المحاضرة الأولى

جامعة الشام الخاصة — **رياضيات متقطعة**

كلية هندسة المعلوماتية — **الفصل الدراسي الأول**

نظرية الأعداد

١ — مقدمة.

٢ — الأعداد الصحيحة.

٣ — خواص العمليات الأساسية.

٤ — قابلية القسمة.

٥ — الأعداد الأولية.

٦ — القاسم المشترك الأعظم.

٧ — المضاعف المشترك الأصغر.

نظرية الأعداد

مقدمة:

تهتم نظرية الأعداد بدراسة الأعداد الصحيحة، ودراسة خواصها، سنقوم بمراجعة بعض المفاهيم الأساسية في نظرية الأعداد وتطويرها فيما يخدم الحاجة إلى استخدامها في تطبيقات علوم الحاسب.

الأعداد الصحيحة:

تستخدم الأعداد الصحيحة عند مناقشة تقنيات الإحداثيات وهذه الأعداد هي:

$$\ldots - 4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

ونرمز لمجموعة الأعداد الصحيحة بالرمز $\mathbb{Z}$ وتقسم إلى مجموعتين، مجموعة الأعداد الزوجية (even):

$$- 4, -2, 0, 2, 4, \ldots$$

مجموعة الأعداد الفردية odd:

$$- 5, -3, -1, 3, 5, \ldots$$

يأخذ العدد الصحيح الزوجي الشكل $2n$ حيث n عدد صحيح ما.

ويأخذ العدد الصحيح الفردي الشكل $2n + 1$ من أجل n عدد صحيح ما.

العمليات الأساسية وخواصها:

نعلم أن العمليات الأساسية على الأعداد هي (الجمع – والطرح – الضرب والقسمة).

إن عمليتي الجمع والضرب تتمتع بالخواص التالية:

من أجل $m, n, k \in \mathbb{Z}$

١ – الخاصة التبديلية:

$$m + n = n + m$$
$$m . n = n . m$$

٢ – الخاصة التجميعية:

$$(m + n) + k = m + (n + k)$$
$$(m . n) . k = m . (n . k)$$

٣ – خاصة التوزيع:

1) $m(n + k) = (m . n) + (m . k)$
2) $(m + n) = mk + nk$

تمثيل الأعداد الصحيحة:

نفرض b عدداً صحيحاً موجباً أكبر من الواحد، إذا كان n عدداً صحيحاً موجباً عندها يمكن تمثيله بالشكل:

$$n = a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} \ldots + a_1 b + a_0$$

حيث k هو عدد صحيح غير سالب وكذلك $a_0, \; a_1, \ldots, a_k$ هي أعداد صحيحة غير سالبة أقل من b، $0 \neq a_k$. يفيدنا هذا الشكل بكتابة العدد الصحيح في أنظمة العد المختلفة.

قابلة القسمة:

خوارزمية القسمة:

من أجل أي عددين صحيحين $b, \; a$ حيث أحدهما وليكن a موجباً فإنه يوجد عددان صحيحان وحيدان q , بحيث تتحقق العلاقة:

$$b = qa + r \qquad\qquad 0 \leq r < a$$

نسمي q ناتج قسمة b على a، r باقي القسمة وإذا كان $r = 0$ يتحقق التكافؤ الآتي:

$$a|b \Leftrightarrow b = q\,a \Leftrightarrow r = 0$$

قابلية القسمة:

تعريف:

نقول عن عدد صحيح مختلف عن الصفر a إنه قاسم (divisor) للعدد الصحيح b وكتب a|b إذا وفقط إذا وجد عدد صحيح c يحقق b = c . a وإذا لم يتحقق ذلك نقول إن a لا يقسم b ونكتب $a \nmid b$.

مثال:

4 يقسم 12 لأن $4 \times 3 = 12$ ونكتب 4|12.

نتائج:

١ – $\forall a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a . 1 = a$، وبالتالي 1|a، وإذا كان $a \neq 0$ فإن a|a.

٢ – $a . 0 = 0$ وذلك مهما يكن $a \in \mathbb{Z}$ وبالتالي a|0.

٣ – إن كل قاسم موجب x لعدد صحيح a يوافقه قاسم سالب x – وبالعكس $x|a \Leftrightarrow -x|a$.

٤ – إذا كان العد الصحيح $a \neq 0$ فإن كلاً من العدد a وقيمته المطلقة |a| يقسم الآخر.

٥ – إذا كان a يقسم كلاً من العددين b, c فإنه يقسم أي تركيب خطي لهما bx + cy حيث y,x عددين صحيحين نعبر عن هذه الخاصية رمزياً بالشكل:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow \quad \forall x,y \in \mathbb{Z} \quad a|(bx + cy)$$

٦ – إذا كان العدد a يقسم العدد b فإن a يقسم حاصل ضرب b بأي عدد صحيح c أي إن:

$$a|b \Rightarrow a|bc \ \forall c \in \mathbb{Z}$$

٧ – إذا كان العدد a يقسم العدد b وكان b بدوره يقسم العدد c فإن a يقسم c أي:

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

(نقول إن علاقة القسمة متعدية).

