النهايات :

تذكرة * lim تعني نهاية

$x \to$ ... x تسعى

* لدينا نوعان من النهايات

$\lim_{x \to \text{عدد}} f(x)$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$

الحالة الأولى :

$\lim_{x \to \text{عدد}} f(x)$

طريقة الحل

* نعوض بشكل مباشر

مثال :

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{x-2}{x}$$

$$= \frac{2-2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

قواعد للحفظ :

* $\frac{\text{عدد}}{0} = \infty$ (مع الإشارة)

* $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$

* $+\infty + \infty = +\infty$

* $-\infty - \infty = -\infty$

* $+\infty$ (عدد موجب) $= +\infty$

* $+\infty$ (عدد سالب) $= -\infty$

* $-\infty$ (عدد سالب) $= +\infty$

* $-\infty$ (عدد موجب) $= -\infty$

* $-\infty(-\infty) = +\infty$

* $+\infty(-\infty) = -\infty$

* $(-\infty)^2 = +\infty$

* $\sqrt{+\infty} = +\infty$

* $\frac{\text{عدد موجب}}{0^+} = +\infty$

* $\frac{\text{عدد موجب}}{0^-} = -\infty$

* $\frac{\text{عدد سالب}}{0^-} = +\infty$

* $\frac{\text{عدد سالب}}{0^+} = -\infty$

Amjad zapean

الحالة الثانية: $\lim_{x\to\infty} f(x)$

طريقة الحل:

* لا نقوض بشكل مباشر
* كل تابع له طريقة في الحل

1- التابع الصحيح:

طريقة الحل: نقوض في الحد البسيط.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = x^2+1 = (+\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = x^4+3x^3+2x^2+x-1 = (-\infty)^4 = \infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 2x^3-1 = 2(\infty)^3 = \infty$$

2- التابع الكسري البسيط:

نميز 3 حالات:

- درجة البسط > درجة المقام ← نأخذ الحد البسيط في البسط والحد البسيط في المقام ثم نقوض
- درجة البسط = درجة المقام ← نأخذ أمثال البسط على أمثال المقام
- درجة البسط < درجة المقام ← الجواب صفر

تدريبات:

1- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{6x-1}{x} = \frac{6}{1} = 6$

2- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{2x^2-1}{x} = \frac{2x^2}{x} = 2x = 2(\infty) = \infty$

3- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \frac{6x-1}{x^3} = 0$

4- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \frac{6x-4}{3x} = \frac{6}{3} = 2$

0992932502

التابع الجذري التربيعي

جوار زمية الطلب: نعوض الجذر ثم ننظر إلى ما داخله ونميز ما يلي ← إما تابع صحيح ← أو تابع كسري ← ونطبق القواعد السابقة

تدريبات:

1- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \sqrt{2x^2-2} = \sqrt{2(+\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$

2- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sqrt{\frac{4x-1}{x}} = \sqrt{\frac{4}{1}} = \sqrt{4} = 2$

التابع الكسري المركب:

جوار زمية الطلب: نعوض لنتوقف ما إذا كان يؤدي هذا الحالة ربما تصادف حالة عدم تعيين أو احالة.

حالات عدم التعيين: 1^∞ ، $\infty.0$ ، $\infty-\infty$ ، $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$

تدريبات:

1- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-1}}{x} = \frac{\sqrt{\infty^3}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$ ت.ع.ت

نستعمل طرق إزالة حالات عدم التعيين لاحقاً

ت.ع.ت = حالة عدم تعيين

2- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sqrt[3]{6x} - 2x = -\infty + \infty$ ت.ع.ت

تدريب = على تابعا الجذر التكعيبي والتابع المثلثي.

1- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \sin\frac{\pi x}{x-1} = \sin\pi = 0$

2- $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{\infty} = \infty$

Amjad zapean

* أوجد مجموعة التعريف ثم النهاية عند الأطراف المفتوحة:

1- $f(x) = 4x^2 - 2$

$D_f = \mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ ⇐ نلاحظ أنه تابع صحيح إذا

إيجاد النهايات:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 2(+\infty)^2 = \infty$$

2- $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

نلاحظ أنه تابع كسري ⇐ إذا المقام = 0

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{$ قيم المقام $\}$

$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2 \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty \qquad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

0992932502

المقاربات :

لدينا 4 أنواع من المقاربات :

1- المقارب الشاقولي :

شكله : $\lim\limits_{x \to \text{عدد}} f(x) = \infty$ عدد $= x$ مقارب شاقولي يوازي yy' في جوار $\pm\infty$

2- المقارب الأفقي :

شكله : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \text{عدد}$ عدد $= y$ مقارب افقي يوازي xx' في جوار $\pm\infty$

3- المقارب المائل :

شكله : $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$ سيتم دراسته في نهايات

4- مقارب نقطة :

شكله : $\lim\limits_{x \to \text{عدد}} f(x) = \text{عدد}$ سيتم دراسته في نهايات التابع الأسي

تدريب :

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

1- اوجد مجموعة التعريف.
2- اوجد النهايات عند اطراف المفتوحة
3- اكتب معادلة كل مقارب افقي وشاقولي

الحل :

1) $D_f = R \setminus \{1\} \Rightarrow]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

2) $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \frac{1}{1} = 1$ $y = 1$ مقارب افقي يوازي xx' في جوار $\pm\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy' في جوار $+\infty$

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ $x = 1$ مقارب شاقولي يوازي yy' في جوار $-\infty$

Amjad zapean

$f(x) = \sqrt{x-3}$

تدريب:

1- أوجد D_f

2- أوجد النهايات

3- أوجد النهايات الأفقية والشاقولية:

الحل:

$f(x) = \sqrt{x-3}$

$x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

$D_f = [3, \infty[$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \sqrt{\infty} = \infty$

مقارب مائل ~~

$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ / $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}}$

وظيفة:

1- أوجد D_f

2- أوجد النهايات

3- أوجد المقاربات

0992932502