \end{cases} , \boxed{M(-4,11,-6)}$$

لاحظ أنَّ:

$$3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

$$2\,\underbrace{\overrightarrow{BA}}_{-\overrightarrow{AB}} + \underbrace{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}}_{\overrightarrow{MA}} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$$

وهي ذات المعادلة الأولى $\boxed{1}$.

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$$\underbrace{\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{BA}} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

وهي غير محققة إلا عندما $A = B$، وهذا غير محقق من الفرض.

تدرب (5) (صفحة 24):

أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط $A(2,3,0)$ و $B(3,2,1)$ و $M(a,b,2)$ على استقامة واحدة.

A و B و M على استقامة واحدة $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ مرتبطين

$A(2,3,0)$	$B(3,2,1)$	$M(a,b,2)$

$$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$$

$$\overrightarrow{BM}(a-3,b-2,1)$$

$$\overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{AB} \Rightarrow (a-3,b-2,1) = k(1,-1,1)$$

$$\begin{cases} k = 1 \\ b - 2 = -1 \Rightarrow \boxed{b = 1} \\ a - 3 = 1 \Rightarrow \boxed{a = 4} \end{cases}$$

تدرب (6) (صفحة 24):

أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,5)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$ مرتبطين خطياً؟

إذا أمكن إيجاد عدد حقيقي k يحقق:

$$\vec{v} = k\vec{u}$$

$$(1,-2,a) = k(2,a,5)$$

$$\begin{cases} 2k = 1 \Rightarrow k = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2}a = -2 \Rightarrow \boldsymbol{a = -4} \\ 5k = a \Rightarrow \boldsymbol{a = \dfrac{5}{2}} \end{cases}$$

وهذا تناقض، إذاً لا يمكن تعيين a.

تدرب (7) (صفحة 24):

في كل من الحالات الآتية، بيّن إذا كانت النقاط A و B و C تقع على استقامة واحدة؟

A و B و C على استقامة واحدة $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين

$\boxed{1}$ $A(3,-1,2), B(0,2,4), C(2,0,-3)$

$$\overrightarrow{AB}(-3,3,2)\,,\overrightarrow{BC}(2,-2,-7)$$

$$\frac{-3}{2} = \frac{3}{-2} \neq \frac{2}{7} \Longrightarrow$$ المركبات غير متناسبة

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ غير مرتبطين خطياً، وبالتالي النقاط لا تقع على استقامة واحدة.

$\boxed{2}$ $A(-4,1,3), B(-2,0,5), C(0,-1,7)$

$$\overrightarrow{AB}(2,-1,2)\,,\overrightarrow{BC}(2,-1,2) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$$

وبالتالي النقاط تقع على استقامة واحدة.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

$\boxed{3}\ A(1,-1,0), B(1,-1,4), C(1,-1,-3)$

$$\overrightarrow{AB}\ \underbrace{(0,0,4)}_{4(0,0,1)}\ ,\overrightarrow{BC}\ \underbrace{(0,0,-7)}_{-7(0,0,1)}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ مرتبطين خطياً، وبالتالي النقاط تقع على استقامة واحدة.

--المسافة في الفراغ--

تدرب (1) (صفحة 27):

احسب نظيم كل من $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ في كل من الحالات الآتية:

$\boxed{1}\ \vec{u}(2,-2,3), \vec{v}(4,-4,-2), \vec{w}(4,1,-2)$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{17}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36} = 6$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{4^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$\boxed{2}\ \vec{u} = 2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}\,,$

$\vec{v} = \vec{\imath} + 5\vec{k}\,, \vec{w} = \sqrt{2}\vec{\imath} - \sqrt{3}\vec{\jmath} + \vec{k}$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{26}$$

$$\|\vec{w}\| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

تدرب (2) (صفحة 27):

فيما يأتي، بين هل المثلث ABC قائم؟ هل هو متساوي الساقين؟ هل هو متساوي الأضلاع؟

$\boxed{1}\ A(1,3,-1), B(3,6,-2), C(0,4,0)$

حساب أطوال الأضلاع $[AB],[BC],[AC]$

$$\overrightarrow{AB}(2,3,-1) \Rightarrow AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

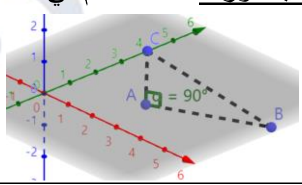
$$\overrightarrow{BC}(-3,-2,2) \Rightarrow BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

$$\overrightarrow{AC}(-1,1,1) \Rightarrow AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

نلاحظ أنَّ المثلث غير متساوي الأضلاع ولا الساقين، لكن نجد أنَّ:

$$AB^2 + AC^2 = BC^2$$

إذاً حسب عكس فيثاغورث المثلث قائم في A.



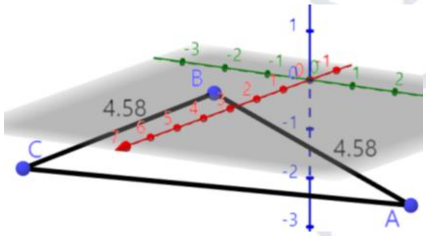
$\boxed{2}\ A(1,3,-2), B(2,-1,0), C(6,-3,-1)$

$$\overrightarrow{AB}(1,-4,2) \Rightarrow AB = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{BC}(4,-2,-1) \Rightarrow BC = \sqrt{16+4+1} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{AC}(5,-6,1) \Rightarrow AC = \sqrt{25+36+1} = \sqrt{62}$$

نلاحظ أن المثلث غير قائم ولا متساوي الأضلاع، ولكن $AB = AC$ إذا هو متساوي الساقين.

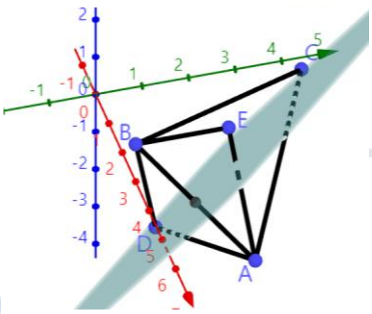


تدرب (3) (صفحة 27):

لدينا النقطتان $A(5,2,-1)$ و $B(3,0,1)$. بيّن أيّ النقاط C و D أو E تنتمي إلى المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، في حالة $C(-2,5,-2)$ و $D(1,1,-3)$ و $E(3,2,1)$.

المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مجموعة النقاط التي تبعد عن طرفيها المسافة نفسها

$A(5,2,-1)$	$C(-2,5,-2)$	$B(3,0,1)$
$\overrightarrow{AC}(-7,3,-1)$		$\overrightarrow{CB}(5,-5,3)$
$AC = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$		$CB = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$
$AC = CB \Leftarrow$ النقطة C تنتمي للمستوي المحوري		
$A(5,2,-1)$	$D(1,1,-3)$	$B(3,0,1)$
$\overrightarrow{AD}(-4,-1,-2)$		$\overrightarrow{DB}(2,-1,4)$
$AD = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$		$DB = \sqrt{4+1+16} = \sqrt{21}$
$AD = DB \Leftarrow$ النقطة D تنتمي للمستوي المحوري		
$A(5,2,-1)$	$E(3,2,1)$	$B(3,0,1)$
$\overrightarrow{AE}(-2,0,2)$		$\overrightarrow{EB}(0,-2,0)$
$AE = \sqrt{4+0+4} = 2\sqrt{2}$		$EB = \sqrt{0+4+0} = 2$
$AE \neq EB \Leftarrow$ النقطة E لا تنتمي للمستوي المحوري		



berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

تدرب (4) (صفحة 27):

نتأمل النقاط $A(1,1,\sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2},-\sqrt{2},0)$، و C نظيرة A بالنســـبة إلى المبدأ O. أثبت أن المثلث ABC مثلث قائم ومتساوي الساقين.

C نظيرة A بالنسبة إلى المبدأ O ، إذاً

$$C(-1,-1,-\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{AC}(2,2,2\sqrt{2}) \Rightarrow AC = \sqrt{4+4+8} = \mathbf{4}$$

$$\overrightarrow{BC}(-1-\sqrt{2},-1+\sqrt{2},-\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$BC = \sqrt{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(-1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+2+2\sqrt{2}+1+2-2\sqrt{2}+2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{BA}(1-\sqrt{2},1+\sqrt{2},\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$BA = \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2 + \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1+2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}+2} = \mathbf{2\sqrt{2}}$$

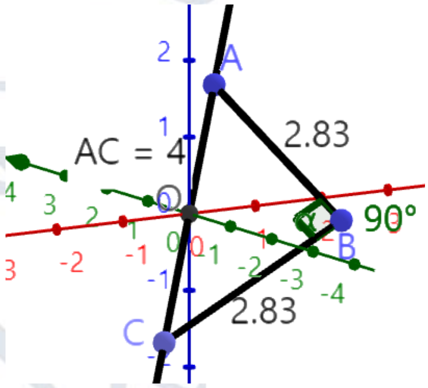
واضح أنَّ المثلث متساوي الساقين رأسه B حيث $BC = BA$

نتأكد من أنه قائم باستخدام عكس فيثاغورث

$$BC^2 + BA^2 = AC^2$$

$$8 + 8 = 16$$

العلاقة محققة فهو قائم في B



تدرب (5) (صفحة 27):

نتأمل النقاط $A(2,3,-1)$ و $B(2,8,-1)$، و $C(7,3,-1)$ و $D(1,-3,3)$ و $E(5,3,3)$. أثبت أنّ B و C و D و E تقع على كرة واحدة مركزها A.

إذا كان بعد النقاط عن A متساوي

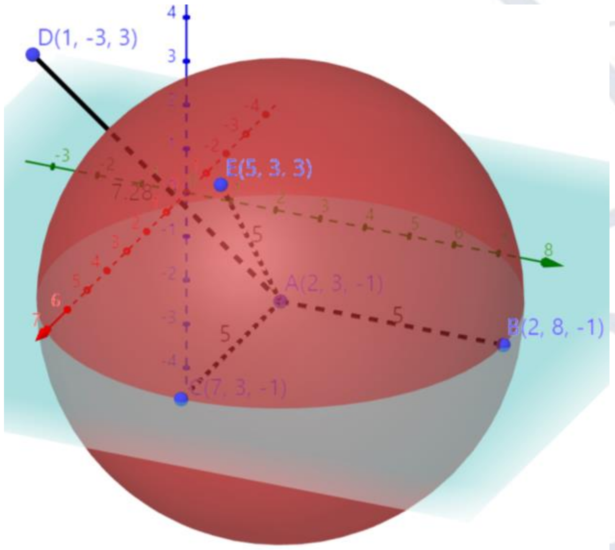
$$AB = \sqrt{(0)^2 + (8-3)^2 + (0)^2} = 5$$

$$AC = \sqrt{(7-2)^2 + 0 + 0} = 5$$

$$AE = \sqrt{(5-2)^2 + 0 + (3+1)^2} = 5$$

نلاحظ أنَّ النقاط B و C و E تقع على دائرة واحدة مركزها A ونصف قطرها 5 ، ويكون لها المعادلة

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 25$$



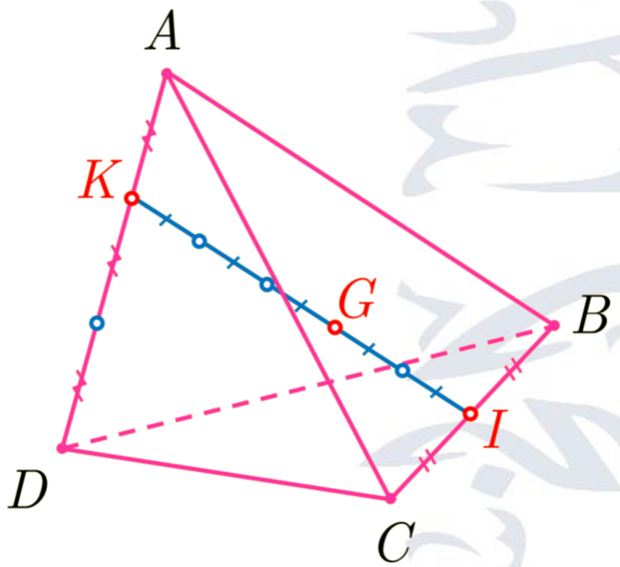
بينما نلاحظ أنّ النقطة $D(1,-3,3)$ لا تقع على نفس الدائرة

$$AD = \sqrt{(1-2)^2 + (-3-3)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{53}$$

--مركز الأبعاد المتناسبة--

تدرب (1) (صفحة 31):

بالاســـتفادة من المعلومات المبينة في الشـــكل المجاور، عيّن الأعداد الأربعة a و b و c و d ليتحقق ما يلي:



$\boxed{1}$ K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d).

من الرسم نجد أنَّ $\overrightarrow{KD} = 2\overrightarrow{AK}$ أي

$$\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$$

وبالتالي K مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(A,2)$ و $(D,1)$.

أي $a = 2d \neq 0$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$\boxed{2}$ I مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B,b) و(C,c).

بما أنَّ I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و$(C,1)$. أي $b = c \neq 0$.

$\boxed{3}$ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة (A,a) و(D,d) و(B,b) و(C,c).

نلاحظ من الشكل أنّ G مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(K,2)$،

ولما كانت I منتصف $[BC]$ كانت $(I,3)$ مركز أبعاد متناسبة للنقطتين $\left(B,\frac{3}{2}\right),\left(C,\frac{3}{2}\right)$.

وبما أنَّ $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KA} = \vec{0}$ كانت $(K,2)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $\left(A,\frac{4}{3}\right),\left(D,\frac{2}{3}\right)$.

أو يمكن القول بشكل أعم أنّ

$$\frac{a+d}{2} = \frac{b+c}{3} \Rightarrow \frac{3}{2}d = \frac{2}{3}b \Rightarrow 9d = 4b$$

أي يمكن اختيار أي ثوابت تحقق العلاقات

$$\begin{cases} a = 2d \\ b = c \\ 9d = 4b \end{cases}$$

تدرب (2) (صفحة 31):

عين مركز ثقل المثلث ABC، في حالة

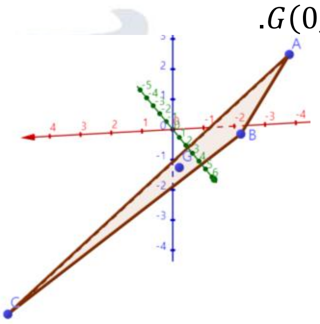
$$A(-4,-1,2),\qquad B(-2,1,0),\qquad C(6,3,-5)$$

مركز ثقل المثلث ABC هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,1)$ و$(C,1)$، ومنه:

$$x_G = \frac{\alpha x_A + \beta x_B + \gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$y_G = \frac{\alpha y_A + \beta y_B + \gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma},$$
$$z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{0}{3} = 0$$
$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3}{3} = 1$$
$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{-3}{3} = -1$$

ومنه $G(0,1,-1)$.



تدرب (3) (صفحة 31):

لدينا ثلاث نقاط في الفراغ A و B و C.

الطلب الأول: أثبت وجود نقطة وحيدة M تحقق

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

نلاحظ من العلاقة أنَّ M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,1),(C,-1)$ حيث $1+1-1 \neq 0$

ووفقاً لتعريف مركز الأبعاد المتناسبة تكون M نقطة وحيدة تحقق ما سبق.

نلاحظ أيضاً

$$\overrightarrow{MA} + \underbrace{\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}}_{\overrightarrow{CB}} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$$

أي أنَّ M صورة A وفق الانسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{CB}$.

الطلب الثاني: ما القول عن M عندما تكون A و B و C على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$$

بما أنَّ A نقطة من المستقيم (BC) ، فإنَّ صورتها M تنتمي لـ (BC) أيضاً، أي أنّ النقاط الأربعة على استقامة واحدة.

الطلب الثالث: ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما لا تقع A و B و C على استقامة واحدة؟

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$$

نستنتج من هذه العلاقة عندما لا تكون النقاط A و B و C على استقامة واحدة يكون الرباعي $ACBM$ متوازي أضلاع.

تدرب (4) (صفحة 31):

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه و k عدد حقيقي غير معدوم ولا يساوي 1. لتكن I و J و K و L النقاط المعرفة بالعلاقات:

$$\overrightarrow{AI} = k\,\overrightarrow{AB} \text{ و } \overrightarrow{AJ} = k\,\overrightarrow{AD} \text{ و } \overrightarrow{CK} = k\,\overrightarrow{CD} \text{ و}$$
$$\overrightarrow{CL} = k\,\overrightarrow{CB}$$

الطلب الأول: أثبت أنَّ

$$\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK} \quad (*)$$

واستنتج أنَّ النقاط الأربع I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

$$\underbrace{\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{BD}} = \overrightarrow{LK}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} = -k\,\overrightarrow{AB} + k\,\overrightarrow{AD}$$
$$= k\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right) = k\overrightarrow{BD} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{IJ} = \underbrace{k\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}}$$

$$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} = -k\,\overrightarrow{CB} + k\,\overrightarrow{CD}$$
$$= k\left(\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB}\right) = k\overrightarrow{BD} \quad (2)$$

من (1) و(2) أنَّ العلاقة $(*)$ محققة، وأنّ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ أي أن المستقيم (IJ) يوازي (LK)، فالنقاط I و J و K و L تقع في مستوٍ واحد.

