رؤية شاملة في الاحتمالات

الاحتمالات

فضاء العينة (Ω) : هو مجموعة كل النتائج الممكنة لتجربة ما.

أمثلة:

التجربة	فضاء العينة Ω	$n(\Omega)$ عدد عناصر فضاء العينة
إلقاء قطعة نقود مرة	$\Omega = \{T, H\}$	$n(\Omega) = 2^1 = 2$
إلقاء قطعتي نقود معاً	$\Omega = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$	$n(\Omega) = 2^2 = 4$
إلقاء ثلاث قطع نقود معاً	$\Omega = \left\{\begin{matrix}(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H)\\(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T)\\(T,T,H),(T,T,T)\end{matrix}\right\}$	$n(\Omega) = 2^3 = 8$
إلقاء حجر نرد مرة واحدة	$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$	$n(\Omega) = 6^1 = 6$
إلقاء حجري نرد معاً	$\begin{array}{c\|cccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 1 & (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ 2 & (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ 3 & (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ 4 & (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ 5 & (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ 6 & (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array}$	$n(\Omega) = 6^2 = 36$

الحدث: هو أي مجموعة جزئية من فضاء العينة نرمز له بحرف كبير مثلاً B أو A

أحداث مميزة : الحدث المستحيل : ويقابله المجموعة الخالية $\{\ \} = \emptyset$ ، الحدث الأكيد : Ω

الحدث البسيط : وهو حدث وحيد العنصر.

الحدثان المتنافيان : $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A, B$ حدثان متنافيان

الحدثان المتتامان : $A \cup B = \Omega$ و $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A, B$ حدثان متتامان

****

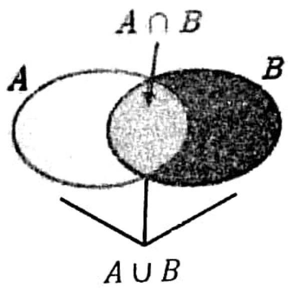
العمليات على الأحداث:

اجتماع حدثين: اجتماع B, A هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع أحد الحدثين A أو B أو كلاهما ورمزه $A \cup B$

تقاطع حدثين: تقاطع حدثين B, A هو الحدث الذي يقع إذا وفقط إذا وقع الحدثان B, A في آن معاً ورمزه $A \cap B$

الحدث المعاكس $\grave{A}$: هو الحدث الذي يقع إذا لم يقع الحدث A .

نتائج:



1. يعطى احتمال حدث A بالصيغة : $P(A) = \dfrac{\text{عدد عناصر الحدث } A}{\text{عدد عناصر فضاء العينة}} = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$
2. $P(\Omega) = 1 \ ,\ P(\emptyset) = 0$
3. $0 \le P(A) \le 1$
4. $P(A) + P(\grave{A}) = 1 \Rightarrow P(\grave{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

في حال A, B حدثان متنافيان فإن: $P(A \cap B) = 0\ ; P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

تذكرة: $(\grave{A})\grave{} = A$ ، $(A \cap B)\grave{} = \grave{A} \cup \grave{B}$ ، $(A \cup B)\grave{} = \grave{A} \cap \grave{B}$

مسألة : **يدرس 30% من طلاب صف اللغة الفرنسية (F) ، و يدرس 40% منهم اللغة الروسية (R) ، و يدرس 60% منهم دروس إحدى هاتين اللغتين على الأقل ، فما احتمال ان يتابع طالب دروس اللغتين في آن معاً ؟**

$$P(F) = \frac{30}{100} \ ,\ P(R) = \frac{40}{100} \ ,\ P(F \cup R) = \frac{60}{100}$$

$$P(F \cap R) = P(F) + P(R) - P(F \cup R) = \frac{30}{100} + \frac{40}{100} - \frac{60}{100} = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$$

وائل زعترية 0933699123
ياسر الساسة 0949198068

الاحتمال المشروط

إذا كان A, B حدثين متعلقين بتجربة معينة فإن وقوع أحد الحدثين قد يؤثر في احتمال وقوع الحدث الآخر.

تعريف الاحتمال الشرطي: ليكن B حدثاً يحقق $P(B) \neq 0$ ، و لنفترض أننا نعلم أنه قد وقع ، عندئذٍ نعرف الاحتمال المشروط لوقوع حدث A علماً أن B قد وقع ، (أو احتمال A مشروطاً بالحدث B) بالصيغة :

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

نستنتج من القانون السابق: $P(A \cap B) = P(A|B) \,.\, P(B)$

ملاحظة:

لمعرفة ان الطلب هو احتمال مشروط تكون صيغة السؤال:

* ما احتمال A إذا علمت وقوع $B \Leftarrow P(A|B)$.
* أو إذا علمت وقوع A ما احتمال $B \Leftarrow P(B|A)$.

الحل يكون: نوجد حالات الحدث A، وحالات الحدث B. نوجد $A \cap B$ ثم نطبق القانون المطلوب.

إما $P(B|A)$ أو $P(A|B)$.

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء حجري نرد معاً :

إذا علمنا أن الوجهين الظاهرين يحملان رقمين أوليين ما احتمال أن يكون مجموع الوجهين الظاهرين اكبر تماماً من (6)

الحل: عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 6^2 = 36$

	1	2	3	4	5	6
1						
2		$\times$	$\times$		$\boxed{\times}$	
3		$\times$	$\times$		$\boxed{\times}$	
4						
5		$\boxed{\times}$	$\boxed{\times}$		$\boxed{\times}$	
6						

A الحدث الوجهين الظاهرين يحملان رقمين أوليين ومنه: $n(A) = 9$

B الحدث مجموع الوجهين الظاهرين أكبر تماماً من (6)

$$n(A \cap B) = 5$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{5}{9}$$

مسألة : **في تجربة إلقاء قطعة نقود متوازنة ثلاث مرات**

ما احتمال الحصول على كتابة واحدة على الأكثر , علمنا انه قد ظهر شعار واحد على الأقل .

الحل : $\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$

A الحصول على كتابة واحدة على الأكثر اي: $A = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\} \;:\; n(A) = 4$

B الحصول على شعار واحد على الأقل:

$B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \;:\; n(B) = 7$

$A \cap B = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H)\} \;:\; n(A \cap B) = 4$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{7}$$

الاستقلال الاحتمالي

تمهيد: بفرض B,A حدثين متعلقين بتجربة معينة فإذا كان احتمال وقوع احد الحدثين لا يؤثر على احتمال وقوع الحدث الآخر نسميه استقلال احتمالي.

مثال توضيحي: في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين نلاحظ أن احتمال وقوع حدث الرمية الثانية لا يتأثر باحتمال وقوع حدث الرمية الأولى نقول هنا ان هذين الحدثين مستقلين احتمالياً.

تعريف: إذا كان B,A حدثين في تجربة احتمالية , عندئذ نقول إن A و B مستقلان احتمالياً إذا كان:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

ملاحظة :

1. الاستقلال الاحتمالي للحدثين B,A ان يكون: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A).P(B)}{P(B)} = P(A) \quad ; P(B) \neq 0$

اي أن احتمال وقوع الحدث A لا يتأثر بوقوع الحدث B.

2. لإثبات ان حدثين B,A مستقلين احتمالياً يجب ان نتحقق من صحة المساواة: $P(A \cap B) = P(A).P(B)$

مسألة: صندوقان متماثلان فيهما كرات متماثلة، الصندوق (I) يحوي ثلاث كرات مرقمة $1,2,3$ والصندوق (II) يحوي اربع كرات مرقمة بالأرقام $2,3,4,5$. نسحب عشوائياً كرة من الصندوق I ثم نسحب كرة من الصندوق II والمطلوب:

a. اكتب فضاء العينة المرتبط بهذا الاختيار .

I \ II	2	3	4	5
1	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
3	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)

b. الحدث A إحدى الكرتين على الأقل تحمل الرقم (3).

الحدث B مجموع رقمي الكرتين اكبر تماماً من (5)، هل الحدثان A,B مستقلان احتمالياً؟

$$A = \{(1,3),(2,3),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5)\} \Rightarrow P(A) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(1,5),(2,4),(2,5),(3,3),(3,4),(3,5)\} \Rightarrow P(B) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{(3,3),(3,4),(3,5)\}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A).P(B) &= \tfrac{1}{2}.\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4} \\ P(A \cap B) &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

ومنه A,B مستقلان احتمالياً.

مسألة: في تجربة رمي ثلاث قطع نقود معاً إذا كان الحدث A ظهور شعار واحد على الأكثر والحدث B ظهور كتابتين فقط هل الحدثان A,B مستقلان احتمالياً.

الحل:

$$\Omega = \{(H,H,H),(H,H,T),(H,T,H),(T,H,H),(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\}$$

$$A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H),(T,T,T)\} \Rightarrow p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \Rightarrow p(B) = \frac{3}{8}$$

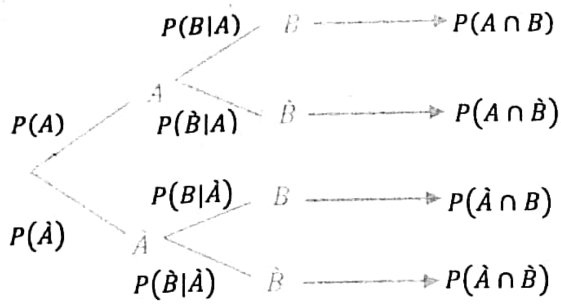
$$A \cap B = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\} \Rightarrow p(A \cap B) = \frac{3}{8}$$

$$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= \tfrac{3}{8} \\ P(A).P(B) &= \frac{1}{2}.\frac{3}{8} = \frac{3}{16} \end{aligned}\right\} \Rightarrow P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$$

B,A غير مستقلان احتمالياً.

المخطط الشجري

في حالة حدثين فقط A و B نجد المخطط الشجري التالي:



في اي مخطط شجري نلاحظ ما يلي :

1) مجموع احتمالات اي عقدة يساوي واحد .

2) الحدث الذي يمثله كل مسار هو تقاطع الأحداث الموجودة على هذا المسار

اي: احتمال كل مسار هو جداء احتمالات الأحداث فيه .

3) احتمال أي حدث هو مجموع احتمالات كل المسارات التي تنتهي بهذا الحدث

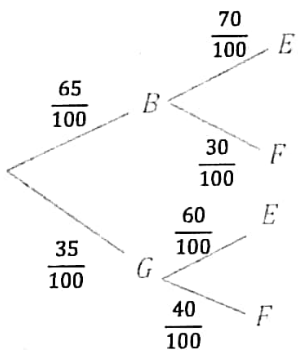
احتمال $B \Rightarrow P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

احتمال $\bar{B} \Rightarrow P(\bar{B}) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$

مسألة : في معهد 65% من المسجلين ذكور (B) و الباقي إناث (G) , يوجد بين الذكور 70% يدرسون الإعدادية (E) و الباقي يدرسون الثانوية (F)

و يوجد بين الإناث 40% يدرسون الثانوية (F) و الباقي يدرسون الإعدادية (E) ,

اخترنا شخصاً من هذا المعهد , ما احتمال أن يدرس الثانوية ؟

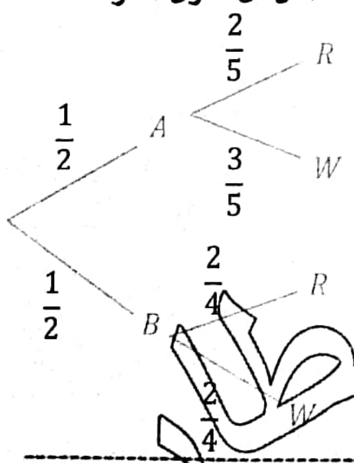


احتمال ان يدرس الثانوية $P(F)$: $P(F) = P(B \cap F) + P(G \cap F)$

$$= \frac{65}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{40}{100}$$

$$= \frac{195}{1000} + \frac{140}{1000} = \frac{335}{1000}$$

مسألة : صندوقان A و B , يحوي الصندوق A على خمس كرات $(2R$ و $3W)$ و يحتوي الصندوق B على اربع كرات $(2R$ و $2W)$ نختار احد الصندوقين عشوائياً و نسحب منه كرة واحدة , ما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة حمراء اللون ؟



احتمال الكرة المسحوبة حمراء اللون $P(R)$:

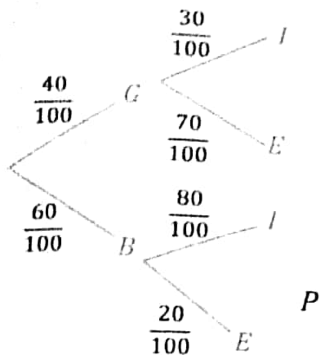
$$P(R) = P(A \cap R) + P(B \cap R)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{4}$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}$$

مسألة : تضم مدرسة تلاميذ 40% منهم إناث و الباقي ذكور و 30% من التلميذات مقيمات بالمدينة السكنية في المدرسة والباقي يقمن في منازلهن و 80% من التلاميذ الذكور يقيمون في المدينة السكنية في المدرسة الباقي يقيمون في منازلهم , نختار عشوائياً بطاقة تعريف أحد الطلاب و المطلوب :

1. ما احتمال ان تكون تلميذة مقيمة في المدينة السكنية .
2. ما احتمال ان تكون تلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية .
3. ما احتمال ان يكون تلميذ مقيم في المدينة السكنية .
4. ما احتمال ان يكون تلميذ غير مقيم في المدينة السكنية .



الحل : نشكل مخطط شجري للمسألة :

حيث نرمز للإناث G و للذكور B و للمقيم بـ I و الخارجي E

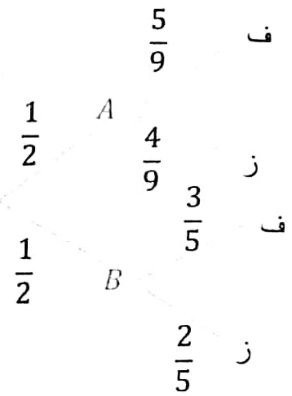
1. A: الحدث التلميذة مقيمة في المدينة السكنية $P(A) = P(G \cap I) = \frac{40}{100} \cdot \frac{30}{100} = \frac{12}{100}$

2. B: الحدث التلميذة غير مقيمة في المدينة السكنية $P(B) = P(G \cap E) = \frac{40}{100} \cdot \frac{70}{100} = \frac{28}{100}$

3. C : الحدث التلميذ مقيم في المدينة السكنية $P(C) = P(B \cap I) = \frac{60}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{48}{100}$

4. D : الحدث التلميذ غير مقيم في المدينة السكنية $P(D) = P(B \cap E) = \frac{60}{100} \cdot \frac{20}{100} = \frac{12}{100}$

مسألة : يحتوي صندوق (A) على 9 بطاقات مرقمة من (1) إلى (9) ويحتوي صندوق (B) على 5 بطاقات مرقمة من (1) إلى (5)، اختير احد الصندوقين عشوائياً وسحبت منه بطاقة، فإذا كان رقم البطاقة المسحوبة زوجياً فما احتمال ان تكون البطاقة قد سحبت من الصندوق A؟



E : حدث البطاقة المسحوبة زوجية: $E = \{ز_B \text{ أو } ز_A\}$.

