Subject: حل تمارين شاملة في الأعداد العقدية وتطبيقاتها   /   /

حل التمرين الأول:

1) $Z = (1+i)\sqrt{3}\, e^{\frac{\pi}{3}i}$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow 1+i = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow Z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \sqrt{3} \cdot e^{\frac{\pi}{3}i}$

$= \sqrt{6} \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3})} = \boxed{\sqrt{6}\, e^{i\frac{7\pi}{12}}}$

2) $Z = 1 + e^{2\theta i} \quad ; \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$Z = e^{i\theta}\left(\frac{1}{e^{i\theta}} + e^{\theta i}\right)$

$= e^{\theta i}\,\underbrace{\left(e^{-\theta i} + e^{\theta i}\right)}_{\text{دستور أولر}}$

الشكل الأسي لـ Z: $\boxed{= 2\cos\theta \cdot e^{\theta i}}$

بما أن $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\theta > 0$

3) $Z = \left(\frac{1-\sqrt{3}i}{1+i}\right)^5$

لنكتب $(1-\sqrt{3}i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{3}$ ربع رابع

ومنه: $1-\sqrt{3}i = 2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}$

لنكتب $(1+i)$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ومنه: $1+i = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi}{4}i}$

$\Rightarrow Z = \left(\frac{2\, e^{-\frac{\pi}{3}i}}{\sqrt{2}\, e^{\frac{\pi}{4}i}}\right)^5$

$= \left(\sqrt{2}\, e^{(-\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})i}\right)^5 = 4\sqrt{2} \cdot \left(e^{-\frac{7\pi}{12}}\right)^5$

$= 4\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{35}{12}\pi i}$

القياس الأساسي: $-\frac{35}{12}\pi + 2\pi = -\frac{11\pi}{12}$

ومنه الشكل الأسي لـ Z:

$\boxed{Z = 4\sqrt{2} \cdot e^{-\frac{11\pi}{12}i}}$

4) $Z = (\sqrt{2}+\sqrt{2}i)(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3})$

لنكتب $\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{2+2} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

ومنه: $\sqrt{2}+\sqrt{2}i = 2\, e^{\frac{\pi}{4}i}$

ولنكتب $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$ بالشكل الأسي:

$\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3}) = e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$\Rightarrow Z = 2e^{\frac{\pi}{4}i} \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$= 2e^{(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3})i} = \boxed{2e^{-\frac{\pi}{12}i}}$

5 $Z = (1+i\sqrt{3})^4 \cdot (\sqrt{3}+i)^5$

لنكتب $1+i\sqrt{3}$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+3} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$

$1+i\sqrt{3} = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$

ولنكتب $\sqrt{3}+i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{3+1} = 2$

$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$\sqrt{3}+i = 2e^{\frac{\pi}{6}i}$

$\Rightarrow Z = (2e^{\frac{\pi}{3}i})^4 \cdot (2e^{\frac{\pi}{6}i})^5$

$= 2^4 e^{\frac{4\pi}{3}i} \cdot 2^5 e^{\frac{5\pi}{6}i}$

$= 2^9 e^{(\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{6})i}$

$= 2^9 e^{\frac{13}{6}\pi i}$

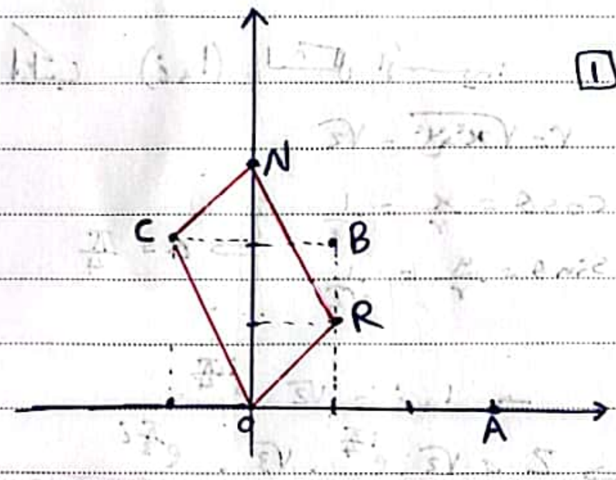
التعيين الأساسي: $\frac{13\pi}{6} - 2\pi = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow Z = \boxed{2^9 e^{\frac{\pi}{6}i}}$