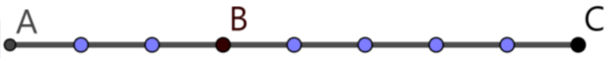
الطلب الثاني: ما طبيعة الشكل الرباعي $IJKL$ ؟

بما أنَّ $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$ فالرباعي $IJKL$ متوازي أضلاع.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نورأشقر +963943608577

-- تمارين إضافية عن فكرة الأبعاد المتناسبة للتمكين --

تمرين (1): أوجد α,γ لتكون A مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,\alpha),(C,\gamma)$



$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}=\frac{3}{8}\Rightarrow 8\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}\Rightarrow 8\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

ومنه A مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,8),(C,-3)$

أو بأسلوب آخر:

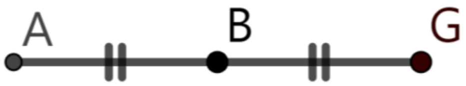
$$8\overrightarrow{AB}-3\underbrace{\overrightarrow{AC}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}=\vec{0}\Rightarrow 5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{5}\overrightarrow{BC}\Rightarrow \overrightarrow{BA}=\frac{-3}{5}\overrightarrow{BC}$$

تمرين (2): AB قطعة مستقيمة عين G مركز أبعاد متناسبة لـ $\left(A,\underbrace{2}_{\alpha}\right),\left(B,\underbrace{3}_{\beta}\right)$

$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$$

تمرين (3): AB قطعة مستقيمة عين G مركز أبعاد متناسبة لـ $\left(A,\underbrace{-1}_{\alpha}\right),\left(B,\underbrace{2}_{\beta}\right)$



$$\boxed{\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}\Rightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{2}{1}\overrightarrow{AB}$$

تمرين (4): أوجد α,β,γ لتكون G مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ تحقق

$$\overrightarrow{BG}=-3\,\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{GC}$$

الحل: G مركز أبعاد متناسبة للنقاط السابقة، إذاً

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

لدينا

$$\overrightarrow{BG}=-3\,\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{GC}\Rightarrow$$

$$\vec{0}=-\overrightarrow{BG}-3\,\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{GC}$$

$$\vec{0}=\overrightarrow{GB}+3\underbrace{\overrightarrow{AB}}_{\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}}+2\,\overrightarrow{GC}$$

$$\vec{0}=\overrightarrow{GB}+3\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\right)+2\,\overrightarrow{GC}$$

$$\vec{0}=\underbrace{4}_{\beta}\,\overrightarrow{GB}+\underbrace{3}_{\alpha}\,\overrightarrow{AG}+\underbrace{2}_{\gamma}\,\overrightarrow{GC}$$

$$(A,3),(B,4),(C,2)$$

تمرين (5): AB قطعة مستقيمة عين H مركز أبعاد متناسبة لـ $\left(A,\underbrace{1}_{\alpha}\right),\left(B,\underbrace{2}_{\beta}\right)$

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

أو

$$\overrightarrow{HA}+2\underbrace{\overrightarrow{HB}}_{\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{HA}+2\left(\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$

$$3\overrightarrow{HA}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{HA}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AH}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

تمرين (6): أوجد α,β لتكون M مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta)$ تحقق

$$\boxed{1}\quad \overrightarrow{AM}=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$$

$$\beta=2,\qquad \alpha+\beta=7\Rightarrow \alpha=5$$

$$\boxed{2}\quad 2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Rightarrow \overrightarrow{AM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\beta=-1,\qquad \alpha+\beta=2\Rightarrow \alpha=3$$

$$\boxed{3}\quad \overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$

$$\overrightarrow{AM}=-3\overrightarrow{AB}$$

$$\beta=-3,\qquad \alpha+\beta=1\Rightarrow \alpha=4$$

- العلاقة

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

تكافئ

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

- حيث تنتج بإدخال A للحدين الثاني والثالث من العلاقة

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\underbrace{\overrightarrow{GB}}_{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}}+\gamma\underbrace{\overrightarrow{GC}}_{\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}}=\vec{0}$$

تمرين (7): ABC مثلث، عين α,β,γ لتكون M مركز أبعاد متناسبة لنقاطه $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$، وبحيث تحقق

$$\boxed{1}\quad \overrightarrow{AM}=2\,\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

$$\beta=2\,,\qquad \gamma=-1$$

$$\alpha+\beta+\gamma=1\Rightarrow \alpha=0$$

$\boxed{2}$ $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$

$\alpha = 1\,, \quad \gamma = -1$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Longrightarrow \beta = 1$

$\boxed{3}$ $\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$

$\alpha = 3\,, \quad \beta = 2$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Longrightarrow \gamma = -4$

$\boxed{4}$ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM} = \underbrace{\overrightarrow{MB}}_{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

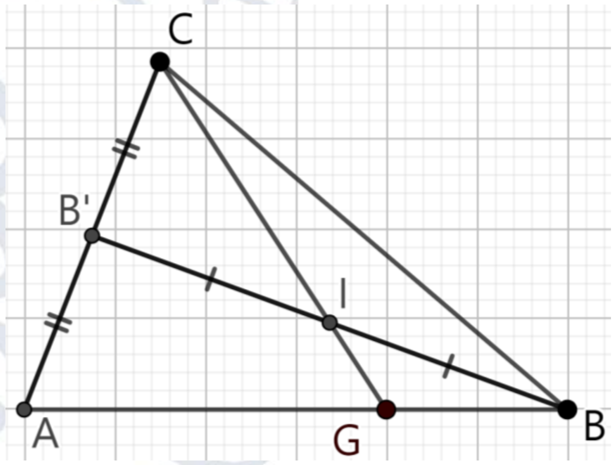
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$$

$\beta = 2\,, \quad \gamma = 1$

$\alpha + \beta + \gamma = 1 \Longrightarrow \alpha = 1$

تمرين (8): انطلاقاً من الشكل المجاور أوجد α, β, γ لتكون I مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)$ واستنتج λ التي تحقق

$$\overrightarrow{GA} + \lambda\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$



B' منتصف $[AC]$ $\Longleftarrow$ فهي مركز أبعاد متناسبة لـ

$$\underbrace{(A,1),(C,1)}_{\substack{\text{مجموع الوزنين } 1+1=2 \\ (B',2)}}$$

I منتصف $[BB']$ (أي للنقطتين نفس الوزن) فهي مركز أبعاد متناسبة

$$\underbrace{(B',2),(B,2)}_{(I,4)}$$

ومنه حسب الخاصة التجميعية $(I,4)$ مركز أبعاد متناسبة لـ

$(A,1),(B,2),(C,1)$

لدينا GC مار من I ويقطع AB في G، G مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,1),(B,2)$، أي

$$1\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = 2$$

تمرين (9): عبر عن النقاط A و B و C بصفتها مركز أبعاد متناسبة للنقطتين المتبقيتين.

$\boxed{1}$ B مركز أبعاد متناسبة

$$(A,2),(C,3) \Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$$

$\boxed{2}$ A مركز أبعاد متناسبة

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{3}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{BA} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{BC}$$

$(B,5),(C,-3)$

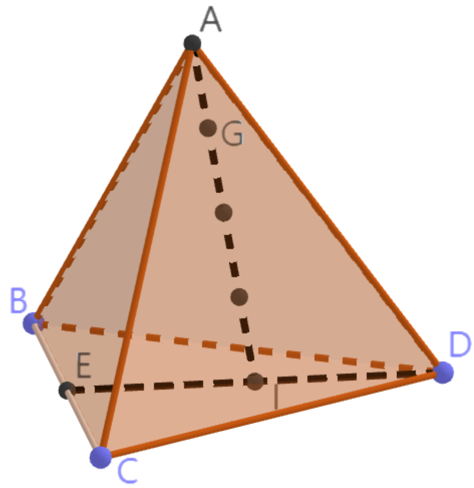
$\boxed{3}$ C مركز أبعاد متناسبة

$$\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \overrightarrow{BC} = \frac{2}{-3}\overrightarrow{BA}$$

$(A,2),(B,-5)$

تمرين (10): ليكن $ABCD$ رباعي وجوه فيه E من $[BC]$ تحقق $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC}$ ، النقطة I منتصف $[DE]$ و G تحقق $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$. المطلوب:

$\boxed{1}$ عين $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ لتكون G مركز أبعاد متناسبة لـ $(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma), (D,\delta)$



$$\overbrace{(A,\alpha),\overbrace{\overbrace{(B,\beta),(C,\gamma)},(D,\delta)}}$$

لدينا

$$\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{EC} \Longrightarrow 2\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{EB} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$(E,3)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1),(C,2)$

و I منتصف $[DE]$ إذاً E و D لهما الثقل نفسه $\underbrace{(D,3),(E,3)}_{(I,6)}$

وتكون $(I,6)$ مركز أبعاد متناسبة لـ $(B,1),(C,2),(D,3)$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI} \Longrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\overbrace{6}^{I \text{ ثقل}}}{18}\overrightarrow{AI} \Longrightarrow$$

$\alpha = 18 - 6 = 12$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

إذاً G مركز أبعاد متناسبة لـ $(I,6)$ و $(A,12)$،

ومنه تكون G مركز أبعاد متناسبة للنقاط

$(B,1),(C,2),(D,3),(A,12)$

$\boxed{2}$ عين M التي تحقق

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

ثم استنتج أنَّ M تنتمي للمستوي (ADE).

- ندخل للطرف الثاني I ونستفيد من أنَّ I منتصف $[DE]$

$$2\overrightarrow{AM}=\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{ID}}+\underbrace{\overrightarrow{AE}}_{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IE}}$$

$$2\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AI}+\underbrace{\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IE}}_{\vec{0}}$$

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AI}$$

ومنه M طبوقة على I.

$$2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

ثلاثة أشعة مرتبطة خطياً إذاً تقع في مستوٍ واحد.

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

-- معادلة أسطوانة ومخروط --

--معادلة أسطوانة--

لتكن A النقطة التي احداثياتها $(0,0,7)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمل الأسطوانة المولدة من دوران الضلع $[BC]$ من المستطيل $OABC$ حول المستقيم (OA)، حيث $AB=3$، ولتكن M نقطة متحولة من الأسطوانة مسقطها القائم على القطعة المستقيمة $[OA]$ هو H.

1. نفترض أنَّ $M(x,y,z)$. ما احداثيات H؟ أثبت أنَّ احداثيات M تحقق العلاقتين

$$x^2+y^2=9 \text{ و } 0\le z\le 7$$

$$MH=3$$

بما أنَّ H المسقط القائم للنقطة $M(x,y,z)$ على المحور Oz فإحداثيات H تكون $(0,0,z)$، وهي نقطة من $[OA]$ إذاً

$$0\le z\le 7$$

وبما أنَّ $MH=3$ فإنَّ $MH^2=9$، أي

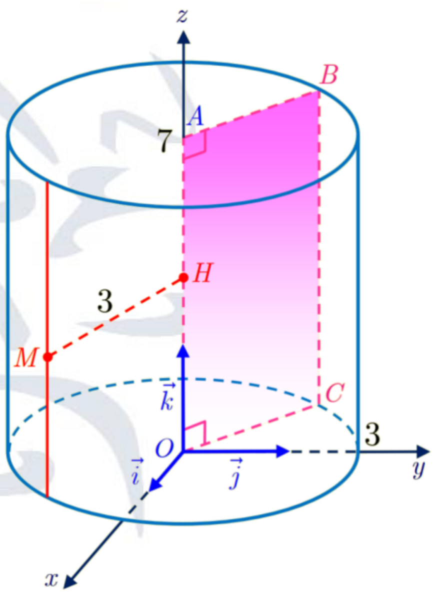
$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2=9$$

$$x^2+y^2=9$$

2. بالعكس إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ تحقق إحداثياتها $x^2+y^2=9$ و $0\le z\le 7$ فأثبت أنَّ $MH=3$ واستنتج أنَّ M تقع على الأسطوانة.

تكون M من الأسطوانة إذا كان بعدها عن محور الأسطوانة Oz يساوي 3، أي إذا كان $MH=3$ حيث H مسقط M على محور الأسطوانة،

ولما كانت $M(x,y,z)$ فإنَّ $H(0,0,z)$ حيث $0\le z\le 7$ كما في الفرض.



لنحسب MH

$$MH^2=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2$$

$$MH^2=x^2+y^2$$

ولما كان من الفرض $x^2+y^2=9$ ، فإنَّ

$$MH^2=9 \Rightarrow MH=3$$

ومنه فإنّ النقطة M تنتمي للأسطوانة المفروضة، وتكون معادلة هذه الأسطوانة:

$$x^2+y^2=9\,, \qquad 0\le z\le 7$$

3. أي النقاط الآتية تقع على الأسطوانة $D(3,0,3)$ و $E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$ و $F(1,3,1)$.

$x^2+y^2=9\,,\quad 0\le z\le 7$		
$D(3,0,3)$	$E(\sqrt{3},\sqrt{6},4)$	$F(1,3,1)$
تحقق معادلة الأسطوانة	تحقق معادلة الأسطوانة	لا تحقق معادلة الأسطوانة (لا تقع)
$3^2+0=9$ $0\le z=3\le 7$	$3+6=9$ $0\le z=4\le 7$	$1+3^2\ne 9$

4. (a) جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{j})$ وقاعدتها الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2.

لتحديد أسطوانة: مركز قاعدتها، نصف قطرها، المحور (الارتفاع)

إذا كان h ارتفاع الأسطوانة فإنَّ معادلتها:

$$x^2+z^2=4\,, \qquad 0\le y\le h$$

4. (b) أعد السؤال (a) في حال مركز قاعدة الأسطوانة هو النقطة $Q(0,8,0)$.

إذا كان h ارتفاع الأسطوانة فإنَّ معادلتها:

$$x^2+z^2=4\,, \qquad 8\le y\le h+8$$

5. جد معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{i})$ ومركز قاعدتها $T(3,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

إذا كان h ارتفاع الأسطوانة فإنَّ معادلتها:

$$y^2+z^2=6\,, \qquad 3\le x\le h+3$$

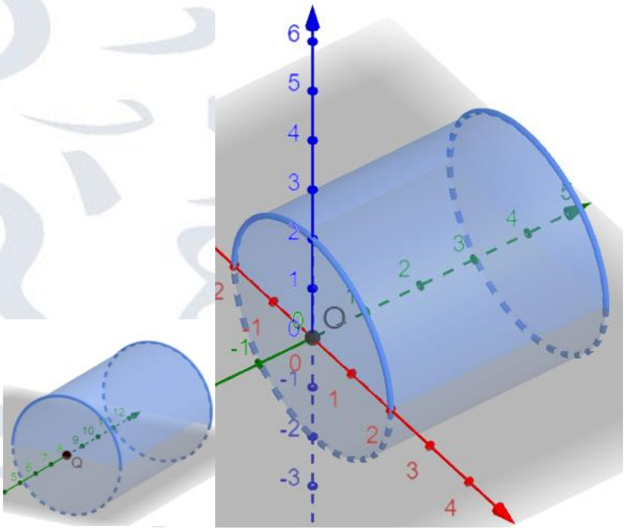
+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

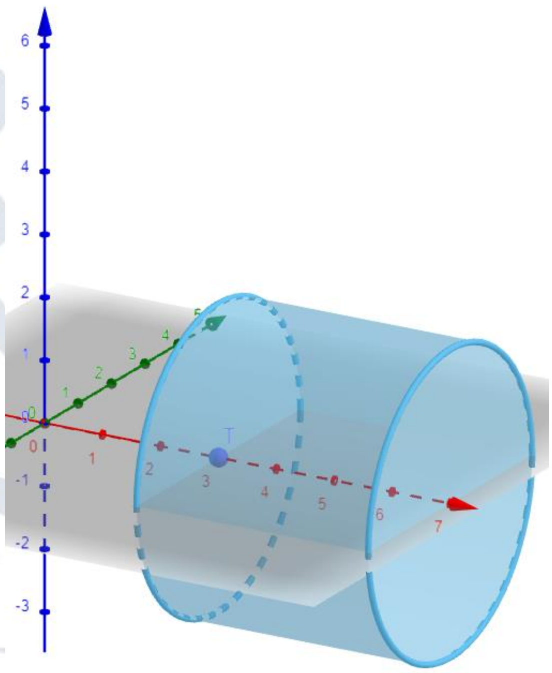
6. صف مجموعة النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق إحداثياتها العلاقات

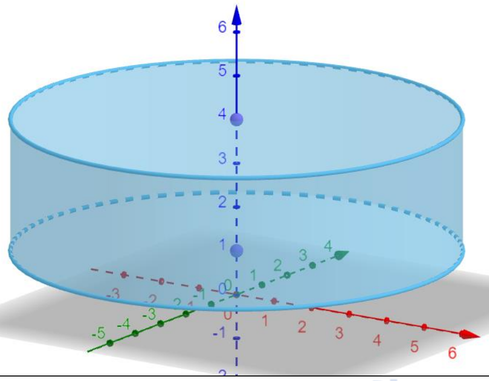
$$1 \le z \le 4 \;:\; x^2+y^2=25$$

مجموعة النقاط M واقعة على أسطوانة مركز قاعدتها النقطة $(0,0,1)$ ونصف قطرها 5، ومحورها Oz ، وارتفاعها

$$h = 4-1 = 3$$







--معادلة مخروط--

لتكن A النقطة التي احداثياتها $(0,0,5)$ في معلم متجانس معطى في الفراغ $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$، نتأمل المخروط المولد من دوران الضلع $[OK]$ من المثلث OAK القائم في A حول المستقيم (OA)،حيث $AK=2$.

1. لتكن M نقطة من المخروط و H مسقطها القائم على القطعة المستقيمة $[OA]$.