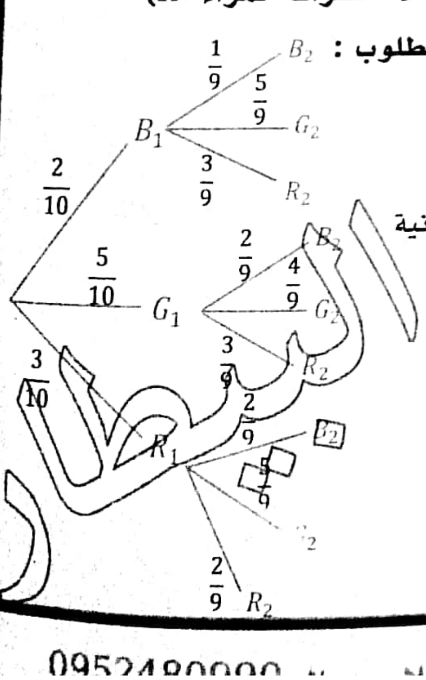
F : حدث البطاقة المسحوبة من الصندوق A: $F = \{ف_A \text{ أو } ز_A\}$

$$\Longrightarrow E \cap F = \{ز_A\}$$

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{9} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5}} = \frac{10}{19}$$

مسألة : صندوق يحوي عشر كرات (كرتان زرقاوان B و خمس كرات خضراء G و ثلاث كرات حمراء R) نسحب عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة و نسجل النتيجة التي نحصل عليها , و المطلوب :

ما احتمال الحدث A الموافق لسحب كرة زرقاء في المرة الثانية .



الحل : نشكل مخطط شجري للمسألة

و نرمز R_1, G_1, B_1 لسحب الكرة الأولى , و نرمز R_2, G_2, B_2 لسحب الكرة الثانية

و منه الحدث A : سحب كرة زرقاء في المرة الثانية هو:

$$A = \{B_1 \cap B_2 \text{ او } G_1 \cap B_2 \text{ او } R_1 \cap B_2\}$$

$$P(A) = P(B_1 \cap B_2) + P(G_1 \cap B_2) + P(R_1 \cap B_2)$$

$$= \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} + \frac{5}{10} \cdot \frac{2}{9} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2 + 10 + 6}{90} = \frac{18}{90} = \frac{1}{5}$$

مسألة : نتأمل ثلاث قطع نقود نرمز إليها بـ c_1 و c_2 و c_3 القطعة c_1 متوازنة اما c_2 و c_3 فهما متماثلتان ولكن غير متوازنتان و يكون فيهما احتمال ظهور H يساوي $\frac{3}{5}$ و احتمال ظهور T يساوي $\frac{2}{5}$ نلقي قطع النقود الثلاث و نسجل النتائج التي تحصل عليها. ما احتمال وقوع الحدث A (الحصول على H مرة واحدة فقط)

الحل : نراعي في الحل الترتيب (c_1 , c_2 , c_3)

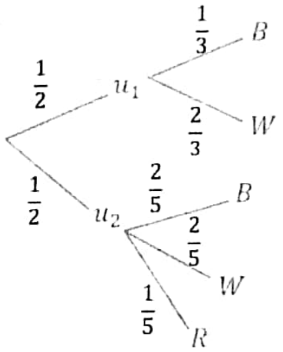
الحدث: الحصول على H مرة واحدة فقط :
$$A = \{(H,T,T),(T,H,T),(T,T,H)\}$$

و بما أن ظهور H و T أحداث مستقلة احتمالياً في كل رمية فإن :

$$P(A) = P(H,T,T) + P(T,H,T) + P(T,T,H)$$
$$= \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{2}{5} + \frac{1}{2}.\frac{3}{5}.\frac{2}{5} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5}.\frac{3}{5} = \frac{4+6+6}{50} = \frac{16}{50} = \frac{8}{25}$$

مسألة : صندوقان u_1 و u_2 يحتوي u_1 على كرة سوداء B و كرتين بيضاويين W و يحتوي u_2 على كرتين سوداويين B و كرتين بيضاويين W و كرة حمراء R , نختار عشوائياً احد الصندوقان و نسحب منه كرة عشوائياً , والمطلوب :

1. ما احتمال الحدث B الموافق لسحب كرة سوداء .
2. إذا سحبنا كرة سوداء اللون , فما احتمال أن تكون سحبت من الصندوق u_1 .



الحل :

1. الحدث B سحب كرة سوداء و منه : $B = \{u_1 \cap B$ أو $u_2 \cap B\}$

$$P(B) = P(u_1 \cap B) + P(u_2 \cap B) = \frac{1}{2}.\frac{1}{3} + \frac{1}{2}.\frac{2}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5} = \frac{11}{30}$$

2. نلاحظ أن الاحتمال شرطي في هذا الطلب

B : حدث سحب كرة سوداء $\qquad B = \{u_1 \cap B$ أو $u_2 \cap B\}$

N : حدث سحب كرة من الصندوق u_1 $\qquad N = \{u_1 \cap B$ أو $u_1 \cap W\}$

$B \cap N$: حدث سحب كرة سوداء من الصندوق u_1 $\qquad B \cap N = \{u_1 \cap B\}$

$$P(N|B) = \frac{P(N \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}.\frac{1}{3}}{\frac{11}{30}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{11}{30}} = \frac{5}{11}$$

****

تدريب صفحة 180 :

1) يحتوي صندوق على عشرين كرة سبع منها بيضاوات اللون , نسحب منها ثلاث كرات دفعة واحدة .

ما احتمال أن تكون الكرات الثلاث بيضاوات ؟

سحب 3 كرات معاً

$\overbrace{\text{7 بيضاء} \qquad \text{13 ليست بيضاء}}^{\text{20 كرة}}$

$A = \{(w,w,w)\}$ حدث الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء اللون .

$$P(A) = \frac{\binom{7}{3}}{\binom{20}{3}} = \frac{\frac{7\times6\times5}{3\times2\times1}}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}} = \frac{7}{228}$$

---

2) نملأ عشوائياً كل خانة من الخانات الأربع الآتية [| | |] بأحد العددين (1) أو (-1)

1. احسب احتمال أن يكون المجموع مساوياً الصفر .

- إن عدد الخانات (4) و نريد ملئ الخانات بالعددين (-1) و (1)

فإن عدد عناصر فضاء العينة $n(\Omega) = 2^4 = 16$

حسان البيطار 0933756454 خلدون سيروان 0932791896 طارق سعد الدين 0955561648

إشارتين على تحتوي التي تلك هي المواتية النتائج عدد منه و الصفر يساوي الخانات مجموع الحدث A –

موجبتين و إشارتين سالبتين و الترتيب غير مهم عندئذٍ :

$$A=\left\{\begin{matrix}(-1,-1,+1,+1),(-1,+1,-1,+1),(-1,+1,+1,-1)\\(+1,+1,-1,-1),(+1,-1,+1,-1),(+1,-1,-1,+1)\end{matrix}\right\}$$

A عدد تباديل $=6$ $\quad\Rightarrow\quad P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{6}{16}=\dfrac{3}{8}$

2. احسب احتمال ألّا يظهر العدد ذاته في خانتين متجاورتين .

$$B=\{(1,-1,1,-1)\,,(-1,1,-1,1)\}$$

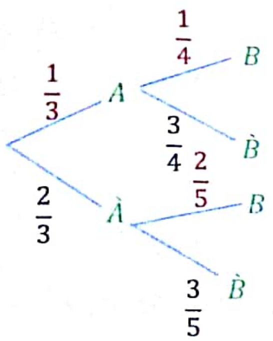
$$P(B)=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$$

---

3) استناداً إلى التمثيل الشجري المبين في الشكل المجاور ، عيّن الاحتمالات $P(\bar{B}|\bar{A}),P(\bar{B}|A),P(\bar{A})$

و استنتج قيمة كل من : $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap\bar{B})$ ، $P(\bar{A}\cap B)$ ، $P(\bar{A}\cap\bar{B})$

الحل : بإكمال المخطط نجد :



$$P(\bar{A})=\frac{2}{3}\quad,\quad P(\bar{B}|A)=\frac{3}{4}\quad,\quad P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{3}{5}$$

$$P(A\cap B)=P(A).P(B|A)=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$$

$$P(A\cap\bar{B})=P(A).P(\bar{B}|A)=\frac{1}{3}.\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}\cap B)=P(\bar{A}).P(B|\bar{A})=\frac{2}{3}.\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$P(\bar{A}\cap\bar{B})=P(\bar{A}).P(\bar{B}|\bar{A})=\frac{2}{3}.\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

---

4) اجب عن الأسئلة الآتية :

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{1}{10}$ فاحسب $P(A|B),P(B|A)$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/10}{1/4}=\frac{2}{5}\quad,\quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/10}{1/2}=\frac{1}{5}$$

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{1}{3}$ و $P(A\cup B)=\frac{2}{3}$ فاحسب $P(A|B),P(B|A)$.

لنحسب اولاً $P(A\cap B)$:

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{1/6}{1/2}=\frac{1}{3}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{1/6}{1/3}=\frac{1}{2}$$

- إذا كان $P(A)=\frac{1}{3}$ و $P(B|A)=\frac{1}{4}$ و $P(B|\bar{A})=\frac{4}{5}$ فاحسب $P(B)$.

نعلم أن :

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap\bar{A})$$

$$=P(A).P(B|A)+P(\bar{A}).P(B|\bar{A})$$

$$=\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\left(1-\frac{1}{3}\right).\frac{4}{5}$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{8}{15}=\frac{37}{60}$$

• إذا كان $P(A)=\frac{1}{2}$ و $P(B)=\frac{3}{4}$ و $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$ فاحسب $P(A|B)\,,P(B|A)$

و احسب أيضاً $P(\acute{A}\cap\acute{B})$ و استنتج $P(\acute{B}|\acute{A})$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{2/5}{3/4}=\frac{8}{15}\quad,\quad P(B|A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{2/5}{1/2}=\frac{4}{5}$$

$$P(\acute{A}\cap\acute{B})=P(A\cup B)'=1-\underbrace{P(A\cup B)}_{\text{لنحسبه}}$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{2}{5}=\frac{17}{20}$$

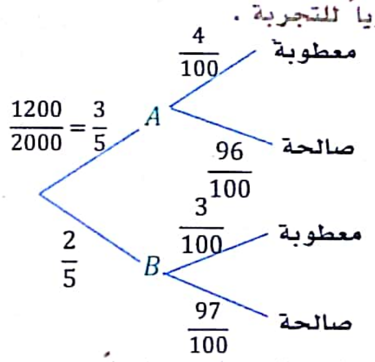
$$P(\acute{B}|\acute{A})=\frac{P(\acute{B}\cap\acute{A})}{P(\acute{A})}=\frac{3/20}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3/20}{1/2}=\frac{3}{10}\quad,\quad P(\acute{A}\cap\acute{B})=1-\frac{17}{20}=\frac{3}{20}$$

---

5) يضم مصنع ورشتين A و B لتصنيع المصابيح الكهربائية عندما ورد طلب لعدد من المصابيح قدره 2000 مصباح صنعت الورشة A منها 1200 مصباحاً و صنعت البقية الورشة B

هناك نسبة 4% من مصابيح الورشة A معطوبة , في حين تكون نسبة 3% من مصابيح الورشة B معطوبة .
نسحب عشوائياً مصباحاً من الطلب , نرمز بالرمز A إلى الحدث (المصباح مصنوع في الورشة A)
و بالرمز B إلى الحدث (المصباح مصنوع في الورشة B) و بالرمز D إلى الحدث (المصباح معطوب)

1. اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .



2. احسب احتمال ان يكون المصباح معطوباً.

$$D=\{A \text{ معطوب من } B \text{ او معطوب من }\}$$

D الحدث المصباح معطوب.

$$P(D)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{100}=\frac{18}{500}$$

3. إذا كان المصباح معطوباً , فما احتمال ان يكون مصنوعاً في الورشة A .

$$D=\{A \text{ معطوب من } B \text{ او معطوب من }\}$$

D الحدث المصباح معطوب.

$$C=\{A \text{ صالح من } A \text{ و معطوب من }\}$$

C الحدث المصباح مصنوع في الورشة A .

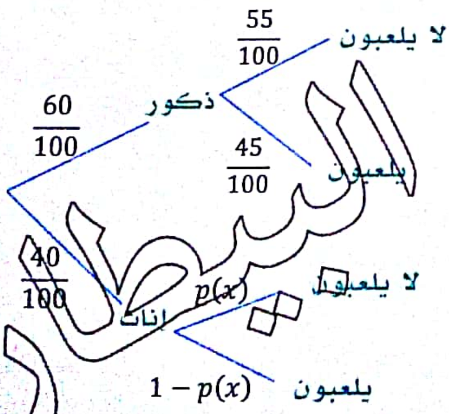
$$C\cap D=\{A \text{ معطوب من }\}$$

$$P(C\cap D)=\frac{3}{5}\times\frac{4}{100}=\frac{12}{500}$$

$$P(C|D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{12/500}{18/500}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}$$

---

6) في مدرستنا يمارس 30% من الطلاب لعبة كرة المضرب , ونعلم أن مدرستنا تضم نسبة 60% من الذكور و ان 55% من هؤلاء لا يلعبون لعبة كرة المضرب . ما احتمال أن تكون طالبة مختارة عشوائياً من بين طالبات المدرسة من بين اللاتي لا يمارسن لعبة كرة المضرب ؟



بما ان احتمال الطلاب الذين يمارسون لعبة كرة المضرب هو $\frac{30}{100}$

فإن احتمال الذين لا يمارسون لعبة كرة المضرب هو $\frac{70}{100}$

$$\frac{70}{100}=\frac{60}{100}\times\frac{55}{100}+\frac{40}{100}\times P(x)\ \Rightarrow\ \frac{7}{10}=\frac{330}{1000}+\frac{4}{10}\times P(x)$$

$$\frac{4}{10}P(x)=\frac{7}{10}-\frac{33}{100}$$

$$\frac{4}{10}P(x)=\frac{37}{100}\ \Rightarrow P(x)=\frac{37}{40}=0.925$$

المتحولات العشوائية

مفهوم المتحول العشوائي: هو ربط نتيجة التجربة العشوائية بعدد حقيقي

تعريف : ليكن Ω فضاء العينة لتجربة عشوائية نسمي متحولاً عشوائياً كل تابع معرف على Ω و يأخذ قيمه في R

قانون الاحتمال و التوقع و التباين:

نرمز للمتحول العشوائي بالرمز X أو Y ومجموعة قيمه تحددها نص المسألة بالرمز $I=\{x_1,x_2,\dots,x_m\}$

و نرمز لاحتمال قيم المتحول بـ $P(x_i)$ أي: $P(x_1)$ و $P(x_2)$ و .....

