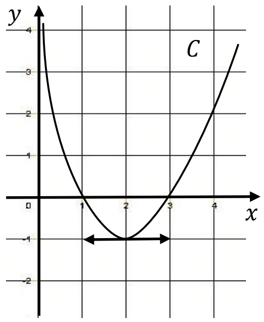
السؤال الأول: (40 درجة)



في الشكل المجاور C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$. **المطلوب:**

1) عين مجموعة تعريف كل من التوابع الآتية:

$k(x)=\ln(f'(x))$ $\quad h(x)=\ln(-(f(x))$ $\quad g(x)=\ln(f(x))$

2) احسب النهايات التالية:

$\lim\limits_{x\to 1}\ln(f(x))$ $\quad \lim\limits_{x\to 2}\ln(f'(x))$

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

(1	(2
$D_k=]2,+\infty[$ $D_h=]1,3[$ $D_g=]0,1[\cup]3,+\infty[$	$\lim\limits_{x\to 1}\ln(f(x))=-\infty$ $\lim\limits_{x\to 2}\ln(f'(x))=\ln(f'(2))=\ln 0=-\infty$

السؤال الثاني: (40 درجة)

حل المعادلة الآتية: $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$.

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

(1 $2\ln x=\ln(x+4)+\ln(2x)$

نرمز مجموعات التعريف بالرموز التالية :

E_1 : مجموعة تعريف $2\ln x$.

E_2 : مجموعة تعريف $\ln(x+4)$.

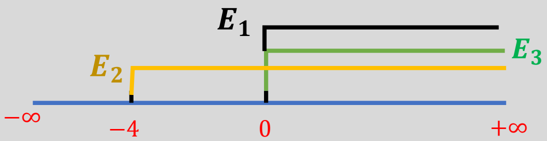
E_3 : مجموعة تعريف $\ln(2x)$.

حيث :

$E_1=]0,+\infty[$

$E_2=]-4,+\infty[$

$E_3=]0,+\infty[$



$E=E_1\cap E_2\cap E_3=]0,+\infty[$

$\ln x^2=\ln(2x^2+8x)$

$x^2=2x^2+8x$

$x^2+8x=0$

$x(x+8)=0$

إما : $x=0$ مرفوض

أو : $x=-8$ مرفوض

{ **المعادلة مستحيلة الحل** }

السؤال الثالث: **(40 درجة)**

ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}$ وفق: $f(x)=\begin{cases}\frac{\ln(\sin x+1)}{x}+3m & ;x\neq 0\\ m+1 & ;x=0\end{cases}$ **والمطلوب:**

عيّن قيمة العدد m ليكون f مستمراً عند الصفر.

الحل :

أ . رامزعنيزان (0982399409)

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\ln(\sin x+1)}{x}+3m=\frac{0}{0}+3m$$

حالة عدم تعيين .

نضرب بـ $\sin x$ ، ونقسّم على $\sin x$:

$$f(x)=\frac{\ln(\sin x+1)}{\sin x}\times\frac{\sin x}{x}+3m$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}f(x)=1\times 1+3m=3m+1=m+1$$

$$2m=0$$

$$m=0$$

السؤال الرابع: **(40 درجة)**

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)$. **المطلوب :**

احسب $f'(x)$ و $f''(x)$، ثمّ أثبت مستعملاً الإثبات بالتدريج أياً كانت $n\geq 1$ صحة العلاقة: $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$.

الحل :

أ . رامزعنيزان (0982399409)

$f'(x)=\frac{-1}{x^2}\times\frac{x}{1}=\frac{-1}{x}$ $f''(x)=\frac{1}{x^2}$ **نرمز قضية :** $E(n):\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ نبرهن صحة القضية من أجل $E(1)$: $f^{(1)}(x)=\frac{-1}{x}=f'(x)$	نفرض صحة القضية من أجل $E(n)$: $E(n):\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ نبرهن صحة القضية من أجل $E(n+1)$: $E(n+1):\ f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n)!}{x^{n+1}}$ **البرهان :**

ننطلق من الفرض ، نشتق عبارة $E(n)$: $E(n):\ f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{-nx^{n-1}(-1)^n\,.\,(n-1)!}{x^{2n}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^1\,.(-1)^n\,.n(n-1)!\,.\cancel{x^n}\,.x^{-1}}{x^n\,.\cancel{x^n}}$$

$$f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n)!}{x^n\,.\,x^1}$$

$$\boxed{f^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+1}(n)!}{x^{n+1}}}$$

$E(n+1)$ صحيحة ، إذاً حسب مبدأ البرهان بالتدريج القضية $E(n)$ صحيحة من أجل $n\geq 1$.