(a) أثبت أنَّ

$$\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5} \quad \text{ثم} \quad MH^2=\frac{4}{25}\mathrm{OH}^2$$

(b) اكتب المساواة السابقة بدلالة إحداثيات M ولتكن (x,y,z) وأثبت أنه إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة من المخروط كان:

$$0 \le z \le 5 \text{ و } x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$$

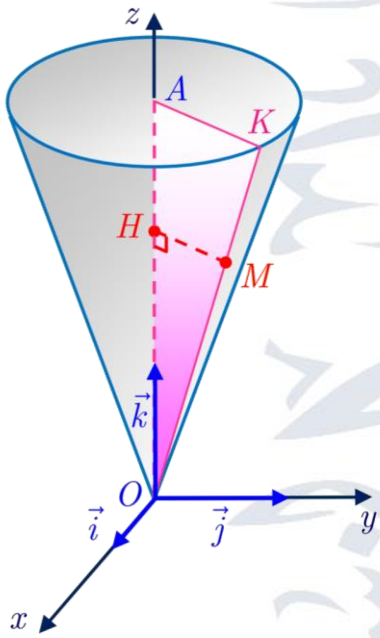
من تشابه المثلثين OHM و OAK تتناسب الأضلع أو من

$$\tan\widehat{HOM}=\tan\widehat{AOK}$$

$$\frac{MH}{OH}=\frac{\overbrace{AK}^{\text{نصف قطر الدائرة}}}{OA}=\frac{2}{5}\Rightarrow MH^2=\frac{4}{25}\mathrm{OH}^2$$

إنَّ مسقط $M(x,y,z)$ على Oz هو $H(0,0,z)$ حيث

$$0 \le z \le 5$$



وبالتالي:

$$MH^2=\frac{4}{25}\mathrm{OH}^2 \Rightarrow$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2=\frac{4}{25}z^2$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

ومنه معادلة المخروط:

$$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0;\quad 0\le z\le 5$$

2. بالعكس لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من الفراغ تحقق إحداثياتها العلاقات

$$0\le z\le 5 \quad \text{و} \quad x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0$$

أثبت أنه إذا كان $z\neq 0$ كان $\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}$، واستنتج أنَّ M تقع على المخروط، ولا تنسى حالة $z=0$.

بفرض H مسقط M على Oz فإنَّ $H(0,0,z)$ حيث $0\le z\le 5$

لدينا

$$MH^2=(x-0)^2+(y-0)^2+(z-z)^2$$
$$=x^2+y^2$$
$$OH^2=0+0+(z-0)^2=z^2$$

ولدينا من الفرض

$$\underbrace{x^2+y^2}_{MH^2}-\frac{4}{25}\underbrace{z^2}_{OH^2}=0\Rightarrow MH^2=\frac{4}{25}OH^2$$

$$\Rightarrow MH=\frac{2}{5}OH\underset{z\neq 0}{\Rightarrow}\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}$$

$$\frac{MH}{OH}=\frac{2}{5}=\frac{AK}{OA}$$

وبالتالي فإنّ M نقطة من الضلع $[OK]$ فهي من المخروط حتماً.

في حال كانت $z=0$ فإنّ H تنطبق على $O(0,0,0)$ ومنه M تنطبق على O أيضاً، و O نقطة من المخروط وضوحاً.

3. عين من بين النقاط الآتية تلك التي تقع على المخروط مبرراً إجابتك

$$T(2,2\sqrt{3},10),S(1,1,3),R(-2,1,5),Q(2,0,5)$$

$x^2+y^2-\frac{4}{25}z^2=0;\quad 0\le z\le 5$	
$S(1,1,3)$	$T(2,2\sqrt{3},10)$
لا تحقق المعادلة	لا تحقق المعادلة
$1^2+1^2-\frac{4}{25}3^2\neq 0$	$0\le z=10\nleq 5$
$Q(2,0,5)$	$R(-2,1,5)$
تحقق المعادلة	لا تحقق المعادلة
$4+0-\frac{4}{25}25=0$ $0\le z=5\le 5$	$4+1-\frac{4}{25}25\neq 0$ $1\neq 0$

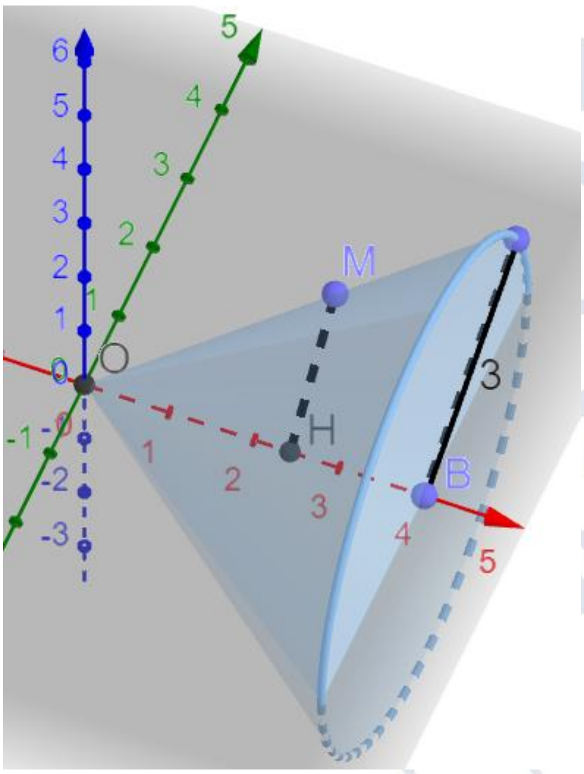
4. اكتب معادلة للمخروط الذي رأسه O ومحوره $(O,\vec{i})$ وقاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها 3.

في هذه الحالة محور المخروط هو Ox، وليكن $H(x,0,0)$ مسقط M على المحور Ox وحيث $0\le x\le 4$

$$\frac{MH}{OH}=\frac{3}{4}$$

والمعادلة تكون:

$$y^2+z^2-\frac{4}{25}x^2=0;\quad 0\le x\le 4$$



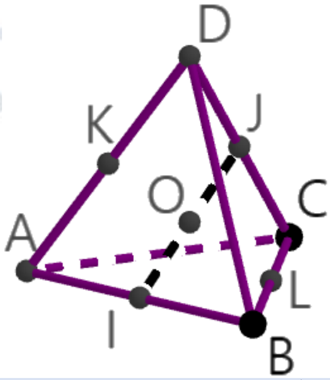
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

عَن النبي ﷺ فيمَا يَرْويه عَنْ رَبِّهِ عزَّ وجل أنَّهُ قَالَ:"يا عِبَادِيْ إنِّي حَرَّمْتُ الظُّلْمَ عَلَى نَفْسِيْ وَجَعَلْتُهُ بَيْنَكُمْ مُحَرَّماً فلا تَظَالَمُوْا، يَا عِبَادِيْ كُلُّكُمْ ضَالٌّ إلاّ مَنْ هَدَيْتُهُ فَاسْتَهْدُوْنِي أَهْدِكُمْ، يَا عِبَادِيْ كُلُّكُمْ جَائِعٌ إلاَّ مَنْ أَطْعَمْتُهُ فَاسْتَطْعِمُونِي أُطْعِمْكُمْ، يَا عِبَادِيْ كُلُّكُمْ عَارٍ إلاَّ مَنْ كَسَوْتُهُ فَاسْتَكْسُوْنِيْ أَكْسُكُمْ، يَا عِبَادِيْ إِنَّكُمْ تُخْطِئُوْنَ بِاللَّيْلِ وَالنَّهَارِ وَأَنَا أَغْفِرُ الذُّنُوبَ جَمِيْعاً فَاسْتَغْفِرُوْنِيْ أَغْفِرْ لَكُمْ، يَا عِبَادِيْ إِنَّكُمْ لَنْ تَبْلُغُوْا ضَرِّيْ فَتَضُرُّوْنِيْ وَلَنْ تَبْلُغُوْا نَفْعِيْ فَتَنْفَعُوْنِيْ ...

-- تمرينات ومسائل الوحدة الأولى --

المسألة الأولى: (صفحة 35)

$ABCD$ رباعي وجوه. I منتصف $[AB]$ J منتصف $[CD]$ و O منتصف $[IJ]$



الطلب الأول: املأ الفراغ

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\cdots\cdots\cdots+\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{\boldsymbol{DB}}+\overrightarrow{CD}$$

استنتج أنَّ:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

لدينا

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$$

الطلب الثاني: بسط كلاً من

$$\boxed{1}\ \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\boxed{2}\ \overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{BD}$$

استنتج أنَّ

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{IJ}$$

بجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ مع ملاحظة المنتصفات نجد المطلوب.

الطلب الثالث:

1) لماذا؟

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$$

لأن $\overrightarrow{OI}$ نصف قطر متوازي الأضلاع المنشأ على $\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{OB}$.

2) لماذا؟

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{OJ}$$

لأن $\overrightarrow{OJ}$ نصف قطر متوازي الأضلاع المنشأ على $\overrightarrow{OC}$ و $\overrightarrow{OD}$.

استنتج

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$$

بجمع (1) و (2) وملاحظة O منتصف $\overrightarrow{IJ}$.

الطلب الرابع:

لتكن K منتصف $[AD]$ و L منتصف $[BC]$ أثبت أنَّ:

$$\overrightarrow{IK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

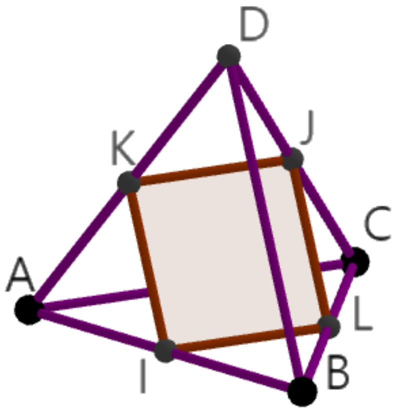
لدينا:

$$\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{AD}}_{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

وبالمثل نجد:

$$\overrightarrow{LJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

من النتيجتين نجد $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$ فالشكل $IKJL$ متوازي أضلاع.



المسألة الثانية: (صفحة 35)

$ABCD$ رباعي وجوه. وضّع على الشكل النقاط...

الطلب الأول: بين وضع I بالنسبة لــــ $\overrightarrow{BA}$ والمحققة I مركز الأبعاد المتناسبة $(B,2),(A,1)$.

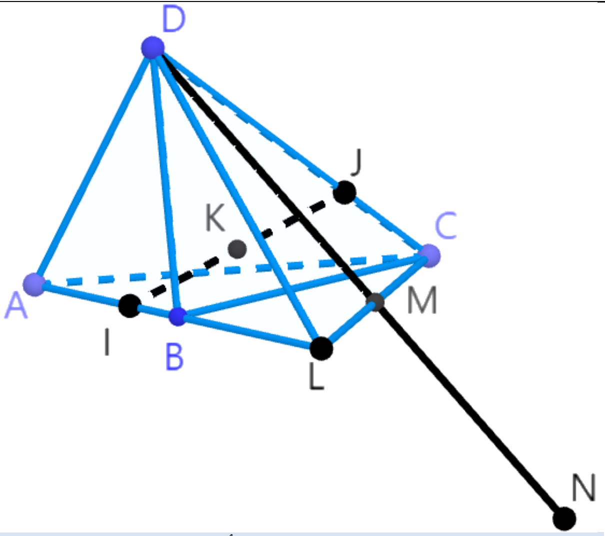
لدينا

$$\overrightarrow{IA}+2\,\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$
$$\underbrace{\overrightarrow{IA}}+2\,\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

الطلب الثاني: J مركز الأبعاد المتناسبة $(D,1),(C,2)$

$$2\,\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com



الطلب الثالث: K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,2),(A,1)$ و $(D,1),(C,2)$

تقع K منتصف $[IJ]$ لتساوي الثقلين في I و J.

$$(I,3),(J,3)$$

الطلب الرابع: L مركز الأبعاد المتناسبة $(B,-2),(A,1)$

$$\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{LB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{LA}-2\left(\overrightarrow{LA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$$
$$-\overrightarrow{LA}-2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{AL}=2\overrightarrow{AB}$$

الطلب الخامس: M مركز الأبعاد المتناسبة $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$.

$$\underbrace{(B,-2),(A,1)}_{(L,-1)} \text{ و } (C,-1)$$

فهي منتصف $[LC]$

الطلب السادس: N مركز الأبعاد المتناسبة $(A,1)$ و $(B,-2)$ و $(C,-1)$ و $(D,1)$.

$$\underbrace{(B,-2),(A,1),(C,-1)}_{(M,-2)} \text{ و } (D,1)$$

$$\overrightarrow{ND}-2\overrightarrow{NM}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{ND}-2\left(\overrightarrow{ND}+\overrightarrow{DM}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{DN}=2\overrightarrow{DM}$$

المسألة الثالثة: (صفحة 35)

في المقولات الآتية، بين الصحيح من الخطأ معللاً إجابتك.

1. ABC مثلث. **مهما كانت** D من الفراغ كانت الأشعة $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DC}$ مرتبطة خطياً.

D:
- $\boxed{1}$ خارج المستوي (ABC) لا يمكن أن تكون الأشعة مرتبطة لأنها ليست على استقامة واحدة
- $\boxed{2}$ داخل المستوي (ABC) نعم $\exists \alpha,\beta: \overrightarrow{DC}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}$

2. $ABCD$ رباعي وجوه و I نقطة تحقق $2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ عندئذٍ تقع I على أحد حروف رباعي الوجوه.

خطأ،

$$2\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$$
$$2\overrightarrow{IA}=\underbrace{\overrightarrow{DA}}+\underbrace{\overrightarrow{CA}}+\underbrace{\overrightarrow{BC}}$$
$$2\overrightarrow{IA}=\underbrace{\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IA}}+\underbrace{\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}}+\underbrace{\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{IC}}$$
$$\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{BI}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$$

I منتصف $\overline{DB}$.

3. تتأمل الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ نفترض أن أي شعاعين منها **ليسا** مرتبطين خطياً، عندها تكون الأشعة $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}$ غير مرتبطة خطياً.

نميز حالتين

A,B,C,D:
- $\boxed{1}$ في مستو واحد مرتبطة
- $\boxed{2}$ ليست في مستو واحد غير مرتبطة

4. النقاط $A(5,1,3)$ و $B\left(2,-\sqrt{5},-2\right)$ و $C(3,-3,3)$ متساوية البعد عن $K(2,0,1)$.

العبارة صحيحة لأنَّ

$$AK^2=14,\ BK^2=14,\ CK^2=14$$

5. النقاط $F(5,1,1),E(1,2,6),D(0,-2,0),C(4,0,0)$ تنتمي إلى المستوي **المحوري** للقطعة المستقيمة التي طرفيها $A(4,-2,2),B(2,2,0)$.

نكتب معادلة **المستوي المحوري**:

نفرض $M(x,y,z)$ من هذا المستوي،

$$MA^2=MB^2 \Longrightarrow$$
$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-0)^2$$
$$=(x-4)^2+(y+2)^2+(z-2)^2$$

ومنه

$$\boxed{x-2y+z-4=0}$$

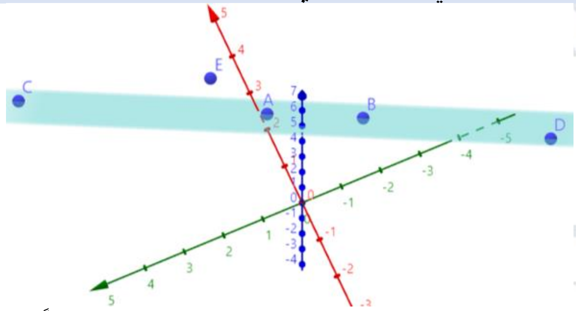
نعوض كل نقطة:

C تقع في المستوي و D تقع و F تقع، E **لا** تقع في المستوي.

المسألة الرابعة: (صفحة 36)

--إثبات وقوع نقاط في مستو واحد--

$\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم متجانس، والنقاط $A(2,0,1)$
$E(3,1,2),D(-3,-5,6),C(5,5,0),B(1,-2,1)$
أثبت أنَّ النقاط A,B,C,D تقع في مستوٍ واحد $\mathcal{P}$، وبين إذا كانت E تنتمي إلى المستوي.



الرسم هنا غير مطلوب ولن يساعدك في الحل كثيراً (عليك بحل المسألة تحليلياً)

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

الحل: خطوات الحل

$\boxed{1}$ نوجد شعاعين غير مرتبطين مثلاً $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$\boxed{2}$ نثبت أنَّ D واقعة في المستوي (ABC)

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC} = (3,5,-1) \end{cases}$ غير مرتبطين لأن المركبات غير متناسبة

$\boxed{2}$ لنرى إمكانية كتابة $\overrightarrow{AD}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ،

$$\overrightarrow{AD} = (-5,-5,5) \overset{?}{=} \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{cases} -5 = -\alpha + 3\beta \\ -5 = -2\alpha + 5\beta \\ 5 = -\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = -10 \\ \beta = -5 \end{matrix}$$

إذاً النقاط A, B, C, D واقعة في مستوٍ واحد.

هل تنتمي E إلى مستوي النقط الأربعة؟

نبحث عن وجود شعاع $\overrightarrow{AE}$ في المستوي بحيث

$$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$$

$$(1,1,1) = \alpha(-1,-2,0) + \beta(3,5,-1)$$

بحلها نجد $\alpha = -4$ و $\alpha = -3$ وبالتالي لا يمكن تحقق المعادلات لوجود قيمتين، إذاً E لا تنتمي.

المسألة الخامسة: (صفحة 37)

--إثبات تقاطع مستقيمين--

$(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلم متجانس، والنقطتين $A(3,-1,1)$ و $B(3,-3,-1)$، والشعاعان $\vec{u}(1,0,-2)$ و $\vec{v}(2,1,-3)$

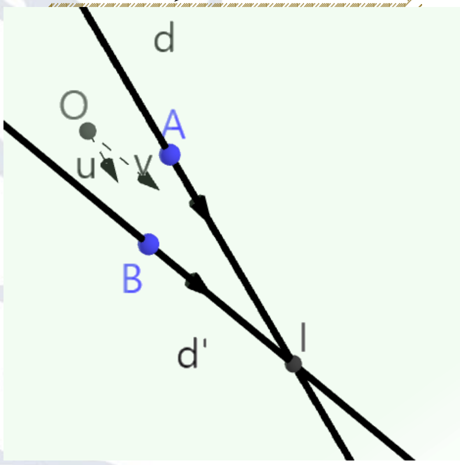
d مستقيم مار من A وموجه بالشعاع $\vec{u}$

d' مستقيم مار من B وموجه بالشعاع $\vec{v}$

أثبت أنَّ d و d' متقاطعان، ثم أوجد نقطة تقاطعهما I.