ومنه يمثل القانون الاحتمالي بالجدول الآتي:

x_i	x_1	x_2	x_3	....	x_m
$P(x_i)$	$P(x_1)$	$P(x_2)$	$P(x_3)$	....	$P(x_m)$

ولحساب التوقع الرياضي $E(X)$ للمتحول العشوائي X نستخدم القانون: $\boxed{E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i\,P(x_i)}$

ولحساب التباين $V(X)$ للمتحول العشوائي نستخدم القانون: $\boxed{V(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i^2\,.P(x_i)-\big(E(X)\big)^2}$

ولحساب الانحراف المعياري $\sigma(X)$ للمتحول العشوائي نستخدم القانون: $\boxed{\sigma(X)=\sqrt{V(X)}}$

ملاحظة: في المسائل التي يطلب فيها حساب $E(X)$, $V(X)$ نشكل الجدول الآتي:

x_i	x_1		x_2		....		x_m
$P(x_i)$	$P(x_1)$		$P(x_2)$		....		$P(x_m)$
$E(X)=\sum_{i=1}^{m} x_i\,P(x_i)$	$x_1P(x_1)$	+	$x_2P(x_2)$	+	....	+	$x_mP(x_m)$
x_i^2	x_1^2		x_2^2		....		x_m^2
$\sum_{i=1}^{m} x_i^2\,.P(x_i)$	$x_1^2\,.P(x_1)$	+	$x_2^2\,.P(x_2)$	+	....	+	$x_m^2\,.P(x_m)$

مسألة ① : **نلقي ثلاث قطع نقود متوازنة و نسجل الوجه الظاهر لكل قطعة ولنفرض لعبة تقضي بربح ليرة واحدة كلما ظهر الوجه T وبخسارة ليرة كلما ظهر الوجه H ولنعرف متحولاً عشوائياً يدل على نتيجة الربح في نهاية اللعبة, احسب القانون الاحتمالي لهذا المتحول واحسب التوقع الرياضي والتباين والانحراف المعياري.**

الحل: $\Omega=\{(T,T,H),\dots\}$, $n(\Omega)=2^3=8$, $I=\{-3,-1,1,3\}$

$$P(x_1)=P(-3)=P(H,H,H)=\frac{1}{8}$$

$$P(x_2)=P(-1)=P(H,H,T)+P(H,T,H)+P(T,H,H)=\frac{3}{8}$$

$$P(x_3)=P(1)=P(H,T,T)+P(T,H,T)+P(T,T,H)=\frac{3}{8}$$

$$P(x_4)=P(3)=P(T,T,T)=\frac{1}{8}$$

x_i	-3		-1		1		3
$P(x_i)$	$\frac{1}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{1}{8}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-3}{8}$	$+$	$\frac{-3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}=0$
x_i^2	9		1		1		9
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i)$	$\frac{9}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{3}{8}$	$+$	$\frac{9}{8}=3$

$$E(X)=0 \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=3-0=3 \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{3}$$

مسالة ② : تقضي لعبة إلقاء حجر نرد مثالي بربح ليرتين إذا ظهر الرقم (1) وبربح ليرة واحدة إذا ظهر الرقم (2) وبخسارة ليرة واحدة في باقي الحالات ، والمطلوب :

1. ما هو التوقع الرياضي للمتحول العشوائي الموافق لهذه اللعبة و ماذا تخمن ؟
2. احسب التباين و الانحراف المعياري لهذا المتحول .

الحل : $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$, $n(\Omega)=6^1=6$, $I=\{-1,1,2\}$

$$P(X=-1)=\frac{4}{6} \quad , \quad P(X=1)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(X=2)=\frac{1}{6}$$

x_i	-1		1		2
$P(x_i)$	$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-4}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{2}{6}=\frac{-1}{6}$
x_i^2	1		1		4
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 . P(x_i)$	$\frac{4}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{4}{6}=\frac{3}{2}$

وبما أن التوقع سالب نخمن أنه إذا لعب اللاعب عدداً كبيراً من المرات فإنه سيخسر

$$E(X)=\frac{-1}{6} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2 . P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{36}=\frac{53}{36} \quad , \quad \sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\frac{\sqrt{53}}{6}$$

****

تدرب صفحة 184:

1) نلقي حجر نرد متوازن وجوهه مرقمة من 1 إلى 6 نحصل على درجة واحدة إذا ظهر الوجه 1 و نحصل على ست درجات إذا ظهر الوجه 6 ، و نخسر درجتين في بقية الحالات ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل الدرجة التي نحصل عليها ، اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X . و احسب كلاً من $E(X)$ و $V(X)$.

$$\Omega=\Big\{\underbrace{1}_{\boxed{+1}},\underbrace{2,3,4,5}_{\boxed{-2}},\underbrace{6}_{\boxed{+6}}\Big\} \quad , \quad n(\Omega)=6 \quad , \quad I=\{-2,1,6\}$$

$$P(-2)=\frac{4}{6} \quad , \quad P(1)=\frac{1}{6} \quad , \quad P(6)=\frac{1}{6}$$

x_i	-2		1		6
$P(x_i)$	$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{6}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	$\frac{-8}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{6}{6}=\frac{-1}{6}$
x_i^2	4		1		36
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)$	$\frac{16}{6}$	$+$	$\frac{1}{6}$	$+$	$\frac{36}{6}=\frac{53}{6}$

$$E(X)=\frac{-1}{6} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=\frac{53}{6}-\frac{1}{36}=\frac{317}{36}$$

---

2) يحتوي صندوق على خمس كرات : ثلاث كرات سوداء اللون ، وكرتان بيضاوان . نسحب عشوائياً و في آن معاً كرتين من الصندوق و نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب عدد الكرات البيضاء المسحوبة ، عيّن مجموعة قيم X ، واكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه و تباينه .

نسحب كرتان معاً

$$\overbrace{2W \quad 3B}^{\text{5 كرات}}$$

$$I=\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ \}$$
$$(B,B)\quad (W,B)\quad (W,W)$$

$$P(0)=\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{3}{10} \quad , \quad P(1)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{6}{10} \quad , \quad P(2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

x_i	0		1		2
$P(x_i)$	$\frac{3}{10}$		$\frac{6}{10}$		$\frac{1}{10}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i\,P(x_i)$	0	$+$	$\frac{6}{10}$	$+$	$\frac{2}{10}=\frac{4}{5}$
x_i^2	0		1		4
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)$	0	$+$	$\frac{6}{10}$	$+$	$\frac{4}{10}=1$

$$E(X)=\frac{4}{5} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{3} x_i^2\,.P(x_i)-\big(E(X)\big)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{9}{25}$$

---

3) اعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي و دون إعادة .

نسحب كرتان بدون إعادة

$$\overbrace{2W \quad 3B}^{\text{5 كرات}}$$

$$I=\{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ \}$$
$$(B,B)\quad (W,B)\quad (W,W)$$

$$P(0)=\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}=\frac{3}{10} \quad , \quad P(1)=\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times 2=\frac{12}{20}=\frac{6}{10} \quad , \quad P(2)=\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

القيم الناتجة تطابق قيم التجربة السابقة وعليه فإن القانون الاحتمالي لـ X هو نفسه القانون السابق

4) يحتوي صندوق على خمس كرات : اثنتان تحملان الرقم 1 و اثنتان تحملان الرقم 2 و واحدة تحمل الرقم 3
نسحب عشوائياً و في آن معاً كرتين من الصندوق و نسمي X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة سحب مجموع ارقام الكرتين المسحوبتين .
عيّن مجموعة قيم X ، و اكتب قانونه الاحتمالي ، واحسب توقعه و تباينه .

نسحب كرتان معاً

5 كرات مرقمة

1 1 2 2 3

$I = \{ 2 , 3 , 4 , 5 \}$

(1,1) (1,2) (1,3) (2,2) (2,3)

$$P(2) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10} \quad , \quad P(3) = \frac{\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{4}{10}$$

$$P(4) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1} + \binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10} \quad , \quad P(5) = \frac{\binom{2}{1}\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{2}{10}$$

x_i	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$
$E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i\, P(x_i)$	$\frac{2}{10}$	$+ \frac{12}{10}$	$+ \frac{12}{10}$	$+ \frac{10}{10} = \frac{18}{5}$
x_i^2	4	9	16	25
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i)$	$\frac{4}{10}$	$+ \frac{36}{10}$	$+ \frac{48}{10}$	$+ \frac{50}{10} = \frac{69}{5}$

$$E(X) = \frac{18}{5} \quad , \quad V(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(x_i) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{69}{5} - \frac{324}{25} = \frac{21}{25}$$

---

5) أعد السؤال السابق بافتراض أن السحب يجري على التتالي و دون إعادة .

نسحب كرتان بدون إعادة

5 كرات مرقمة

1 ,1 , 2 , 2 ,3

$I = \{ 2 , 3 , 4 , 5 \}$

(1,1) (1,2) (1,3) (2,2) (2,3)

$$P(2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} \quad , \quad P(3) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{4} \times 2 = \frac{4}{10}$$

$$P(4) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 + \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{10} \quad , \quad P(5) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} \times 2 = \frac{4}{20} = \frac{2}{10}$$

القيم الناتجة تطابق قيم التجربة السابقة وعليه فإن القانون الاحتمالي لـ X هو نفسه القانون السابق

نتيجة: نستنتج من التدريبات (2) ، (3) ، (4) ، (5) السابقة ان السحب معاً يماثل السحب على التتالي دون اعادة.

6) نلقي حجر نرد متوازن مرتين متتاليتين و نسجل رقمي الوجهين الظاهرين ، ليكن X المتحول العشوائي الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الوجهين الظاهرين .
اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X و احسب توقعه و تباينه و انحرافه المعياري .

$\boxed{+}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

من الجدول السابق نجد أن X يأخذ قيمه في المجموعة: $I = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

$P(2) = \frac{1}{36}$, $P(3) = \frac{2}{36}$, $P(4) = \frac{3}{36}$, $P(5) = \frac{4}{36}$

$P(6) = \frac{5}{36}$, $P(7) = \frac{6}{36}$, $P(8) = \frac{5}{36}$, $P(9) = \frac{4}{36}$

$P(10) = \frac{3}{36}$, $P(11) = \frac{2}{36}$, $P(12) = \frac{1}{36}$

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	
$\sum_{i=1}^{11} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{36}$ +	$\frac{6}{36}$ +	$\frac{12}{36}$ +	$\frac{20}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{42}{36}$ +	$\frac{40}{36}$ +	$\frac{36}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{22}{36}$ +	$\frac{12}{36}$	$= 7$
x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	
$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{4}{36}$ +	$\frac{18}{36}$ +	$\frac{48}{36}$ +	$\frac{100}{36}$ +	$\frac{180}{36}$ +	$\frac{294}{36}$ +	$\frac{320}{36}$ +	$\frac{324}{36}$ +	$\frac{300}{36}$ +	$\frac{242}{36}$ +	$\frac{144}{36}$	$= \frac{1974}{36}$

$E(X) = 7$, $V(X) = \sum_{i=1}^{11} x_i^2 \,.\, P(x_i) - \left(E(X)\right)^2 = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{210}{36} = \frac{35}{6}$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{35}{6}} \approx 2.42$$

****

القانون الاحتمالي لمتحولين عشوائيين :

ليكن X و Y متحولين عشوائيين على فضاء العينة ذاته Ω

- ياخذ X مجموعة القيم $I = \{x_1 , x_2 , \dots , x_n\}$
- ياخذ Y مجموعة القيم $J = \{y_1 , y_2 , \dots , y_m\}$
- إن قانون الزوج العشوائي (X,Y) هو إعطاء الاحتمال P_{ij} لكل حدث من الشكل : $\left((X = x_i) \cap (Y = y_j) \right)$ حيث : $x_i \in I , y_j \in J$

اي حساب جميع قيم P_{ij} : $P_{ij} = P\left[(X = x_i) \cap (Y = y_j)\right]$

و عادة نضع جميع الاحتمالات في جدول كالجدول الآتي :

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P(X = x_i)$
x_1	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_1
				+
x_2	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_2
$P(Y = y_j)$	$\acute{P}_1$ +	$\acute{P}_2$ +	$\acute{P}_3$	$\boxed{1}$

نلاحظ من الجدول السابق:

♦ $\left.\begin{array}{l} P_{11} + P_{12} + P_{13} = P_1 \\ P_{21} + P_{22} + P_{23} = P_2 \end{array}\right\} P_1 + P_2 = 1$

♦ $\left.\begin{array}{l} P_{11} + P_{21} = \acute{P}_1 \\ P_{12} + P_{22} = \acute{P}_2 \\ P_{13} + P_{23} = \acute{P}_3 \end{array}\right\} \acute{P}_1 + \acute{P}_2 + \acute{P}_3 = 1$

****

الاستقلال الاحتمالي لمتحولين عشوائيين X, Y :

لكي يكون المتحولين العشوائيين مستقلان احتمالياً يجب أن يتحقق : $\boxed{P_{ij} = P_i \cdot \acute{P}_j}$ أياً كانت i, j

في حال عدم تحقق واحدة فقط عندها يكون X و Y غير مستقلين احتمالياً .

مسألة : صندوق يحوي ثلاث كرات , واحدة حمراء تحمل الرقم (0) و اثنتان زرقاوان تحملان الرقم $(1$ و $2)$

نسحب من الصندوق عشوائياً كرتين على التتالي دون إعادة و لتكن Ω مجموعة النتائج الممكنة لهذه التجربة .

- **نعرف على Ω المتحول العشوائي X الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة عدد الكرات الزرقاء المسحوبة .**
- **نعرف على Ω المتحول العشوائي Y الذي يقرن بكل نتيجة للتجربة مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين .**

اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X, Y) , أيكون X و Y مستقلان احتمالياً ؟

Y يأخذ قيمة في المجموعة $J = \{1,2,3\}$, X يأخذ قيمة في المجموعة $I = \{1,2\}$

$X \backslash Y$	$(0,1)$ 1	$(0,2)$ 2	$(1,2)$ 3	$P(x_i)$
(R, B) 1	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$ +
(B, B) 2	0	0	$\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$ ||
$P(y_j)$	$\frac{1}{3}$ +	$\frac{1}{3}$ +	$\frac{1}{3}$ =	$\boxed{1}$

أيكون X و Y مستقلان احتمالياً :

$P_1 = \frac{2}{3}$, $\acute{P}_1 = \frac{1}{3}$ $P_{11} = \frac{1}{3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1 \cdot \acute{P}_1 = \frac{2}{9} \\ P_{11} = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 \cdot \acute{P}_1 \neq P_{11}$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً .

تدرب صفحة 187:

1) نجد في الجدول المجاور القانون الاحتمالي لزوج (Y , X) من المتحولات العشوائية , أكمله و بيّن إذا كان المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً .

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	
1	$\frac{17}{60}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{24}$	
قانون Y				

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	$\frac{1}{20}=\boxed{\frac{6}{120}}$	$\frac{1}{8}=\boxed{\frac{15}{120}}$	$\frac{1}{8}=\boxed{\frac{15}{120}}$	$\frac{36}{120}$
1	$\frac{17}{60}=\boxed{\frac{34}{120}}$	$\frac{3}{8}=\boxed{\frac{45}{120}}$	$\frac{1}{24}=\boxed{\frac{5}{120}}$	$+\ \frac{84}{120}$
قانون Y	$\frac{40}{120}$	$\frac{60}{120}$	$\frac{20}{120}$	$\boxed{1}$

أيكون X و Y مستقلان احتمالياً :

$$P_1=\frac{36}{120}\ ,\ \grave{P}_1=\frac{40}{120}\ \Longrightarrow\ \left.\begin{array}{l}P_1\,.\,\grave{P}_1=\frac{36}{120}\times\frac{40}{120}=\frac{1}{10}\\ P_{11}=\frac{6}{120}=\frac{1}{20}\end{array}\right\}\Longrightarrow\ P_1\,.\,\grave{P}_1\neq P_{11}$$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً

---

2) أكمل الجدول المجاور الذي يمثل القانون الاحتمالي لزوج من المتحولات العشوائية (X , Y) , علماً أن المتحولين العشوائيين X و Y مستقلان احتمالياً .

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0				0.4
1			0.04	
2				0.4
قانون Y	0.3			

بما أن X و Y مستقلان احتمالياً عندئذ :

- $P_{00}=P_0\times\grave{P}_0=0.4\times0.3=0.12$
  $P_{20}=P_2\times\grave{P}_0=0.4\times0.3=0.12$
- $P_{00}+P_{10}+P_{20}=0.3$
  $0.12+P_{10}+0.12=0.3\Longrightarrow P_{10}=0.06$
- $P_0+P_1+P_2=1$
  $0.4+P_1+0.4=1\Longrightarrow P_1=0.2$
- $P_{10}+P_{11}+P_{12}=0.2$
  $0.06+P_{11}+0.04=0.2\Longrightarrow P_{11}=0.1$
- $P_{11}=P_1\times\grave{P}_1$
  $0.1=0.2\times\grave{P}_1\Longrightarrow\grave{P}_1=0.5$
- $P_{01}=P_0\times\grave{P}_1$
  $=0.4\times0.5=0.2\Longrightarrow P_{01}=0.2$
- $P_{01}+P_{11}+P_{21}=\grave{P}_1$
  $0.2+0.1+P_{21}=0.5\Longrightarrow P_{21}=0.2$
- $\grave{P}_0+\grave{P}_1+\grave{P}_2=1$
  $0.3+0.5+\grave{P}_2=1\Longrightarrow\grave{P}_2=0.2$
- $P_{02}=P_0\times\grave{P}_2$
  $=0.4\times0.2\Longrightarrow P_{02}=0.08$
- $P_{22}=P_2\times\grave{P}_2$
  $=0.4\times0.2\Longrightarrow P_{22}=0.08$

اصبح الجدول كاملاً :

X \ Y	0	1	2	قانون X
0	0.12	0.2	0.08	0.4 +
1	0.06	0.1	0.04	0.2 +
2	0.12	0.2	0.08	0.4
قانون Y	0.3 +	0.5 +	0.2	$\boxed{1}$

---

3) نلقي حجري نرد متوازنين . ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل مجموع رقمي الوجهين الظاهرين و ليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل أصغر هذين الرقمين . اكتب الجدول الذي يمثل القانون الاحتمالي للزوج (X,Y) ، و استنتج القانون الاحتمالي لكل من X و Y ، و احسب توقع و تباين كل من X و Y

أيكون X و Y مستقلين احتمالياً ؟ $n(\Omega) = 6^2 = 36$

Y يأخذ قيمه في المجموعة $J = \{1,2,3,4,5,6\}$

X يأخذ قيمه في المجموعة $I = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$

X \ Y	1	2	3	4	5	6	قانون X
2	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$ +
3	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$ +
4	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	0	$\frac{3}{36}$ +
5	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	0	$\frac{4}{36}$ +
6	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	0	$\frac{5}{36}$ +
7	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	0	$\frac{6}{36}$ +
8	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	0	$\frac{5}{36}$ +
9	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{2}{36}$	0	0	$\frac{4}{36}$ +
10	0	0	0	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	0	$\frac{3}{36}$ +
11	0	0	0	0	$\frac{2}{36}$	0	$\frac{2}{36}$ +
12	0	0	0	0	0	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
قانون Y	$\frac{11}{36}$ +	$\frac{9}{36}$ +	$\frac{7}{36}$ +	$\frac{5}{36}$ +	$\frac{3}{36}$ +	$\frac{1}{36}$	$\boxed{1}$

♦ حساب التوقع و التباين للمتحول X :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$
$E(X)=\sum_{i=1}^{11} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{36}$ +	$\frac{6}{36}$ +	$\frac{12}{36}$ +	$\frac{20}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{42}{36}$ +	$\frac{40}{36}$ +	$\frac{36}{36}$ +	$\frac{30}{36}$ +	$\frac{22}{36}$ +	$\frac{12}{36}$ $=7$
x_i^2	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144
$\sum_{i=1}^{11} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{4}{36}$ +	$\frac{18}{36}$ +	$\frac{48}{36}$ +	$\frac{100}{36}$ +	$\frac{180}{36}$ +	$\frac{294}{36}$ +	$\frac{320}{36}$ +	$\frac{324}{36}$ +	$\frac{300}{36}$ +	$\frac{242}{36}$ +	$\frac{144}{36}=\frac{1974}{36}$

$$E(X)=7 \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{11} x_i^2 . P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{1974}{36}-49=\frac{210}{36}=\frac{35}{6}=5.8$$

♦ حساب التوقع و التباين للمتحول Y :

y_j	1	2	3	4	5	6
$P(y_j)$	$\frac{11}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$
$E(Y)=\sum_{j=1}^{6} y_j P(y_j)$	$\frac{11}{36}$ +	$\frac{18}{36}$ +	$\frac{21}{36}$ +	$\frac{20}{36}$ +	$\frac{15}{36}$ +	$\frac{6}{36}=\frac{91}{36}$
y_j^2	1	4	9	16	25	36
$\sum_{j=1}^{6} y_j^2 . P(y_j)$	$\frac{11}{36}$ +	$\frac{36}{36}$ +	$\frac{63}{36}$ +	$\frac{80}{36}$ +	$\frac{75}{36}$ +	$\frac{36}{36}=\frac{301}{36}$

$$E(Y)=\frac{91}{36} \quad , \quad V(Y)=\sum_{j=1}^{6} y_j^2 . P(y_j)-\left(E(Y)\right)^2=\frac{301}{36}-\left(\frac{91}{36}\right)^2=\frac{2555}{1296}=1.971$$

$$P_1=\frac{1}{36} \ , \ \grave{P}_1=\frac{11}{36} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_1 . \grave{P}_1=\frac{1}{36}\times\frac{11}{36}=\frac{11}{1296} \\ P_{11}=\frac{1}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow P_1 . \grave{P}_1 \neq P_{11}$$

إذاً المتحولان X و Y ليسا مستقلان احتمالياً

****

المتحولات العشوائية الحدانية (التجارب البرنولية)

تعريف : عندما نهتم في تجربة عشوائية ما , فقط بوقوع حدث معين S نطلق على هذه التجربة اسم اختبار برنولي

توضيح: إذا كنا أمام تجربة نهتم بوقوع الحدث S عدد من المرات قدرها K و ذلك عند تكرار هذه التجربة n مرة نكون أمام اختبار برنولي. بفرض احتمال وقوع الحدث S هو P فإن احتمال حدث عدم وقوعه $\grave{S}$ هو $1-P$

و نقول أن المتحول العشوائي X يتبع قانوناً حدانياً بوسيطين n و P و نرمز لهذا القانون بالرمز $B(n,P)$

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k} P^k . q^{n-k}} \quad , \quad q=1-P \quad , \quad 0\le k\le n \ ; \ k \text{ عدد طبيعي}$$

قانونا التوقع و التباين لمتحول عشوائي حداني : $\boxed{V(X)=n\,P(1-P)}$ $\boxed{E(X)=n\,P}$

مثال ① : نلقي حجر نرد متوازن ثلاثة مرات على التتالي , ما احتمال الحصول على العدد 4 مرتين فقط ؟

الحل : يمكن اعتبار رمي حجر النرد ثلاثة مرات متوالية تجربة برنولية فيها $n=3$ و $k=2$

و فيها احتمال الحصول على العدد (4) في كل رمية هو $P=\frac{1}{6}$

فيكون احتمال عدم الحصول على العدد (4) في كل رمية هو $q=\frac{5}{6}$

و منه حسب القانون الحداني : $P(X=k)=\binom{n}{k}P^k \cdot q^{n-k}$

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1=(3)\left(\frac{1}{36}\right)\left(\frac{5}{6}\right)=\frac{5}{72}$$

مثال ② : نلقي خمس قطع نقود متوازنة في آن معاً , ما احتمال الحصول على الوجه H ثلاث مرات فقط ؟

الحل : نحن امام تجربة برنولية فيها $n=5$ و $k=3$

و فيها احتمال الحصول على الوجه H في الرمية الواحدة هو : $P=\frac{1}{2}$

فيكون احتمال عدم الحصول على الوجه H في الرمية الواحدة هو : $q=\frac{1}{2}$

و حسب القانون الحداني : $P(X=k)=\binom{n}{k}P^K \cdot q^{n-k}$

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=(10)\left(\frac{1}{8}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{16}$$

مثال ③ : نلقي حجر نرد متوازن 6 مرات و ليكن A الحدث <<الحصول مرتين على الأقل على 5 أو 6>>

فما احتمال وقوع الحدث A ؟

الحل : نحن أمام تجربة برنولية فيها $n=6$ و عندما يكون الحدث A من النمط (على الأقل) يفضل حساب احتمال الحدث المتمم $\acute{A}$, $\acute{A}$ حدث يدل على عدم الحصول على 5 أو 6 أو الحصول عليهما مرة واحدة فقط

و منه يكون $n=6$ و $k=\{0,1\}$

و يكون احتمال ظهور العدد 5 أو 6 هو $P=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ لأن : $\left.\begin{array}{l}P(5)=\frac{1}{6}\\ P(6)=\frac{1}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow P=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}$

و يكون احتمال عدم ظهور العدد 5 أو 6 هو $q=\frac{2}{3}$

$$\left.\begin{array}{l}P(X=k)=\binom{n}{k}P^k \cdot q^{n-k}\\ k=\{0,1\}\end{array}\right\}\begin{array}{l}P(X=0)=\binom{6}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(\frac{2}{3}\right)^6=\left(\frac{2}{3}\right)^6\\ P(X=1)=\binom{6}{1}\left(\frac{1}{3}\right)^1\left(\frac{2}{3}\right)^5=2\left(\frac{2}{3}\right)^5\end{array}$$

$$P(\acute{A})=P(X=0)+P(X=1)$$

$$P(\acute{A})=\left(\frac{2}{3}\right)^6+2\left(\frac{2}{3}\right)^5=\left(\frac{2}{3}+2\right)\left(\frac{2}{3}\right)^5=\frac{256}{729}$$

و عليه يكون احتمال A المطلوب هو : $P(A)=1-P(\acute{A})$

$$=1-\frac{256}{729}\Rightarrow P(A)=\frac{473}{729}$$

****

ملاحظات و نتائج : نكون امام تجربة برنولية في الحالات الآتية :

① تجربة إلقاء (حجر نرد أو قطعة نقود) عدداً من المرات.

② السحب على التتالي مع الإعادة و الاهتمام بالحصول على حدث واحد فقط.

③ إلقاء عدد من قطع النقود (او احجار النرد) المرقمة في آن معاً.

④ عند حساب احتمال وقوع حدث معين عدداً من المرات (k) , عند تكرار التجربة (n) مرة.

تدرب صفحة 192:

1) يحتوي صندوق على كرات حمراء و كرات بيضاء عدد الكرات الحمراء يساوي ثلاثة اضعاف عدد الكرات البيضاء .

