أوراق المراجعة الشاملة لأهم الأفكار الامتحانية (الهندسة)

السؤال الأول:

ليكن $ABCDEFGH$ مكعب كما في الشكل فيه:

I : منتصف BG

J : منتصف AH

① ضمن المعلم $(D,\frac{1}{2}\overrightarrow{DA},\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\frac{1}{2}\overrightarrow{DH})$

حدد كل إحداثيات نقاط الموضحة بالشكل

② أثبت أن النقاط A,J,F تعين مستوي

③ أوجد العددين b,a حتى تتحقق العلاقة:

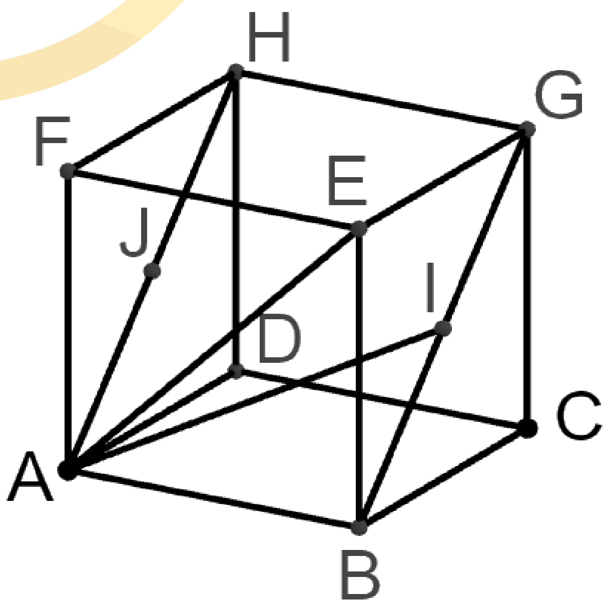
$$\overrightarrow{DI}=a.\overrightarrow{AJ}+b.\overrightarrow{AF}$$

④ اكتب معادلة المستوي (AJF)

⑤ أثبت أن C م. أ. م لـ D,B,A وحدد الأعداد δ,β,α بحيث $(A,\alpha)(D,\delta)(B,\beta)$

⑥ أثبت أن المستويات (AFJ) , Q متوازيان

$$Q: -3x+3y-3Z-8=0$$



الحل:

①

$D(0,0,0)$ $H(0,0,2)$
$A(2,0,0)$ $E(2,0,2)$
$C(0,2,0)$ $G(0,2,2)$
$B(2,2,0)$ $F(2,2,2)$
$J(1,0,1)$ $I(1,2,1)$

②

$\overrightarrow{AJ}(-1,0,1),\overrightarrow{AF}(0,2,2)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\neq\frac{0}{2}$ إذاً شعاعين غير مرتبطان خطياً

إذا النقاط A,J,F تشكل مستوي

③

$\overrightarrow{DI}(1,2,1)$

$$\overrightarrow{DI}=a.\overrightarrow{AJ}+b.\overrightarrow{AF}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=a\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}+b\begin{pmatrix}0\\2\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}-a=1\\2b=2\\a+2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\end{cases}$$

إذاً الأشعة الثلاث مرتبطة خطياً

$$\overrightarrow{DI}=1\,\overrightarrow{AJ}+1\,\overrightarrow{AF}$$

④

معادلة المستوي (AJF)

نفرض $\vec{m}(a,b,c)$ ناظم و لدينا $\begin{cases}\overrightarrow{AJ}(-1,0,1)\\\overrightarrow{AF}(0,2,2)\end{cases}$

أشعة توجيه

نفرض $c=1$

$\overrightarrow{AJ}.\vec{n}=0\rightarrow -a+c=0$

$\overrightarrow{AF}.\vec{n}=0\rightarrow 2b+2c=0$

$$\Rightarrow\begin{cases}-a+1=0\rightarrow a=+1\\2b+2=0\rightarrow b=-1\end{cases}$$

مستوي(AFJ)

$\vec{n}(1,-1,1)$ $\quad A(2,0,0)$

$$a(x-x_o)+b(y-y_o)+C(Z-Z_o)=0$$

$$+1(x-2)-1(y-0)+1(Z-0)=0$$

$$x-y+Z-2=0:(AFJ)$$

---

⑤ أثبت أن C م.أ.م لـ D,B,A حيث $(D,\delta),(B,\beta),(A,\alpha)$ عين $\delta,\beta\,,\alpha$

الحل: من علاقة شال بالجمع:

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$-\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$$

من العلاقة الأخيرة نجد أن:

C م . أ . م لـ $(A,-1),(B,1),(D,1)$

$\alpha=-1 \quad \beta=1 \quad \delta=1$

---

⑥ $Q:-3x+3y-3Z-8=0$

$$\left.\begin{matrix}\vec{n}_Q(-3,3,-3)\\ \vec{n}(1,-1,1)\end{matrix}\right\}\ \frac{-3}{1}=\frac{3}{-1}=\frac{-3}{+1}\neq\frac{-8}{-2}$$

إذاً نواظم مرتبطة خطياً المستويان متوازيان

السؤال الثاني:

