

5.4

# Exponential and Logarithmic

## Equations المعادلات الأسية واللوغاريتمية

### property of logarithms ~

if  $x > 0, y > 0, a > 0$  then ~

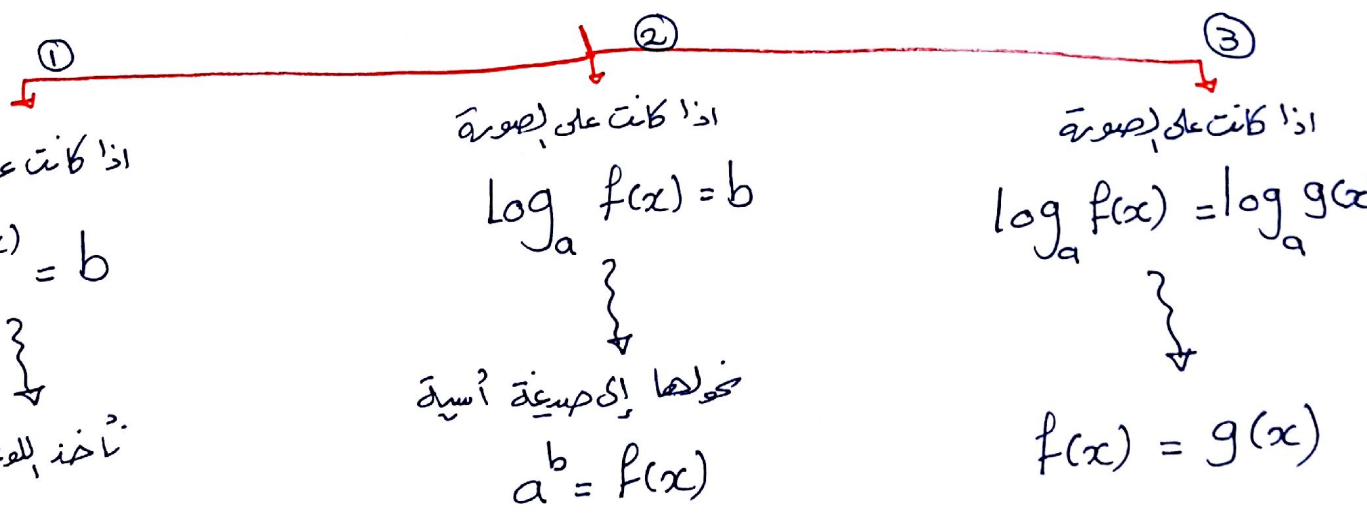
$$\log_a x = \log_a y \iff x = y$$

اللوغاريتمات متساوية  
⇔ طايراضل اللوغاريتمات  
متساوي

$$\log 2x = \log 1 \iff 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2}$$

### Solving Exponential or Logarithmic functions :-

طرق حل المعادلات  
الأسية  
أو اللوغاريتمية



## ملاحظات

$$\log_{10} = \log \rightsquigarrow \text{أساسه } 10$$

$$\log_e = \ln$$

$$\ln e^x = x \quad , \quad e^{\ln x} = x$$

$\ln$  يُلغِي تأثير  $e$  ، والعكس صحيح .

