/ /   1   ((مسائل شاملة))

يتم الحل عن طريق كتابة نظرياً + رسم

// استنتاج رسم خط بياني من خط بياني آخر //

ليكن C الخط البياني للتابع $f(x)$

① $f_1(x) = -f(x)$ C_1 نظير C_f بالنسبة لمحور الفواصل

② $f_2(x) = f(-x)$ C_2 نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب

③ $f_3(x) = -f(-x)$ C_3 نظير C_f بالنسبة لمبدأ الاحداثيات

④ $f_4(x) = |f(x)|$ C_4 ينتج عن C_f بأن نحافظ على القسم الواقع فوق محور الفواصل ونأخذ نظير القسم الواقع تحت محور الفواصل بالنسبة لمحور الفواصل

⑤ إن $f_5(x) = f(x) + \lambda$ C_5 ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(0, \lambda)$

أو بتحويل $(x, y) \longrightarrow (x, y+\lambda)$

⑥ إن $f_6(x) = f(x+\lambda)$ C_6 ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(-\lambda, 0)$

أو بتحويل $(x, y) \longrightarrow (x-\lambda, y)$

مسألة رقم ①

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = a e^{2x} + b e^{x}$

① عين قيمة a و b إذا علمت أن للتابع قيمة حدية هي -1 يبلغها عند الصفر

$$f'(x) = 2a e^{2x} + b e^{x}$$

$$f(0) = -1 \Longrightarrow a + b = -1 \quad \dots ①$$

$$f'(0) = 0 \Longrightarrow 2a + b = 0 \quad \dots ②$$

من ① نجد $\boxed{a = -1 - b}$ ③

نعوض ③ في ②

$$2(-1-b) + b = 0 \Rightarrow -2 - 2b + b = 0$$

$$\Rightarrow -b = +2 \Rightarrow b = -2$$

نعوض في ③ $a = -1 + 2 = +1$

بالحل المشترك لجملة المعادلتين $a = +1$ ، $b = -2$

② إذا علمت أن $a = 1$ و $b = -2$ ادرس تغيرات التابع $f(x) = e^{2x} - 2e^{x}$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty, +\infty[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$y = 0$ مقارب أفقي

/ /   2

① لا أهمية لذكر اتجاه المقارب

② لا أهمية لذكر كلمة تحليلياً

$\lim f(x) = \infty - \infty$ ع.ع.ت

$x \to \infty$

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x(e^x-2) = \infty(\infty-2) = \infty$

نشتق التابع

$f'(x) = 2e^{2x} - 2e^x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2e^{2x} - 2e^x = 0 \Rightarrow 2e^x(e^x-1) = 0$

إما $2e^x = 0$ مستحيلة

أو $e^x = 1 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	∞

$f(0) = -1$ قيمة حدية صغرى

③ ناقش حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = \lambda$ حيث λ من R

$f(x) = \lambda$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad \infty$

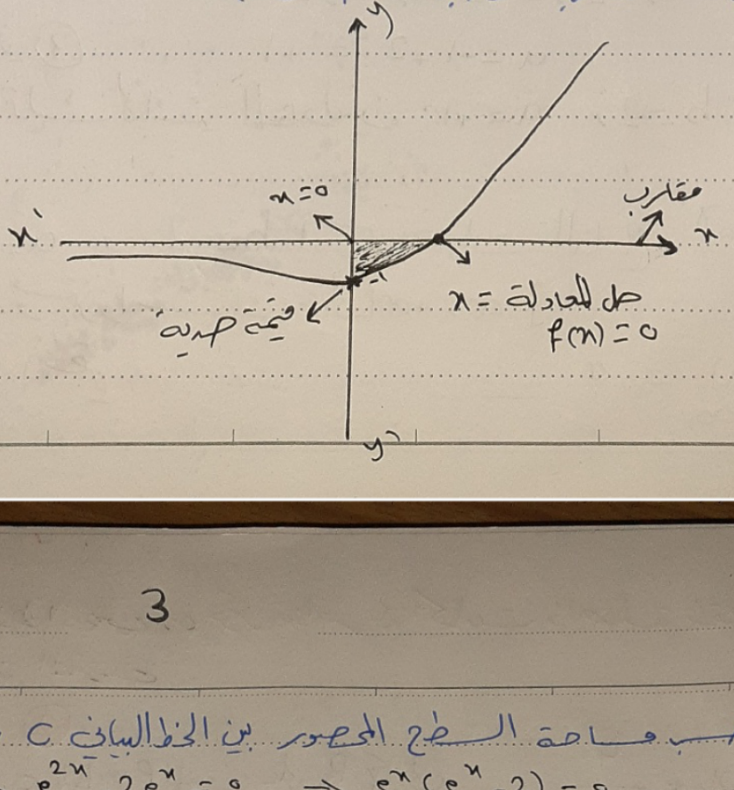
المعادلة $f(x) = \lambda$ مستحيلة الحل $\lambda \in]-\infty, -1[$