$\boxed{1}$ نثبت أنّ d و d' غير متوازيين

$\boxed{2}$ يقعان في مستوٍ واحد



$\boxed{1}$ إنَّ d لا يوازي d' لأنَّ $\vec{u}$ لا يوازي $\vec{v}$ لعدم تناسب المركبات

$$\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1} \neq \frac{-2}{-3}$$

$\boxed{2}$ لنبحث عن وجود d و d' بمستوٍ واحد، يكفي أن نبرهن أنَّ: $\overrightarrow{AB}$ و $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{AB} = (0,-2,-2)$$

والسؤال هل يوجد $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$$

الجواب نعم

$\alpha = 4$ و $\beta = -2$ فالمستقيمان يقعان بمستوٍ واحد.

لإيجاد نقطة التقاطع I

$$\left.\begin{matrix} I \text{ من } d \Leftarrow \overrightarrow{AI} = \alpha\,\vec{u} \\ I \text{ من } d' \Leftarrow \overrightarrow{BI} = \beta\,\vec{v} \end{matrix}\right\}$$

$$\overrightarrow{AI} = (x-3, y+1, z-1)$$

$$\overrightarrow{BI} = (x-3, y+3, z+1)$$

$\overrightarrow{AI} = \alpha\,\vec{u}$	$\overrightarrow{AI} = \beta\,\vec{v}$
$z + 2x = 7\,, y = -1$	$x = 7, y = -1,$ $z = -7$

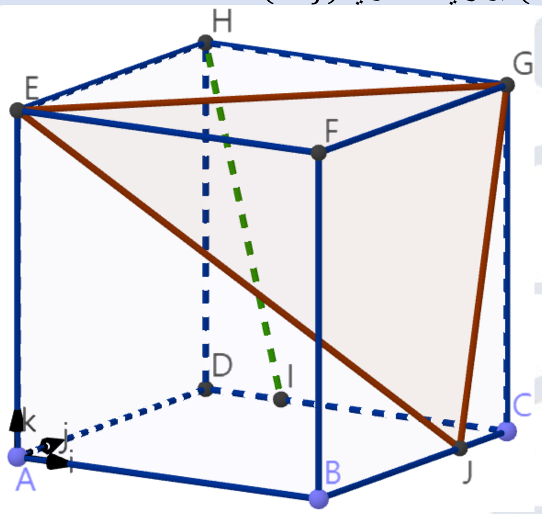
تحقق المعادلة، إذاً

$$I = (7,-1,-7)$$

المسألة السادسة: (صفحة 38)

--التوازي في الفراغ--

مكعب $ABCDEFG$. I نقطة من $[CD]$ تحقق $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$، والنقطة J من $[BC]$ تحقق $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ، أثبت أنَّ المستقيم (HI) يوازي المستوي (EGJ).



نثبت أنّ $\overrightarrow{HI}$ يرتبط بمستقيمين متقاطعين في المستوي

أي نثبت أنَّ الأشعة الثلاثة السابقة مرتبطة $\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{EJ}$

* $\boxed{\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \overrightarrow{HI} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}}$

(حتى نستطيع تعيين الإحداثيات وإيجاد المجاهيل α, β)

نختار المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ فنجد

$$I\left(\frac{1}{4}, \underbrace{1}_{\text{مسقطها على } AD \text{ هو } D \text{ و } D \text{ بعدها عن } A \text{ يساوي } 1}, 0\right)$$

+963943608577 نور أشقر ‏ +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

$$H\left(0,\underbrace{1}_{\text{مسقطها على } AD \text{ هو } D \text{ و } D \text{ بعدها عن } A \text{ يساوي } 1},1\right)$$

$$J\left(\underbrace{1}_{\text{مسقطها على } AB \text{ هو } B \text{ و } B \text{ بعدها عن } A \text{ يساوي } 1},\frac{3}{4},0\right)$$

$$\left.\begin{array}{ll} H(0,1,1) & I\left(\frac{1}{4},1,0\right) \\ E(0,0,1) & J\left(1,\frac{3}{4},0\right) \\ E(0,0,1) & G(1,1,1) \end{array}\right\}$$

$$\overrightarrow{HI}=\left(\frac{1}{4},0,-1\right)$$

$$\overrightarrow{EJ}=\left(1,\frac{3}{4},-1\right)$$

$$\overrightarrow{EG}=(1,1,0)$$

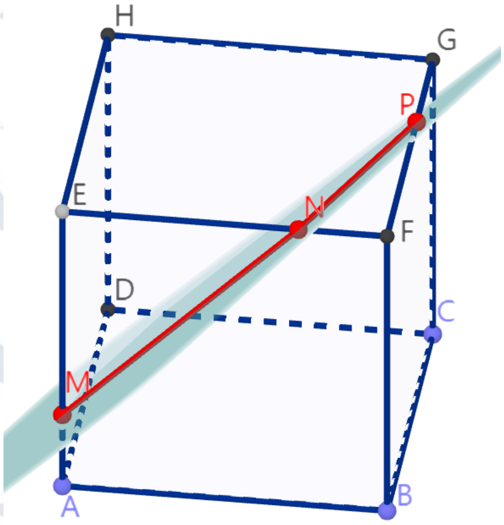
نعوض في $*$ نجد:

$$\alpha=-\frac{3}{4}\ ,\qquad \beta=1$$

المسألة السابعة: (صفحة 39)

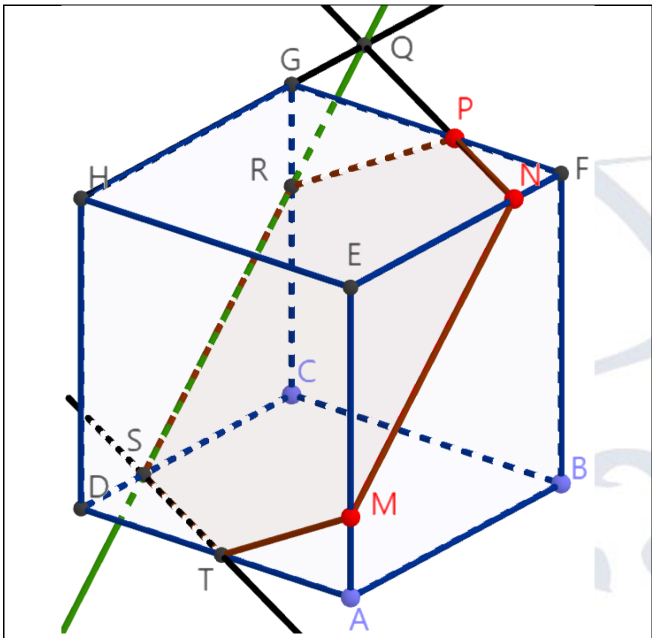
--مقطع مكعب بمستوٍ--

مكعب $ABCDEFG$. M و N و P ثلاث نقاط من الأحرف $[AE]$ و $[EF]$ و $[FG]$ بالترتيب، أوجد مقطع المكعب بالمستوي (MNP).



يعتمد الحل على فكرة: إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين $\Leftarrow$ يقطعهما بمستقيمين متوازيين

نلاحظ (MNP) يقطع $(ABFE)$ بالمستقيم (MN) فهو يقطع المستوي الموازي له $(DCGH)$ ،



لنبحث عن المستقيم المشترك للمستويين

(MNP) و $(DCGH)$

$(\overrightarrow{NP}$ و $\overrightarrow{HG}$ يقعان في نفس المستوي $(EFGH)$ وغير متوازيين فهما متقاطعان، ولتكن Q نقطة تقاطعهما)

من Q نرسم موازي لـ $\overrightarrow{MN}$ يقطع الحرف GC في R، ويقطع DC في S.

نستنتج أنَّ (MNP) يقطع $(DCGH)$ بالفصل المشترك $\boldsymbol{(RS)}$.

بالمثل نبحث عن المستقيم المشترك بين المستويين

(MNP) و $(ABCD)$

(لاحظ أنّ المستوي $(ABCD)$ يوازي $(EFGH)$ الموجود فيه المستقيم (NP))

نرسم من النقطة S الموجودة على $[DC]$ مستقيماً موازياً لـ (NP) يقطع (AD) في T.

فيكون $\boldsymbol{(ST)}$ الفصل المشترك للمستويين.

كذلك نبحث عن المستقيم المشترك بين المستويين

(MNP) و $(EADH)$

M مشتركة بين المستويين
T مشتركة بين المستويين
الفصل المشترك (MT)

والمستقيم المشترك بين المستويين

(MNP) و $(ABFE)$

M مشتركة بين المستويين
N مشتركة بين المستويين
الفصل المشترك (MN)

والمستقيم المشترك بين المستويين

(MNP) و $(EFGH)$

N مشتركة بين المستويين
P مشتركة بين المستويين
الفصل المشترك (NP)

والمستقيم المشترك بين المستويين

(MNP) و $(FBCG)$

P مشتركة بين المستويين
R مشتركة بين المستويين
الفصل المشترك (PR)

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الثامنة: (صفحة 39)

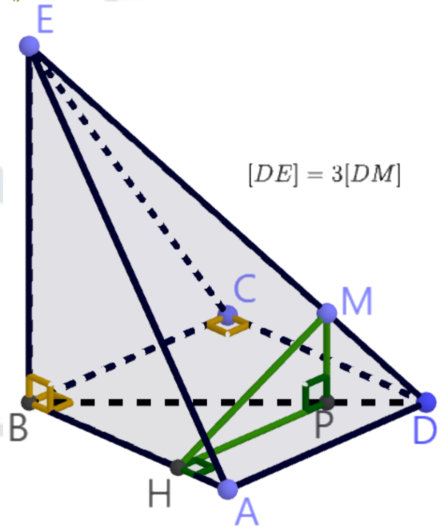
--حساب مسافة--

هرم $ABCDE$ رأسه E وقاعدته مربع. $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$، $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$.
M نقطة من القطعة $[ED]$ تحقق $3\,\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$، لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$ و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB).
احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.

هناك طريقتين للحل إما من خلال تشابه المثلثات،

أو باستخدام الاشعة (حساب مسافة (ولديك زاوية قائمة

في الشكل) $\Leftarrow$ خذ معلماً متجانساً)



الطريقة الأولى: الفكرة منها حساب $[MH]$ من المثلث MPH القائم في P،

$$HM^2 = \underbrace{MP^2}_{\substack{\text{تشابه المثلثين}\\ DEB\\ DMP}} + \underbrace{PH^2}_{\substack{\text{تشابه المثلثين}\\ BAD\\ BPH}}$$

$BD = 4\sqrt{2}$ لأنه قطر المربع وهو مسقط ED، ومنه P مسقط M على مستوي المربع تقع على القطر BD.
من تشابه المثلثين DEB, DMP نستنتج

$$\frac{DM}{DE} = \frac{MP}{EB} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{MP}{4\sqrt{2}} \Rightarrow MP = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

ويكون حسب تالس في المثلث EBD:

$$\frac{BP}{BD} = \frac{2}{3}$$

ومن تشابه المثلثين BAD, BPH (لتوازي PH مع AD (العمودان على مستقيم واحد متوازيان)) نجد:

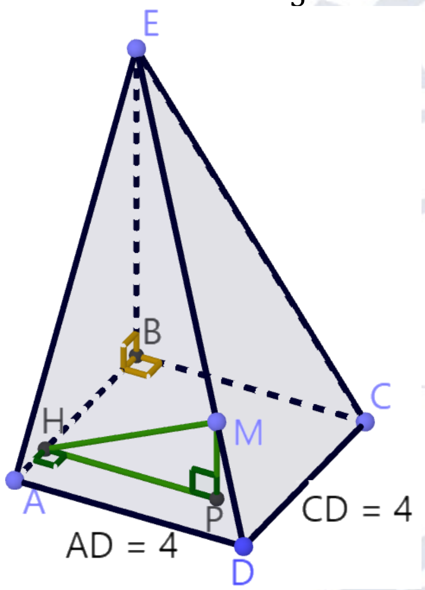
$$\frac{BP}{BD} = \frac{PH}{AD} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{PH}{4} \Rightarrow PH = \frac{8}{3}$$

ومن المثلث MPH القائم في P،

$$HM^2 = MP^2 + PH^2$$

$$HM^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}\right)^2 = \frac{32}{9} + \frac{64}{9} = \frac{96}{9}$$

$$\Rightarrow HM = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$



الطريقة الثانية: بأخذ $(B;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متجانس حيث

$$\overrightarrow{BA} = 4\vec{i}\,,\overrightarrow{BC} = 4\vec{j}\,,\overrightarrow{BE} = 4\sqrt{2}\,\vec{k}$$

وبالتالي:

$$D(4,4,0)$$
$$E(0,0,4\sqrt{2})$$

نحدد احداثيات النقطة M بالاستفادة من العلاقة:

$$3\,\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$$
$$3(x-4, y-4, z-0) = (-4,-4,4\sqrt{2})$$
$$\Rightarrow x = \frac{8}{3}, y = \frac{8}{3}, z = \frac{4\sqrt{2}}{3} \Rightarrow M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

P المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ وبالتالي:

$$P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$$

H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB)

$$H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$$

ومنه

$$MH^2 = \left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(\frac{8}{3}-0\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-0\right)^2$$
$$MH^2 = \frac{64}{9} + \frac{32}{9} = \frac{96}{9}$$
$$\Rightarrow MH = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

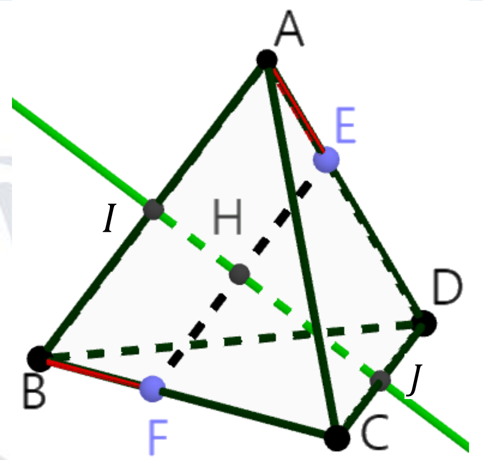
+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة التاسعة: (صفحة 40)

$ABCD$ رباعي وجوه، و a عدد حقيقي. I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$. E و F نقطتان تحققان العلاقتين:

$$\overrightarrow{BF}=a\overrightarrow{BC} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$$

و H منتصف $[EF]$، أثبت أنَّ I و J و H تقع على استقامة واحدة.



اثبات وقوع النقاط الثلاث من خلال مركز الأبعاد المتناسبة (نثبت H مركز أبعاد متناسبة لـ I,J)

فكرة الحل:

الخطوة الأولى: نبدأ بإثبات أنَّ:

1 E مركز أبعاد متناسبة لـ $\underbrace{(D,a),(A,1-a)}_{(E,1)}$

2 F مركز أبعاد متناسبة لـ $\underbrace{(C,a),(B,1-a)}_{(F,1)}$

فيكون مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط في منتصف EF أي H.

الخطوة الثانية: نثبت أنَّ مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربعة $(D,a),(A,1-a)(C,a),(B,1-a)$ يقع على IJ. وبالتالي IJ يمر من H ⟸ إذاً هم على استقامة واحدة.

الحل:

بما أنَّ

$$\overrightarrow{AE}=a\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AE}=a\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)$$
$$\overrightarrow{AE}-a\overrightarrow{AE}-a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$
$$(1-a)\overrightarrow{AE}-a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$
$$-(1-a)\overrightarrow{EA}-a\overrightarrow{ED}=\vec{0}$$
$$\boxed{(1-a)\overrightarrow{EA}+a\overrightarrow{ED}=\vec{0}}$$

فالنقطة E مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(D,a),(A,1-a)$.

بالمثل نجد أنَّ:

$$\boxed{(1-a)\overrightarrow{FB}+a\overrightarrow{FC}=\vec{0}}$$

فالنقطة F مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C,a),(B,1-a)$.

وبالتالي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$$\underbrace{(D,a),(A,1-a)}_{\text{مجموعهما } 1} \qquad \underbrace{(C,a),(B,1-a)}_{\text{مجموعهما } 1}$$

هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(F,1),(E,1)$.

وهو في منتصف EF لتساوي الثقلين في E و F أي في H.

الخطوة الثانية:

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(B,1-a),(A,1-a)$$

هو منتصف AB لتساوي الثقلين فيهما، أي $(I,2-2a)$.

$$\underbrace{(B,1-a),(A,1-a)}_{\text{مجموعهما } 2-2a} \qquad \underbrace{(C,a),(D,a)}_{\text{مجموعهما } 2a}$$

ومركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين

$$(C,a),(D,a)$$

هو منتصف DC لتساوي الثقلين فيهما، أي $(J,2a)$.

وبالتالي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط الأربع يقع على IJ، أي أنَّ IJ يمر من H.

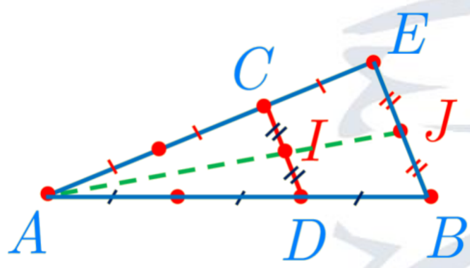
وبالتالي النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة.

المسألة العاشرة: (صفحة 41)

A و B و C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ، و E و D نقطتان تحققان العلاقتين:

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE} \quad \text{و} \quad 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$$

الطلب الأول: أثبت النقاط A و B و C و E و D تقع في مستوٍ واحد.



(ABC) مستوٍ ، نثبت أنَّ E و D تنتميان إليه

(ABC) مستوٍ

نثبت E تنتمي إليه	نثبت D تنتمي إليه
من خلال الارتباط الخطي لـ	
$\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$
E واقعة على (AC) أي بالمستوي (ABC)	D واقعة على (AB) أي بالمستوي (ABC)

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$$
$$\overrightarrow{AE} = 3(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE})$$
$$3\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AE} = \vec{0}$$
$$2\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{CA} = 3\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$

فالنقطة E واقعة على (AC) أي بالمستوي (ABC).
ولدينا أيضاً

$$3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

فالنقطة D واقعة على (AB) أي بالمستوي (ABC).
وبالتالي النقاط A و B و C و E و D تقع في مستوٍ واحد.