حل التمرين الثاني:

$A(3,0)$, $B(1,2)$, $C(-1,2)$

1



2 $Z_N - Z_O = e^{\frac{\pi}{2}i}(Z_A - Z_O)$

$\boxed{Z_N = 3i}$

3 ليكون الشكل OCNR متوازي أضلاع:

$Z_{\overrightarrow{OR}} = Z_{\overrightarrow{CN}}$

$\Rightarrow r - o = n - c$

$\Rightarrow r = 3i - (-1+2i) \Rightarrow \boxed{r = 1+i}$

4 $\frac{Z_{\overrightarrow{OR}}}{Z_{\overrightarrow{AB}}} = \frac{r-o}{b-a} = \frac{1+i}{1+2i-3} = \frac{1+i}{-2+2i}$

$= \frac{(1+i)(-2-2i)}{(-2+2i)(-2-2i)} = -\frac{1}{2}i$

* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OR}) = \arg\left(\frac{r-o}{b-a}\right) = \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) = -\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \boxed{OR \perp AB}$

$$* \quad \frac{|Z_{OR}|}{|Z_{AB}|} = \left|-\tfrac{1}{2}i\right| \Rightarrow \frac{OR}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OR = \frac{1}{2} AB$$

حل التمرين الثالث:

حساب: $(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2)$

$$= \alpha+\alpha^2+\alpha^3-1-\alpha-\alpha^2 = \alpha^3-1$$

بما أنه $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$\Rightarrow \alpha^3 = e^{2\pi i} = 1$$

فإنه: $\alpha^3 - 1 = 1 - 1 = 0$

$$\Rightarrow (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) = 0$$

* استنتج أنه $1+\alpha+\alpha^2 = 0$

لدينا $(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) = 0$

$\alpha - 1$ ليست صفراً لأن $\alpha = e^{\frac{2\pi}{3}i}$

$$\Rightarrow \boxed{1+\alpha+\alpha^2 = 0}$$

طلب إضافي:

حل المعادلة $1+\alpha+\alpha^2 = 0$

ثم تحقق أنه $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 = -3 = 3i^2$$

$$\alpha_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

ولنتحقق أنه $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

$$\alpha^2 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}i}\right)^2 = e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

التعيين الأساسي: $\frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow \alpha^2 = e^{-\frac{2\pi}{3}i} = \bar{\alpha}$$

حل التمرين الرابع:

1) $P(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + 3(-1) + 7$
$= -1 - 3 - 3 + 7 = 0$

2)

$$\begin{array}{r|l} Z^3 - 3Z^2 + 3Z + 7 & Z+1 \\ \hline -Z^3 - Z^2 & Z^2 - 4Z + 7 \\ -4Z^2 + 3Z + 7 & \\ +4Z^2 + 4Z & \\ 7Z + 7 & \\ -7Z - 7 & \\ 0 & \end{array}$$

$$\Rightarrow P(Z) = (Z+1)(Z^2 - 4Z + 7)$$

3) $P(Z) = 0$

$$\Rightarrow (Z+1)(Z^2-4Z+7) = 0$$

إما $Z+1 = 0 \Rightarrow Z = -1$

أو $Z^2 - 4Z + 7 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4(1)(7) = -12 < 0$$

لها حلان عقديان مترافقان في $\mathbb{C}$

$$\Delta = i^2 12 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$$

$$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2\sqrt{3}i}{2} = 2+\sqrt{3}i$$

