$= \left[x \cdot (-\cos x)\right]_0^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\pi}$

$= \left[\pi(-\cos\pi) - 0\right] + \left[\sin\pi - \sin 0\right]$

$= \pi$

نعوض:

$= \left[\pi^2 \cdot \sin\pi - 0\right] - 2\pi$

$\boxed{= -2\pi}$

3- $I_3 = \int_1^e x^0 \ln x \cdot d(x)$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x^0 \Rightarrow v = x$

$= \left[x \cdot \ln x\right]_1^e - \int_1^e 1 \cdot d(x)$

$= \left[x \ln x\right]_1^e - \left[x\right]_1^e$

$= \left[e \ln e - (1)\ln(1)\right] - \left[e - 1\right]$

$= \cancel{e} - \cancel{e} + 1 = \boxed{1}$

/ /

4- $I_4 = \int_1^e (x-1)\ln x \, d(x)$

$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x}$

$v' = x - 1 \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} - x$

$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} - 1\right) . d(x)$

$= \left[\left(\frac{x^2}{2} - x\right)\ln x\right]_1^e - \left[\frac{x^2}{4} - x\right]_1^e$

$= \left[\frac{e^2}{2} - e - 0\right] - \left[\frac{e^2}{4} - e - \frac{1}{4} + 1\right]$

$= \frac{e^2}{2} \cancel{- e} - \frac{e^2}{4} \cancel{+ e} + \frac{1}{4} - 1$

$= \boxed{\frac{e^2 - 3}{4}}$

5_ $I_5 = \int_0^1 (2x+1)e^{-x} . d(x)$

$u = 2x + 1 \Rightarrow u' = 2$

$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$

$= \left[(2x+1).(-e^{-x})\right]_0^1 + 2\int_0^1 e^{-x} . d(x)$

$$= \left[(2x+1)\cdot(-e^{-x})\right]_0^1 - 2\left[e^{-x}\right]_0^1$$

$$= \left[2(1)+1\,(-e^{-1}) - (1)(-e^{0})\right] - 2\left[e^{-1} - e^{0}\right]$$

$$= \left[\frac{-3}{e} + 1\right] - 2\left[\frac{1}{e} - 1\right]$$

$$= \frac{-3}{e} + 1 - \frac{2}{e} + 2 \Longrightarrow \boxed{\frac{-5}{e} + 3}$$

---

تمرين 18 ص 248 دورة 2025

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2}\, d(x)$$

$$J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, d(x)$$

1- أوجد $J$

2- أوجد $I+J$

3- أوجد $I$

الحل:

1- $J = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2}\, d(x)$

$$= \frac{1}{2}\left[\ln|1+x^2|\right]_0^1$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\ln 2}$$

2- $I + J = \int_0^1 \frac{x^3 + x}{1 + x^2} \cdot d(x)$

$I + J = \int_0^1 \frac{x \cdot \cancel{(1 + x^2)}}{\cancel{1 + x^2}} \cdot d(x)$

$I + J = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1$

$I + J = \left[ \frac{1}{2} - 0 \right] = \boxed{\frac{1}{2}}$

3- $I + J = \frac{1}{2}$

$I = \frac{1}{2} - J$

$I = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

$$\boxed{I = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}}$$

* تمرين : دورة 2025

$$\int_0^{\ln 2} e^x (1 - e^x) \, d(x)$$

$$= \int_0^{\ln 2} (e^x - e^{2x}) \, d(x)$$

$$= \left[ e^x - \frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \left[ e^{\ln 2} - \frac{1}{2} e^{2(\ln 2)} \right] - \left[ e^0 - \frac{1}{2} e^{2(0)} \right]$$

$$= 2 - \frac{1}{2}(4) - 1 + \frac{1}{2}(1)$$

$$= \cancel{2} - \cancel{2} - 1 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

---

$$\int_0^{\ln 2} (e^x - 1) \, d(x)$$

$$= \left[ e^x - x \right]_0^{\ln 2}$$

$$= \left[ e^{\ln 2} - \ln 2 \right] - \left[ e^0 - 0 \right]$$

$$= 2 - \ln 2 - 1 = \boxed{1 - \ln 2}$$

/ /

* تمرين : ليكن

$$I = \int_0^{\ln 2} \frac{2}{e^x + 2} \cdot d(x)$$

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 2} \cdot d(x)$$

1 ـ أوجد $J$

2 ـ أوجد $I + J$

3 ـ أوجد $I$

الحل :