الطلب الثاني: لتكن I منتصف $[CD]$ و J منتصف $[BE]$. أثبت وقوع النقاط A و I و J على استقامة واحدة.

الارتباط الخطي بين $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ (استفد من الطلب السابق)

لدينا

$$\boxed{1} \quad 2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$$
$$\boxed{2} \quad 2\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}$$

ولدينا من الطلب السابق

$$\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

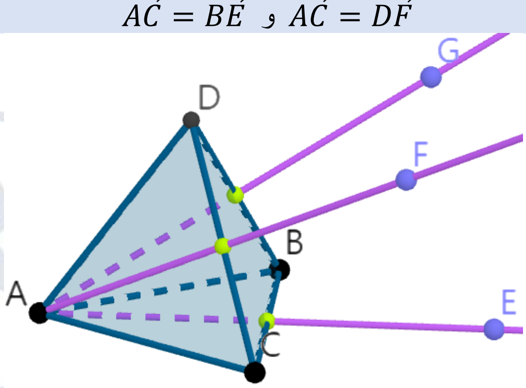
نعوض في $\boxed{2}$

$$2\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{3}{2}2\overrightarrow{AI}$$
$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

المسألة الحادية عشرة: (صفحة 41)

$ABCD$ رباعي وجوه و E و F و G هي نظائر A بالنسبة إلى منتصفات $[BC]$ و $[CD]$ و $[DB]$ بالترتيب:
الطلب الأول: أثبت أنَّ

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} \quad و \quad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$$



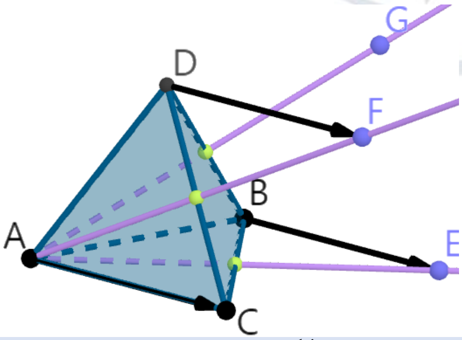
اثبات متوازي أضلاع من خلال تناصف الأقطار والاستفادة من الطلبات السابقة

القطعتين BC و AE متناصفتان (E نظيرة A بالنسبة لمنتصف BC) وبالتالي $ACEB$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$$

القطعتين DC و AF متناصفتان (F نظيرة A بالنسبة لمنتصف DC) وبالتالي $ACFD$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$$

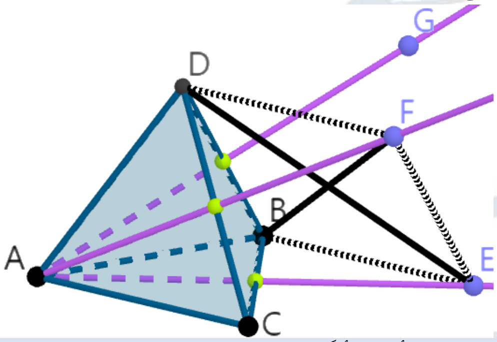


الطلب الثاني: استنتج أنَّ للقطعتين $[DE]$ و $[FB]$ المنتصف نفسه.

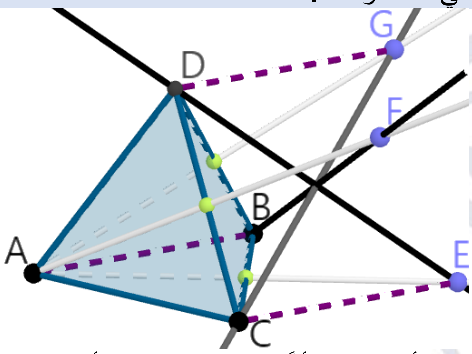
من الطلب السابق وجدنا أنَّ

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DF}$$

فالشكل $DFEB$ متوازي أضلاع قطراه $[DE]$ و $[FB]$ متناصفان.



الطلب الثالث: أثبت أنَّ المستقيمات (BF) و (DE) و (CG) متلاقية في نقطة واحدة.



من الطلب الأول وجدنا أنَّ $ACEB$ متوازي أضلاع، وبالتالي

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE}$$

ولدينا القطعتين BD و AG متناصفتان (G نظيرة A بالنسبة لمنتصف DB) وبالتالي $ABGD$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه، وبالتالي:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$\Longrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DG}$$

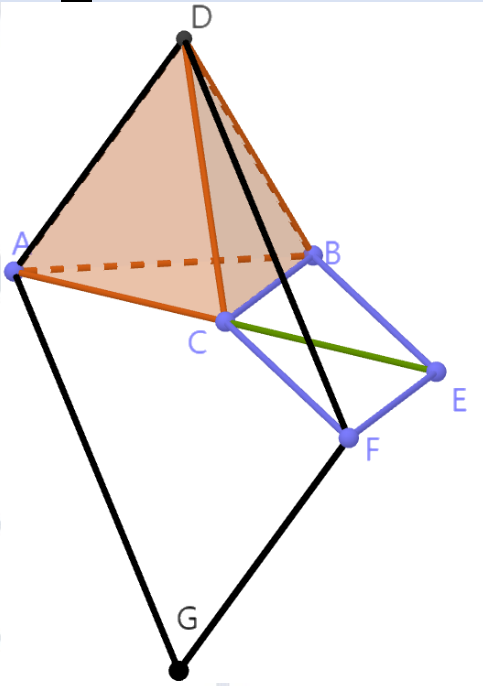
وبالتالي $DCEG$ متوازي أضلاع قطراه $[DE]$ و $[GC]$ متناصفان ولدينا من الطلب السابق $DFEB$ متوازي أضلاع قطراه $[DE]$ و$[FB]$ متناصفان، وبالتالي نستنتج أنَّ (BF) و(DE) و(CG) متناصفة فهي متلاقية في نقطة واحدة.

المسألة الثانية عشر: (صفحة 41)

$ABCD$ رباعي وجوه، E هي نظيرة A بالنسبة إلى C، و F و G هما النقطتان اللتان تجعلان $EBCF$ و $FDAG$ متوازيي أضلاع:

الطلب الأول: أثبت أنَّ

$$\boxed{*} \quad \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$



مفتاح الحل DG قطر متوازي الأضلاع $FDEG$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DF}$$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \underbrace{\overrightarrow{DF}}_{\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}}$$

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \underbrace{\overrightarrow{EF}}_{\overrightarrow{BC}}$$

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{BC}$ في متوازي الأضلاع $EBCF$ وبالتالي:

$$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BC}$$

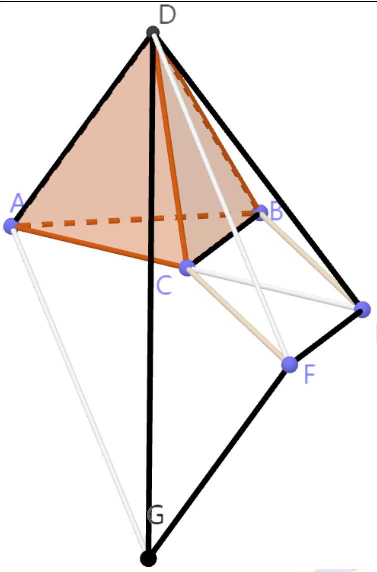
الطلب الثاني: استنتج أنَّ

$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

ثم أنَّ النقاط G,D,C,B تقع في مستوٍ واحد.

استنتاج أنَّ $2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE}$ (إما من المبرهنة

حيث C منتصف $[AE]$ أو كما يلي)



في المثلث ADC لدينا

$$\boxed{1} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}$$

في المثلث DCE لدينا

$$\boxed{2} \quad \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EC}$$

بجمع $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ نجد:

$$\boxed{2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE}}$$

حيث $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{EC}$ متعاكسان (مجموعهم $\vec{0}$)، الآن نعوض في $\boxed{*}$ نجد:

$$\overrightarrow{DG} = 2\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$$

ومنه فإنَّ الأشعة $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{DG}$ مرتبطة خطياً، وبالتالي تكون في مستوٍ واحد، أي أنَّ النقاط G,D,C,B تقع في مستوٍ واحد.

المسألة الثالثة عشر: (صفحة 41)

نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقاط $A(3,2,1)$ و $B(1,2,0)$ و $C(3,1,-2)$.

الطلب الأول: أثبت أنَّ النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.

نثبت أنَّ $\overrightarrow{AB}$ و$\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً

$$\overrightarrow{AB} = (1-3, 2-2, 0-1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AB} = (-2,0,-1)}$$

$$\overrightarrow{AC} = (3-3, 1-2, -2-1)$$

$$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{AC} = (0,-1,-3)}$$

$$\frac{-2}{0} \neq \frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

واضح أنَّ المركبات غير متناسبة وبالتالي الشعاعان غير مرتبطان خطياً وبالتالي النقاط C,B,A ليست على استقامة واحدة.

+963943608577 نور أشقر
+963941114148 برلنت مطيط
berlantcommunication@gmail.com

الطلب الثاني: عند أية قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M(m,1,3)$ إلى المستوي (ABC) ؟

تنتمي M للمستوي إذا ارتبطت خطياً $\overrightarrow{AM}$ مع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

أي إذا أمكن كتابة $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AM}=(m-3,1-2,3-1)$$
$$\overrightarrow{AM}=(m-3,-1,2)$$
$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$(m-3,-1,2)=\alpha(-2,0,-1)+\beta(0,-1,-3)$$

ومنه تنتج المعادلات التالية:

$$\boxed{1}\quad -2\alpha=m-3$$
$$\boxed{2}\quad -\beta=-1$$
$$\boxed{3}\quad -\alpha-3\beta=2$$

من $\boxed{2}$ نجد $\beta=1$ نعوض في $\boxed{3}$

$$-\alpha-3=2 \implies \alpha=-5$$

نعوض في $\boxed{1}$ نجد:

$$-2(-5)=m-3 \Rightarrow m=10+3=13$$
$$m=13$$

ومنه من أجل $m=13$ تكون النقطة $M(13,1,3)$ تنتمي للمستوي (ABC).

الطلب الثالث: ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A و B و C و $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد.

الارتباط الخطي $\overrightarrow{AD}$ مع $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AD}=(x-3,y-2,3-1)$$
$$\overrightarrow{AD}=(x-3,y-2,2)$$
$$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$$
$$(x-3,y-2,2)=\alpha(-2,0,-1)+\beta(0,-1,-3)$$

$$\boxed{1}\quad -2\alpha=x-3$$
$$\boxed{2}\quad -\beta=y-2$$
$$\boxed{3}\quad -\alpha-3\beta=2$$

(من هذه المعادلات نستنتج علاقة بين x,y بدون وجود α و β)

نضرب طرفي العلاقة $\boxed{2}$ بالعدد 3

$$\boxed{4}\quad -3\beta=3y-6$$
$$\boxed{3}\quad -\alpha-3\beta=2$$

بطرح $\boxed{3}$ من $\boxed{4}$ نجد:

$$\alpha=3y-8$$

نعوض في $\boxed{1}$ نجد:

$$-2(3y-8)=x-3 \Rightarrow -6y+16=x-3$$
$$\boxed{x+6y=19}$$

وهي العلاقة المطلوبة.

المسألة الرابعة عشر: (صفحة 41)

--مجموعة نقاط--

لتكن $\mathcal{E}$ مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق احداثياتها العلاقة

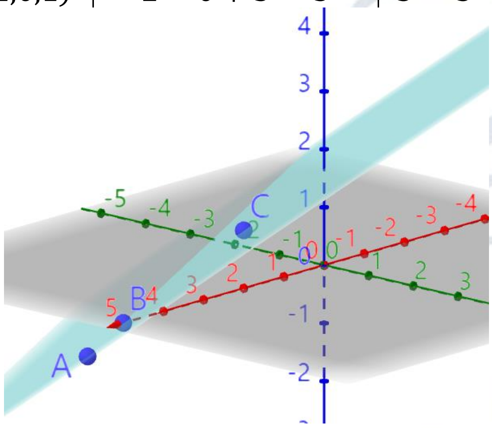
$$x-2y+3z-5=0 \qquad (*)$$

الطلب الأول: أثبت أنَّ النقاط $A(7,1,0)$ و $B(5,0,0)$ و $C(2,0,1)$ تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$.

نعوض في معادلة المستوي

إذا كانت النقاط تحقق المعادلة $(*)$ فهي تنتمي إلى المجموعة $\mathcal{E}$.

	$x-2y+3z=5$	
$A(7,1,0)$	$7-2+0=5$	$5=5$ محققة
$B(5,0,0)$	$5-0+0=5$	$5=5$ محققة
$C(2,0,1)$	$2-0+3=5$	$5=5$ محققة



الرسم هنا غير ضروري

الطلب الثاني: أثبت أنَّ النقاط A و B و C تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

من خلال عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$

إذا كان الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً فالنقاط A و B و C تقع في مستوٍ واحد.

$A(7,1,0)$	$B(5,0,0)$	$C(2,0,1)$

$$\overrightarrow{AB}=(5-7,0-1,0)=(-2,-1,0)$$
$$\overrightarrow{AC}=(2-7,0-1,1-0)=(-5,-1,1)$$
$$\frac{-2}{-5}\neq\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{1}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتهما، ومنه النقاط A و B و C تحدد مستوياً $\mathcal{P}$.

الطلب الثالث: أثبت أنَّ مركبات الشعاع $\overrightarrow{BM}$ هي $(2y-3z,y,z)$.

ثم استنتج أنَّ $\overrightarrow{BM}=y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}$، ماذا يمكنك أن تستنتج من ذلك؟

نوجد $\overrightarrow{BM}$ علماً أنَّ $M(x,y,z)$ وتحقق $(*)$

$M(x,y,z)$	$B(5,0,0)$

$$\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

ومن $(*)$ لدينا: $x-2y+3z-5=0$ فإنَّ:

$$x-5=2y-3z$$

$$\Rightarrow \boxed{\overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)}$$

$A(7,1,0)$	$B(5,0,0)$	$C(2,0,1)$

$$\overrightarrow{BA}=(2,1,0)\Rightarrow y\overrightarrow{BA}=(2y,y,0)$$

$$\overrightarrow{BC}=(2-5,0,1-0)=(-3,0,1)\Rightarrow$$

$$z\overrightarrow{BC}=(-3z,0,z)$$

$$y\overrightarrow{BA}+z\overrightarrow{BC}=(2y,y,0)+(-3z,0,z)$$

$$=(2y-3z,y,z)=\overrightarrow{BM}$$

نستنتج من ذلك أنَّ النقاط M واقعة في المستوي $\mathcal{P}$.

الطلب الرابع: بالعكس أثبت أنَّ أية نقطة $M(x,y,z)$ من المستوي $\mathcal{P}$ تحقق المعادلة:

$$x-2y+3z-5=0$$

ما هي المجموعة $\mathcal{E}$؟

$$M(x,y,z)\begin{cases}\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)\\ \overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)\end{cases}$$

$M(x,y,z)$ نقطة من المستوي $\mathcal{P}$ فهي تحقق المساواة السابقة

$$\overrightarrow{BM}=(2y-3z,y,z)$$

كما تحقق:

$$\overrightarrow{BM}=(x-5,y,z)$$

بموازنة العلاقتين نجد:

$$x-5=2y-3z\Rightarrow x-2y+3z-5=0$$

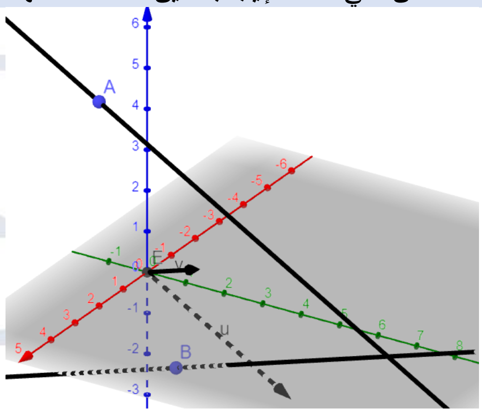
فالنقطة M من المستوي $\mathcal{P}$ إذا وفقط إذا حققت العلاقة السابقة

$$x-2y+3z-5=0$$

والمجموعة $\mathcal{E}$ هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق العلاقة السابقة.

المسألة الخامسة عشر: (صفحة 42)

نتأمّل في معلم $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ المستقيم d المار بالنقطة $A(2,0,5)$ والموجه بالشعاع $\vec{u}(2,5,-1)$، والمستقيم d' المار بالنقطة $B(2,2,-1)$ والموجه بالشعاع $\vec{v}(1,2,1)$. هل d,d' متقاطعان؟ في حالة الإيجاب عيّن نقطة تقاطعهما.



الرسم هنا غير ضروري

$\boxed{1}$ نثبت أنهما غير متوازيان

$\boxed{2}$ أن يكونا في مستو واحد ($\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}$ مرتبطة)

$\vec{u},\vec{v}$ شعاعا توجيه المستقيمين d,d' غير مرتبطين خطياً لعدم تناسب مركباتهما

$$\frac{2}{1}\neq\frac{5}{2}\neq\frac{-1}{1}$$

ومنه المستقيمان غير متوازيان، ويتقاطعان إذا كانا في مستو واحد، ولتحقق ذلك يجب أن تكون الأشعة $\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً، أي يجب أن تتحقق العلاقة

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$$

لنتأكد من صحتها

$A(2,0,5)$	$B(2,2,-1)$

$$\overrightarrow{AB}=(2-2,2-0,-1-5)=(0,2,-6)$$

$$\overrightarrow{AB}=\alpha\,\vec{u}+\beta\,\vec{v}$$

$$(0,2,-6)=\alpha\,(2,5,-1)+\beta(1,2,1)$$

$$\begin{cases}\boxed{1}\ 0=2\alpha+\beta\\ \boxed{2}\ 2=5\alpha+2\beta\\ \boxed{3}\ -6=-\alpha+\beta\end{cases}$$

نحسب قيمة α و β من أي معادلتين ثم نعوض بالثالثة، إن حققتها تكون الأشعة مرتبطة وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و d و d' في مستوٍ واحد، وإلا فهي غير مرتبطة وليست في مستو واحد.