٨ – إذا كان كل من العددين a,b عدداً صحيحاً موجباً وكان $a|b$ فإن $a \le b$ أي أن:

$$a|b \wedge a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow a \le b$$

٩ – إذا كان العدد a يقسم العدد b فإن القيمة المطلقة لـ a تقسم القيمة المطلقة لـ b.

$$a|b \Rightarrow |a| \mid |b|$$

١٠ – إذا كان كل من العدين a, b يقسم الآخر فإن $|a| = |b|$ أي: $(a = \pm b)$

$$a|b \wedge b|a \Rightarrow |a| = |b|$$

١١ – تصنف الأعداد وفق صفات محددة:

أ – كل عدد صحيح b يكتب بالشكل $2k$ أو $2k+1$ حيث k عدد صحيح يتعلق بالعدد b.

ب – إن مربع أي عدد صحيح b يكتب بأحد الشكلين:

$4k$ أو $4k + 1$

ملاحظة:

يمكن أن يكون للعدد الصحيح أكثر من قاسم.

الأعداد الأولية:

نقول عن العدد الصحيح $p > 1$ إنه عدد أولي إذا كانت قواسمه الموجبة هي $p, 1$ فقط.

والعدد الأكبر من 1 وليس بعدد أولي ندعوه عدد مركب.

الأعداد الأولية الأقل من 100 هي:

11	7	5	3	2
29	23	19	17	13
47	43	41	37	31
71	67	61	59	53
97	89	83	79	73

للأعداد الأولية خواص كثيرة هامة للعديد من التطبيقات في علوم الحاسب.

المبرهنة الأساسية في الحساب:

إن أي عدد صحيح أكبر من 1 يمكن أن يكتب بشكل وحيد على أنه أولي أو أنه جداء لعددين أوليين أو أكثر حيث نكتب العوامل الأولية بترتيب غير متناقص.

مثال:

اكتب العوامل الأولية للأعداد التالية:

128 , 1000 , 89 , 50

$50 = 2 . 5 . 5 = 2 . 5^2$
$89 = 89$
$1000 = 2^3 . 5^3$
$128 = 2^7$

مبرهنة:

إذا كان n عدداً صحيحاً مركباً فإن للعدد n قاسماً أولياً أصغر أو يساوي $\sqrt{n}$. بتعبير آخر إذا كان العدد الصحيح الموجب n عدداً مركباً فإن للعدد n عاملاً أولياً p بحيث $p^2 \leq n$.

مثال:

أثبت أن 53 هو عدد أولي.

الحل:

أقرب عدد مربع لـ 53 هو 49 وجذر 49 هو 7 هذا يعني أن $\sqrt{53}$ لا يتجاوز 2, 3, 5, 7 والعدد 53 لا يقبل القسمة على أي منه فهو عدد أولي.

ملاحظات هامة:

١ – مجموعة الأعداد الأولية مجموعة غير منتهية.

٢ – كل الأعداد الزوجية أعداد غير أولية عدا 2.

٣ – كل الأعداد التي آحادها 5 هي أعداد غير أولية فقط العدد 5 هو عدد أولي.

٤ – أي عدد يكون مجموع أرقامه من مضاعفات العدد 3 هو عدد غير أولي.

٥ – إن الأعداد الأولية الكبيرة تلعب دوراً هاماً في التعمية (cryptography).

٦ – أعداد ميرسين الأولية هي أعداد تعطى بالعلاقة $2^p - 1$ حيث p هو أولي.

القاسم المشترك الأعظم:

بفرض a ,b عددان صحيحان مغايران للصفر، نعرف القاسم المشترك الأكبر لهما بأنه القاسم الأكبر d بحيث يكون d|a و d|b ونرمز له بالرمز gcd(a,b).

ملاحظة:

أصغر قواسم العدد هو العدد (1) وأكبر القواسم هو العدد نفسه.

إيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين أو أكثر:

١ – نقوم بتحليل كل عدد إلى عوامله الأولية ونكتبه على شكل جداء قوى.

٢ – يكون القاسم المشترك الأكبر هو جداء قوى العوامل المشتركة بأصغر أس.

بتعبير آخر لإيجاد القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a ,b (ليس كلاهما مساوياً للصفر معاً) نكتب العددين بالشكل:

$$a = p_1^{a1} p_2^{a2}, \ldots, p_n^{an}$$
$$b = p_1^{b1} p_2^{b2}, \ldots, p_n^{bn}$$

حيث أن كل أس هو عدد صحيح غير سالب، وأن كل الأعداد الأولية التي تحدث في التحليل إلى عوامل أولية في كل من a ,b موجودة في الاثنين معاً بأس صفري إذا كان ضرورياً عندئذ يعطى القاسم المشترك الأعظم من خلال العلاقة:

$$gcd(a,b) = p_1^{\min(a_1,b_1)} p_2^{\min(a_2 b_2)}, \ldots, p_n^{\min(a_n b_n)} \qquad (1)$$

الأعداد الأولية النسبية:

نقول عن العددين a ,b بأنهما عددين أوليين نسبياً إذا كان القاسم المشترك الأعظم لها هو 1.