1 - $J = \left[ \ln |e^x + 2| \right]_0^{\ln 2}$

$$J = \left[ \ln (\cancel{e}^{\cancel{\ln} 2} + 2) \right] - \ln (e^0 + 2)$$

$$= \ln 4 - \ln 3 = \boxed{\ln \frac{4}{3}}$$

2 - $I + J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x + 2}{e^x + 2} \cdot d(x)$

$$I + J = \int_0^{\ln 2} 1 \cdot d(x)$$

$$I + J = \left[ x \right]_0^{\ln 2} = \boxed{\ln 2}$$

3- $I + J = \ln \frac{4}{3}$

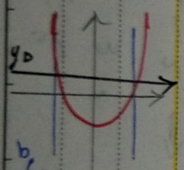
$I = \ln \frac{4}{3} - \ln 2 \Rightarrow I = \ln \frac{4}{6} = \boxed{\ln \frac{2}{3}}$

# - مساحة السطح -

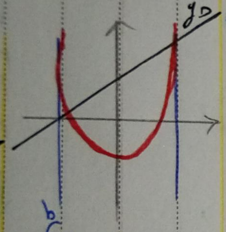
$$S = \int_a^b (\text{فوق} - \text{تحت})\, d(x)$$

S مساحة السطح المحصور بين (C) والمستقيم $y_0 = \ldots$ والمستقيمين

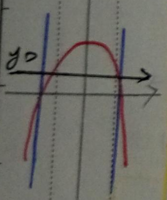
$x = b$ $\quad$ $x = a$



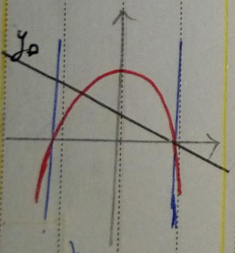

$S = \int_a^b (y_0 - f(x))\, d(x)$




$S = \int_a^b (y_0 - f(x)\, .\, d(x)$

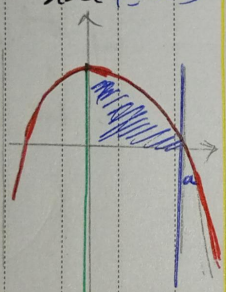



$S = \int_a^b (f(x) - y_0)\, d(x)$




$S = \int_a^b (f(x) - y_0)\, d(x)$

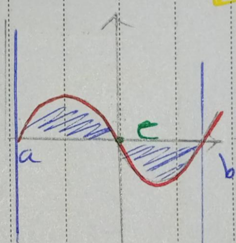
بين (C) ومحور الفواصل والتراتيب والمستقيم $x = a$




$S = \int_a^b + f(x)\, .\, d(x)$

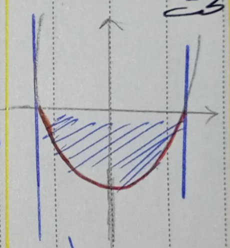
S مساحة السطح المحصور بين (C) ومحور الفواصل والمستقيمين.

$x = b$ و $x = a$



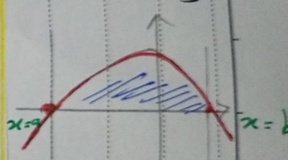

$S = \int_a^c + f(x)\, d(x) + \int_c^b - f(x)\, d(x)$

تحت



$S = \int_a^b - f(x)\, .\, d(x)$

فوق




$S = \int_a^b + f(x)\, d(x)$

* أمثلة:

ليكن لدينا $f$ التابع المعرف على $R$ وفق

$f(x) = x^2 - 4$

1- ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها وارسم $C$

2- $S$ مساحة السطح المحصور بين $C$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 3$ ، $x = 4$

3- $S$ مساحة السطح المحصور بين $C$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 2$

4- $S$ مساحة السطح المحصور بين $C$ ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ ، $x = 3$

5- $S$ مساحة السطح المحصور بين $C$ ومحور التراتيب و $y = 5$ و $x = 2$

الحل:

1- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

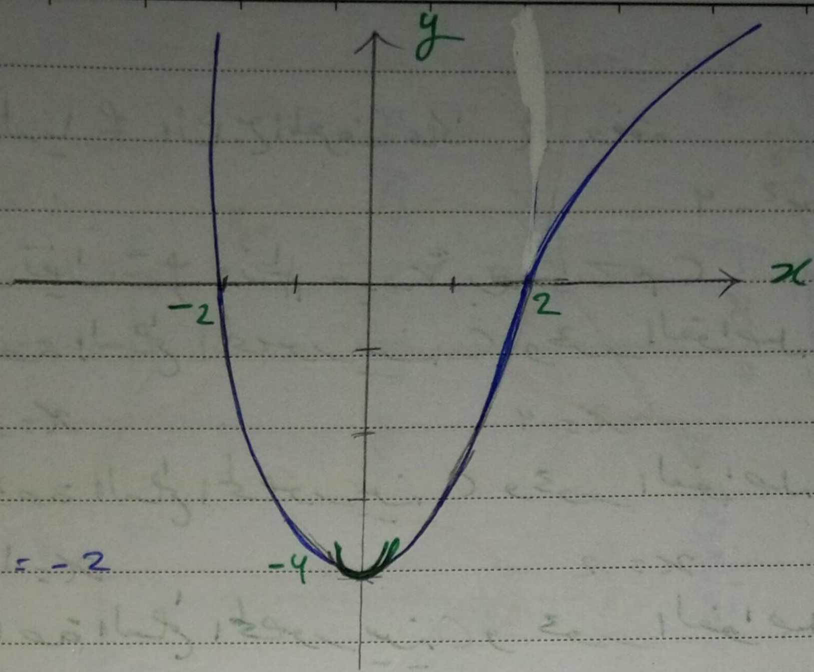
$f$ معرف واشتقاقي على $R$

$f'(x) = 2x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = -4$

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $-4$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |