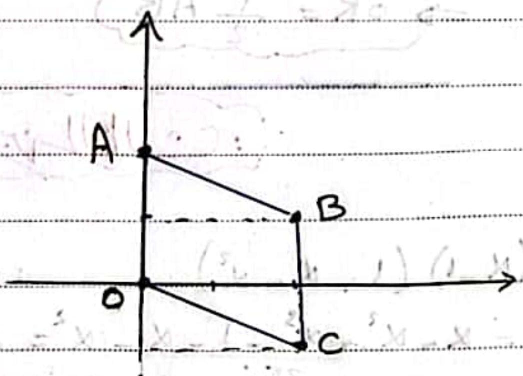
$$Z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 2-\sqrt{3}i$$

$\boxed{2}$

$Z = 2i \Rightarrow A(0,2)$

$Z_1 = 2+i \Rightarrow B(2,1)$

$Z_2 = 2-i \Rightarrow C(2,-1)$



$Z_{\overrightarrow{AB}} = (2-0)+(1-2)i = 2-i$

$Z_{\overrightarrow{OC}} = (2-0)+(-1-0)i = 2-i$

أي أن: $\Rightarrow Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{OC}}$

$ABCO$ متوازي أضلاع.

حل التمرين السادس:

نكتب $Z_1 = 1+i$ بالشكل الأسي:

$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow Z_1 = re^{i\theta} = \boxed{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}}$

$Z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \boxed{2\,e^{i\frac{2\pi}{3}}}$

$Z_3 = -\sqrt{3}\,e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\pi}\cdot\sqrt{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = \boxed{\sqrt{3}\cdot e^{\frac{7\pi}{6}i}}$

4) $Z = -1 \Rightarrow A(-1,0)$

$Z_1 = 2+\sqrt{3}i \Rightarrow B(2,\sqrt{3})$

$Z_2 = 2-\sqrt{3}i \Rightarrow C(2,-\sqrt{3})$

$AB = \sqrt{(2+1)^2+(\sqrt{3}-0)^2} = 2\sqrt{3}$

$AC = \sqrt{(2+1)^2+(-\sqrt{3}-0)^2} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(2-2)^2+(-\sqrt{3}-\sqrt{3})^2} = 2\sqrt{3}$

$\Rightarrow AB = AC = BC = 2\sqrt{3}$

فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

حل التمرين الخامس:

$\boxed{1}$ بما أن المعادلة تقبل حلاً تخيلياً بحتاً ومن الدرجة الثالثة يمكن كتابتها بالشكل:

$(Z-ai)(Z^2+bZ+c)=0$

$Z^3+bZ^2+cZ-aiZ^2-aibZ-aic=0$

$Z^3+(b-ai)Z^2+(c-abi)Z-aci=0$

بالمقارنة مع الفرض:

$$b-ai = -4-2i \Rightarrow \begin{cases}\boxed{b=-4} \\ \boxed{a=2}\end{cases}$$

$c-abi = 5+8i \Rightarrow \boxed{c=5}$

وبالتالي نجد:

$(Z-2i)(Z^2-4Z+5)=0$

إما $Z-2i=0 \Rightarrow Z=2i$

أو $Z^2-4Z+5=0$

$\Delta = 16-4(1)(5) = -4 = 4i^2$

$\sqrt{\Delta} = 2i$

$Z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2i}{2} = 2+i$

$Z_2 = 2-i$

Subject : .... / /

حل التمرين السابع:

$z \neq -1$ حيث $w = \dfrac{2+\bar{z}}{1+\bar{z}}$

نفرض $w = \alpha + \beta i$

$z = x + yi$

$$w = \frac{2+x-yi}{1+x-yi} = \frac{(2+x-yi)(1+x+yi)}{(1+x-yi)(1+x+yi)}$$

$$w = \frac{x^2+3x+y^2+2+yi}{(1+x)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta i = \frac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2} + \frac{y}{(1+x)^2+y^2} i$$

حقيقي = حقيقي

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+3x+y^2+2}{(1+x)^2+y^2} = \alpha \\ \text{تخيلي = تخيلي} \\ \dfrac{y}{(1+x)^2+y^2} = \beta \end{cases}$$

متى تكون w حقيقي، يجب أن تكون جزئه التخيلي معدوم أي $\beta = 0 \Leftarrow$

$\boxed{y = 0}$

مجموعة النقاط تمثل مستقيم محذوف منه النقطة $(-1, 0)$ التي تعدم المقام.