الأعداد الأولية مثنى مثنى:

نقول عن الأعداد الصحيحة $a_1, a_2,..,a_n$ بأنها أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى إذا كان $gcd(a_i,a_j) = 1$ ومن أجل كل القيم $1 \le i < j \le n$.

أمثلة:

بين فيما إذا كانت الأعداد التالية أولية نسبياً مثنى مثنى: 17 , 25 , 12.

الحل:

$$gcd(17,25) = 1$$
$$gcd(17,12) = 1$$
$$gcd(12,25) = 1$$

وهذا يعني بأنها أولية مثنى مثنى.

المضاعف المشترك الأصغر:

إن المضاعف المشترك الأصغر للعددين الصحيحين b,a الموجبين هو العدد الصحيح الموجب الأصغر الذي يقسم كلاً من العددين b,a ونرمز للمضاعف المشترك الأصغر للعددين b,a بالرمز Icm(a,b).

ملاحظة:

ليكن b,a عددان صحيحان عندئذ يكون:

$$ab = gcd(a,b) \,.\, Icm(a,b)$$

إيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين أو أكثر:

١ – نحلل كلاً من هذه الأعداد إلى عوامله الأولية.

٢ – يكون المضاعف المشترك الأصغر هو جداء قوى العوامل المشتركة والعوامل غير المشتركة بأكبر أس ظهر عند التحليل.

بتعبير آخر لإيجاد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين a ,b نكتب العددين بالشكل:

$$a = p_1^{a1} p_2^{a2},\dots,p_n^{an}$$
$$b = p_1^{b1} p_2^{b2},\dots,p_n^{bn}$$

يكون المضاعف المشترك الأصغر:

$$\text{Icm}(a,b) = p_1^{\max(a_1,b_1)} p_2^{\max(a_2 b_2)},\dots,p_n^{\max(a_n b_n)} \qquad (2)$$

ملاحظة:

المضاعف المشترك الأصغر لأعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى هو حاصل جداء تلك الأعداد.

تمارين محلولة

١ – أوجد المضاعف المشترك الأصغر للعددين 18, 12.

الحل:

نحلل العددين فنجد:

$$\begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

نكتب العددين بشكل جداء قوى:

$12 = 2^2 \times 3$
$18 = 2 \times 3^2$
$\text{Icm} = 3^2 \times 2^2 = 9 \times 4 = 36$

٢ – أوجد القاسم المشترك الأكبر للعددين 180, 168.

الحل:

نحلل العددين فنجد:

$$\begin{array}{r|l} 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

نكتب العددين بشكل جداء قوى:

$180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$168 = 2^3 \times 3 \times 7$

القاسم المشترك الأكبر:

$$\gcd(180,168) = 2^2 \times 3 = 12$$

٣ – بيّن فيما إذا كان الأعداد 9 ,5 ,4 أولية فيما بينها، ثم أوجد القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر.

الحل:

نكتب هذه الأعداد بشكل جداء قوى نجدك

$9 = 3^2$
$4 = 2^2$
$5 = 5$

$$\text{Gcd}(9,4) = 1 \qquad \text{gcd}(9,5) = 1 \qquad \text{gcd}(4,5) = 1$$

إذن الأعداد السابقة أولية فيما بينها.

وعليه يكون القاسم المشترك الأكبر هو الواحد.

والمضاعف المشترك الأصغر جداء هذه الأعداد:

$$\text{Icm}(9,4,5) = 3^2 \times 2^2 \times 5 = 180$$

٤ – بين فيما إذا كان العدد 101 هو عدد أولي.

الحل:

نأخذ $\sqrt{101}$

$\sqrt{101} \cong 10.09$

نأخذ الأعداد الأولية الأصغر من 10، وهي 2,3,5,7 نبحث في قابلية لـ 101 على كل من هذه الأعداد.

تمارين للحل

تمرين (١):

أوجد القاسم المشترك الأكبر للأعداد:

1575 4851 645

تمرين (٢):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر للأعداد:

30 20 15

تمرين (٣):

أوجد المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر للعددين باستخدام القاعدتين (1) و (2):

$$a = 2^3 \,.\, 3^5 \,.\, 7^2$$
$$b = 2^4 \,.\, 3^3$$

تمرين (٤):

أوجد الأعداد الصحيحة الموجبة التي تصغر 30 والتي عي أعداد أولية نسبياً.

تمرين (٥):

أثبت أن العدد 107 هو عدد أولي.

تمرين (٥):

بين فيما إذا كانت الأعداد الصحيحة الواردة في d,c,b,a التالية:

b) 14, 17, 85   a) 21, 34, 55
d) 17, 18, 19, 23   c) 25, 41, 49, 64

أعداد أولية نسبياً مثنى مثنى.

انتهت المحاضرة الأولى

التاريخ: **مدرس المقرر**

د. ميسم أحمد جديد