نضرب طرفي $\boxed{3}$ بالعدد 2 ثم نجمعها مع $\boxed{1}$ نجد:

$$-12=3\beta\Rightarrow\beta=-4$$

نعوض $\boxed{1}$ نجد:

$$\alpha=2$$

نتأكد من صحتها بتعويض القيم $\alpha=2$ و $\beta=-4$ في $\boxed{2}$

$$2\stackrel{?}{=}5(2)+2(-4)\Rightarrow 2=10-8\Rightarrow 2=2$$

المساواة محققة فالأشعة مرتبطة خطياً وتقع في مستوٍ واحد، وبالتالي متقاطعان.

لإيجاد نقطة التقاطع $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{AM}=a\,\vec{u}$ تنتج علاقة بين x,y,z	$\overrightarrow{BM}=b\,\vec{v}$ تنتج علاقة بين x,y,z

تقاطع العلاقتين

إذا كانت $M(x,y,z)$ نقطة تقاطع d و d' عندئذٍ يكون:

$$\overrightarrow{AM}=a\,\vec{u}\,,\qquad \overrightarrow{BM}=b\,\vec{v}$$

$A(2,0,5)$	$B(2,2,-1)$	$M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AM}=(x-2,y-0,z-5)=(x-2,y,z-5)$$

$$\overrightarrow{AM}=a\,\vec{u}\Rightarrow(x-2,y,z-5)=a(2,5,-1)$$

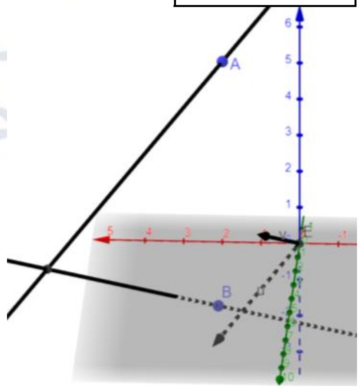
نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$\begin{cases} \boxed{1}\ x-2=2a \\ \boxed{2}\ y=5a \\ \boxed{3}\ z-5=-a \end{cases}$$

من $\boxed{3}$ نجد أنَّ $a=5-z$ ، نعوض في $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ ينتج:

$$x-2=2(5-z) \Longrightarrow \boxed{x+2z=12} \quad (1)$$

$$y=5(5-z) \Longrightarrow \boxed{y+5z=25} \quad (2)$$



$$\overrightarrow{BM}=(x-2,y-2,z+1)=b(1,2,1)$$

$$\begin{cases} \boxed{1}\ x-2=b \\ \boxed{2}\ y-2=2b \\ \boxed{3}\ z+1=b \end{cases}$$

نعوض $\boxed{3}$ في $\boxed{1}$ و $\boxed{2}$ ينتج:

$$x-2=z+1 \Longrightarrow \boxed{x-z=3} \quad (3)$$

$$y-2=2(z+1) \Longrightarrow \boxed{y-2z=4} \quad (4)$$

إذاً النقطة M تحقق المعادلات $(1),(2),(3),(4)$ بحلها حل مشترك نحصل على المطلوب:

بطرح (3) من (1) نجد:

$$3z=9 \Longrightarrow z=3$$

نعوض في (3) و (4) نجد:

$$x=6\,, \qquad y=10$$

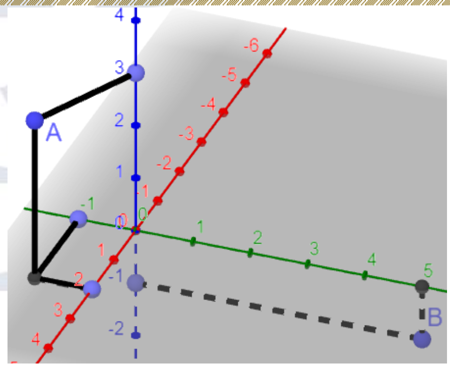
إذاً نقطة التقاطع هي

$$M(6,10,3)$$

<u>المسألة السادسة عشر:</u> (صفحة 42)

جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$ و $B(0,5,-1)$.

بعد $C(x,0,0)$ عن B يساوي بعدها عن A



الرسم هنا غير ضروري

C نقطة من محور الفواصل فإحداثياتها بالشكل $(x,0,0)$

$A(2,-1,3)$	$B(0,5,-1)$	$C(x,0,0)$

$$CA^2=CB^2$$

$$(x-2)^2+(0+1)^2+(0-3)^2$$

$$=(x-0)^2+(0-5)^2+(0+1)^2$$

$$\Longrightarrow x^2-4x+4+1+9=x^2+25+1$$

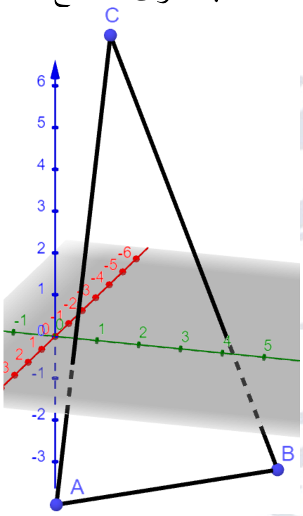
$$-4x+14=26 \Longrightarrow x=\frac{12}{-4} \Longrightarrow x=-3$$

إذاً النقطة هي $C(-3,0,0)$.

<u>المسألة السابعة عشر:</u> (صفحة 42)

ليكن α عدداً حقيقياً، ولنتأمل النقاط الثلاث $A(3,1,-3)$ و $B(-1,5,-3)$ و $C(-1,1,\alpha)$. أثبت أنَّ المثلث ABC متساوي الساقين، أياً كانت α. أيمكن أن يكون متساوي الأضلاع؟

لنحسب أطوال أضلاع المثلث:



الرسم هنا غير ضروري

$A(3,1,-3)$	$B(-1,5,-3)$	$C(-1,1,\alpha)$

$$AC^2=(-1-3)^2+(1-1)^2+(\alpha+3)^2$$

$$AC^2=16+(\alpha+3)^2$$

$$BC^2=(-1+1)^2+(1-5)^2+(\alpha+3)^2$$

$$BC^2=16+(\alpha+3)^2$$

نلاحظ أنَّه أياً كانت قيمة α فإنَّ

$$AC^2=BC^2 \Longrightarrow AC=BC$$

وبالتالي المثلث ABC متساوي الساقين رأسه C.

$$AB^2=(3+1)^2+(1-5)^2+(-3+3)^2=32$$

$$AB=4\sqrt{2}$$

وبالتالي يكون المثلث ABC متساوي الأضلاع إذا كان

$$AC=BC=AB=4\sqrt{2}$$

$$16+(\alpha+3)^2=32 \Rightarrow \alpha+3=\pm\sqrt{16}$$

ويكون المثلث متساوي الأضلاع إذا كانت $\alpha=1$ أو $\alpha=-7$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الثامنة عشر: (صفحة 42)

تتأمل النقطتين $A(2,1,0)$ و $B(-1,4,2)$.

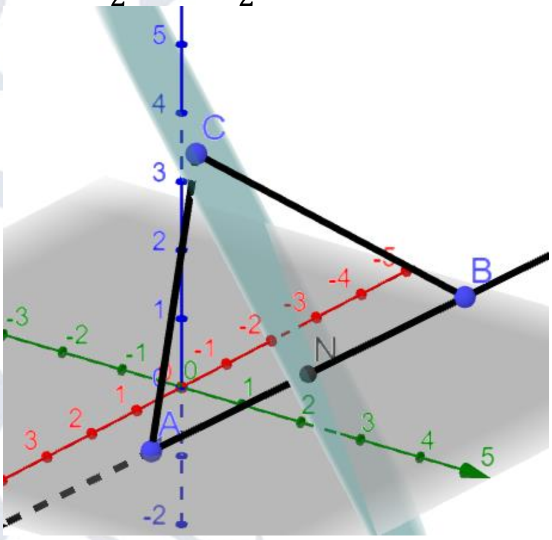
الطلب الأول: أوجد نقطة متساوية البعد عن A و B.

$N(x_N, y_N, z_N)$ منتصف $[AB]$

N منتصف $[AB]$ فهي متساوية البعد عن A و B

$A(2,1,0)$	$B(-1,4,2)$	$N(x_N, y_N, z_N)$

$$\left.\begin{aligned} x_N &= \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \\ y_N &= \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+4}{2} = \frac{5}{2} \\ z_N &= \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow N\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right)$$



الرسم هنا غير ضروري

الطلب الثاني: أوجد العدد الحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A و B.

C متساوية البعد عن A و B أي $|AC| = |BC|$

$A(2,1,0)$	$B(-1,4,2)$	$C(1,1,\lambda)$

$$AC^2 = BC^2$$

$$(1-2)^2 + (1-1)^2 + (\lambda - 0)^2$$

$$= (1+1)^2 + (1-4)^2 + (\lambda - 2)^2$$

$$\Longrightarrow 1 + \lambda^2 = 4 + 9 + \lambda^2 - 4\lambda + 4$$

$$\Longrightarrow 4\lambda = 16 \Longrightarrow \boxed{\lambda = 4}$$

الطلب الثالث: أثبت أنَّ $M(x,y,z)$ نقطة من المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ ، إذا وفقط إذا تحقق الشرط $3x - 3y - 2z + 8 = 0$

M متساوية البعد عن A و B أي $|MA| = |MB|$

$A(2,1,0)$	$B(-1,4,2)$	$M(x,y,z)$

$$MA^2 = MB^2$$

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2$$

$$= (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2$$

$$= x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 4z + 4$$

$$\Longrightarrow 6x - 6y - 4z + 16 = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{3x - 3y - 2z + 8 = 0}$$

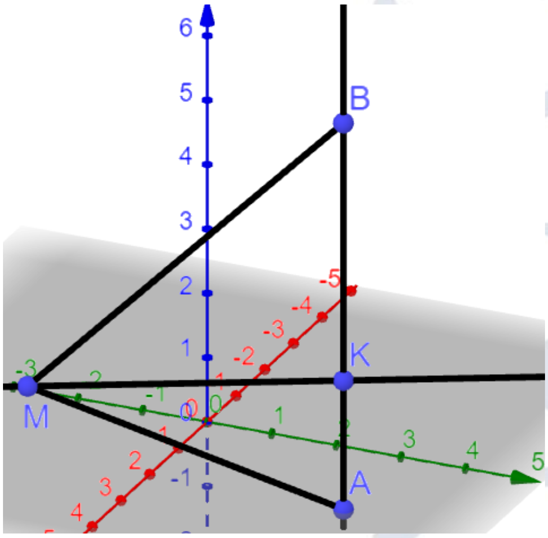
وهي معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$، كل نقطة منه متساوية البعد عن A و B.

المسألة التاسعة عشر: (صفحة 42)

تتأمل النقاط $A(2,3,0)$ و $B(2,3,6)$ و $M(4,-1,2)$ نهدف إلى حساب بعد M عن المستقيم (AB).

الطلب الأول: أثبت أنّ M لا تقع على المستقيم (AB).

إثبات عدم الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AB}$



الرسم هنا غير ضروري

إذا لم يكن الشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطين خطياً فالنقطة M لاتقع على (AB).

$A(2,3,0)$	$B(2,3,6)$	$M(4,-1,2)$

$$\overrightarrow{AB} = (2-2, 3-3, 6-0) = (0,0,6)$$

$$\overrightarrow{MA} = (2-4, 3+1, 0-2) = (-2,4,-2)$$

$$\frac{0}{-2}, \frac{0}{4} \neq \frac{6}{-2}$$

فالشعاعان $\overrightarrow{MA}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطياً لعدم تناسب مركباتهما.

الطلب الثاني: اثبت أن لكل نقطة K من المستقيم (AB) إحداثيات من النمط $(2,3,z)$.

K من المستقيم (AB) فـ $\overrightarrow{KA}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان

إذا كان K من المستقيم (AB) فإن $\overrightarrow{KA}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطان خطياً.

$$\overrightarrow{KA} = \alpha\, \overrightarrow{AB}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$A(2,3,0)$	$B(2,3,6)$	$K(x,y,z)$

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

$$\overrightarrow{KA} = (2-x, 3-y, -z)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0,0,6)$$
$$(2-x, 3-y, -z) = \alpha(0,0,6)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2-x=0 \Longrightarrow x=2 \\ 3-y=0 \Longrightarrow y=3 \\ -z=6\alpha \Longrightarrow z=-6\alpha \end{cases} \Rightarrow K(2,3,z)$$

الطلب الثالث: احسب MK^2 بدلالة z.

$M(4,-1,2)$	$K(2,3,z)$

$$MK^2 = (2-4)^2 + (3+1)^2 + (z-2)^2$$
$$MK^2 = 4 + 16 + (z-2)^2 = 20 + (z-2)^2$$

الطلب الرابع: عند أية قيمة للعدد z يكون MK أصغر ما يمكن؟ حدد إذاً بعد M عن (AB).

يكون المقدار الموجب أصغر ما يمكن إذا كان مساوياً للصفر

$$MK = \underbrace{\sqrt{20+(z-2)^2}}_{\text{المسافة مقدار موجب}}$$

يكون MK أصغر ما يمكن إذا كان $(z-2)^2$ أصغر ما يمكن، أي عندما

$$(z-2)^2 = 0 \Longrightarrow z = 2$$

وعندها يكون

$$MK = \sqrt{20+(z-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

// يمكن التأكد أنَّ $\overrightarrow{MK}$ عمود على $\overrightarrow{AB}$ بالتأكد من أنَّ الجداء السلمي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK} = 0$:

$$\overrightarrow{MK} = (2,-4,0), \qquad \overrightarrow{AB} = (0,0,6)$$
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MK} = 0\times 2 + 0\times -4 + 6\times 0 = 0$$

المسألة العشرون: (صفحة 42)

--المسافات وحجم الهرم--

m و n عددان حقيقيان موجبان يحققان $0 < m < n$. نتأمل النقاط $A(\sqrt{3},3,0)$ و $B(0,6,0)$ و $M(0,6,m)$ و $N(0,0,n)$ في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. عين m و n ليكون المثلث MAN قائماً في A وحجم المجسم $AOBMN$ يساوي $5\sqrt{3}$.

$$\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0$$

حجم الهرم $V = \frac{1}{3}S \times h$

مساحة شبه المنحرف $S = \frac{\text{الارتفاع} \times \text{مجموع القاعدتين}}{2}$

المثلث MAN قائماً في A أي $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ أي

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = 0$$

$A(\sqrt{3},3,0)$	$M(0,6,m)$	$N(0,0,n)$

$$\overrightarrow{AN} = (0-\sqrt{3}, 0-3, n-0) = (-\sqrt{3},-3,n)$$
$$\overrightarrow{AM} = (0-\sqrt{3}, 6-3, m-0) = (-\sqrt{3},3,m)$$
$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AM} = (-\sqrt{3}\times -\sqrt{3}) + (-3\times 3) + m.n = 0$$
$$0 = 3 - 9 + m.n \Rightarrow \boxed{m.n = 6} \quad (*)$$

الهرم $AOBMN$ رأسه A وقاعدته شبه المنحرف $ONMB$ وارتفاعه h هو بعد A عن القاعدة يساوي $h = x_A = \sqrt{3}$.

مساحة شبه المنحرف $ONMB$

$$S = \frac{1}{2}\left(\left(\underbrace{BM}_{z_M} + \underbrace{ON}_{z_N}\right) \times \underbrace{OB}_{y_B}\right) = \frac{1}{2}(m+n)\times 6 = 3(m+n)$$

حجم الهرم

$$V = \frac{1}{3}S.h = \frac{1}{3}3(m+n).\sqrt{3} = \sqrt{3}(m+n)$$

من الفرض لدينا

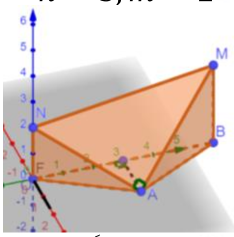
$$V = 5\sqrt{3}$$
$$\Longrightarrow \sqrt{3}(m+n) = 5\sqrt{3} \Longrightarrow \boxed{m+n=5} \quad (**)$$

بحل $(*)$ و $(**)$ حلاً مشتركاً نجد:

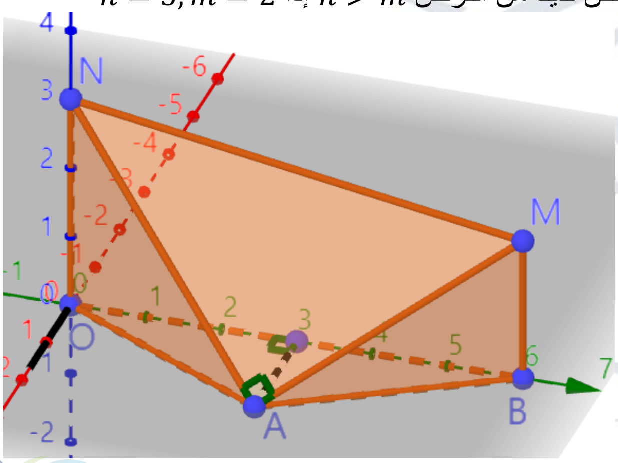
$$m = 5-n \Rightarrow n(5-n) = 6 \Rightarrow$$
$$n^2 - 5n + 6 = 0 \Longrightarrow n = 2 \text{ أو } n = 3$$

ومنه يكون لدينا حلان ممكنان

$$\begin{cases} n=2, m=3 \\ n=3, m=2 \end{cases}$$



لكن لدينا من الفرض $n > m$ إذاً $n = 3, m = 2$

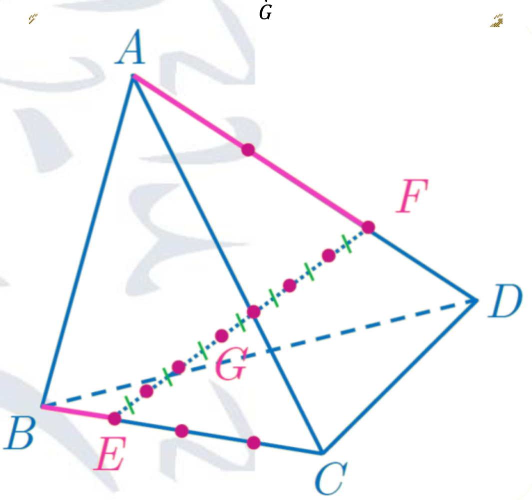


+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الواحدة والعشرون: (صفحة 43)

تتأمل رباعي وجوه $ABCD$، ونقطتين E و F معرفتين وفق $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. أثبت أنَّ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ يقع على $[EF]$. ثم عين النقطة G على $[EF]$.

$$\underbrace{\underbrace{(C,1),(B,3)}\,,\,\underbrace{(A,1),(D,2)}}_{G}$$



إنَّ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$ وليكن I يحقق:

$$3\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$$
$$3\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$4\,\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}\Longrightarrow -4\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{BC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{BI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

ومن الفرض لدينا

$$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

ومنه I هي E أي E هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,3)$ و $(C,1)$ مثقّلة بـ 4 أي $(E,4)$.