(2) متى تكون w تخيلي بحت، يجب أن تكون جزئه الحقيقي معدوم أي $\alpha = 0 \Leftarrow$

$$x^2+3x+y^2+2 = 0$$

$$\Rightarrow x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}}$$

مجموعة النقاط تمثل معادلة دائرة مركزها $(-\frac{3}{2}, 0)$ ونصف قطرها $\frac{1}{2}$ محذوف منها النقطة $(-1, 0)$

[2]

$$\frac{(z_1)^2}{(z_2)^3 (z_3)^6} = \frac{\left(\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2}{\left(2 e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3 \cdot \left(\sqrt{3}\, e^{\frac{7\pi}{6} i}\right)^6}$$

$$= \frac{2 e^{i\frac{\pi}{2}}}{8 e^{2\pi i} \cdot (27) \cdot e^{i 7\pi}}$$

$$= \frac{1}{108} e^{i\left(\frac{\pi}{2} - 2\pi - 7\pi\right)} = \frac{1}{108} e^{-\frac{\pi}{2} i}$$

$$\boxed{= -\frac{1}{108} i}$$

[3]

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

$$= 2\left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right] = -1 + \sqrt{3} i$$

$$\Rightarrow z_1 \cdot z_2 = (1+i)(-1+\sqrt{3} i)$$

$$= -1 + \sqrt{3} i - i - \sqrt{3}$$

الشكل الجبري

(1) $\Rightarrow \boxed{z_1 \cdot z_2 = (-1-\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)}$

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot 2 e^{\frac{2\pi}{3} i}$$

$$= 2\sqrt{2}\, e^{\frac{11\pi}{12} i}$$

الشكل المثلثي

$$\boxed{= 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)\right]}$$

بمقارنة الشكل المثلثي والجبري لـ $z_1 \cdot z_2$ نجد:

$$\sqrt{3} - 1 = 2\sqrt{2} \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

حل التمرين الثامن:

[1] M نظيرة G بالنسبة لـ xx':

$$Z_M = \overline{Z_G}$$

$$\Rightarrow Z_M = 2-3i$$

[2]

$$Z_H - Z_P = e^{\theta i}(Z_G - Z_P)$$

$$\Rightarrow e^{\theta i} = \frac{Z_H - Z_P}{Z_G - Z_P}$$

$$= \frac{1+(2+\sqrt{2})i - (1+2i)}{2+3i-(1+2i)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}i}{1+i} \cdot \left(\frac{1-i}{1-i}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$$

$$\Rightarrow e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{\pi}{4}}$$

اذاً الصيغة العقدية للدوران:

$$Z_H - Z_P = e^{\frac{\pi}{4}i}(Z_G - Z_P)$$

حل التمرين التاسع:

[1]

$$\frac{a-d}{a-c} = \frac{\sqrt{3}-i-\bar{c}}{\sqrt{3}-i-(\sqrt{3}+3i)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-i-(\sqrt{3}+i)}{-4i} = \frac{-2i}{-4i} = \frac{1}{2}$$

نستنتج أن النقاط A ، C ، D على استقامة واحدة.