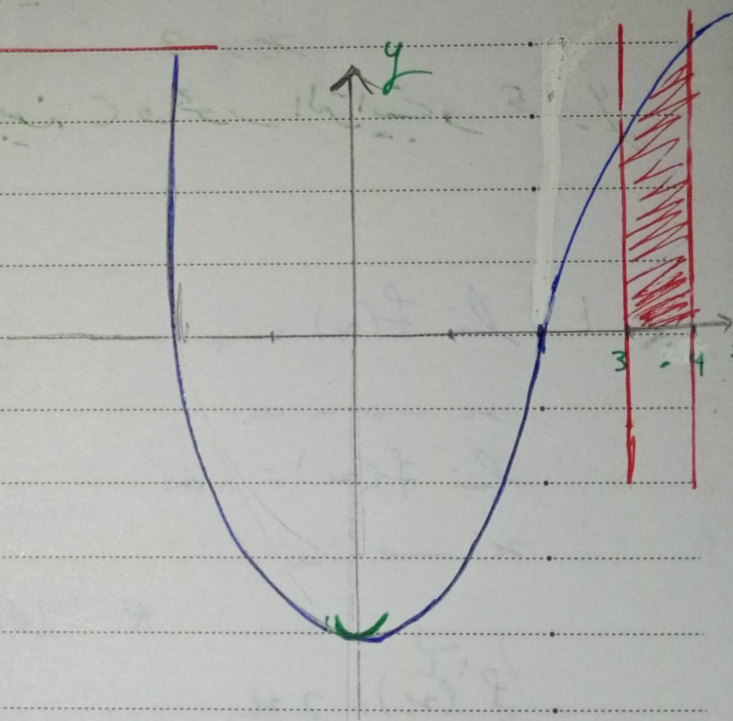

$f(x) = 0$

$x^2 - 4 = 0$

$x^2 = 4$

$x = 2 \qquad x = -2$

2- $S = \int + f(x) \, . \, d(x)$




$= \int_3^4 (x^2 - 4) \, . \, d(x)$

$= \left[ \frac{x^3}{3} - 4x \right]_3^4$

$= \left[ \frac{64}{3} - 16 \right] - \left[ \frac{27}{3} - 12 \right]$

$= \frac{64}{3} - 16 - \frac{27}{3} - 12$

$= \frac{37}{3} - 18 = \frac{37 - 54}{3} = \boxed{\frac{-17}{3}}$

3- $S = \int_{1}^{2} -f(x)\,d(x)$

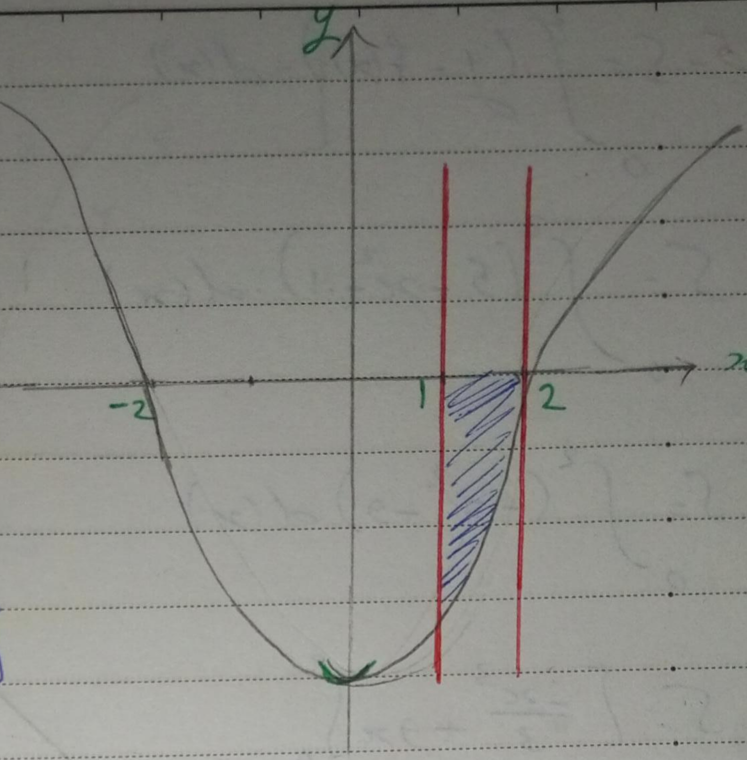
$$S = \int_{1}^{2} (-x^2+4)\,d(x)$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{1}^{2}$$

$$= \left[-\frac{8}{3} + 8\right] - \left[-\frac{1}{3} + 4\right]$$

$$= -\frac{8}{3} + 8 + \frac{1}{3} - 4$$

$$= -\frac{7}{3} + 4 = \frac{-7+12}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

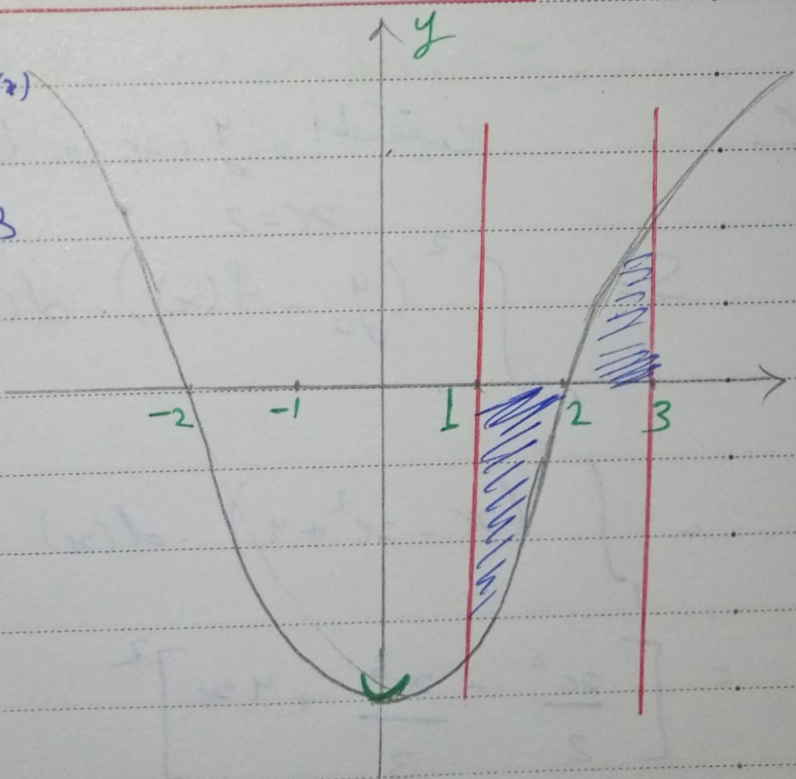



4- $S = \int_{1}^{2} -f(x)\,d(x) + \int_{2}^{3} f(x)\,d(x)$

$$S = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{1}^{2} + \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}$$