السؤال الخامس: **(40 درجة)**

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ وفق: $f(x)=x-1+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$. **المطلوب:**

أثبت أنّ المستقيم Δ الذي معادلته $y=x-1$ مقارب مائل للخط C. ثمّ ادرس الوضع النسبي بين C و Δ.

الحل : أ. رامزعنيزان (0982399409)

$$f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-y_\Delta=\ln(1)=0$$

إذاً $y=x-1$ مقارب مائل في جوار $+\infty$ و $-\infty$.

دراسة الوضع النسبي :

نفرض تابع $g(x)$ معرّف

على $]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$ وفق :

$$g(x)=f(x)-y_\Delta=\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$g'(x)=\frac{\cancel{x}-1-\cancel{x}-1}{(x-1)^{\cancel{2}}}\times\frac{\cancel{x-1}}{x+1}$$

$$g'(x)=\frac{-2}{(x-1)(x+1)}<0$$

$\lim_{x\to-1} g(x)=-\infty$, $\lim_{x\to1} g(x)=\ln\left(\frac{2}{0^+}\right)=+\infty$

x	$-\infty$ ... -1	-1 ... 1	1 ... $+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$
$g(x)$	$0 \searrow -\infty$		$+\infty \searrow 0$
إشارة $g(x)$ أي : $f(x)-y_\Delta$	$-$		$+$
الوضع النسبي	C تحت Δ		C فوق Δ

مسألة : **(100 درجة)**

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}_*^+$ وفق: $f(x) = (2x^2 - ax)\ln x - x^2 + ax - 6$. **المطلوب:**

1) عيّن قيمة العدد a إذا علمت أنّ الخط البياني C يقبل مماساً موازياً محور الفواصل عند $x = 2$.
2) من أجل $a = 8$، جد نهايات التابع عند أطراف مجموعة تعريفه.
3) أثبت أنّ $f'(x) = 4(x-2)\ln x$.
4) ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها.
5) أثبت أنّ للمعادلة $f(x) = 0$ حلاً وحيداً ينتمي للمجال $]0,1[$.
6) احسب القيمة التقريبية للتابع f عند النقطة التي فاصلتها $x = 1.1$.
7) ناقش بحسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $f(x) = m$ حيث $m \in \mathbb{R}$.
8) في معلم متجانس ارسم الخط البياني C .

الحل : أ . رامز عنيزان (0982399409)

(1

$$f'(x) = (4x-a)\ln x + \cancel{2x} - \cancel{a} - \cancel{2x} + \cancel{a}$$
$$f'(x) = (4x-a)\ln x$$

$$f'(2) = 0$$
$$(8-a)\ln 2 = 0$$
$$8\ln 2 - a\ln 2 = 0$$
$$a\ln 2 = 8\ln 2$$
$$a = 8$$

$$f(x) = (2x^2 - 8x)\ln x - x^2 + 8x - 6$$

(2 حالة عدم تعيين $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0(-\infty)$

$$f(x) = x\ln x\,(2x-8) - x^2 + 8x - 6$$
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0(0-8) - 0 + 0 - 6 = -6$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty-\infty)(+\infty) - \infty + \infty$$

حالة عدم تعيين من الشكل $+\infty - \infty$:

$$f(x) = x\ln x\,(2x-8) - x^2 + 8x - 6$$
$$f(x) = x^2\left(\frac{\ln x}{x}(2x-8) - 1 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$$
$$f(x) = x^2\left(2\ln x - \frac{8\ln x}{x} - 1 + \frac{8}{x} - \frac{6}{x^2}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty(+\infty - 0 - 1 + 0 - 0)$$
$$= +\infty$$

(3 نعوض $a = 8$ في المشتق :

$$f'(x) = (4x-8)\ln x$$
$$f'(x) = 4\ln x\,(x-2)$$

(4

ينعدم المشتق $f'(x)$ **عندما :** $x = 1$ **و** $x = 2$ **.**

$f(1) = 1$, $\beta = f(2) = -8\ln(2) + 6 > 0$

x	0	1	2	$+\infty$
$x-2$	‖	$-$	0	$+$
$4\ln x$	‖ $-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ $+$	0 $-$	0	$+$
$f(x)$	‖ -6 ↗	1 ↘	β ↗	$+\infty$

(5 f مستمر ومتزايد على المجال $]0,1[$

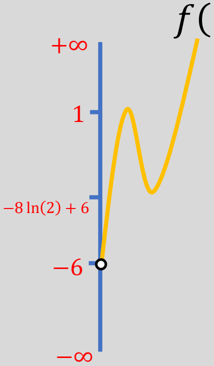
$$0 \in f(\,]0,1[\,)$$
$$0 \in]-6,1[$$

إذاً للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد على المجال $]0,1[$.