~ ~ لا حلول $\lambda \in]-1, 0[$

~ ~ لها حل وحيد $\lambda \in]0, \infty[$

المعادلة $f(x) = \lambda$ لها حل وحيد $\lambda = -1$ أو 0

④ ارسم كل مقارب وجبهة لتارسم C



rah Notebook

3

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحوري الإحداثيات

$f(x) = 0 \Rightarrow e^{2x} - 2e^x = 0 \Rightarrow e^x(e^x - 2) = 0$

إما $e^x = 0$ مستحيلة

أو $e^x = 2 \Rightarrow x = \ln(2)$

$S = -\int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx = \int_{\ln(2)}^{0} (e^{2x} - 2e^x)\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x\right]_{\ln(2)}^{0}$

$= \frac{1}{2}e - 2e - (\frac{1}{2}e - 2e) = -\frac{3}{2} - (2-4) = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2}$

⑥ احسب حجم المجسم الناتج عن دوران السطح المحدد بالخط البياني C حول محور الفواصل دورة كاملة:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx = \pi \int_0^{\ln(2)} (e^{2x} - 2e^{x})^2 dx$$

$$= \pi \int_0^{\ln(2)} (e^{4x} + 4e^{2x} - 4e^{3x}) dx$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}e^{4x} + 2e^{2x} - \frac{4}{3}e^{3x} \right]_0^{\ln(2)}$$

$$= \pi \left(\left(\frac{1}{\cancel{4}} \times \cancel{16}^{4} + 8 - \frac{4}{3} \times 8 \right) - \left(\frac{1}{4} + 2 - \frac{4}{3} \right) \right)$$

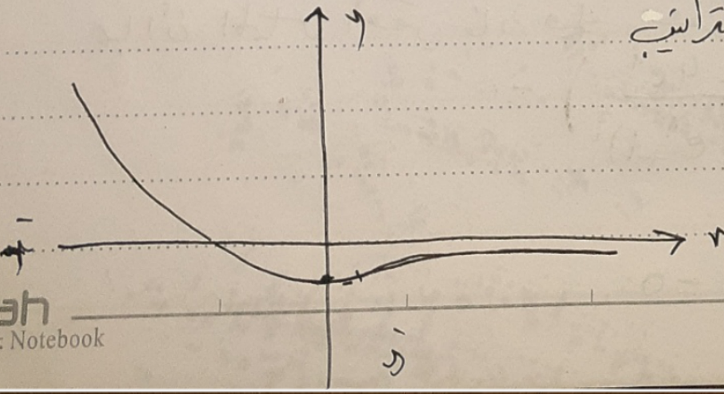
$$= \pi \left(\left(12 - \frac{32}{3} \right) - \left(\frac{3+24-16}{12} \right) \right) = \pi \left(\frac{4}{3} - \frac{5}{12} \right)$$

$$= \frac{11}{12}\pi$$

⑦ استنتج رسم الخط البياني للتابع $f_1(x) = \frac{1}{e^{2x}}(1 - 2e^{x})$

$$f_1(x) = e^{-2x}(1-2e^{x}) = e^{-2x} - 2e^{-x} = f(-x)$$

C_1 نظير C_f بالنسبة لمحور التراتيب



ملاحظة: يقبل الخط البياني مركز تناظر إذا كانت فاصلة النقطة التناظر من مجموعة التعريف.