إنَّ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(A,1)$ وليكن J يحقق:

$$2\,\overrightarrow{JD}+\overrightarrow{JA}=\vec{0}$$
$$2\,\overrightarrow{JA}+2\,\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{JA}=\vec{0}$$
$$3\,\overrightarrow{JA}+2\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Longrightarrow -3\overrightarrow{AJ}+2\overrightarrow{AD}=\vec{0}\Longrightarrow$$
$$\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

ومن الفرض لدينا

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

ومنه J هي F أي F هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,2)$ و $(A,1)$ مثقّلة بـ 3 أي $(F,3)$.

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B,3)$ و $(C,1)$ و $(D,2)$ و $(A,1)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(E,4)$ و $(F,3)$، وبالتالي فهو يقع على EF، وتحديداً في نقطة G من EF تحقق:

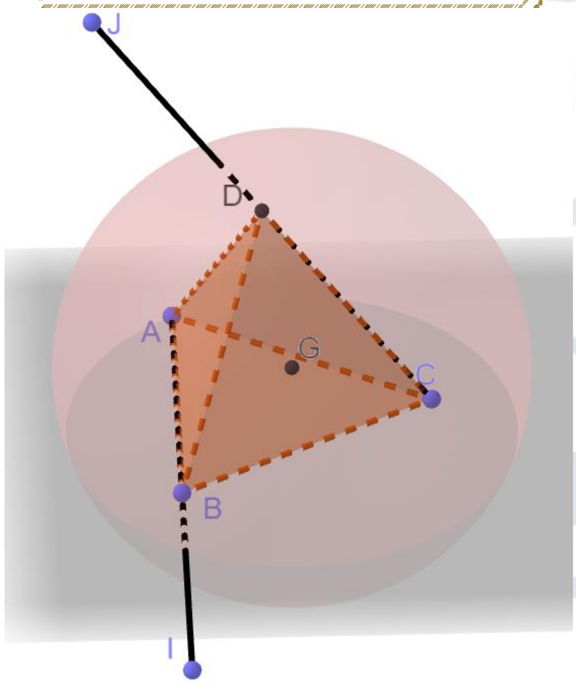
$$4\,\overrightarrow{GE}+3\,\overrightarrow{GF}=\vec{0}$$
$$4\,\overrightarrow{GE}+3\,\overrightarrow{GE}+3\,\overrightarrow{EF}=\vec{0}$$
$$7\,\overrightarrow{GE}+3\,\overrightarrow{EF}=\vec{0}\Longrightarrow -7\,\overrightarrow{EG}+3\,\overrightarrow{EF}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\,\overrightarrow{EF}$$

المسألة الثانية والعشرون: (صفحة 43)

تتأمل رباعي وجوه $ABCD$، ونقطتين I و J معرفتين وفق $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$.

الطلب الأول: أيمكن أن تنطبق إحدى النقطتين I و J على الأخرى؟

مستقيمان متخالفان لا يمكن أن يتلاقيان



$$\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$$
$$\overrightarrow{IA}=2\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AB}\right)\Longrightarrow\overrightarrow{AI}=2\overrightarrow{AB}$$

فالنقطة I واقعة على المستقيم (AB).

$$\overrightarrow{JC}=2\overrightarrow{JD}$$
$$\overrightarrow{JC}=2\left(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD}\right)\Longrightarrow\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{CD}$$

فالنقطة J واقعة على المستقيم (CD).

وبما أنَّ المستقيمين (AB) و (CD) متخالفان فلا يمكن أن تنطبق I على J.

الطلب الثاني: أثبت أنَّه أياً كانت النقطة M من الفراغ، كان:

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$ و $\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD}=-\overrightarrow{MJ}$

ننطلق من العلاقة المعطاة وندخل M

$$\underbrace{\overrightarrow{IA}}_{\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}}=2\underbrace{\overrightarrow{IB}}_{\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}}$$
$$\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}=2\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MI}$$
$$\boxed{\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}}$$

نور أشقر +963943608577 برلنت مطيط +963941114148 berlantcommunication@gmail.com

$$\underbrace{\overrightarrow{JC}}_{\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MJ}} = 2\underbrace{\overrightarrow{JD}}_{\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MJ}}$$

$$\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MJ} = 2\overrightarrow{MD}-2\overrightarrow{MJ}$$

$$\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MJ}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MD} = -\overrightarrow{MJ}}$$

الطلب الثالث: جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

G مركز ثقل المثلث BCD

لدينا

$$\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

حيث G مركز ثقل المثلث BCD.

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}$$
$$= 3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$$
$$= 3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{GA}$$

وبالتالي تؤول المساواة المفروضة إلى:

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{GA}\| \Longrightarrow \|\overrightarrow{MG}\|^2 = \|\overrightarrow{GA}\|^2$$

$$MG^2 = GA^2 \Longrightarrow MG = MA$$

وبما أنَّ AG ثابت لثبوت A و G (مركز ثقل المثلث BDC)، فإنَّ مجموعة النقاط M هي كرة مركزها G ونصف قطرها AG.

<u>المسألة الثالثة والعشرون:</u> (صفحة 43)

لدينا في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ النقطتان $A(2,-1,2)$ و $B(-2,1,-2)$. نقرن بكل نقطة $M(x,y,z)$ من الفراغ المقدار

$$f(M) = MA^2+MB^2$$

الطلب الأول: احسب $f(M)$ بدلالة x,y,z.

$A(2,-1,2)$	$B(-2,1,-2)$	$M(x,y,z)$

$$MA^2 = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$$

$$MB^2 = (x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$

$$f(M) = MA^2+MB^2$$

$$f(M) = (x-2)^2+(y+1)^2+(z-2)^2$$
$$+(x+2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2$$
$$= 2x^2+8+2y^2+2+2z^2+8$$

$$\boxed{f(M) = 2x^2+2y^2+2z^2+18}$$

الطلب الثاني: أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = 18$ مؤلفة من نقطة واحدة.

مجموع أعداد موجبة يساوي الصفر اذا كان كلاً منهم مساوياً للصفر

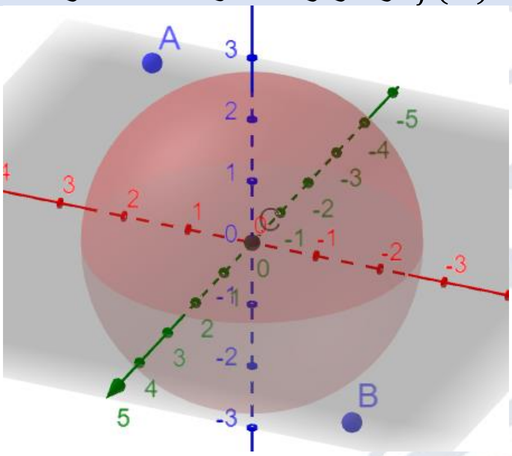
$$f(M) = 18$$

$$2x^2+2y^2+2z^2+18 = 18$$

$$\Longrightarrow x^2+y^2+z^2 = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0$$

ومنه مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = 18$ هي النقطة الوحيدة $O(0,0,0)$.

الطلب الثالث: أثبت أنَّ مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = 30$ كرة مركزها O. أوجد نصف قطرها.



$$f(M) = 30$$

$$2x^2+2y^2+2z^2+18 = 30$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{OM^2} = 6$$

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 = 6 \Longrightarrow \|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{6}$$

ومجموعة النقاط هي كرة مركزها O ونصف قطرها $\sqrt{6}$.

الطلب الرابع: أثبت أنَّه، وفق شرط على العدد الحقيقي k، مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة $f(M) = k$ هي كرة مركزها O.

$$f(M) = k$$

$$2x^2+2y^2+2z^2+18 = k$$

$$x^2+y^2+z^2 = \frac{k-18}{2}$$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{\text{موجب}} = \underbrace{\frac{k}{2}-9}$$

الطرف الأول موجب، لذا تكون المعادلة محققة في حال

$$\frac{k}{2}-9 \geq 0 \Longrightarrow k \geq 18$$

وتكون مجموعة النقاط M في هذه الحالة كرة مركزها O ونصف قطرها

$$r = \sqrt{\frac{k}{2}-9}$$

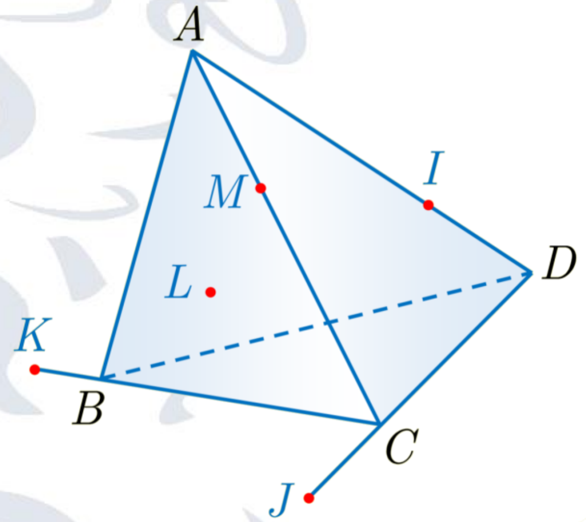
ومستحيلة في حال $\frac{k}{2}-9 < 0$ أي $k < 18$.

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

المسألة الرابعة والعشرون: (صفحة 43)

نتأمل رباعي وجوه $ABCD$.

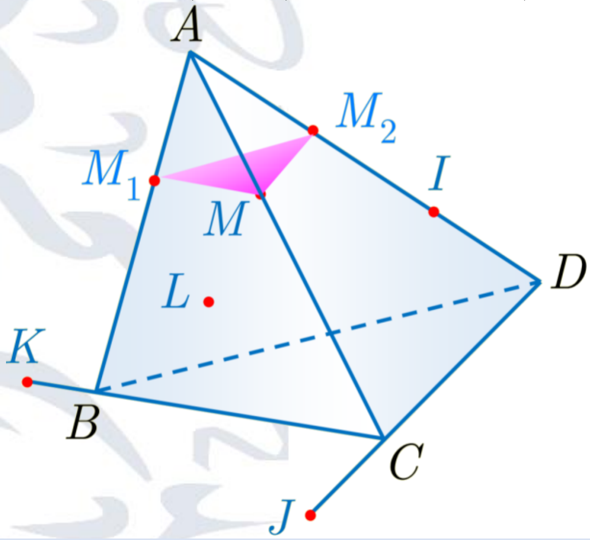
الطلب الأول: M نقطة من الحرف $[AC]$. جد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار بالنقطة M موازياً للمستوي (BCD).



نرسم من M في المستوي ACB موازياً لـ (CB) يقطع AB في نقطة ولتكن M_1.

نرسم من M في المستوي ACD موازياً لـ (CD) يقطع AD في نقطة ولتكن M_2.

فيكون المستوي (M_1M_2M) هو مقطع رباعي الوجوه بالمستوي المار من M والموازي للمستوي (BCD).



الطلب الثاني: I نقطة من الحرف $[AD]$، و J نقطة من المستقيم (CD)، و K نقطة من المستقيم (BC). عين مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK).

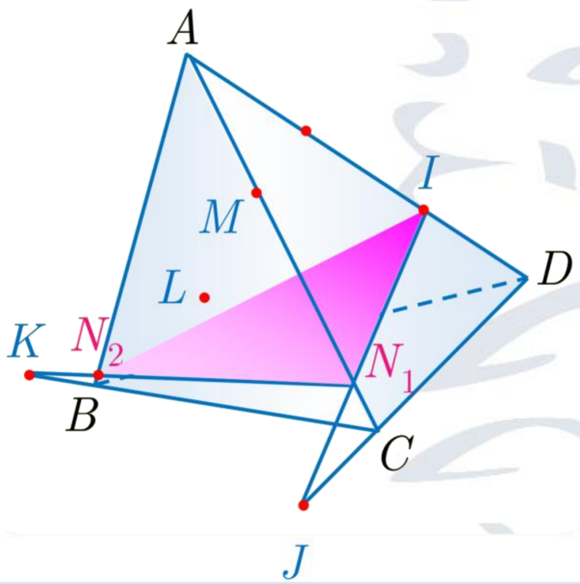
عين الفصل المشترك للمستوي مع وجهين لرباعي الوجوه، ثم ضع نقاط التقاطع

I تنتمي للمستقيم (AD) المحتوى في المستوي (ACD) و J تنتمي للمستقيم (DC) المحتوى في المستوي (ACD) إذاً (IJ) واقع في المستوي (ACD)

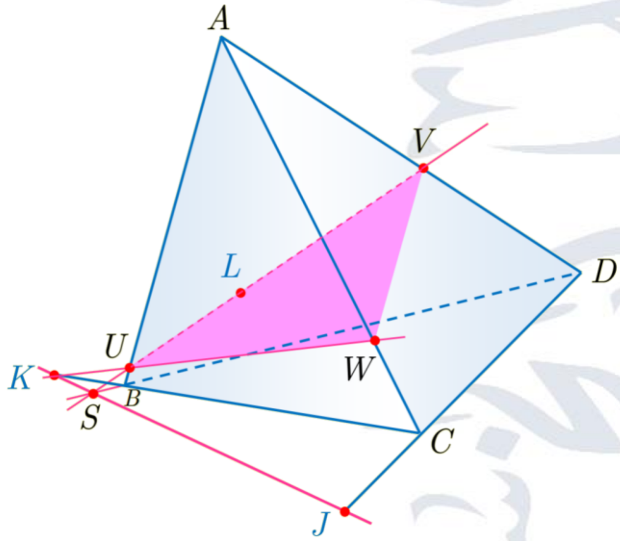
(IJ) ينتمي للمستوي (ACD)	و (IJ) ينتمي للمستوي (IJK) وضوحاً
إذاً (IJ) هو الفصل المشترك للمستويين (ACD) و (IJK)	
و (IJ) يقطع (AC) في نقطة ولتكن N_1.	

نجد أيضاً بطريقة مماثلة أنَّ (KN_1) هو الفصل المشترك للمستويين (ABC) و (IJK)، وأنه يقطع (AB) في نقطة ولتكن N_2.

وهكذا يكون مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (IJK) هو المثلث N_2N_1I.



الطلب الثالث: L نقطة من المستوي (ABD)، أوجد مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL).



لتكن S نقطة تقاطع المستقيمين (BD) و (KJ) من المستوي (BCD).	
S تنتمي أيضاً إلى المستويين (KJL) و (ABD)	L نقطة من المستويين (KJL) (ABD)
(SL) هو الفصل المشترك للمستويين (KJL) و (ABD)	

(SL) يقطع (AB) و (AD) في نقطتين U و V على الترتيب

berlantcommunication@gmail.com برلنت مطيط +963941114148 نور أشقر +963943608577

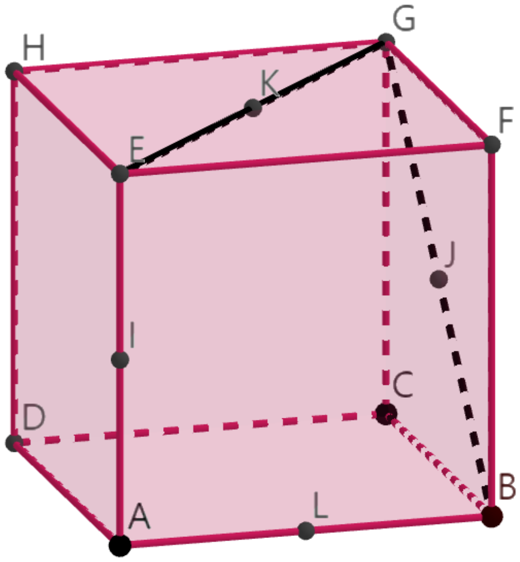
K تنتمي لـ(ABC) و(KJL)	U تنتمي لـ(ABC) و(KJL)
(KU) ينتمي لـ (ABC)	(KU) ينتمي لـ (KJL)
(KU) هو الفصل المشترك للمستويين (KJL) و(ABC)	
ويقطع (AC) في W	
مقطع رباعي الوجوه بالمستوي (KJL) هو المثلث UVW.	

المسألة الخامسة والعشرون: (صفحة 44)

تأمل مكعباً $ABCDEFGH$، والنقاط I وJ وK وL منتصفات $[AE]$ و$[BG]$ و$[EG]$ و$[AB]$ بالترتيب. والنقطة M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,1)$ و$(G,1)$ و$(E,1)$.

الطلب الأول: أثبت أنّ M تنتمي إلى $[IJ]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

$$\underbrace{\underbrace{(G,1),(B,1)},\underbrace{(A,1),(E,1)}}_{M}$$



مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,1),(B,1)$ هو منتصف GB أي في J وثقلها $2 = 1 + 1$ أي $(J,2)$.