(جداء سلمي + مركز أبعاد متناسبة)

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه فيه (4)

I منتصف AB

L منصف DC

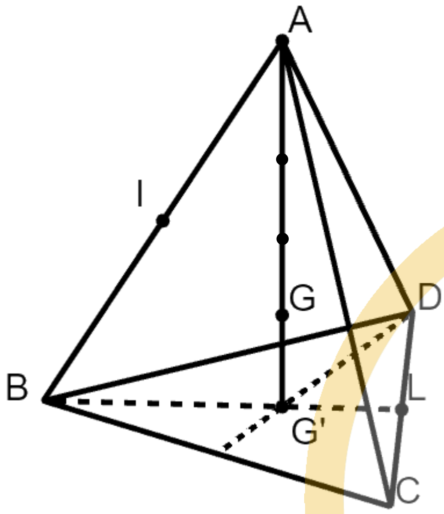
G' م.ث.م BDC

G تحقق أن $AG=\frac{3}{4}AG'$

1) أثبت أن AB يعامد DC
أثبت أن AB يعامد IL

2) أثبت أن G م.أ.م لـ D,C,B,A بأثقال يطلب تعيينها

3) أثبت أن النقاط L,I,G تقع على استقامة واحدة



الأفكار
1) جداء سلمي واثبات تعامد مستقيمان
2) تعيين مركز أبعاد متناسبة لرباعي وجوه
3) أثبات أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة

الحل:

1) نحسب الجداء

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}\right]$$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

$$=-\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=-4.4.\frac{1}{2}+4.4.\frac{1}{2}=0$$

إذاً

$$(AB)\perp(DC)$$

إثبات تعامد(AB) مع (IL)

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{AB}\left[\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}\right]$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CL}$$

$$a.\frac{a}{2}.Cos(0) - a.a\, Cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$+0 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0$$

لأن (AB) يعامد (CL) حيث أن (AB) يعامد (DC) من الطلب السابق

2) نعلم أن G' م.ث.م BCD إذاً G' م.أ.م لـ C, B, D بنقاط تحمل أثقال متساوية

(1) $(C,1),(D,1),(B,1)$ م.أ.م لـ $(G',3)$

ملاحظة: فرضاً من العلاقة الإنشائية

$$AG = \frac{3}{4}AG'$$

(2) $(G',3),(A,1)$ م.أ.م لـ $(G,4)$ نجد أن

نجد أن من (1) و (2) $(G,4)$ م.أ.م لـ $(B,1),(A,1),(C,1),(D,1)$
إذا نستنتج أن G هو مركز ثقل رباعي الوجوه

3)

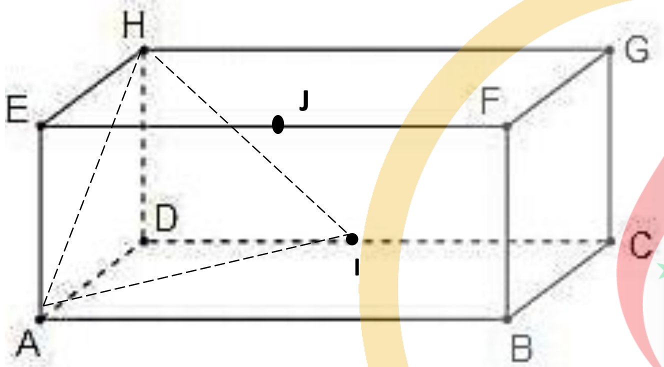
1. بما أن I منتصف AB إذاً $(I,2)$ م.أ.م لـ $(B,1),(A,1)$
2. بما أن L منتصف DC إذاً $(L,2)$ م.أ.م لـ $(C,1),(D,1)$
3. نعلم برهاناً أن G م.أ.م لـ D, C, B, A

من (1) و (2) و (3) وحسب الخاصة التجميعية يكون G م.أ.م لـ L, I إذاً النقاط تقع على استقامة واحدة

السؤال الثالث:

في الشكل المرسوم $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه: $AB = 4$, $AD = 2$, $AE = 2$
لتكن J نقطة منتصف EF و I منتصف DC
و لنفرض المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE})$

① أوجد احداثيات كل نقاط المجسم ضمن المعلم المفروض
② أثبت أن AHI متساوي الأضلاع واحسب مساحته
③ اكتب معادلة المستوي AHI
④ أعط تمثيل وسيطي لـ DJ ثم أثبت أنه يعامد المستوي (AHI)
⑤ أثبت أن (DJ) قاطع للمستوي (AHI) في نقطة $\omega\left(\frac{+2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$
⑥ احسب حجم رباعي الوجوه J, AHI
⑦ أعط تمثيل وسيطي لـ (FI) وإثبات أنه يوازي (JD)



الحل:

①

$A(0,0,0)$	$E(0,0,2)$	$I(2,2,0)$
$B(4,0,0)$	$F(4,0,2)$	$J(2,0,2)$
$D(0,2,0)$	$H(0,2,2)$	
$C(4,2,0)$	$G(4,2,2)$	

②

$$\left.\begin{aligned} AH &= \sqrt{8} \\ AI &= \sqrt{8} \\ HI &= \sqrt{8} \end{aligned}\right\}$$ الأضلاع متساوية