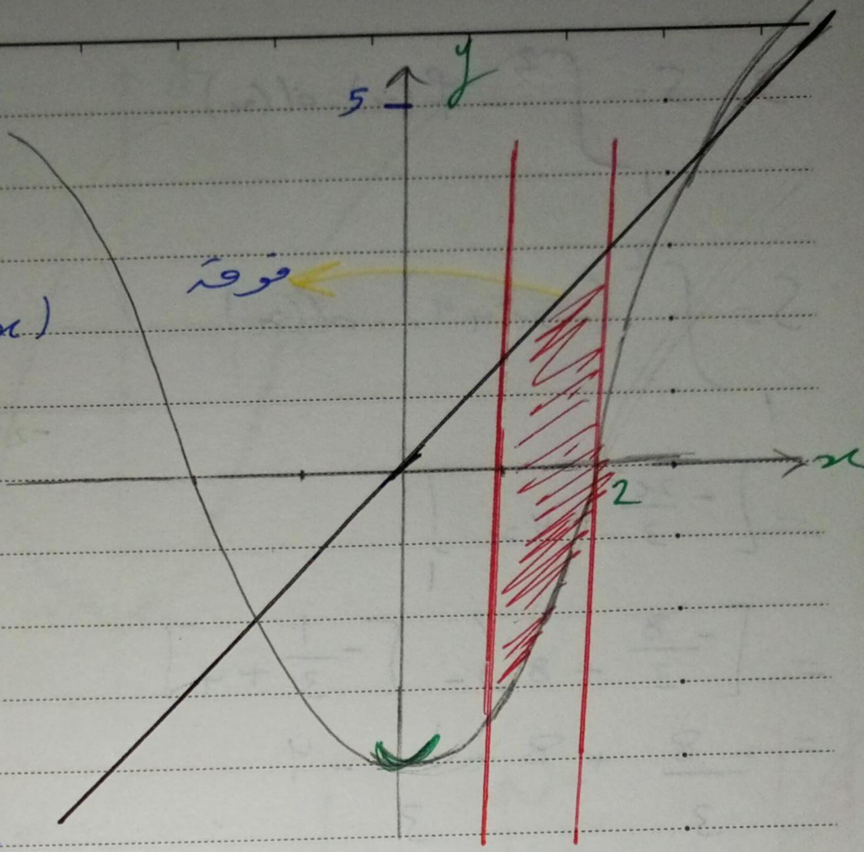
$$S = \left[\frac{5}{3}\right] + \left[\frac{7}{3}\right]$$

$$S = \boxed{\frac{12}{3}}$$



5- $S = \int_0^2 (y - f(x))\, d(x)$

$S = \int_0^2 (5 - x^2 + 4) \cdot d(x)$




$S = \int_0^2 (-x^2 + 9)\, d(x)$

$S = \left[ \frac{-x^3}{3} + 9x \right]_0^2$

$S = \left[ -\frac{8}{3} + 18 \right] - [0]$

$S = \frac{-8 + 54}{3} = \boxed{\frac{46}{3}}$

6- مساحة السطح بين $C$ و $y = x$ و المستقيمين

$x = 2$ $\qquad$ $x = 1$

$S = \int_1^2 (y_0 - f(x)) \cdot d(x)$

$= \int_1^2 (x - x^2 + 4) \cdot d(x)$

$= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 4x \right]_1^2$

$$= \left[ 2 - \frac{8}{3} + 8 \right] - \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 4 \right]$$

$$= \frac{-8}{3} + 6 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 4$$

$$= -\frac{7}{3} - \frac{1}{2} + 2$$

$\times 2 \qquad \times 3$

$$= \frac{-14 - 3 + 12}{6} = \boxed{\frac{-5}{6}}$$

* حساب الحجم :

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \cdot d(x)$$

* تمرين : احسب حجم الجسم الناتج عند دوران الخط البياني للتابع

$$f(x) = x\sqrt{x(1-x)}$$

دورة كاملة حول محور الفواصل على مجاله $[0,1]$

$$V = \pi \int_0^1 x^2 [x(1-x)] \cdot d(x)$$

$$= \pi \int_0^1 x^3 - x^4 \cdot d(x)$$

$$= \pi \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1$$

/ /

1- احسب حجم الجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{x}}}$$

دورة كاملة حول محور الفواصل على المجال [0,1]

$$V = \pi \int_0^1 (f(x))^2 \cdot d(x)$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1}{1+e^{x}} \cdot d(x)$$

$$= \pi \int_0^1 \frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}} \cdot d(x)$$

$$= \pi \int_0^1 \left( \frac{1+e^{x}}{1+e^{x}} - \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \right) d(x)$$

$$= \pi \int_0^1 \left( 1 - \frac{e^{x}}{1+e^{x}} \right) \cdot d(x)$$

$$= \pi \left[ x - \ln|1+e^{x}| \right]_0^1$$

1- احسب مساحة المنطقة المحصورة بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x=a$