مسألة رقم ②

ليكن C الخط البياني التابع f المعرف على R كما يلي $f(x) = x + \frac{4}{e^{x}+1}$

① اثبت أن النقطة A(0,2) مركز تناظر للخط البياني C

نثبت تحقق شرطي التناظر

① مهما يكن $x \in D_f$ فإن $2x_0 - x \in D_f$

$-x \in R$ فإن $\forall x \in R$

② $f(x) + f(2x_0 - x) \overset{?}{=} 2y_0$

$f(x) + f(-x) \overset{?}{=} 4$

$x + \frac{4}{e^{x}+1} - x + \frac{4}{e^{-x}+1}$

$$\Rightarrow \frac{4}{e^{x}+1} + \frac{4}{\frac{1}{e^{x}}+1} = \frac{4}{e^{x}+1} + \frac{4e^{x}}{e^{x}+1} = \frac{4(1+e^{x})}{e^{x}+1} = 4 = 2y_0$$

فإن $A(0,2)$ مركز تناظر للخط البياني C

② استنتج معادلة المقارب المائل للخط البياني C في جوار $+\infty$ ثم ادرس الوضع النسبي للخط البياني C ومقاربه d

$$d : y = x$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - y_d = \lim \frac{4}{e^x + 1} = 0$$ لأن

لدراسة الوضع النسبي ندرس إشارة الفرق

$$g(x) = f(x) - y_d = \frac{4}{e^x + 1} > 0$$

C_f فوق d على كامل R

③ اثبت أن C يقبل مماساً موازياً لمحور الفواصل

بما أن المماس أفقي فإن ميله صفر نحل المعادلة $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 1 + \left(\frac{-4e^x}{(e^x+1)^2} \right) = 0$$

$$\frac{(e^x+1)^2 - 4e^x}{(e^x+1)^2} = 0$$

$$\frac{e^{2x} - 2e^x + 1}{(e^x+1)^2} = 0 \Rightarrow \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} = 0 \Rightarrow x = 0$$

اذاً C يقبل مماساً وحيداً موازياً لمحور الفواصل

④ ادرس تغيرات التابع f وارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C_f

f معرف ومستمر واشتقاقي $]-\infty, \infty[$

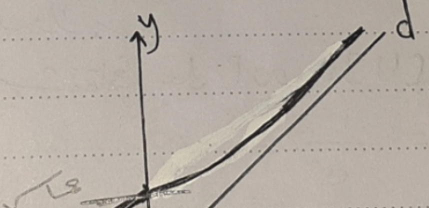
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

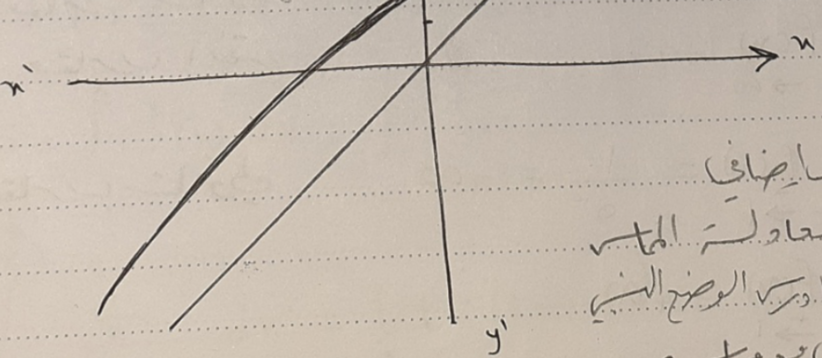
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \quad ; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$f(0) = 2$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↗	∞





قد يأتي طلب إضافي

١- اكتب معادلة المماس الأفقي وادرس الوضع النسبي للخط البياني مع مماسه $y = 2$

ندرس الوضع النسبي من جدول التغيرات $g(x) = f(x) - 2$

---

1 / 1 / 6

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0}$$

⑤ احسب مساحة السطح المحدد للخط البياني C ومقاربه المائل d والمستقيمين $x = 0$ و $x = 1$

$$S = \int_a^b (f(x) - y_d)\, dx$$

$$\int_0^1 \frac{4}{e^x+1}\, dx = 4\int_0^1 \frac{1+e^x-e^x}{e^x+1}\, dx = 4\int_0^1 1 - \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$$

$$= 4\left[x - \ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$= 4[(1 - \ln(e^1+1)) + \ln(2)]$$

$$= 4[1 - (\ln(e^1+1) - \ln(2))] = 4\left(1 - \ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right)\right)$$

$$= 4 - 4\ln\left(\frac{e^1+1}{2}\right)$$

مسألة رقم ③

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف كما يلي $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$