① نسحب عشوائياً كرة , ما احتمال ان تكون حمراء اللون ؟

– نفرض عدد الكرات البيضاء n
– فيكون عدد الكرات الحمراء $3n$
و مجموع كرات الصندوق $= 4n$

$$\overbrace{(n)W \qquad (3n)R}^{4n \text{ كرة}}$$

A : الحدث الكرة المسحوبة حمراء اللون $P(A) = \frac{3n}{4n} = \frac{3}{4}$

(و هو احتمال سحب كرة بيضاء) $\Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

② نسحب من الصندوق ثلاث كرات على التتالي و مع الإعادة و نعرف X المتحول العشوائي الذي يدل على عدد الكرات الحمراء المسحوبة أثناء عمليات السحب الثلاث , ما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

$$I = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \}$$

$(W,W,W)\ (R,W,W)\ (R,R,W)\ (R,R,R)$

$n = 3$, $P = \frac{3}{4}$, $q = \frac{1}{4}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^k . q^{n-k} \quad ; k = \{0,1,2,3\}$$

$$P(0) = \binom{3}{0}\left(\frac{3}{4}\right)^0\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

$$P(1) = \binom{3}{1}\left(\frac{3}{4}\right)^1\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{9}{64}$$

$$P(2) = \binom{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

$$P(3) = \binom{3}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^0 = \frac{27}{64}$$

فيكون القانون الاحتمالي:

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{1}{64}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{64}$	$\frac{27}{64}$

---

2) نلقي حجر نرد متوازن ست مرات متتالية , ما احتمال الحصول على العدد 6 ثلاث مرات وفقط ثلاث مرات ؟

الحل :

- نحن امام تجربة برنولية فيها $n = 6$ و $k = 3$
- احتمال الحصول على الرقم (6) في الرمية الواحدة: $P = \frac{1}{6}$
- احتمال عدم الحصول على الرقم (6) في الرمية الواحدة: $q = \frac{5}{6}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} P^k . q^{n-k}$$

$$P(X = 3) = \binom{6}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{11664}$$

3) نلقي حجر نرد متوازن ثماني مرات متتالية. ليكن A الحدث : (الحصول على عدد زوجي ثلاث مرات على الأقل) .
ما احتمال A ؟

- نحن امام تجربة برنولية فيها $n = 8$
- عندما يكون الحدث A من النمط (على الأقل) يفضل حساب الحدث المتمم $\acute{A}$
- $\acute{A}$ حدث يدل على عدم الحصول على عدد زوجي أو الحصول على عدد زوجي مرة واحدة او مرتين
- و منه : $n = 8$ و $k = \{0,1,2\}$
- احتمال الحصول على عدد زوجي في الرمية الواحدة : $P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$
- احتمال عدم الحصول على عدد زوجي في الرمية الواحدة : $q = \frac{1}{2}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot q^{n-k} \qquad ; k = \{0,1,2\}$$

$$P(X = 0) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$P(X = 1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{2}\right)^1\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 8\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$P(X = 2) = \binom{8}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^6 = 28\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$P(\acute{A}) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(\acute{A}) = \left(\frac{1}{2}\right)^8 + 8\left(\frac{1}{2}\right)^8 + 28\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^8 [1 + 8 + 28] = 37\left(\frac{1}{2}\right)^8$$

$$\Rightarrow P(A) = 1 - P(\acute{A})$$

$$= 1 - 37\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{219}{256}$$

---

4) يتواجه لاعبان A و B في لعبة كرة المضرب في مباراة مكونة من تسعة أدوار, يكسب A الدور الواحد باحتمال 0.6 يربح المباراة اللاعب الذي يكسب أكبر عدد من الأدوار, ما احتمال أن يربح B المباراة ؟

هذه تجربة برنولية , ليكن X عدد الأدوار التي يكسبها A بعد انتهاء المباراة
المباراة مكونة من تسعة ادوار إذاً $n = 9$, علماً أن احتمال ربحه في الدور الواحد يساوي $P = 0.6$
فيكون احتمال خسارته في الدور الواحد يساوي $q = 0.4$
لكي يربح اللاعب B المباراة يجب أن يربح اللاعب A أربعة أدوار على الأكثر أي المطلوب حساب $P(X \leq 4)$:

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= \binom{9}{0}(0.6)^0(0.4)^9 + \binom{9}{1}(0.6)^1(0.4)^8 + \binom{9}{2}(0.6)^2(0.4)^7 + \binom{9}{3}(0.6)^3(0.4)^6$$

$$+ \binom{9}{4}(0.6)^4(0.4)^5 \approx 0.2666$$

****

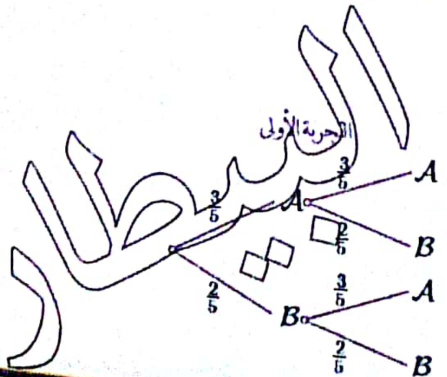
انشطة

نشاط 1 : إنشاء واستعمال التمثيل الشجري:

أولاً : السحب مع الإعادة وبدونها: يحتوي صندوق على ثلاثة حروف A وحرفين اثنين B

- التجربة الأولى: نسحب عشوائياً حرفاً من الصندوق ونسجل النتيجة ثم نعيده إلى الصندوق ونسحب حرفاً ثانياً ونسجل النتيجة.

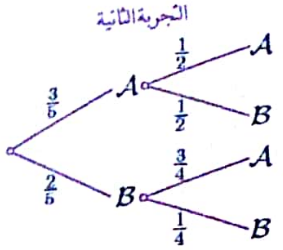
ما احتمال الحصول على AA في التجربة الأولى؟



نسمي X الحدث الحصول على AA في التجربة الأولى.

$$P(X) = \frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

- التجربة الثانية: نسحب عشوائياً وعلى التتالي حرفين من الصندوق واحداً إثر الآخر دون إعادة ونسجل النتيجة بترتيب السحب.



ما احتمال الحصول على AA في التجربة الثانية؟

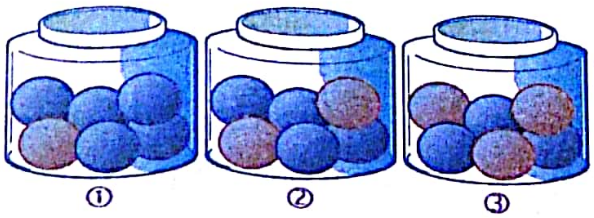
نسمي Y الحدث الحصول على AA

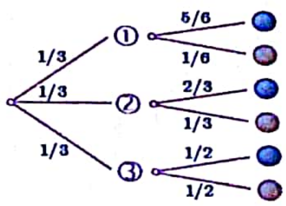
$$P(Y) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}$$

ثانياً: اختيار سحب صندوق ثم سحب كرة:

تتألف التجربة من مرحلتين، نختار عشوائياً واحداً من الصناديق الثلاثة المبينة في الشكل ثم نختار منه كرة ولقد أنشأنا التمثيل الشجري الموافق لهذه التجربة، اشرح هذا الإنشاء ثم أعط احتمال الحدث «سحب كرة زرقاء اللون»

وإذا كانت نتيجة السحب كرة زرقاء فما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق ②؟





- نسمي الحدث B سحب كرة زرقاء اللون

$$P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{6} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$$

- وقع $B = \{(ز,1),(ز,2),(ز,3)\}$

الكرة المسحوبة من الصندوق الثاني $= A$

$$A \cap B = \{(ز,2)\}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$$

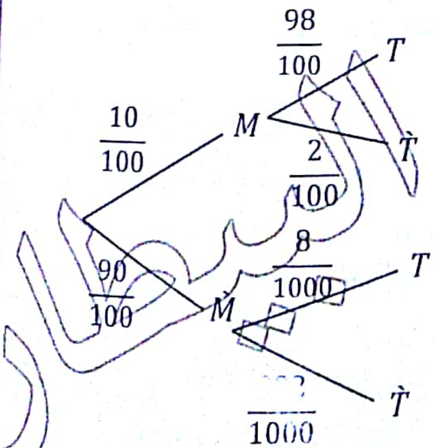
نشاط ② : فحص الأمراض:

يصيب مرض نسبة 10% من السكان. يتيح اختبار اكتشاف إذا كان شخص مصاباً بهذا المرض يجب أن تكون نتيجة الاختبار إيجابية في حال كون الشخص مصاباً. ولكن احتمال أن تكون النتيجة إيجابية مع كون الشخص الخاضع للاختبار غير مصاب بالمرض يساوي 0.008 . أما احتمال أن تكون نتيجة الاختبار سلبية على الرغم من كون الشخص الخاضع للاختبار مصاباً فيساوي 0.02

لنرمز بالرمز M إلى الحدث (الشخص مصاب بالمرض) وبالرمز T إلى الحدث (نتيجة الاختبار إيجابية)

نختار شخصاً عشوائياً

1. انشئ تمثيلاً شجرياً محدداً عليه الاحتمالات المعطاة في النص



2. احسب احتمال ان يكون الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية

A حدث الشخص غير مصاب بالمرض ومع ذلك نتيجة اختباره إيجابية

$$P(A) = \frac{90}{100} \times \frac{8}{1000} = \frac{72}{10000}$$

3. احسب احتمال ان تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض

B حدث ان تكون نتيجة الاختبار سلبية ومع ذلك الشخص مصاب بالمرض

$$P(B) = \frac{10}{100} \times \frac{2}{100} = \frac{2}{1000}$$

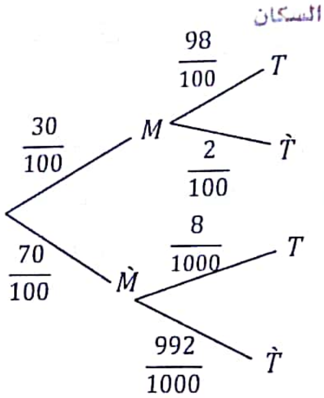
4. استنتج احتمال ان يكون الاختبار موثوقاً أي احتمال أن يعطي الاختبار نتيجة إيجابية في حالة شخص مصاب بالمرض ونتيجة سلبية في حالة شخص غير مصاب بالمرض

$$P(C) = P(M \cap T) + P(\grave{M} \cap \grave{T})$$
$$= \frac{10}{100} \times \frac{98}{100} + \frac{90}{100} \times \frac{992}{1000} = \frac{9908}{10000}$$

5. اجب عن الأسئلة السابقة ذاتها بافتراض أن المرض يصيب نسبة 30% من السكان

يصبح المخطط الشجري كما يلي:

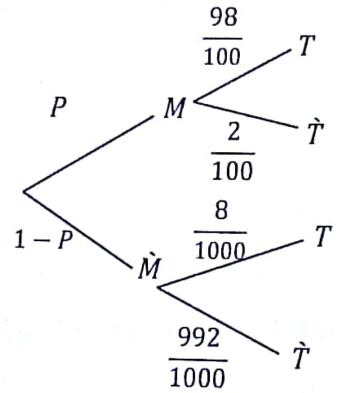
وبنفس الأسلوب نحصل على حل الطلبات



6. عمم النتائج السابقة بافتراض أن احتمال الإصابة بالمرض يساوي P

يصبح المخطط الشجري كما يلي:

وحل الطلبات بنفس الطريقة السابقة ولكن النتائج بدلالة P



نشاط ③: متحولات عشوائية واحتمالات شروطه:

ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد زبائن محطة لتوزيع الوقود في فترة خمس دقائق. نفترض أن عدد الزبائن هذا لا يتجاوز 2 . أما القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X فهو كما يأتي:

k	0	1	2
$\mathbb{P}(X = k)$	0.1	0.5	0.4

يشتري كل زبون إما البنزين او المازوت. احتمال أن يشتري الزبون البنزين يساوي 0.4 واحتمال أن يشتري المازوت 0.6

• إن ما يشتريه الزبون مستقل عما يشتريه الزبائن الآخرون وعن عدد الزبائن.

لنرمز بالرمز C_k إلى الحدث $(X = k)$ تسهيلاً للكتابة، ولنرمز بالرمز E إلى الحدث «في خمس دقائق يشتري زبون، وزبون واحد فقط، البنزين» استعن بتمثيل شجري او بأي أسلوب آخر في الإجابة عن الأسئلة الآتية:

① .a احسب $P(C_1 \cap E)$

الحدثان C_1 و E مستقلين احتمالياً:

$$P(C_1 \cap E) = P(C_1) \times P(E)$$
$$= 0.5 \times 0.4 = 0.2$$

.b علل لماذا $P(E|C_2) = 0.48$ واستنتج $P(C_2 \cap E)$

نلاحظ انه إذا وقع C_2 فيوجد في المحطة زبونان وعدد الذين يشترون البنزين من بينهم هو متحول حداني $B(n, P) = B(2{,}0.4)$ ومنه:

$$P(E|C_2) = P(X = 1) = \binom{2}{1}\ (0.4)^1(0.6)^1 = 0.48$$

نستنتج ان:

$$P(E \cap C_2) = (C_2).P(E|C_2)$$
$$= 0.4 \times 0.48 = 0.192$$

.c استنتج مما سبق قيمة $P(E)$

$$P(E) = P(E \cap C_0) + P(E \cap C_1) + P(E \cap C_2)$$
$$= \quad 0 \quad + \quad 0.2 \quad + \quad 0.192 \quad = \quad 0.392$$

② ليكن Y المتحول العشوائي الذي يعطي عدد الزبائن الذين يشترون البنزين بخمس دقائق.

.a ما هي القيم التي يأخذها Y

$$j = \{0,1,2\}$$

.b اكتب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y.

نرمز بالرمز E_k للدلالة إلى الحدث $(Y = k)$ عندئذ:

$$P(E_0) = P(E_0 \cap C_0) + P(E_0 \cap C_1) + P(E_0 \cap C_2)$$
$$= \quad 0.1 \quad + \ 0.5 \times 0.6 \ + \ 0.4 \times (0.6)^2 \ = 0.544$$

و $P(E_1) = P(E) = 0.392$

$$P(E_2) = P(E_2 \cap C_0) + P(E_2 \cap C_1) + P(E_2 \cap C_2)$$
$$= \quad 0 \quad + \quad 0 \quad + 0.4 \times (0.4)^2 = 0.064$$

.C اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X, Y)

القانون الاحتمالي للزوج (X, Y):

$X \backslash Y$	0	1	2	قانون X
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
قانون Y	0.544	0.392	0.064	

.d أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً

من الواضح ان المتحولين العشوائيين X و Y غير مستقلين احتمالياً لأن:

$$\left.\begin{aligned} P(X = 1) \cap P(Y = 1) = 0.2 \\ P(X = 1)\,.\,P(Y = 1) = 0.5 \times 0.392 \end{aligned}\right\} \ P(X = 1) \cap P(Y = 1) \neq P(X = 1)\,.\,P(Y = 1)$$

تمرينات ومسائل صفحة 198

1) يحتوي صندوق على خمس كرات. ثلاث كرات سوداء اللون وتحمل الأرقام 1 و 2 و 3 وكرتان حمراوان تحملان الأرقام 1 و 2 . نسحب عشوائياً وفي آن معاً كرتين من هذا الصندوق. يتكون فضاء العينة إذن من مجموعة المجموعات الجزئية المؤلفة من عنصرين والماخوذة من بين خمسة عناصر .

1. ما احتمال الحدث A : « للكرتين المسحوبتين اللون ذاته» ؟

$$A=\{(R,R),(B,B)\}$$

$$P(A)=\frac{\binom{2}{2}+\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1+3}{10}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

2. ما احتمال الحدث B: « مجموع رقمي الكرتين المسحوبتين يساوي 3»؟

$$B=\{(1,2)\}$$

$$P(B)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$$

3. ما احتمال الحدث B علماً أن A قد وقع؟

$$A\cap B=\{(R_1,R_2),(B_1,B_2)\}\quad,\quad B=\{(1,2)\}\quad,\quad A=\{(R,R),(B,B)\}$$

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}+\binom{1}{1}\cdot\binom{1}{1}}{\binom{5}{2}}=\frac{1+1}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}\quad,\quad P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}$$

---

2) نلقي حجر نرد متوازن مرة واحدة، ونتأمل الحدث A : «العدد الظاهر زوجي» والحدث B: «العدد الظاهر اولي».
ايكون هذان الحدثان مستقلين احتمالياً؟

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$$

العدد الظاهر زوجي $A=\{2,4,6\}\Rightarrow P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

العدد الظاهر أولي $B=\{2,3,5\}\Rightarrow P(B)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$$A\cap B=\{2\}\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$\left.\begin{array}{l}P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)\times P(B)$$

فالحدثان B , A ليسا مستقلان احتمالياً

---

3) تتألف عائلة من اربعة اطفال. نقبل انه عند كل ولادة، احتمال ولادة طفل ذكر يساوي احتمال ولادة طفلة أنثى.
ونفترض أن الولادات المتتالية هي احداث مستقلة احتمالياً. نرمز A و B و C إلى الأحداث:

A: «للأطفال الأربعة الجنس نفسه» , B: «هناك طفلان ذكران وطفلتان» , C: «الطفل الثالث أنثى»

1) احسب احتمال وقوع كل من الأحداث A و B و C.