Example 1 :~ Solve  $7^x = 12$

على الصورة  $a^x = b$  نأخذ  $\ln$  للطرفين

حرفين الوفا - نتائج

$$\ln 7^x = \ln 12$$

$$x \ln 7 = \ln 12 \implies x = \frac{\ln 12}{\ln 7} \approx 1.277$$

HW1 :~ Solve  $3^{2x-1} = 0.4^{x+2}$

نأخذ  $\ln$  للطرفين

$$\ln 3^{2x-1} = \ln 0.4^{x+2}$$

$$(2x-1) \ln 3 = (x+2) \ln 0.4$$

$$2x \ln 3 - \ln 3 = x \ln 0.4 + 2 \ln 0.4$$

$$2x \ln 3 - x \ln 0.4 = 2 \ln 0.4 + \ln 3$$

$$\text{عامل مشترك} \rightarrow x(2 \ln 3 - \ln 0.4) = 2 \ln 0.4 + \ln 3$$

$$x = \frac{2 \ln 0.4 + \ln 3}{2 \ln 3 - \ln 0.4}$$

المعادلات في طرف  
المتوابع في طرف

∴ Example 2 ∴ Solve each equation

(a)  $e^{x^2} = 200$

تأخذ Ln للطرفين

$e^{x^2}$  يتخذ Ln

$$\ln e^{x^2} = \ln 200$$

$$x^2 = \ln 200$$

الجزء التربيعي

$$x = \pm \sqrt{\ln 200} \approx \pm 2.302$$

(b)  $e^{2x+1} \cdot e^{-4x} = 3e$

نفس الخطوات  
نجمع الأسس

$$e^{2x+1+(-4x)} = 3e$$

$$e^{2x+1-4x} = 3e$$

$$e^{-2x+1} = 3e$$

تأخذ Ln للطرفين

$$\ln e^{-2x+1} = \ln 3e$$

خصائص اللوغاريتمات "الضرب"

$$-2x+1 = \ln 3 + \ln e$$

$$-2x+1 = \ln 3 + 1$$

$$-2x = \ln 3 + 1 - 1$$

$$x = \frac{-\ln 3}{2}$$

$$\ln e = 1$$

Example 3 ∴

(a)  $7 \ln x = 28 \implies \ln x = \frac{28}{7} \implies \ln x = 4$

تأخذ e للطرفين

$$e^{\ln x} = e^4 \implies x = e^4$$

Solution set  $\{e^4\}$

$$(b) \log_2 (x^3 - 19) = 3$$

على الصورة (2) — خولها إلى صيغة أسية

$$x^3 - 19 = 2^3 \implies x^3 - 19 = 8$$

$$x^3 = 8 + 19 \implies x^3 = 27$$

بأنه أكبر  
العدد

$$x = \sqrt[3]{27} \implies x = 3$$

Solution set  $\{3\}$

HW2 or Solve  $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

فسي كتابتها على شكل التالي ..

$$(e^x)^2 - 4e^x + 3 = 0$$

هذه معادلة تربيعية فلها بالتكامل :-

$$(e^x - 1)(e^x - 3) = 0$$

$$e^x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad e^x - 3 = 0$$

$$e^x = 1 \quad , \quad e^x = 3$$

$$\ln e^x = \ln 1 \quad , \quad \ln e^x = \ln 3$$

$$x = \ln 1 \quad , \quad x = \ln 3$$

$$x = 0 \quad , \quad$$

∴ Solution set  $\{0, \ln 3\}$

### HW 3 : Solve:

$$\log(x+6) - \log(x+2) = \log x$$

$$\log \frac{x+6}{x+2} = \log x$$

من حالة (3) ، المعادلتان متساويتان يعني ما داخل القوسين متساوي .

$$\frac{x+6}{x+2} = x \implies x+6 = x(x+2)$$

نقلها معادلة كعربية

$$x+6 = x^2 + 2x$$

$$x^2 + 2x - x - 6 = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

كامل

$$(x+3)(x-2) = 0$$

$$x+3 = 0 \quad \text{or} \quad x-2 = 0$$

$$x = -3 \quad , \quad x = 2$$

$$\text{Solution set } \{-3, 2\}$$

### Example 4 : Solve:-

$$\log_2 [(3x-7)(x-4)] = 3$$

على صورة (2) - نحلها الى صورة أسية

$$(3x-7)(x-4) = 2^3$$

$$3x^2 - 12x - 7x + 28 = 8$$

$$3x^2 - 19x + 20 = 0$$

$$(3x-4)(x-5) = 0$$

$$3x-4 = 0 \quad \text{or} \quad x-5 = 0$$

$$x = \frac{4}{3} \quad , \quad x = 5$$

$$\text{Solution set } \left\{ \frac{4}{3}, 5 \right\}$$



HW 4 :~ Solve

$$\text{Log} (3x + 2) + \text{Log} (x - 1) = 1$$

خصائص  
اللوغاريتمات

$$\text{Log} [(3x + 2)(x - 1)] = 1$$

نحولها إلى صيغة أسية

$$(3x + 2)(x - 1) = 10^1$$

$$3x^2 - 3x + 2x - 2 - 10 = 0$$

$$3x^2 - x - 12 = 0$$

أظلي

Example 5 :~ Solve:

$$\ln e^{\ln x} - \ln(x - 3) = \ln 2$$

$$\ln x - \ln(x - 3) = \ln 2$$

$$\ln \frac{x}{x - 3} = \ln 2$$

من الحالة 3 في اللوغاريتمات مساوية  $\Rightarrow$  طابا اهل اللوغاريتم متساوي.