لإيجاد قيمة $x=b$ نحل المعادلة $f(x)=0$

2- احسب مساحة المنطقة المحصورة بين C والمستقيم $y=\square$ والمستقيم $x=a$

لإيجاد قيمة $x=b$ نحل المعادلة

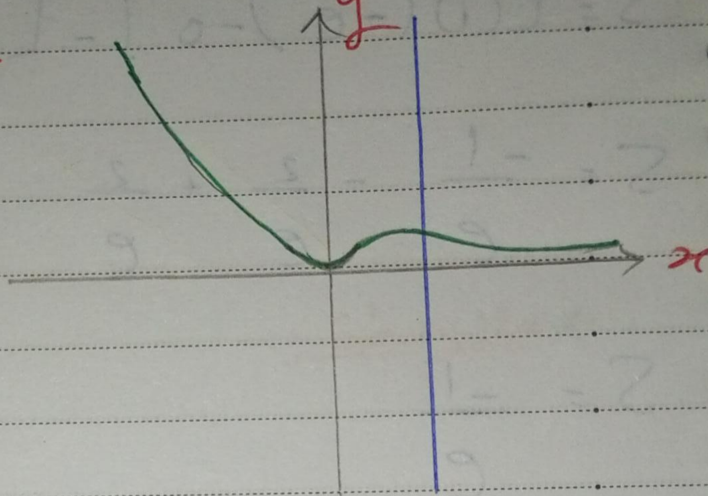
$f(x)=y_D$

* تمرين: ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R وفقه

$$f(x) = \frac{x^2}{e^x}$$

1- احسب مساحة السطح المحصور بين C ومحور الفواصل والمستقيم $x = 1$ .

الحل:




$$S = \int_0^1 f(x) . d(x)$$

$$= \int_0^1 \frac{x^2}{e^x} . d(x)$$

$$= \int_0^1 x^2 . e^{-x} . d(x)$$

$$u = x^2 \Rightarrow u' = 2x$$

$$v' = e^{-x} \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$S = \left[ x^2 . (-e^{-x}) \right]_0^1 - \int_0^1 2x . (-e^{-x}) . d(x)$$

$$u = 2x \Rightarrow u' = 2$$

$$v' = -e^{-x} \Rightarrow v = e^{-x}$$

$$= \left[ 2x . e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 2 . e^{-x} \, d(x)$$

$$= \left[2x \cdot e^{-x} - 2 \cdot e^{-x}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow S = \left[x^2 \cdot (-e^{-x})\right]_0^1 - \left[2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^1$$

$$S = \left[(1)(-e^{-1}) - 0\right] - \left[2 \cdot (e^{-1}) - 2e^{-1} - 0\right]$$

$$S = \frac{-1}{e} - \frac{2}{e} + \frac{2}{e}$$

$$S = \frac{-1}{e}$$

---

* تمرين وظيفة

احسب حجم الجسم الناتج عن دوران الخط البياني للتابع

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}}$$

دورة كاملة حول محور الفواصل على طول المجال $[1,2]$

الحل:

$$V = \pi \int_1^2 \frac{1}{x^3} \, d(x)$$

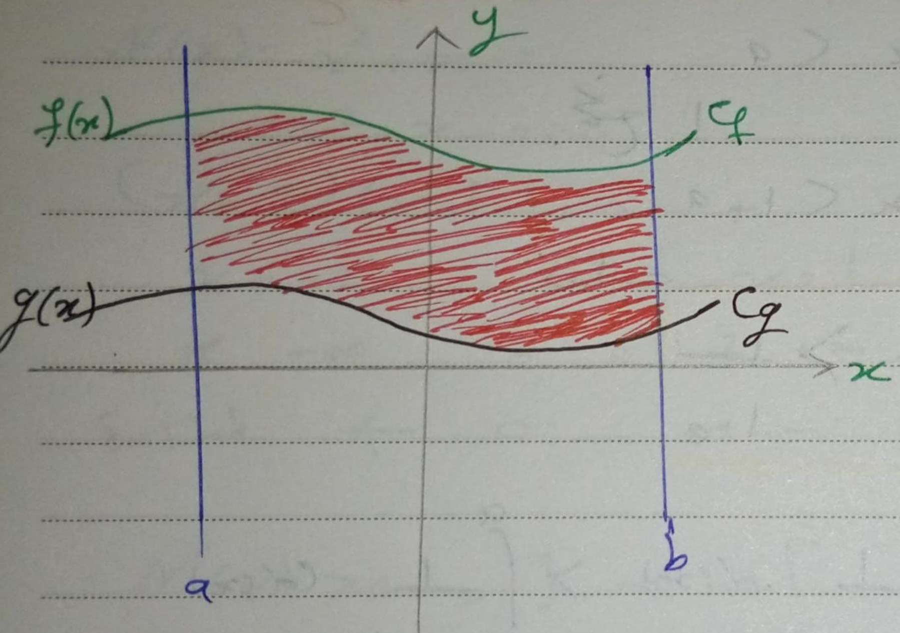
$$V = \pi \int_1^2 x^{-3} \cdot d(x)$$

$$U = \pi \left[ \frac{x^{-2}}{-2} \right]_1^2$$

$$U = \pi \left[ \frac{\frac{1}{4}}{-2} - \left( \frac{-1}{2} \right) \right] = \pi \left[ \frac{-1}{8} + \frac{1}{2} \right]$$