نرمز للذكر بالرمز M والأنثى بالرمز F فيكون: $n(\Omega)=2^4=16$

الحدث الأطفال الأربعة من نفس الجنس : $A=\{(F,F,F,F),(M,M,M,M)\}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}$

الحدث طفلان ذكران و طفلتان : $B=\left\{\begin{array}{l}(F,F,M,M),(M,M,F,F),(F,M,F,M),\\(M,F,M,F),(F,M,M,F),(M,F,F,M)\end{array}\right\}\Rightarrow P(B)=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$

الحدث الطفل الثالث أنثى : $C=\left\{\begin{array}{c}(F,F,F,F),(F,F,F,M),(F,M,F,F),\\(M,F,F,F),(F,M,F,M),(M,F,F,M),\\(M,M,F,F),(M,M,F,M)\end{array}\right\}\Rightarrow P(C)=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$

2) احسب $P(A \cap C)$ ثم $P(C|A)$. ايكون الحدثان C, A مستقلين احتمالياً؟

$$A \cap C = \{(F,F,F,F)\}$$

$$P(A \cap C) = \frac{n(A \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{1}{16} \quad , \quad P(C|A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{16}}{\frac{2}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(A) \times P(C) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16} \\ P(A \cap C) = \frac{1}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow P(A \cap C) = P(A) \times P(C)$$

إذاً C, A مستقلين احتمالياً

3) احسب $P(B \cap C)$ ثم $P(C|B)$ ايكون الحدثان C, B مستقلين احتمالياً؟

$$B \cap C = \{(M,F,F,M), (F,M,F,M), (M,M,F,F)\}$$

$$P(B \cap C) = \frac{n(B \cap C)}{n(\Omega)} = \frac{3}{16}$$

$$P(C|B) = \frac{P(B \cap C)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{6}{16}} = \frac{1}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(B) \times P(C) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} \\ P(B \cap C) = \frac{3}{16} \end{array}\right\} \Rightarrow P(B \cap C) = P(B) \times P(C)$$

إذ C, B مستقلين احتمالياً

---

4) يحتوي صندوق على اربع كرات زرقاء، وثلاث كرات خضراء وواحدة صفراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المختلفة بين الكرات المسحوبة.

1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها X؟

$$I = \{1 \ , \ 2 \ , \ 3\}$$

2. احسب كلاً من $P(X=1)$, $P(X=3)$

$$P(X=1) = \frac{\binom{4}{3} + \binom{3}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{5}{56} \quad , \quad P(X=3) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1} \cdot \binom{1}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{12}{56}$$

3. استنتج قيمة $P(X=2)$.

بما أن:

$$P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$$

$$\frac{5}{56} + P(X=2) + \frac{12}{56} = 1 \Rightarrow P(X=2) = \frac{39}{56}$$

4. احسب توقع X وانحرافه المعياري .

x_i	1	2	3	
$P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$\frac{39}{56}$	$\frac{12}{56}$	
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$+ \frac{78}{56}$	$+ \frac{36}{56}$	$= \frac{119}{56} = \frac{17}{8}$
x_i^2	1	4	9	
$\sum_{i=1}^{3} x_i^2 P(x_i)$	$\frac{5}{56}$	$+ \frac{156}{56}$	$+ \frac{108}{56}$	$= \frac{269}{56}$

$$E(X)=\frac{119}{56}\quad,\quad V(X)=\sum_{i=1}^{3}x_i{}^2P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{269}{56}-\left(\frac{17}{8}\right)^2=\frac{903}{3136}=\frac{129}{448}\approx 0.288$$

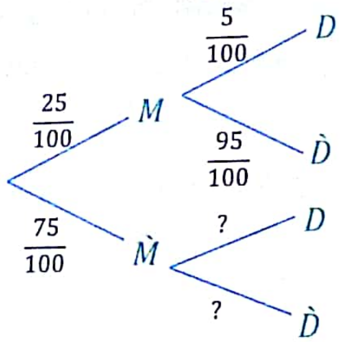
$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{0.288}\approx 0.537$$

5) **<u>احتمال مشروط:</u> تبين دراسة إحصائية أجريت على جماعة من الرياضيين انه اثناء فترة المسابقة يكون احتمال ان يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية عند إخضاع احد الرياضيين له مساوياً 0.02 ويمكن لتناول بعض ادوية الرشح ان يؤثر في نتيجة الاختبار السابق. يتناول 25% من الرياضيين في الجماعة ادوية الرشح في الشتاء. وبين هؤلاء يكون احتمال ان يعطي اختبار تعاطي المنشطات نتيجة إيجابية مساوياً 0.05**

ليكن M الحدث: «الرياضي يستعمل دواء الرشح». وليكن D الحدث: «نتيجة اختبار تعاطي المنشطات إيجابية».

يجري اختيار احد الرياضيين من الجماعة عشوائياً احسب احتمال كل من الحدثين:

- **«الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية».**
- **«الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً انه لا يستعمل دواء الرشح»**



الحدث M الرياضي يستعمل دواء الرشح ومنه : $P(M)=\frac{25}{100}$

الحدث $\grave{M}$ الرياضي لا يستعمل دواء الرشح ومنه : $P(\grave{M})=\frac{75}{100}$

الحدث D نتيجة اختبار المنشطات إيجابية ومنه : $P(D)=\frac{2}{100}$

الحدث $\grave{D}$ نتيجة اختبار المنشطات سلبية ومنه : $P(\grave{D})=\frac{98}{100}$

1. احسب احتمال الحدث: الرياضي يستعمل دواء الرشح ونتيجة اختبار تعاطيه المنشطات إيجابية

$$P(M\cap D)=\frac{25}{100}\times\frac{5}{100}=\frac{125}{10000}$$

2. احسب احتمال الحدث: الرياضي يعطي عند اختبار تعاطيه المنشطات نتيجة إيجابية علماً انه لا يستعمل دواء الرشح.

$$P(D|\grave{M})=\frac{P(\grave{M}\cap D)}{P(\grave{M})}$$

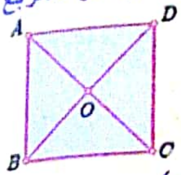
$$P(D)=P(M\cap D)+P(\grave{M}\cap D)\qquad :P(\grave{M}\cap D)\ \text{لنحسب}$$

$$\frac{2}{100}=\frac{125}{10000}+P(\grave{M}\cap D)\Rightarrow P(\grave{M}\cap D)=\frac{75}{10000}$$

$$P(D|\grave{M})=\frac{P(\grave{M}\cap D)}{P(\grave{M})}=\frac{\frac{75}{10000}}{\frac{75}{100}}=\frac{1}{100}$$

6) **تجوال عشوائي**

نتأمل مربعاً $ABCD$ مركزه O. تقفز جزيئة بأسلوب عشوائي من إحدى هذه النقاط الخمس إلى نقطة اخرى وفق القواعد الآتية: إذا كانت الجزيئة عند احد رؤوس المربع فإنها تقفز إلى احد الرأسين المجاورين او إلى مركز المربع باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$. (فمثلاً من A يمكنها ان تنتقل إلى B او D او O).



وإذا كانت الجزيئة في O فإنها تقفز إلى اي من الرؤوس D, C, B, A باحتمال يساوي $\frac{1}{4}$.

في البدء كانت الجزيئة في A. في حالة $n \geq 1$

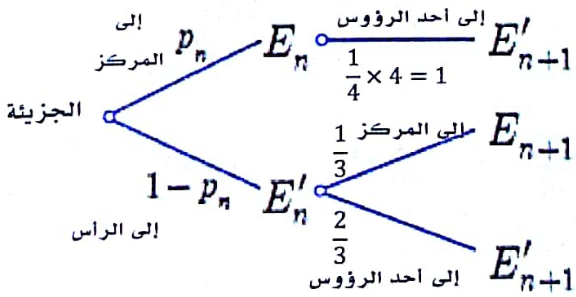
نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: «الجزيئة في O بعد القفزة رقم n» وليكن $p_n = P(E_n)$ (إذن $p_1 = \frac{1}{3}$)

يطلب إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n، ثم حساب p_n بدلالة n.

- إذا كانت الجزيئة في أحد الرؤوس فإن احتمال أن تقفز إلى الرأسين المجاورين أو إلى المركز $= \frac{1}{3}$.
- إذا كانت الجزيئة في المركز فإن احتمال أن تقفز إلى أحد الرؤوس $= \frac{1}{4}$
- نرمز E_n إلى الحدث الجزيئة تصل إلى O بعد n قفزة ومنه $P_n = P(E_n)$
- نرمز E_{n+1} إلى الحدث الجزيئة تصل إلى O بعد $n+1$ قفزة ومنه $p_{n+1} = P(E_{n+1})$
- بالتالي نرمز $\grave{E}_n$ إلى الحدث الجزيئة تصل إلى أحد الرؤوس بعد n قفزة ومنه $P(\grave{E}_n) = 1 - P(E_n) = 1 - P_n$
- بالتالي نرمز $\grave{E}_{n+1}$ إلى الحدث الجزيئة تصل إلى أحد الرؤوس بعد $n+1$ قفزة ومنه:

$$P(\grave{E}_{n+1}) = 1 - P(E_{n+1}) = 1 - P_{n+1}$$

المطلوب : إيجاد علاقة تفيد في حساب p_{n+1} انطلاقاً من p_n ثم حساب p_n بدلالة n.



من المخطط الشجري السابق نجد:

$$\underbrace{P_{n+1}}_{\text{من الفرض}} = \frac{1}{3}(1 - P_n)$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - P_n) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_n = \frac{1}{4}}$$

أصبح لدينا المعادلتين:

$$-\begin{cases} P_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - P_n) \\ \frac{1}{4} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{3}(1 - p_n) - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left[1 - p_n - 1 + \frac{1}{4}\right]$$

$$\underbrace{P_{n+1} - \frac{1}{4}}_{} = \frac{-1}{3}\underbrace{\left[p_n - \frac{1}{4}\right]}_{}$$

$$\boxed{t_{n+1} = -\frac{1}{3}t_n}$$

أصبحت $(t_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{-1}{3}$

وحدها الأول $t_1 = p_1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

علاقة الحد العام : $t_n = t_1 . q^{(n-1)}$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} . \left(-\frac{1}{3}\right)^{-1}$$

$$t_n = \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} . (-3)$$

$$p_n - \frac{1}{4} = \frac{-1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$p_n = \frac{-1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} + \frac{1}{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n} = 0 \quad ;$$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$ متتالية هندسية و $-1 < \left(q = \frac{-1}{3}\right) < 1$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{4}$$

7) استعمال متحولين عشوائيين:

يتطلب إنجاز مهمة مرحلتين A و B على التوالي. تستغرق المرحلة الأولى عدداً عشوائياً من الأيام X_A يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

X	1	2	3
$P(X_A = x)$	0.2	0.5	0.3

وتستغرق المرحلة الثانية عدداً عشوائياً من الأيام X_B يعطى قانونه الاحتمالي بالجدول الآتي:

X	1	2	3	4
$P(X_B = x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

المتحولان العشوائيان X_A و X_B مستقلان احتمالياً. نرمز بالرمز E إلى الحدث: «يستغرق إنجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل»

أوجد احتمال E

لنشكل جدولاً مشتركاً بالمتحولين العشوائيين:

X_A \ X_B	1	2	3	4	قانون X_A
1	0.04	0.06	0.08	0.02	0.2
2	0.1	0.15	0.2	0.05	0.5
3	0.06	0.09	0.12	0.03	0.3
قانون X_B	0.2	0.3	0.4	0.1	$\boxed{1}$

الحدث E يستغرق انجاز المهمة ثلاثة أيام أو أقل إذاً: $P(E) = P_{11} + P_{12} + P_{21} = 0.04 + 0.06 + 0.1 = 0.2$

---

8) يضم ناد رياضي 80 سباحاً و 95 لاعب قوى و125 لاعب جمباز. يمارس كل رياضي لعبة واحدة فقط.

1. نطلب من ثلاثة لاعبين نختارهم عشوائياً ملء استبانة. احسب احتمال وقوع الحدثين الآتيين:

a) الحدث A : «يمارس اللاعبون الثلاثة العاب القوى».

$$P(A) = \frac{\binom{95}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{27683}{891020}$$

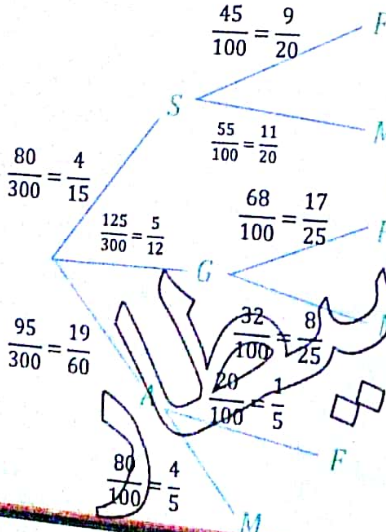
b) الحدث B: «يمارس اللاعبون الثلاثة الرياضة ذاتها».

$$P(B) = \frac{\binom{80}{3} + \binom{95}{3} + \binom{125}{3}}{\binom{300}{3}} = \frac{21533}{178204}$$

2. نسبة الفتيات بين الذين يمارسون السباحة تساوي 45% وبين الذين يمارسون العاب القوى 20% وهي تساوي 68% بين الذين يمارسون لعبة الجمباز.

a) نختار عشوائياً احد أعضاء النادي. احسب P_1 احتمال ان يكون فتاة تمارس إحدى العاب القوى.

احسب أيضاً P_2: احتمال ان يكون فتاة.



نرمز الحدث S يمارس اللاعب السباحة.

نرمز الحدث G يمارس اللاعب لعبة الجمباز.

نرمز الحدث A يمارس اللاعب العاب القوى.