(6 $h = 0.1$, $a = 1$

$$f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$$
$$f'(1) = 0 \quad , \quad f(1) = 1$$
$$f(1.1) \approx 1 + 0.1(0) = 1$$

(7 نناقش جميع قيم m على $\mathbb{R}$:

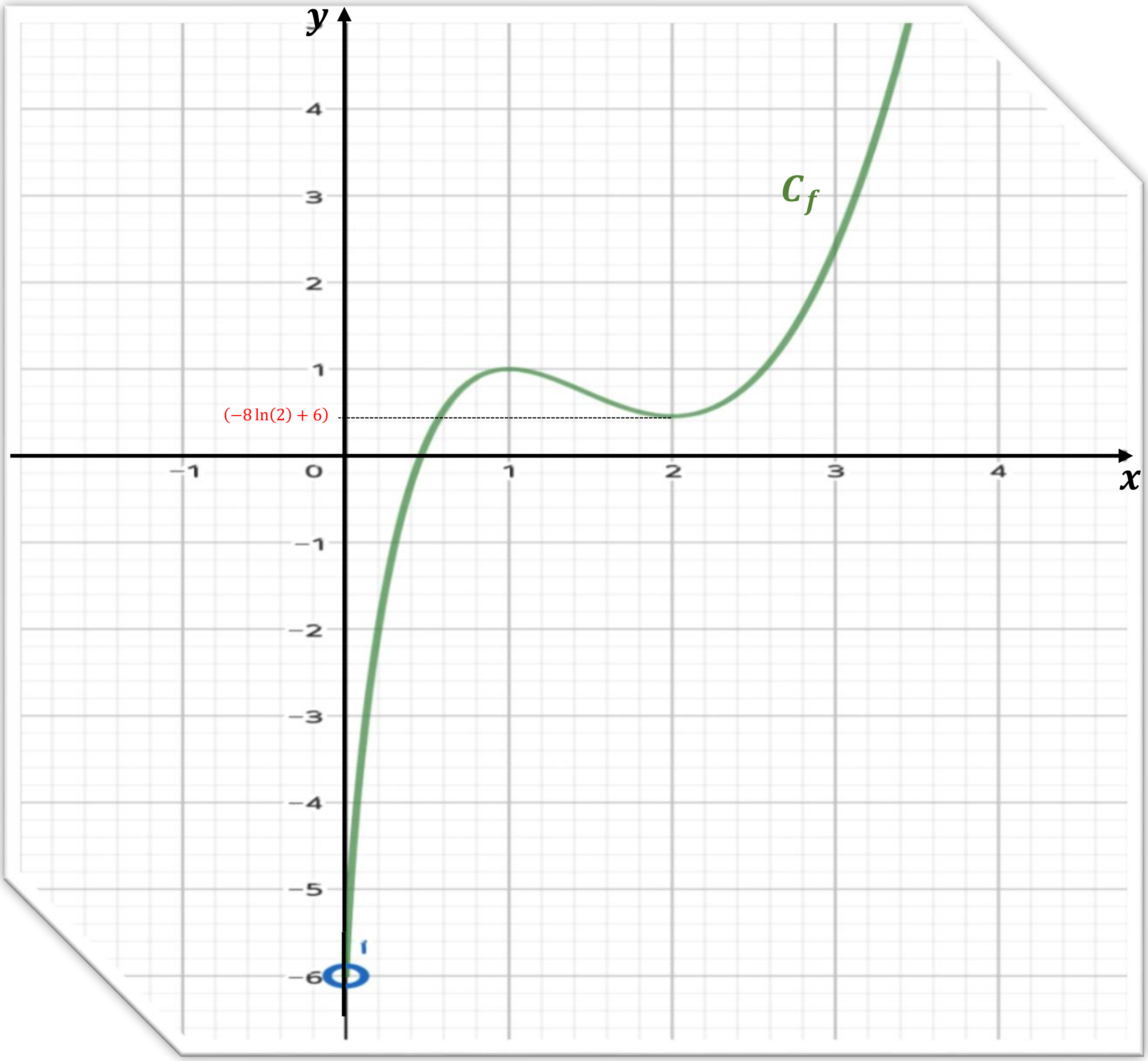


- $m \in]-\infty,-6[$: و $m \in]-\infty,-6]$: **لا يوجد حلول**
- $m \in]-6,-8\ln(2)+6[\cup]1,+\infty[$: **حل وحيد .**
- $m = -8\ln(2)+6$: و $m = 1$: **حلين .**
- $m \in]-8\ln(2)+6,1[$: **ثلاث حلول**

ملاحظة : طريقة إيجاد الحلول هي رسم مستقيم أفقي على المجال المحدد .

8) الرسم :

أ . رامزعنيزان (0982399409)



انتهت الحلول

رحمك الله أستاذ رامز عنيزان

أ . رامزعنيزان (0982399409)