① جد مجموعة تعريف هذا التابع

$D_f =]0, +\infty[/ \{1\}$

$\Rightarrow]0,1[\cup]1,\infty[$

② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,1[\cup]1,\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ — $x = 0$ مقارب شاقولي

$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ — $y = 0$ مقارب أفقي

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$ — $x = 1$ مقارب شاقولي

$$\lim_{x \xrightarrow{+} 1} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{-\ln(x) - 1}{(x\ln(x))^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln(x) = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

arah Notebook

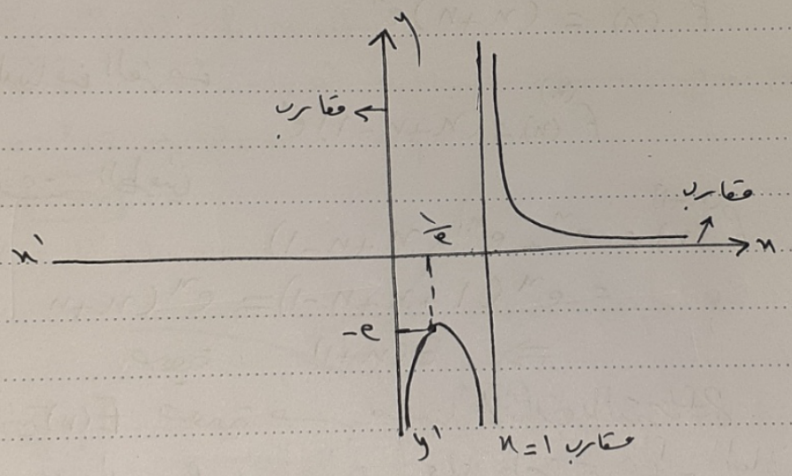
/ / 7

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{\frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)} = \frac{1}{\frac{1}{e}\times -1} = \frac{1}{-\frac{1}{e}} = -e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		∞
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$-e$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ ∞	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{e}\right) = -e$ قيمة حدية كبرى

③ ارسم كل مقارب وجهته ثم ارسم C



④ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحور الفواصل والمستقيم $x = e^2$ و $x = e$

$$S = \int_a^b f(x)\,dx = \int_e^{e^2} \frac{-1}{x\ln(x)}\,dx$$

$$= \int_e^{e^2} \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \left[\ln(\ln(x))\right]_e^{e^2}$$

$$= \ln(\ln(e^2)) - \ln(\ln(e)) = \ln(2)$$

مسألة رقم (4)

ليكن c الخط البياني التابع f المعرف على R كما يلي $f(x)=(x-1)e^x$

(1) اثبت بالتدريج أن $n\geq 1$: $f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$

$$E(n) : f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$$

نثبت صحة $E(1)$

$$f'(x)\overset{?}{=}x.e^x$$

$$f'(x)=f'(x)=x.e^x \Rightarrow E(1)$$ صحيحة

نفرض صحة $E(n)$

$$f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$$

نثبت صحة $E(n+1)$

$$f^{(n+1)}(x)\overset{?}{=}(x+n)e^x$$

لدينا من الفرض

$$f^{(n)}(x)=(x+n-1)e^x$$

نشتق الطرفين

$$f^{(n+1)}(x)=e^x+e^x(x+n-1)$$
$$=e^x(1+x+n-1)=e^x(x+n)$$
$$\Rightarrow E(n+1)$$ صحيحة

القضية $E(n)$ صحيحة حسب مبدأ الإثبات بالتدريج

(2) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها وارسم خط البياني

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]-\infty,\infty[$

$y=0$ مقارب أفقي

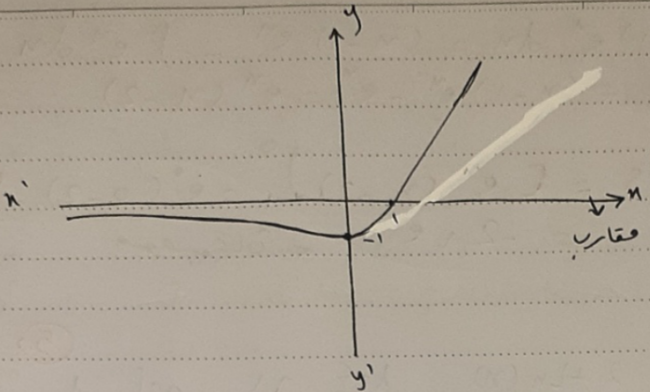
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$$