[2]

$a = \sqrt{3} - i \Rightarrow A(\sqrt{3}, -1)$

$b = -a = -\sqrt{3} + i \Rightarrow B(-\sqrt{3}, 1)$

$c = \sqrt{3} + 3i \Rightarrow C(\sqrt{3}, 3)$

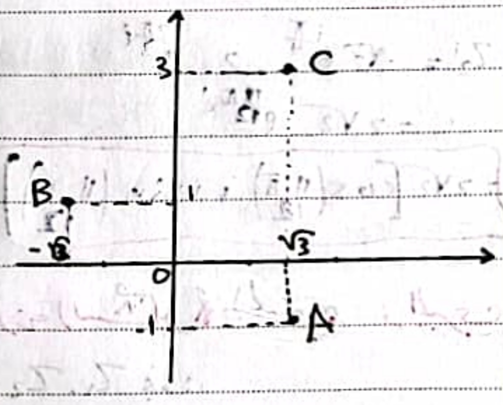
$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{c-a}{c-b}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+3i-(\sqrt{3}-i)}{\sqrt{3}+3i+\sqrt{3}-i}$$

$$= \frac{4i}{2\sqrt{3}+2i}$$

$$= \frac{2i}{\sqrt{3}+i} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}-i}\right)$$

$$= \frac{2i(\sqrt{3}-i)}{4} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$



حل التمرين العاشر:

1) $AZ^2+BZ+C=0 \Leftarrow Z^2-6Z+18=0$

متى يكون a, b جذرين للمعادلة يجب أن يتحقق

$a+b=-\frac{B}{A}=6$

$a.b=\frac{C}{A}=18$

نلاحظ أن

$a+b=3+3i+3-3i=6=-\frac{B}{A}$

$a.b=(3+3i)(3-3i)=9+9=18=\frac{C}{A}$

وبالتالي نستنتج أن:

a, b جذرين للمعادلة.

2) من أجل $a=3+3i$ نجد:

$r=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}$

$\left.\begin{array}{l}\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right\}\Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4}$

ومنه: $a=re^{i\theta}=3\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$

$=3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

وبما أن b مرافق a نجد:

$b=3\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}$

$=3\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

*

$l_1=a^4+b^4+648$

$=\left(3\sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^4+\left(3\sqrt{2}\,e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^4+648$

$=81\times4\times e^{i\pi}+81\times4\times e^{-\pi i}+648$

$=-324-324+648=0=l_2$

$\frac{c-a}{c+a}=e^{\frac{\pi}{3}i}$

$\Rightarrow \arg\left(\frac{c-a}{c-b}\right)=\arg\left(e^{\frac{\pi}{3}i}\right)$

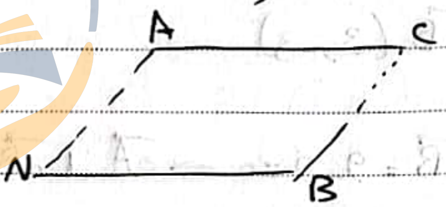
$\Rightarrow (\vec{BC},\vec{AC})=\frac{\pi}{3}$

$\Rightarrow \left|\frac{c-a}{c+a}\right|=\left|e^{\frac{\pi}{3}i}\right|=1$

$\Rightarrow \frac{AC}{BC}=1 \Rightarrow AC=BC$

المثلث ABC متساوي الساقين وفيه زاوية $\frac{\pi}{3}$ فهو متساوي الأضلاع

3)



$Z_{\vec{AC}}=Z_{\vec{NB}}$

$c-a=b-n$

$\Rightarrow 4i=b-n$

$\Rightarrow n=b-4i=-\sqrt{3}+i-4i$

$\Rightarrow \boxed{n=-\sqrt{3}-3i}$

3 ليكن ω العدد المركب الممثل للشعاع

$\vec{OA} = 3\vec{u} + 3\vec{v}$

وبالتالي : $\omega = 3 + 3i$

ومنه الصيغة المركبة للانسحاب T

الذي شعاعه $\vec{OA}$ هي :

$z' = z + \omega$

ومنه :

$\boxed{z' = z + 3 + 3i}$

4

$b' = b + 3 + 3i$

$= 3 - 3i + 3 + 3i = 6$

$\frac{b - b'}{a - b'} = \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6}$

$= \frac{1 + i}{1 - i} = \frac{(1 + i)^2}{2} = i$

ومنه :