$$\frac{x}{x - 3} = 2$$

$$x = 2(x - 3)$$

$$2x - 6 = x$$

$$2x - x - 6 = 0$$

$$x = 6$$

Solution set  $\{6\}$

# Exercises :- Solve:-

(7)

$$\textcircled{1} \quad 7^x = 19 \xrightarrow[\text{للطرفين}]{\text{نأخذ } \ln}$$

$$x \ln 7 = \ln 19 \implies x = \frac{\ln 19}{\ln 7}$$

$$\textcircled{2} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^x = 12 \longrightarrow \ln \left(\frac{1}{2}\right)^x = \ln 12$$

$$x \ln \frac{1}{2} = \ln 12 \implies x = \frac{\ln 12}{\ln \frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{5} \quad 0.8^x = 4 \longrightarrow \ln 0.8^x = \ln 4$$

$$x \ln 0.8 = \ln 4 \implies x = \frac{\ln 4}{\ln 0.8}$$

$$\textcircled{12} \quad 3(2)^{x-2} + 1 = 100$$

$$3(2)^{x-2} = 100 - 1 \implies 3(2)^{x-2} = 99$$

$$2^{x-2} = \frac{99}{3} \implies 2^{x-2} = 33 \quad \text{نأخذ } \ln \text{ للطرفين}$$

$$\ln 2^{x-2} = \ln 33 \implies (x-2) \ln 2 = \ln 33$$

$$x \ln 2 - 2 \ln 2 = \ln 33 \implies x \ln 2 = \ln 33 + 2 \ln 2$$

$$x = \frac{\ln 33 + 2 \ln 2}{\ln 2}$$

$$\textcircled{13} \quad 2(1.05)^x + 3 = 10$$

$$2(1.05)^x = 7 \implies (1.05)^x = \frac{7}{2} \implies \ln (1.05)^x = \ln \frac{7}{2}$$

$$x \ln 1.05 = \ln \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{\ln \frac{7}{2}}{\ln 1.05}$$

$$(18) \quad 5 \ln x = 10$$

$$\ln x = \frac{10}{5} \implies \ln x = 2 \implies e^{\ln x} = e^2$$

$$\boxed{x = e^2}$$

$$(19) \quad \ln(4x) = 1.5 \implies e^{\ln(4x)} = e^{1.5}$$

$$4x = e^{1.5} \implies \boxed{x = \frac{1}{4} e^{1.5}}$$

$$(34) \quad \ln(4x-2) - \ln 4 = -\ln(x-2)$$

$$\ln \frac{4x-2}{4} = \ln (x-2)^{-1}$$

$$\ln \frac{4x-2}{4} = \ln \frac{1}{x-2}$$

$$\frac{4x-2}{4} = \frac{1}{x-2} \implies (4x-2)(x-2) = 4$$

$$4x^2 - 8x - 2x + 4 - 4 = 0 \implies 4x^2 - 10x = 0$$

$$2x(2x-5) = 0$$

$$2x = 0 \quad \text{or} \quad 2x - 5 = 0$$

$$x = 0 \quad \text{or} \quad x = \frac{5}{2}$$

$$\text{Solution set } \left\{ 0, \frac{5}{2} \right\}$$



$$(35) \log_5 (x+2) + \log_5 (x-2) = 1$$

$$\log_5 [(x+2)(x-2)] = 1$$

قولها ذلك صيغة  
اسية

$$(x+2)(x-2) = 5^1$$

$$x^2 - 4 - 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9$$

$$x = \pm 3$$

$$(39) \log x^2 = (\log x)^2$$

$$\log x^2 - (\log x)^2 = 0$$

$$2 \log x - \log x \log x = 0$$

$$\log x (2 - \log x) = 0$$

$$\log x = 0 \quad \text{or} \quad 2 - \log x = 0$$

$$x = 10^0$$

$$x = 1$$

$$\log x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

Solution set  $\{1, 100\}$