$$U = \frac{3}{8} \pi$$

*ملاحظة:




$$S = \int_a^b \left( f(x) - g(x) \right) \cdot d(x)$$

* تمارين: تيقن أنه بحالة

1- $0 < x < a$

يكون

$$\frac{1}{1+a} < \frac{1}{1+x} < 1$$

2- استنتج

$$\frac{a}{1+a} < \ln|1+a| < a$$

الحل:

1- $0 < x < a$

نجمع 1

$$1 < 1+x < 1+a$$

نقلب

$$\boxed{1 > \frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+a}}$$

2- $$\int_0^a 1 \cdot d(x) > \int_0^a \frac{1}{1+x}\, d(x) > \int_0^a \frac{1}{1+a}\, d(x)$$

$$= [x]_0^a > [\ln|1+x|]_0^a > \left[\frac{x}{1+a}\right]_0^a$$

$$= \boxed{a > \ln(1+a) > \frac{a}{1+a}}$$

نرمز عادة برمز $min(a, b)$ إلى أصغر العددين $a, b$

تحقق أن الخط $Cf$ للتابع $f$ المعرف $[0, 2]$

$$f(x) = min(x^2, (2-x))$$

هو الخط المرسوم

احسب التكامل

$$\int_0^2 f(x) \, d(x)$$

الحل:

$N(x) = x^2 - (2-x)$

$N(x) = x^2 - 2 + x$

$N(x) = x^2 + x - 2$

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0$

$x = -2 \qquad x = 1$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $0$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| الإشارة | | $+$ | $0$ | $-$ | | $0$ | $+$ | |

$N(x) > 0 \; ; \; ]-\infty, -2[$

$N(x) > 0 \; ; \; ]1, +\infty[$

$N(x) < 0 \; ; \; ]-2, 1[$

$[0, 1]$

$N(x) < 0$

$x^2 - (2-x) < 0$

$x^2 < (2-x)$

$$\int_0^1 x^2 . \, d(x)$$

/ /

$[1, 2]$

$N(x) > 0$

$x^2 - (2 - x) > 0$

$x^2 > (2 - x)$

$$\int_1^2 (2 - x) \cdot d(x)$$

$$= \int_0^1 x^2 \cdot d(x) + \int_1^2 (2 - x) \cdot d(x)$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left[\cancel{4} - \cancel{2} \cancel{-2} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{6}$$

/ /

أثبت صحة مساواة

$$\cos^2 x \cdot \sin^2 x = \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \cos 4x$$

ثم احسب

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \cdot \sin^2 x$$

الحل:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$= \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right) = \frac{1-\left[\frac{1+\cos 4x}{2}\right]}{4}$$

$$= \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{8} + \frac{\cos 4x}{8}\right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cdot \cos 4x}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x \right) . d(x)$$

$$= \left[ \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{32} \sin 4 \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] - 0$$

$$= \frac{\pi}{16} - \frac{1}{32} \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} \Rightarrow \frac{\pi}{16}$$

---

ليكن:

$$I = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4} . d(x)$$

$$J = \int_0^1 \frac{x^7}{1+x^4} . d(x)$$

1- احسب $I$

2- احسب $I + J$

3- احسب $J$

الحل

1- $I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{4x^3}{1+x^4}\, d(x)$

$I = \frac{1}{4}\Big[\ln|1+x^4|\Big]_0^1$

$= \frac{1}{4}\big[\ln 2 - \ln(1)\big] = \frac{1}{4}\ln 2$

2- $I + J = \int_0^1 \frac{x^7+x^3}{1+x^4}\, d(x)$

$= \int_0^1 x^3 \cdot \frac{\cancel{(1+x^4)}}{\cancel{1+x^4}}\, d(x)$

$= \Big[\frac{x^4}{4}\Big]_0^1 = \frac{1}{4}$

3- $I + J = \frac{1}{4}$

$J = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\ln 2$

/ /

ليكن:

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 1}{x + 1}$$

1- احسب $a$ ، $b$

لتكن

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

2- احسب

$$I = \int_0^2 f(x) \cdot d(x).$$

الحل:

1-

$$\begin{array}{r|l} & x - 6 \\ \hline x + 1 & \cancel{x^2} - 5x + 1 \\ & -\cancel{x^2} \mp x \\ \hline & 0 - 6\cancel{x} + 1 \\ & \pm\cancel{6x} \pm 6 \\ \hline & 0 \quad 7 \end{array}$$

$$f(x) = x - 6 + \frac{7}{x+1}$$

2- $$\int_0^2 x - 6 + \frac{7}{x+1} \cdot d(x)$$

$$= \left[ \frac{x^2}{2} - 6x + 7\ln|x+1| \right]_0^2$$

$$= [2 - 12 + 7\ln 2 - 0]$$

$$= -10 + 7\ln 2$$

---

أثبت أن:

$$\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$$

واستنتج:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+e^x} \cdot d(x)$$

الحل:

$$l_2 = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \Longrightarrow \frac{1 + \cancel{e^x} - \cancel{e^x}}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x} = \boxed{l_1}$$

$$\int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) d(x)$$

$$= \left[ x - \ln|1+e^x| \right]_0^1$$

$$= [1 - \ln(1+e)] - [0 - \ln(1+e^0)]$$

$$= 1 - \ln(1+e) + \ln 2$$

/ /

*ملاحظة:

لحساب حجم الكرة نطبق القانون:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

تمرين:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) e^x$$

والمطلوب حساب

$$I = \int_2^e f(x) \cdot d(x)$$

ملاحظة:
عين جملة
بالتجزئة

الحل:

$p(x) = x^2 - 2x + 1$
$f(x) \cdot p(x) \cdot e^x$

$F'(x) = f(x) = p(x) \cdot e^x + e^x p(x)$
$= [p'(x) + p(x)] e^x$

$p(x) = ax^2 + bx + c$
$p'(x) = 2ax + b$

$= [2ax + b + ax^2 + bx + c] e^x$
$= [ax^2 + (x)(2a+b) + (b+c)] \cdot e^x$
$= [ax^2 + (x)(2a+b) + (b+c)] \cdot e^x = (x^2 - 2x + 1) e^x$

$a = 1$ ①

$2a + b = -2$ ②

$b + c = 1$ ③

$a = 1$ ⟵ نعوضه ب 2

$b = -4$

$b = -4$ ⟵ نعوضه ب 3

$c = 5$

$$\Rightarrow f(x) = \left[(x^2 - 4x + 5)\, e^{x}\right]_2^e$$

---

*وظيفة

مثال ص 234

نهدف إلى حساب

$$I = \int_0^1 \frac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}\, d(x)$$

هنا نتأمل التابع $f : x \to \dfrac{4x^3 - 3x}{2x^2 - 3x - 2}$ لما كانت

$2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$ استنتجنا أن $f$ مستمر على $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 2\}$

وخصوصاً هذا التابع مستمر على $[0, 1]$، ولما كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام أمكننا إجراء قسمة إقليدية للبسط على المقام لنجد

$$4x^3 - 3x = (2x + 3)(2x^2 - 3x - 2) + 10x + 6$$

إذن:

$$f(x) = 2x + 3 + \frac{10x + 6}{2x^2 - 3x - 2}$$

/ /

ومنه:

$$I=\int_0^1 (2x+3)\,d(x)+\int_0^1 \frac{10x+6}{2x^2-3x-2}\,d(x)$$

$$=\left[x^2+3x\right]_0^1+\underbrace{\int_0^1 \frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1}}_{J}\,.d(x)=4+J$$

لحساب نبحث عن ثابتين $\lambda$ و $\mu$ حقيقيان:

$$5x+3=\lambda\left(x+\frac{1}{2}\right)+\mu(x-2)$$

بتعويض $x=-\frac{1}{2}$ نجد $\mu=-\frac{1}{5}$

ثم بتعويض $x=2$ نجد $\lambda=\frac{26}{5}$ عندئذ:

$$\frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1}=\frac{\frac{26}{5}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}(x-2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)}=\frac{26}{5}\cdot\frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

وعليه، لأنه $x+\frac{1}{2}>0$ و $x-2<0$ على المجال $[0,1]$

استنتجنا أنه،

$$J=\int_0^1 \frac{5x+3}{x^2-\frac{3}{2}x-1}\,d(x)=\frac{26}{5}\int_0^1 \frac{1}{x-2}-\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{1}{x+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{26}{5}\left[\ln(2-x)\right]_0^1-\frac{1}{5}\left[\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]_0^1=\frac{-26}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\ln 3$$

وبالعودة إلى $I$ نجد

$$I=4-\frac{26}{5}\ln 2-\frac{1}{5}\ln 3$$