5 $\arg\left(\frac{b - b'}{a - b'}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow (\vec{B'A}, \vec{B'B}) = \frac{\pi}{2}$

ونستنتج أنه :

المثلث (ABB') قائم في B'

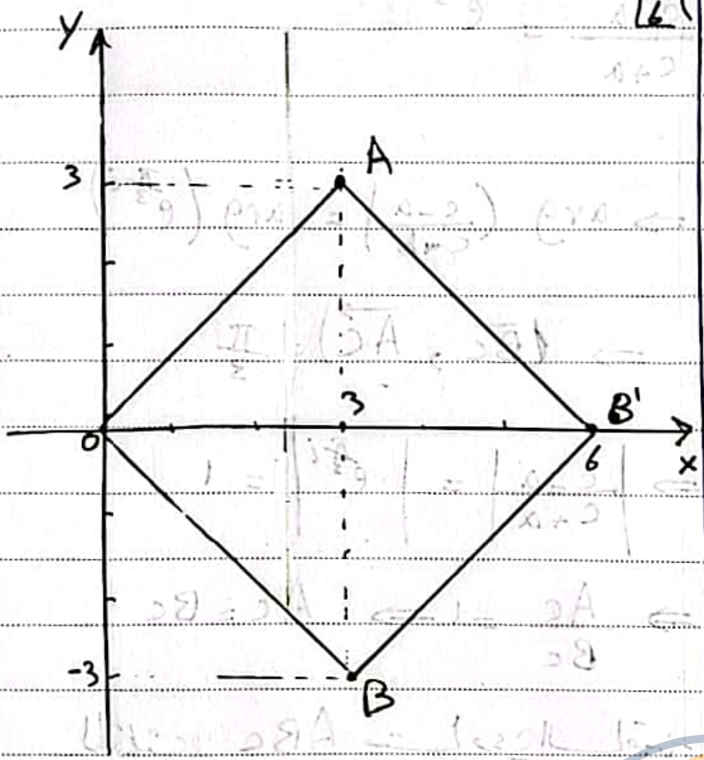
وأنه :

$\left|\frac{b - b'}{a - b'}\right| = |i| = 1$

$\Rightarrow \frac{BB'}{AB'} = 1 \Rightarrow AB' = BB'$

إذاً المثلث (ABB') قائم في B' ومتساوي الساقين

6



نلاحظ أنه :

$\vec{OA}(3, 3)$

$\vec{OB}(3, -3)$

$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 9 - 9 = 0 \Rightarrow \vec{OA} \perp \vec{OB}$

$\Rightarrow OA = OB = \sqrt{9 + 9} = 3\sqrt{2}$

وبالتالي الرباعي $(OAB'B)$ فيه :

$OA \perp OB$

$OA = OB$

$\Leftarrow$ $(OAB'B)$ مربع

حل التمرين الحادي عشر:

[2] حل في $\mathbb{C}$:

$$2iZ + \bar{Z} = 3+3i$$

نفرض $Z = x+yi$

$$\Rightarrow \bar{Z} = x-yi$$

نعوض:

$$2i(x+yi) + x - yi = 3+3i$$

$$\Rightarrow (x-2y) + i(2x-y) = 3+3i$$

بالمقارنة

$$\begin{cases} x-2y=3 & (1) \\ 2x-y=3 & (2) \end{cases}$$

بحل المشترك نجد:

بطرح

$$\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 2x-y=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=-1}$$

نعوض بـ (1)

$$\boxed{x=1}$$

ومنه حل المعادلة:

$$\boxed{Z = x+yi = 1-i}$$

[3] بما أن w عدد حقيقي فهو يساوي مرافقه:

$$\frac{Z-u\bar{Z}}{1-u} = \frac{\bar{Z}-\bar{u}Z}{1-\bar{u}}$$

$$\Rightarrow (Z-u\bar{Z})(1-\bar{u}) = (\bar{Z}-\bar{u}Z)(1-u)$$

$$\Rightarrow Z - Z\bar{u} - u\bar{Z} + u\bar{u}\bar{Z} = \bar{Z} - \bar{u}Z - u\bar{Z} + u\bar{u}Z$$