نرمز للفتاة F والفتى M.

$$P_1 = P(A \cap F) = \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} = \frac{19}{300}$$

$$P_2 = P(S \cap F) + P(G \cap F) + P(A \cap F)$$

$$= \frac{4}{15} \times \frac{9}{20} + \frac{5}{12} \times \frac{17}{25} + \frac{19}{60} \times \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

b) نختار عشوائياً فتاة من اعضاء النادي. احسب p_3 احتمال ان تكون لاعبة جمباز.

$$P_3 = P(G|F) = \frac{P(G\cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{5}{12}\times\frac{17}{25}}{\frac{7}{15}} = \frac{17}{28}$$

---

9) يحتوي صندوق على خمس كرات حمراء وخمس كرات خضراء. نسحب عشوائياً وفي آن معاً ثلاث كرات. نتأمل المتحول العشوائي X الذي يأخذ القيمة 5 إذا كانت نتيجة السحب: ثلاث كرات حمراء (الحدث R_3) ويأخذ القيمة 3 إذا كانت نتيجة السحب: كرتان حمراوان وكرة خضراء (الحدث R_2) وأخيراً يأخذ القيمة 0 في باقي الحالات.

1. احسب $P(R_2)\,, P(R_3)$

R_3 الحدث سحب ثلاث كرات حمراء

$$P(R_3) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{1}{12}$$

R_2 الحدث سحب كرتان حمراوان وكرة خضراء

$$P(R_2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{\binom{10}{3}} = \frac{5}{12}$$

2. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X واحسب توقعه الرياضي وتباينه.

$I = \{\ 5\ ,\ 3\ ,\ 0\ \}$

(R,R,R) (R,R,G) باقي الحالات

$$P(X=5) = P(R_3) = \frac{1}{12}$$

$$P(X=3) = P(R_2) = \frac{5}{12}$$

$$P(X=0) = 1 - \big(P(R_3) + P(R_2)\big) = 1 - \left(\frac{1}{12} + \frac{5}{12}\right) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

x_i	5		3		0		
$P(x_i)$	$\frac{1}{12}$		$\frac{5}{12}$		$\frac{6}{12}$		
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{5}{12}$	$+$	$\frac{15}{12}$	$+$	0	$=\frac{20}{12}$	$=\frac{5}{3}$
${x_i}^2$	25		9		0		
$\sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 P(x_i)$	$\frac{25}{12}$	$+$	$\frac{45}{12}$	$+$	0	$=\frac{70}{12}$	$=\frac{35}{6}$

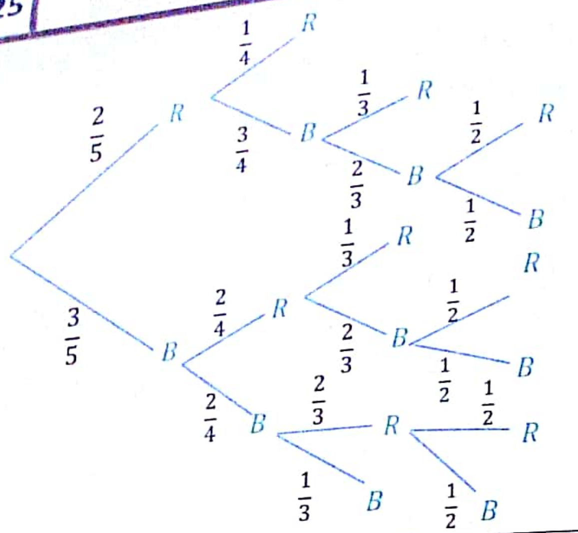
$$E(X) = \frac{5}{3} \quad , \quad V(X) = \sum_{i=1}^{3} {x_i}^2 P(x_i) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{35}{6} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{156}{54} = \frac{55}{18}$$

---

10) لدينا صندوق يحتوي على كرتين حمراوين وثلاث كرات زرقاء. نكرر عملية سحب عشوائي لكرة من الصندوق دون إعادة حتى لا يتبقى في الصندوق إلا كرات من اللون ذاته. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل عدد مرات السحب اللازمة. عين مجموعة القيم التي يأخذها X، وعين قانون X ، واحسب توقعه الرياضي.

$I = \{2,3,4\}$

$$P(2) = P(R,R) = \frac{2}{5}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{10}$$



$$P(3) = P(R,B,R) + P(B,R,R) + P(B,B,B)$$
$$= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{3} = \frac{3}{10}$$
$$P(4) = 1 - [P(2) + P(3)]$$
$$= 1 - \left[\frac{1}{10} + \frac{3}{10}\right] = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

x_i	2		3		4		
$P(x_i)$	$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{10}$		$\frac{6}{10}$		
$E(X) = \sum_{i=1}^{3} x_i P(x_i)$	$\frac{2}{10}$	$+$	$\frac{9}{10}$	$+$	$\frac{24}{10}$	$= \frac{35}{10}$	$= \frac{7}{2}$

$$E(X) = \frac{7}{2}$$

---

11) نلقي حجري نرد متوازنين ونرمز بالرمز S إلى مجموع النقاط التي نحصل عليها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 2، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يمثل باقي قسمة S على 4.

1. عين القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي S.

$$S(\Omega) = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$$

حيث S مجموع رقمي الوجهين الظاهريين.

$\boxed{+}$	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي :

S_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(S_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

2. عين القانونين الاحتماليين للمتحولين العشوائيين X و Y.

المتحول العشوائي X يمثل باقي قسمة S على (2) ، المتحول العشوائي Y يمثل باقي قسمة S على (4).

ملاحظة:

- باقي قسمة العدد (4) على العدد (2) هو العدد (0)
- باقي قسمة العدد (2) على العدد (4) هو العدد (2) لأن:

بشكل عام في عملية القسمة إذا كان البسط أصغر من المقام فإن ناتج القسمة (0) والباقي هو البسط دائماً

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_i	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
y_j	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0

قيم المتحول العشوائي X: $\Omega(X) = I = \{0,1\}$

x_i	0	1
$P(x_i)$	$\frac{18}{36}$	$\frac{18}{36}$

قيم المتحول العشوائي Y: $\Omega(Y) = J = \{0,1,2,3\}$

y_j	0	1	2	3
$P(y_j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$

3. عين القانون الاحتمالي للزوج (X,Y)

x_i \ y_j	0	1	2	3	$P(x_i)$
0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{9}{36}$	0	$\frac{18}{36}$
1	0	$\frac{8}{36}$	0	$\frac{10}{36}$	$\frac{18}{36}$
$P(y_j)$	$\frac{9}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\boxed{1}$

4. ايكون المتحولان العشوائيان X,Y مستقلين احتمالياً.

$$\left.\begin{array}{l} P(X=0)=\frac{18}{36} \quad , \quad P(Y=0)=\frac{9}{36} \\ P\big((X=0)\cap P(Y=0)\big)=\frac{9}{36} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{18}{36}\times\frac{9}{36}\neq\frac{9}{36}$$

$P(X=0).P(Y=0) \neq P\big((X=0)\cap(Y=0)\big)$ ، و منه المتحولان Y,X غير مستقلين احتمالياً

---

12) طائرات ذات محركين وأخرى ذات أربعة محركات

يجري تزويد طائرات ذات محركين وطائرات ذات أربعة محركات بالنوع ذاته من المحركات. إن احتمال حدوث عطل في احد هذه المحركات يساوي p وهو عدد موجب وأصغر تماماً من 1. نفترض ان الأعطال التي يمكن ان تصيب المحركات مستقلة عن بعضها. ليكن X المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات محركين، وليكن Y المتحول العشوائي الذي يساوي عدد المحركات التي يصيبها عطل على طائرة ذات أربعة محركات.

1) عين القيم الذي يأخذها X وقانونه الاحتمالي.

$I = \{0,1,2\}$

نحن امام تجربة حدانية فيها $n = 2$ ، $k \in \{0,1,2\}$

واحتمال ان يصيب احد محركات الطائرة عطل هو p .

واحتمال عدم إصابة أحد محركات الطائرة عطل هو $1 - p$.

$$P(X = k) = \binom{n}{k} . p^k . (1-p)^{n-k}$$
$$P(0) = \binom{2}{0} . p^0 . (1-p)^2 = (1-p)^2$$
$$P(1) = \binom{2}{1} . p^1 . (1-p) = 2p(1-p)$$
$$P(2) = \binom{2}{2} . p^2 . (1-p)^0 = p^2$$

x_i	0	1	2
$P(x_i)$	$(1-p)^2$	$2p(1-p)$	p^2

2) عين القيم التي يأخذها Y وقانونه الاحتمالي.

نحن امام تجربة حدانية فيها $n = 4$ ومجموعة القيم التي يأخذها Y : $k \in \{0,1,2,3,4\}$; $J = \{0,1,2,3,4\}$

$P(0) = \binom{4}{0} . p^0 . (1-p)^4 = (1-p)^4$, $P(1) = \binom{4}{1} . p^1 . (1-p)^3 = 4p(1-p)^3$

$P(2) = \binom{4}{2} . p^2 . (1-p)^2 = 6p^2(1-p)^2$, $P(3) = \binom{4}{3} . p^3 . (1-p) = 4p^3(1-p)$

$P(4) = \binom{4}{4} . p^4 . (1-p)^0 = p^4$

y_j	0	1	2	3	4
$P(y_j)$	$(1-p)^4$	$4p(1-p)^3$	$6p^2(1-p)^2$	$4p^3(1-p)$	p^4

3) يمكن لطائرة ان تتابع طيرانها إلى نقطة الوصول إذا كان نصف عدد محركاتها على الأقل غير معطل.

احسب p_2 احتمال أن تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها

احسب p_4 احتمال أن تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها.

حساب p_2 : تتابع طائرة ثنائية المحرك طيرانها إذا كان: { لا يوجد عطل أو محرك واحد معطل }

$p_2 = p(X \leq 1)$

$p_2 = 1 - p(X = 2)$ أو للسهولة

$\boxed{p_2 = 1 - p^2}$

حساب p_4 : تتابع طائرة رباعية المحرك طيرانها إذا كان:

{ لا يوجد عطل أو محرك واحد معطل أو محركان معطلان }

$$\begin{aligned} p_4 &= p(Y \leq 2) \\ &= p(y=0) + p(y=1) + p(y=2) \\ &= (1-p)^4 + 4p(1-p)^3 + 6p^2(1-p)^2 \\ &= (1-p)^2[(1-p)^2 + 4p(1-p) + 6p^2] \\ &= (1-p)^2(1 - 2p + p^2 + 4p - 4p^2 + 6p^2) \end{aligned}$$

$\boxed{p_4 = (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1)}$

4) تحقق ان $p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$ وعين تبعاً لقيم p . اي نوع من الطائرات يعطي وثوقية اكبر

$p_2 - p_4 = \underbrace{1 - p^2} - (1-p)^2(3p^2 + 2p + 1)$

$$= \underline{(1-p)}(1+p) - \underline{(1-p)^2}(3p^2+2p+1)$$
$$= (1-p)[1+p-(1-p)(3p^2+2p+1)]$$
$$= (1-p)(1+p-3p^2-2p-1+3p^3+2p^2+p)$$
$$= (1-p)(3p^3-p^2)$$
$$p_2 - p_4 = p^2(1-p)(3p-1)$$

بما أن $p_2 - p_4 = \underbrace{p^2}_{\boxed{+}}\underbrace{(1-p)}_{\boxed{+}}(3p-1)$

لأن $p<1$

فإشارة $p_2 - p_4$ من إشارة $(3p-1)$:

p	0	$\frac{1}{3}$	1
$p_2 - p_4$	$-$	0	$+$
	الطائرة ذات المحركات الأربعة اكثر وثوقية	نفس الوثوقية	الطائرة ذات المحركين اكثر وثوقية

---

13) <u>متتاليات واحتمالات</u>

① ليكن a عدداً حقيقياً. نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ المعرفة بشرط البدء $u_1 = a$

والعلاقة التدريجية $u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$.

a) لتكن $(v_n)_{n\geq1}$ المتتالية المعرفة بالصيغة $v_n = 13u_n - 4$. اثبت ان $(v_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية، وعين أساسها، ثم عبر عن v_n بدلالة n.

$$v_n = 13u_n - 4$$
$$v_{n+1} = 13u_{n+1} - 4$$
$$= 13\left(\frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n\right) - 4$$
$$= \underbrace{\frac{52}{10}} - \frac{39}{10}u_n - \underbrace{4} = \underbrace{\frac{12}{10} - \frac{39}{10}u_n}_{\text{عامل مشترك } \frac{-3}{10}}$$
$$= \frac{-3}{10}[13u_n - 4]$$
$$\boxed{v_{n+1} = \frac{-3}{10}v_n}$$

إذاً المتتالية $(v_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q = \frac{-3}{10}$

وحدها الأول : $v_1 = 13u_1 - 4 = 13a - 4$

$$v_n = v_1.(q)^{n-1}$$
$$\boxed{v_n = (13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1}}$$

b) استنتج صيغة u_n بدلالة n و a ثم احسب $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

$$v_n = 13u_n - 4 \quad \Rightarrow \quad u_n = \frac{1}{13}[v_n + 4]$$
$$\boxed{u_n = \frac{1}{13}\left[(13a-4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4\right]}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} = 0 \quad ; \quad -1 < \left(q = \frac{-3}{10}\right) < 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{4}{13}$$

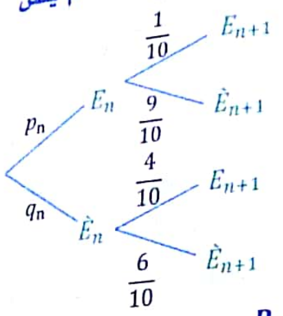
② غالباً ما ينسى مدرس الرياضيات مفتاح غرفة الصف. أياً كان العدد n ، $(n \geq 1)$ نرمز بالرمز E_n إلى الحدث:

«نسي المدرس مفتاح غرفة الصف في اليوم n»

لنضع: $p_n = p(E_n)$ و $q_n = p(\bar{E}_n)$

نفترض انه إذا نسي المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال ان ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{1}{10}$ ، وإذا لم ينس المدرس المفتاح في اليوم n فإن احتمال ان ينساه في اليوم التالي يساوي $\frac{4}{10}$

a) اثبت انه في حالة $n \geq 1$ لدينا: $p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n$



$$p_{n+1} = p(E_{n+1})$$

$$= p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\bar{E}_n \cap E_{n+1})$$

$$\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{10}p_n + \frac{4}{10}q_n}$$

b) استنتج صيغة P_{n+1} بدلالة P_n ثم استفد من ① لتحسب P_n بدلالة n ، P_1.
اتتعلق نهاية المتتالية $(P_n)_{n\geq1}$ بقيمة P_1 ؟

$$P_{n+1} = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}q_n = \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10}(1 - P_n)$$

$$= \frac{1}{10}P_n + \frac{4}{10} - \frac{4}{10}P_n$$

$$\boxed{P_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}P_n}$$

من الفرض لدينا :

$$u_{n+1} = \frac{4}{10} - \frac{3}{10}u_n$$

و بالاستفادة مما سبق نجد ان :

$$P_n = \frac{1}{13}\left[(13\,P_1 - 4)\left(\frac{-3}{10}\right)^{n-1} + 4\right]$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \frac{4}{13}$$

و لا تتعلق نهاية المتتالية $(P_n)_{n\geq1}$ بقيمة P_1 .