$$f'(x)=x.e^x \quad ; \quad f'(x)=0 \Rightarrow x.e^x=0 \Rightarrow x=0$$

$$f(0)=-1$$

x	$-\infty$		0		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	∞



③ استنتج رسم الخط البياني $g(x) = xe^{x+1}$

$g(x) = f(x+1)$ توضيح على سبيل المثال

$f(x) = x^2+2$ و ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u}(-1, 0)$

$f(x) = 2 \Rightarrow 2 = x^2+2 \Rightarrow x^2 = 0$

$\Rightarrow \boxed{x=0}$

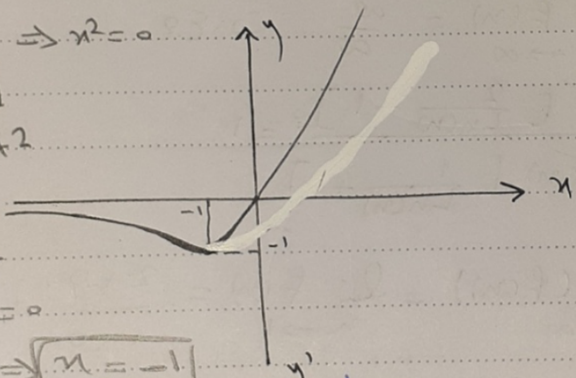
$f_1(x) = (x+1)^2+2$

$f_1(x) = 2$

$\Rightarrow 2 = (x+1)^2+2$

$\Rightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$



④ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني C ومحوري الإحداثيات

$f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)e^x = 0$

إما $x = 1$

أو $e^x = 0$ مستحيلة

$$S = -\int_0^1 (x-1)\cdot e^x \, dx = \int_1^0 (x-1)e^x \, dx$$

نحسب $(x-1)e^x$ بالتجزئة

$u = (x-1) \Rightarrow u' = 1$

$v' = e^x \Rightarrow v = e^x$

$$\int u \cdot v' = u \cdot v - \int u' \cdot v$$

arah Notebook

/ / ١٥

$$\int (x-1)e^x \, dx = (x-1)e^x - \int e^x \, dx$$

$$= (x-1)e^x - e^x = e^x(x-2)$$

$$\Rightarrow S = [e^x(x-2)]_1^0 = e^0(0-2) - e(1-2)$$

$$= -2 + e$$ ← موجب تماما

مسألة رقم ⑤

f تابع معرف على $]\frac{1}{e}, \infty[$ كما يلي $f(x) = \frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)}$

① احسب $\lim_{x \to \infty} f(f(x))$

ع.ع.ت $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\infty}{\infty}$

$$\lim \frac{\cancel{\ln(x)}\left[\frac{2}{\ln(x)}+1\right]}{\cancel{\ln(x)}\left[\frac{1}{\ln(x)}+1\right]} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} f(f(x)) = \lim_{x \to 1} f(x) = \frac{2+0}{1+0} = 2$$

② جد عدداً حقيقياً A كي $x > A$ فإن $f(x) \in]0{,}9 , 1{,}1[$

$$c = \frac{0{,}9+1{,}1}{2} = 1$$

$$r = \frac{1{,}1-0{,}9}{2} = \frac{1}{10}$$

$$|f(x) - c| < r \Rightarrow \left| \frac{2+\ln(x)}{1+\ln(x)} - 1 \right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left| \frac{1}{1+\ln(x)} \right| < \frac{1}{10}$$

على المجال $]\frac{1}{e}, \infty[$ فإن $1+\ln(x) > 0$

$$\frac{1}{1+\ln(x)} < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow 1+\ln(x) > 10 \Rightarrow \ln(x) > 9$$

$$\Rightarrow x > e^9$$

rah Notebook

/ / 11

مسألة وظيفة:

ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على R كما يلي $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً لها

② اثبت أن التابع f فردي واستنتج الصفة التناظرية لخطه البياني

③ ارسم كل مقارب وجدته ثم ارسم C

④ استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x) = \frac{|e^x - 1|}{e^x + 1}$

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين الخط البياني ومحور الفواصل و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln(2)$