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(E,1)$ هو منتصف AE أي في I وثقلها $2 = 1 + 1$ أي $(I,2)$.

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,1)$ و$(G,1)$ و$(E,1)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(J,2)$ و$(I,2)$ وهو منتصف القطعة $[IJ]$ لتساوي الثقلين في I وJ.

أي أنَّ M منصف $[IJ]$.

الطلب الأول: أثبت أنّ M تنتمي إلى $[KL]$ وعين موضعها على هذه القطعة.

$$\underbrace{\underbrace{(G,1),(E,1)},\underbrace{(A,1),(B,1)}}_{M}$$

مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(G,1),(E,1)$ هو منتصف GE أي في K وثقلها $2 = 1 + 1$ أي $(K,2)$.

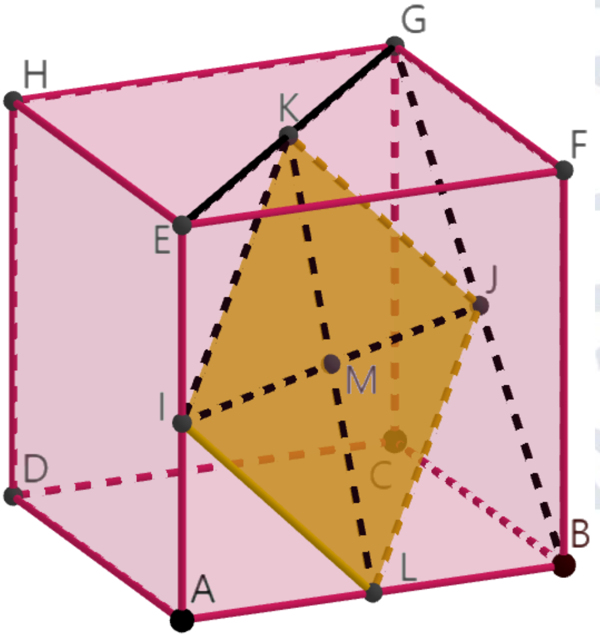
مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1),(B,1)$ هو منتصف AB أي في L وثقلها $2 = 1 + 1$ أي $(L,2)$.

مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و$(B,1)$ و$(G,1)$ و$(E,1)$ هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(K,2)$ و$(L,2)$ وهو منتصف القطعة $[KL]$ لتساوي الثقلين في K وL.

أي أنَّ M منصف $[KL]$.

الطلب الثالث: استنتج أن النقاط I وJ وK وL تقع في مستو واحد وعين طبيعة الرباعي $ILJK$.

M مركز ثقل النقاط الأربع تقع منتصف $[IJ]$ و$[KL]$ ، أي أنّ المستقيمان (IJ) و(KL) متقاطعان فهما يشكلان مستوياً، والشكل $ILJK$ متوازي أضلاع لتناصف قطريه.



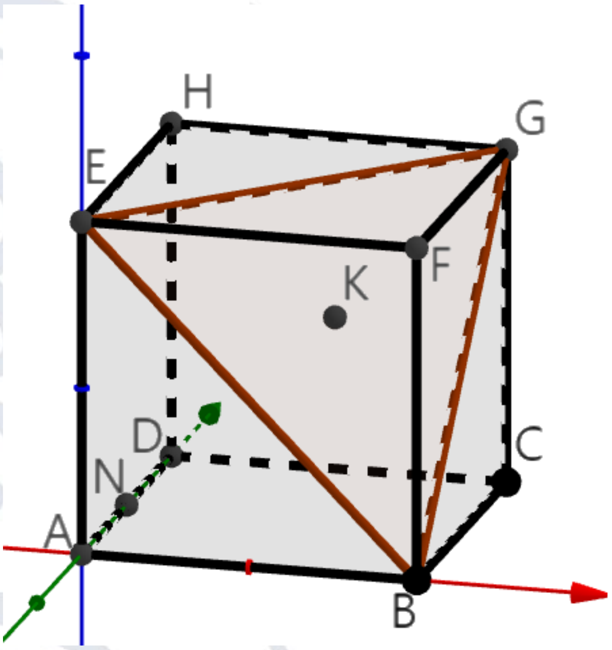
+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

قَالَ رَسُولُ اللهِ ﷺ : " إِنَّ اللهَ كَتَبَ الحَسَنَاتِ وَالسَّيِّئَاتِ ثُمَّ بَيَّنَ ذَلِكَ؛ فَمَنْ هَمَّ بِحَسَنَةٍ فَلَمْ يَعْمَلْهَا كَتَبَهَا اللهُ عِنْدَهُ حَسَنَةً كَامِلَةً، وَإِنْ هَمَّ بِهَا فَعَمِلَهَا كَتَبَهَا اللهُ عِنْدَهُ عَشْرَ حَسَنَاتٍ إِلَى سَبْعِمائَةِ ضِعْفٍ إِلَى أَضْعَافٍ كَثِيرَةٍ. وَإِنْ هَمَّ بِسَيِّئَةٍ فَلَمْ يَعْمَلْهَا كَتَبَهَا اللهُ عِنْدَهُ حَسَنَةً كَامِلَةً، وَإِنْ هَمَّ بِهَا فَعَمِلَهَا كَتَبَهَا اللهُ سَيِّئَةً وَاحِدَةً"

-- مسألة امتحانية --

$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه 2، $\left(A;\frac{1}{2}\overrightarrow{AB},\frac{1}{2}\overrightarrow{AD},\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$ معلم متجانس، K مركز ثقل المثلث EBG، المطلوب:

1) أثبت أنَّ النقاط D,K,F تقع على استقامة واحدة.
2) اكتب معادلة المستوي (EBG) ثم استنتج بعد النقطة F عن المستوي (EBG).
3) اكتب معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي EBG.
4) احسب حجم الهرم $BFGE$.
5) عين المسقط القائم للنقطة N منتصف $[AD]$ على المستوي (EBG).
6) اكتب معادلة المخروط الناتج عن دوران AF حول AE.



الحل:

قبل الحل

نكتب احداثيات رؤوس المكعب، والنقاط المذكورة K و N

$$A(0,0,0),B(2,0,0),C(2,2,0),D(0,2,0),$$
$$E(0,0,2),F(2,0,2),G(2,2,2),H(0,2,2)$$
$$N(0,1,0)$$

K مركز ثقل المثلث EBG، إذاً

$$K\left(\frac{x_E+x_B+x_G}{3},\frac{y_E+y_B+y_G}{3},\frac{z_E+z_B+z_G}{3}\right)$$
$$K\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$$

حل الطلب الأول:

حتى تكون النقاط D,K,F واقعة على استقامة واحدة، نثبت الارتباط الخطي للشعاعين $\overrightarrow{DF},\overrightarrow{DK}$

$$\overrightarrow{DF}(2,-2,2)$$
$$\overrightarrow{DK}\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$$

نلاحظ أنَّ:

$$\frac{2}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{-\frac{4}{3}}=\frac{2}{\frac{4}{3}}\Longrightarrow \text{المركبات متناسبة}$$

فالأشعة مرتبطة خطياً، والنقاط تقع على استقامة واحدة.

حل الطلب الثاني:

معادلة المستوي (EBG)

$$a(x-x_B)+b(y-y_B)+c(z-z_B)=0$$
$$a(x-2)+b(y-0)+c(z-0)=0$$

حيث نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (EBG)، عندئذٍ لإيجاده:

$\vec{n}(a,b,c)$	$\overrightarrow{EG}(2,2,0)$	$\overrightarrow{EB}(2,0,-2)$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{EB}\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{EB}=\vec{0}$$
$$\Longrightarrow 2a+2c=0\quad(1)$$
$$\vec{n}\perp\overrightarrow{EG}\Longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{EG}=\vec{0}$$
$$\Longrightarrow 2a+2b=0\quad(2)$$

معادلتين بثلاث مجاهيل، نفرض قيمة لأحدهم ونعوض

نفرض $\boxed{c=1}$، ونعوض في (1) نجد

$$\boxed{a=-1}$$

نعوض في (2) نجد:

$$\boxed{b=1}$$

وبالتالي تكون معادلة المستوي (EBG) حيث $\vec{n}(-1,1,1)$

$$-(x-2)+y+z=0$$
$$\boxed{-x+y+z+2=0}$$

بعد F عن المستوي (EBG)

$$dist\big(F,(EBG)\big)=\frac{|-x_F+y_F+z_F+2|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

حل الطلب الثالث:

معادلة الكرة التي مركزها F وتمس المستوي (EBG)

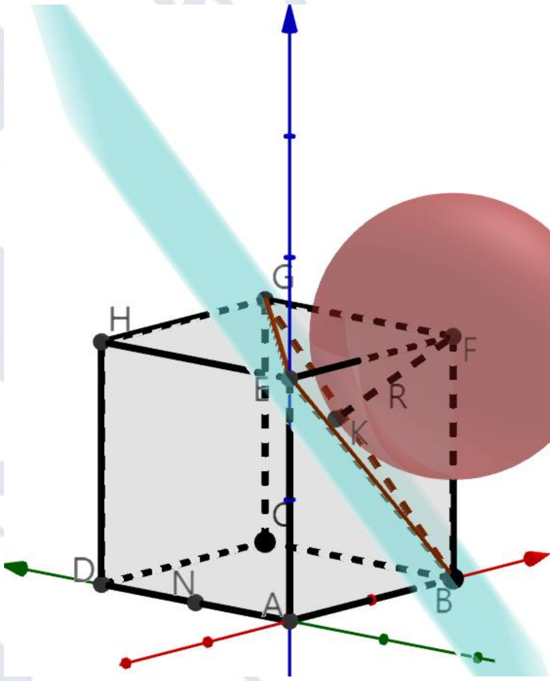
$$(x-x_F)^2+(y-y_F)^2+(z-z_F)^2=R^2$$

لنحسب R^2 (بما أنّ الكرة تمس المستوي (EBG) إذاً بعد F عن المستوي (EBG) يساوي R)

ومنه تصبح معادلة الكرة

$$(x-2)^2+(y-0)^2+(z-0)^2=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$$



حل الطلب الرابع:

حجم الهرم $BFGE$

$$V=\frac{1}{3}S_{\text{القاعدة}}\times \text{الارتفاع}$$

رأس الهرم هو F وقاعدته المثلث المتساوي الأضلاع EBG (أضلاعه عبارة عن أقطار وجوه المكعب)

$$h=\text{الارتفاع}=(EBG)\text{بعد } F \text{ عن المستوي}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$S_{\text{القاعدة}}=\frac{\sqrt{3}\,a^2}{4},\qquad a=|EB|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$$

$$S_{\text{القاعدة}}=2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}2\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3}\ \text{وحدة مكعبة}$$

حل الطلب الخامس:

N منتصف $[AD]$ ، ومنه$N(0,1,0)$

نفرض أنَّ M هي المسقط القائم لـ N على المستوي (EBG)

بما أنَّ

$$(EBG)\perp(MN)$$

إذاً شعاع توجيه المستقيم هو نفسه ناظم المستوي، أي

$$\vec{u}_{MN}=\vec{n}=(-1,1,1)$$

الخطوة الأولى: نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم (MN) حيث النقطة N معلومة، وشعاع التوجيه معلوم

$$(MN):\begin{cases}x=-t+0\\ y=t+1\ , & t\in\mathbb{R}\\ z=t+0\end{cases}$$

الخطوة الثانية: نعوض المعادلات الوسيطية لـ (MN) في معادلة المستوي (EBG)

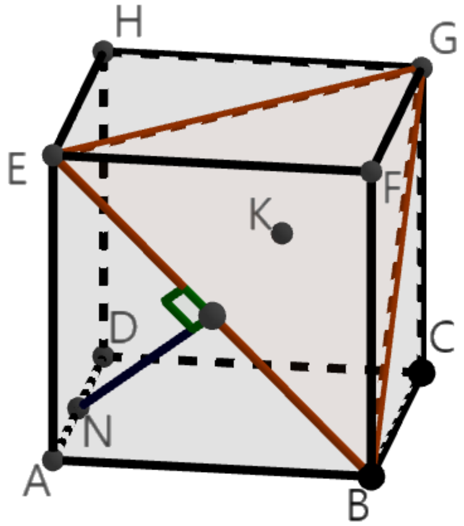
$$-(-t)+(t+1)+t+2=0$$

$$\Rightarrow t=-1$$

نعوض t بالمعادلات الوسيطية للحصول على احداثيات النقطة M من المستوي (EBG)

$$x=1,\qquad y=0,\qquad z=-1$$

$$\Rightarrow M(1,0,-1)$$



حل الطلب السادس:

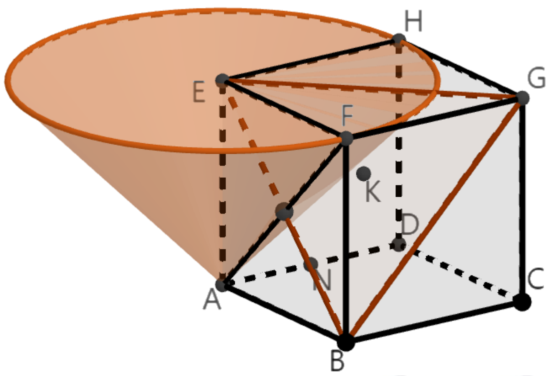
محور الدوران هو Oz ، والرأس $A(0,0,0)$، ومركز القاعدة $E(0,0,2)$، ونصف قطر القاعدة $r=EF$

$$\text{الارتفاع}=h=|z_A-z_E|=2$$

لحساب r

$$r=\sqrt{(x_F-x_E)^2+(y_F-y_E)^2+(z_F-z_E)^2}$$

$$r=\sqrt{4+0+0}=2$$



معادلة المخروط هي

$$x^2+y^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0,\qquad z_A\le z\le z_E$$

$$x^2+y^2-z^2=0,\qquad 0\le z\le 2$$

+963943608577 نور أشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

نلقاكم في القسم الثاني إن شاء الله

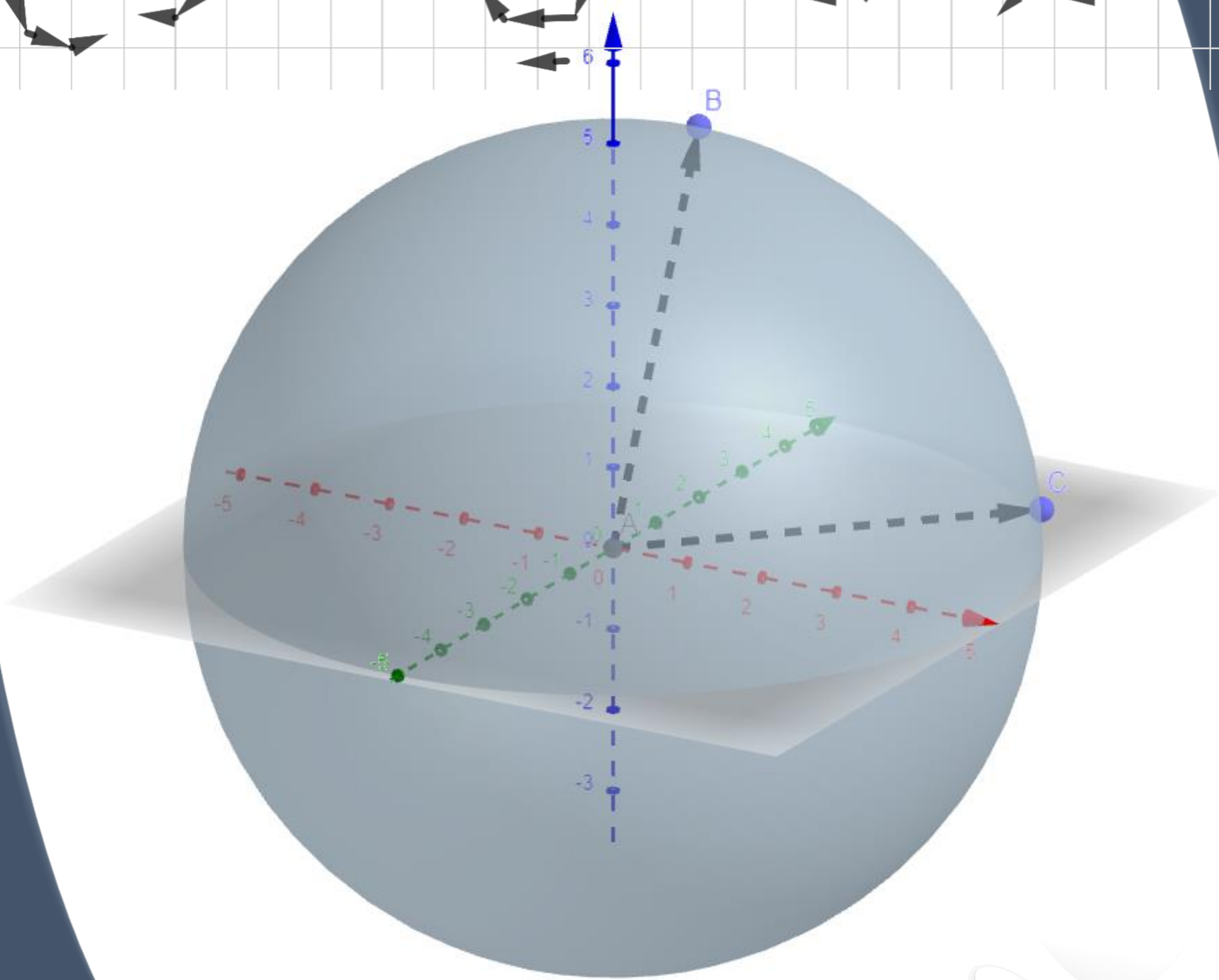
لتحميل القسم الثاني والثالث يرجى زيارة الموقع أدناه

https://sites.google.com/site/appmaths2020/

+963943608577 نورأشقر +963941114148 برلنت مطيط berlantcommunication@gmail.com

برلنت مطيط ونور أشقر

الأشعة في الفراغ



1444/4/13
2022/11/7