ننقل جميع الحدود إلى طرف واحد:

$$Z - \bar{Z} + u\bar{u}\bar{Z} - u\bar{u}Z = 0$$

$$Z - \bar{Z} - u\bar{u}(Z-\bar{Z}) = 0$$

$$\Rightarrow (Z-\bar{Z})(1-u\bar{u}) = 0$$

$\Rightarrow$ إما $Z-\bar{Z}=0 \Rightarrow Z=\bar{Z}$

$\Rightarrow Z$ حقيقي

أو $1-u\bar{u}=0 \Rightarrow u\bar{u}=1$

$\Rightarrow |u|=1$

[4] $a=1$, $b=1+4i$, $c=-5-i$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$= (1+4i)^2 - 4(1)(-5-i)$$

$$\Delta = 5+12i$$

نوجد الجذرين التربيعيين لـ Δ.

نفرض $x+yi$ هو جذر تربيعي لـ Δ:

(1) $x^2+y^2 = \sqrt{25+144} = 13$

(2) $x^2-y^2 = 5$

(3) $2xy = 12 > 0$

بجمع (1), (2):

$$2x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

نعوض بـ (3) نجد:

$$\begin{cases} y=2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{-(1+4i) - 3 - 2i}{2} = -2-3i$$

$$Z_2 = \frac{-(1+4i) + 3 + 2i}{2} = 1-i$$

1) $$z^3 = i$$

بفرض $z = re^{i\theta}$

عندئذ:

$$(re^{i\theta})^3 = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow r^3 e^{3\theta i} = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \Rightarrow r = 1 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k \end{cases}$$

حيث k عدد صحيح

$k=0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$

$$\Rightarrow \boxed{z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$k=1 \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$

$$\Rightarrow z_2 = e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$k=2 \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$

$$\Rightarrow z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}}$$

وأن النقاط التي تمثل الحلول تشكل رؤوس مثلث متساوي الأضلاع.

حل التمرين الثاني عشر:

1) $$\left|\frac{z-3+2i}{\bar{z}-2}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \frac{|z-3+2i|}{|\bar{z}-2|} = 1$$

$$\Rightarrow |z-(3-2i)| = |\bar{z}-2|$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = |z-2|$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = |z-z_B|$$

$$\Rightarrow MA = MB$$

ومنه $M(z)$ تمثل محور القطعة المستقيمة $[AB]$

2) $$|z-3+2i| = |3+4i|$$

$$\Rightarrow |z-(3-2i)| = |3+4i|$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = \sqrt{9+16} = 5$$

$$\Rightarrow |z-z_A| = 5$$

$$\Rightarrow \boxed{MA = 5}$$

ومنه $M(z)$ تمثل دائرة مركزها A ونصف قطرها 5

Subject : / /

حل التمرين الثالث ع :

1

D نظيرة A بالنسبة لـ O $\Leftarrow$

$\boxed{d = -2}$

B صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$

$$\Rightarrow b = e^{i\frac{\pi}{3}}\, a$$

$$\Rightarrow b = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 1 + \sqrt{3}\, i}$$

c صورة A وفق دوران مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$

$$\Rightarrow c = e^{\frac{2\pi}{3} i}\, a$$

$$\Rightarrow \boxed{c = -1 + \sqrt{3}\, i}$$

2

$$\frac{d-c}{a-c} = \frac{-2+1-\sqrt{3}i}{2+1-\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i}$$

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{3-\sqrt{3}i} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{3}i}{3+\sqrt{3}i}\right) = \frac{+1}{\sqrt{3}} i$$

$$\Rightarrow \arg\left(\frac{d-c}{a-c}\right) = +\frac{\pi}{2}$$

$\Leftarrow$ ACD قائم في C

أ.معتز شحادة