---

14) نكرر عشر مرات تجربة إلقاء قطعتي نقود متوازنتين ، و نسجل في كل مرة الوجهين الظاهرين ، احسب احتمال كل من الحدثين A : (الحصول ثلاث مرات على وجهين H) و B : (الحصول على وجهين H مرة على الأقل)

♦ الحدث B الحصول على وجهين H مرة على الأقل .

$$P(B) = P(X \geq 1)$$

$$= 1 - P(X = 0)$$

$$= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

$$= 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

♦ الحدث A الحصول ثلاث مرات على وجهين H

نحن أمام تجربة برنولية فيها $k = 3$, $n = 10$

و احتمال ظهور الوجهين H عند القاء قطعتي النقود

$P = \frac{1}{4}$ و منه $q = \frac{3}{4}$

$$P(X = k) = \binom{n}{k}P^k . q^{n-k}$$

$$P(A) = P(X = 3) = \binom{10}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^7$$

$$= \frac{10\times9\times8}{3\times2\times1}\cdot\frac{1}{(4)^3}\cdot\frac{(3)^7}{(4)^7}$$

$$= 10\times3 . \frac{1}{(4)^2}\cdot\frac{(3)^7}{(4)^7} = (10)\frac{(3)^8}{(4)^9}$$

Scanned by CamScanner

15) نتامل حجر نرد متوازن فيه اربعة وجوه ملونة بالأسود , و وجهان ملونان بالأحمر نلقي هذا الحجر خمس مرات على التوالي .

① ما احتمال ان يظهر وجه احمر اول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد ؟

A الحدث ظهور وجه أحمر أول مرة عند آخر إلقاء لحجر النرد .

$$A = \{(B\,,B\,,B\,,B\,,R)\}$$

نلاحظ أن $P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ و $P(R) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ و الأحداث مستقلة احتمالياً .

$$\Rightarrow P(A) = \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{16}{243}$$

② ما احتمال ان يظهر وجه احمر مرة على الأقل ؟

C الحدث ظهور وجه أحمر مرة على الأقل .

$\bar{C}$ الحدث عدم ظهور وجه أحمر (ظهور اللون الأسود في الحالات الخمسة)

$$P(C) = 1 - P(\bar{C})$$
$$= 1 - \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{211}{243}$$

③ ما قانون المتحول العشوائي X الذي يعد عدد الوجوه السوداء اللون التي نحصل عليها ؟

$$I = \{0,1,2,3,4,5\}$$

$$P(X = k) = \binom{5}{k}\left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} = \binom{5}{k}\frac{2^k}{3^5} \qquad ; k = \{0,1,2,3,4,5\}$$

طلب إضافي: احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X

$$P(0) = \binom{5}{0}\frac{2^0}{3^5} = \frac{1}{243} \qquad P(2) = \binom{5}{2}\frac{2^2}{3^5} = \frac{40}{243} \qquad P(4) = \binom{5}{4}\frac{2^4}{3^5} = \frac{80}{243}$$

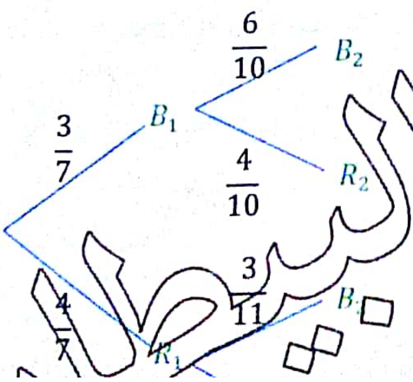
$$P(1) = \binom{5}{1}\frac{2^1}{3^5} = \frac{10}{243} \qquad P(3) = \binom{5}{3}\frac{2^3}{3^5} = \frac{80}{243} \qquad P(5) = \binom{5}{5}\frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(x_i)$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

) نتامل صندوقاً يحتوي على ثلاث كرات سوداء و أربع كرات حمراء , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق و بعدئذٍ نسحب مجدداً كرة من الصندوق لنرمز بالرمز R_2 إلى الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الثانية حمراء اللون)

و ليكن R_1 الحدث (الكرة المسحوبة في المرة الأولى حمراء اللون) .

1. اعط تمثيلاً شجرياً للتجربة .



2. احسب احتمال R_2 .

$$P(R_2) = P(B_1 \cap R_2) + P(R_1 \cap R_2)$$
$$= \frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10} + \frac{4}{7}\cdot\frac{8}{11} = \frac{452}{770}$$

3. إذا كانت الكرة المسحوبة الثانية حمراء اللون، فما احتمال ان تكون الكرة المسحوبة في المرة الأولى سوداء اللون

$$P(B_1|R_2) = \frac{P(B_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{10}}{\frac{452}{770}} = \frac{132}{452} = \frac{33}{113}$$

---

17) التجربة الأولى : نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين و اربع كرات حمراء نسحب عشوائياً من الصندوق ثلاث كرات في آنٍ معاً , ليكن Y عدد الكرات الحمراء المسحوبة .

1. ما هي مجموعة القيم التي يأخذها Y .

$$J = \{ \underbrace{1}_{(R,B,B)} , \underbrace{2}_{(R,R,B)} , \underbrace{3}_{(R,R,R)} \}$$

2. احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي Y .

$$P(1) = \frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{2}{2}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

$$P(2) = \frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{6}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(3) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{6}{3}} = \frac{1}{5}$$

y_j	1	2	3
$P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

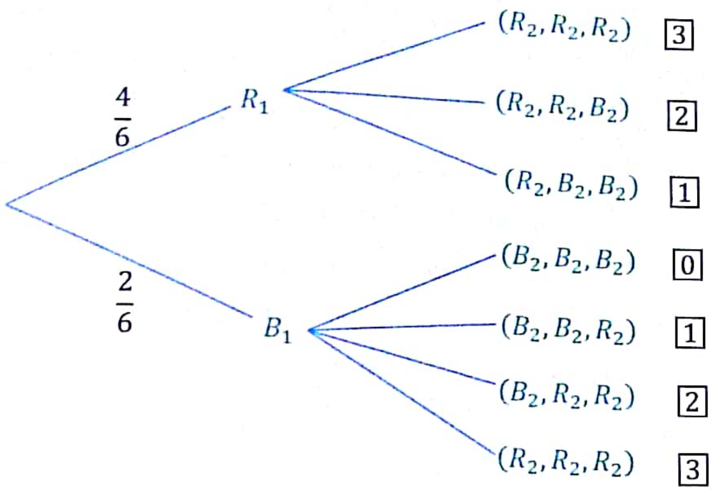
3. احسب التوقع الرياضي للمتحول Y و تباينه .

y_j	1	2	3
$P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
$E(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j . P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$+ \frac{6}{5}$	$+ \frac{3}{5} = 2$
y_j^2	1	4	9
$\sum_{j=1}^{3} y_j^2 . P(y_j)$	$\frac{1}{5}$	$+ \frac{12}{5}$	$+ \frac{9}{5} = \frac{22}{5}$

$$V(Y) = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 . P(y_j) - (E(Y))^2 = \frac{22}{5} - 4 = \frac{2}{5}$$

التجربة الثانية : نتأمل صندوقاً يحتوي على كرتين سوداوين و اربع كرات حمراء , نسحب عشوائياً كرة من الصندوق نسجل لونها و نعيدها إلى الصندوق ثم نضاعف عدد الكرات من لونها في الصندوق و بعدئذٍ نسحب من الصندوق ثلاث كرات في آنٍ معاً و ليكن X عدد الكرات الحمراء المسحوبة في المرة الثانية , نرمز بالرمز R_1 إلى الحدث (الكرة المسحوبة في الأولى حمراء اللون) .

ملاحظة : للسهولة قبل الحل نرسم المخطط الشجري .



1) ما هي مجموعة القيم التي يأخذها .

$I = \{\ 0\ ,\ 1\ ,\ 2\ ,\ 3\ \}$

2) احسب القانون الاحتمالي للمتحول العشوائي X .

$$P(0) = P[B_1 \cap (B_2, B_2, B_2)] = \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{1}{42} = \frac{15}{630}$$

$$P(1) = P[R_1 \cap (R_2, B_2, B_2)] + P[B_1 \cap (B_2, B_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{1}\binom{2}{2}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{2}\binom{4}{1}}{\binom{8}{3}} = \frac{59}{315} = \frac{118}{630}$$

$$P(2) = P[R_1 \cap (R_2, R_2, B_2)] + P[B_1 \cap (B_2, R_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{2}\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{1}\binom{4}{2}}{\binom{8}{3}} = \frac{143}{315} = \frac{286}{630}$$

$$P(3) = P[R_1 \cap (R_2, R_2, R_2)] + P[B_1 \cap (R_2, R_2, R_2)]$$

$$= \frac{4}{6} \cdot \frac{\binom{8}{3}}{\binom{10}{3}} + \frac{2}{6} \cdot \frac{\binom{4}{3}}{\binom{8}{3}} = \frac{211}{630}$$

x_i	0	1	2	3
$P(x_i)$	$\frac{15}{630}$	$\frac{118}{630}$	$\frac{286}{630}$	$\frac{211}{630}$

3) احسب التوقع الرياضي للمتحول العشوائي X وتباينه.

x_i	0	1	2	3	
$P(x_i)$	$\frac{15}{630}$	$\frac{118}{630}$	$\frac{286}{630}$	$\frac{211}{630}$	
$E(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i)$	0	$+\ \frac{118}{630}$	$+\ \frac{572}{630}$	$+\ \frac{633}{630}$	$=\frac{1323}{630}=\frac{21}{10}$
x_i^2	0	1	4	9	
$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(x_i)$	0	$+\ \frac{118}{630}$	$+\ \frac{1144}{630}$	$+\ \frac{1899}{630}$	$=\frac{3161}{630}$

$$E(X)=\frac{21}{10} \quad , \quad V(X)=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 P(x_i)-\left(E(X)\right)^2=\frac{3161}{630}-\left(\frac{21}{10}\right)^2=\frac{3827}{6300}\simeq 0.6$$

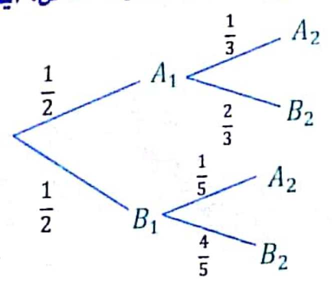
---

18) تحاول سعاد إدخال الوتد في حلقات تلقيها، تُكرر سعاد التجربة عدداً من المرات. عندما تنجح سعاد في إدخال حلقة يصبح احتمالية نجاحها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{1}{3}$ ، وعندما تفشل في إدخال حلقة يصبح احتمال فشلها في إدخال الحلقة اللاحقة $\frac{4}{5}$. نفترض أن احتمال نجاح سعاد في إدخال الحلقة في المرة الأولى يساوي احتمال فشلها. نتأمل، أياً كان العدد الطبيعي الموجب تماماً n، الحدثين الآتيين:

A_n : (نجحت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n)

B_n : (فشلت سعاد في إدخال الحلقة عند الرمية n) , ونعرف $p_n=P(A_n)$

للسهولة نرسم المخطط الشجري (A نجاح سعاد ، B فشل سعاد)



1) عين p_1 وبرهن أن $p_2=\frac{4}{15}$

$$P_1=P(A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P_2=P(A_2)=P(A_1\cap A_2)+P(B_1\cap A_2)$$

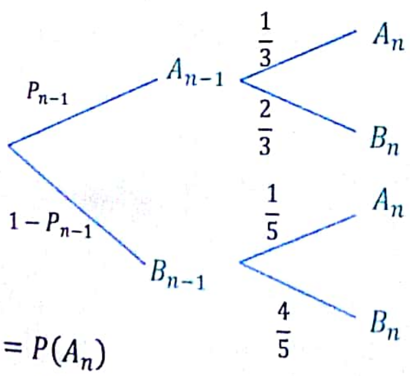
$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{5}=\frac{4}{15}$$

2) اثبت انه أياً كانت $n\geq 2$ كان $P_n=\frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}$.

بما أن احتمالات نجاح سعاد بعد نجاحها في الرمية الأولى متساوية (تساوي $\frac{1}{3}$)

واحتمالات نجاح سعاد بعد فشلها في الرمية الأولى متساوية (تساوي $\frac{1}{5}$)

عندئذ يصبح المخطط الشجري:



$$P_n=P(A_n)$$

$$=P[A_{n-1}\cap A_n]+P[B_{n-1}\cap A_n]$$

$$=P_{n-1}\times\frac{1}{3}+(1-P_{n-1})\times\frac{1}{5}=\frac{1}{3}P_{n-1}+\frac{1}{5}-\frac{1}{5}P_{n-1}$$

$$P_n=\frac{2}{15}P_{n-1}+\frac{1}{5}$$

3) نعرف في حالة $n \geq 1$ المقدار P_n بالعلاقة : $u_n = P_n - \frac{3}{13}$ اثبت ان المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متتالية هندسية وعين حدها الأول u_1 وأساسها q .

$$u_{n+1} = \underbrace{P_{n+1}} - \frac{3}{13}$$
$$= \frac{2}{15} P_n + \frac{1}{5} - \frac{3}{13} = \frac{2}{15} P_n - \frac{2}{65}$$
$$= \frac{2}{15} \underbrace{\left[P_n - \frac{3}{13}\right]}$$

$$u_{n+1} = \frac{2}{15} \cdot u_n \quad \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{15}$$

فالمتتالية $(u_{n\geq1})$ هندسية وأساسها $q = \frac{2}{15}$

$$u_1 = p_1 - \frac{3}{13} = \frac{1}{2} - \frac{3}{13} = \frac{7}{26}$$

4) استنتج قيمة u_n ثم P_n بدلالة n ، ثم احسب $\lim_{n\to\infty} p_n$

$(u_n)_{n\geq1}$ هندسية فيها $q = \frac{2}{15}$ و $u_1 = \frac{7}{26}$

$$u_n = u_1 . q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_n = \frac{7}{26} . \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}}$$

$$u_n = p_n - \frac{3}{13} \quad \Rightarrow \quad p_n = u_n + \frac{3}{13}$$

$$\boxed{p_n = \frac{7}{26}\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} + \frac{3}{13}}$$

$\left(\frac{2}{15}\right)^{n-1}$ متتالية هندسية و $-1 < \left(q = \frac{2}{15}\right) < 1$; $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{15}\right)^{n-1} = 0$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{3}{13}$$

****