إذاً AHI متساوي الأضلاع

★ حساب المساحة

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}.\sqrt{8} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\times\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

③

معادلة مستوي مار من ثلاث نقاط

نجد : $\left.\begin{matrix}\overrightarrow{AH}(0,2,2)\\ \overrightarrow{AI}(2,2,0)\end{matrix}\right\} \frac{0}{2} \neq \frac{2}{2}$ غير مرتبطان خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

نفرض $b=1$ $\left.\begin{matrix}\vec{n}.\overrightarrow{AH}=0 \ / \ 2b+2c=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AI}=0 \ / \ 2a+2b=0\end{matrix}\right\}$

إذاً $a=-1 \ , C=-1$

مستوي(AHI)

$\vec{n}(-1,1,-1)$ $\quad A(0,0,0)$

$$-(x-0)+(y-0)-(Z-0)=0$$

$$(AHI): -x+y-Z=0$$

④

معادلة (DJ)

$\overrightarrow{DJ}(2,-2,2)$ $\quad J(2,0,2)$

$$(DJ)\begin{cases} x=2t+2 \\ y=-2t \\ Z=2t+2 \end{cases} : t\in R$$

★ يكون (DJ) عمود على المستوي إذا كان موجه المستقيم مرتبط خطياً مع ناظم المستوي

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{DJ}(2,-2,2)\\ \vec{n}(-1,1,-1)\end{matrix}\right\} \frac{2}{-1} \neq \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{-1}$

مرتبطان خطياً إذاً (DJ) يعامد (AHI)

⑤

نعوض معادلات (DJ) في معادلة المستوي (AHI)

$$-(2t+2)+(-2t)-(2t+2)=0$$

$$-2t-2-2t-2t-2=0$$

$$-6t=4 \quad t=\frac{-2}{3}$$

إذاً (DJ) قاطع للمستوي (AHI) ونقطة التقاطع هي:

$$\left.\begin{matrix} x=2\left(-\frac{2}{3}\right)+2=+\frac{2}{3} \\ y=-2\left(\frac{-2}{3}\right)=+\frac{4}{3} \\ Z=2\left(\frac{-2}{3}\right)+2=\frac{2}{3} \end{matrix}\right\} \omega\left(\frac{+2}{3},\frac{4}{3},\frac{+2}{3}\right)$$

⑥

حجم رباعي الوجوه J,AHI

الارتفاع هو: بعد الرأس J عن مستوي القاعدة (AHI)

★ حساب بعد J عن (AHI)

$$d=\frac{|1-2+0-2|}{\sqrt{(-1)^2+(+1)^2+(-1)^2}}=\frac{+4}{\sqrt{3}}$$

$$V=\frac{1}{3}S_p\times h=\frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\times\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{3\sqrt{2}}$$

⑦

مستقيم (FI)

$\overrightarrow{FI}(-2,2,-2)$ $\quad F(+4,0,2)$

$$(FI)\begin{cases} x=-2t+4 \\ y=2t \\ Z=-2t+2 \end{cases}$$

متى يكون المستقيمان متوازيان ندرس ارتباط خطي للموجات.

$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{FI}(-2,2,-2)\\ \overrightarrow{DJ}(2,-2,2)\end{matrix}\right\} \frac{-2}{2}=\frac{2}{-2}=\frac{-2}{2}$

مرتبطان إما توازي أو تطابق

★ (اختبار النقطة) نأخذ $F(4,0,2)$ من (FI) نعوضها في معادلات (DJ)

$$4=2t+2\rightarrow t=+1$$

$$0=-2t\rightarrow t=0$$

$$2=2t+2\rightarrow t=0$$

إذاً $1\neq 0$ $\quad t$ مختلفة F لا تنتمي لـ (DJ)

إذاً المستقيمان متوازيان $(FI)//(DJ)$

السؤال الرابع:

ليكن لدينا المستويان:

$P: 2x - y + Z - 4 = 0$

$Q: x + y + 2Z - 5 = 0$

① أثبت أن P قاطع لـ Q , ثم أعط تمثيل وسيطي لفصلهما المشترك d

② أحسب بعد $A(3,-1,2)$ عن الفصل المشترك d

③ أوجد معادلة المستوي R مارمن A ويعامد كلا من Q, P

الحل:

①

$$\begin{aligned} 2x - y + Z - 4 &= 0 \\ x + y + 2Z + 5 &= 0 \end{aligned} \quad +$$

$$3x + 3Z = +9 \Longrightarrow x + Z = 3$$

$$x = -Z + 3$$

نعوض في ②

$$-Z + 3 + y + 2Z - 5 = 0$$

$$y = -Z + 2$$

نفرض $Z = t$ ونكتب

$$d: \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = -t + 2 \quad : t \epsilon R \\ Z = t \end{cases}$$

علماً أن النواظم غير مرتبطة خطياً فالمستويان متقاطعان

② **الحل:**

نفرض $A'(x', y', Z')$

مسقط قائم لـ A على المستقيم d

$A' \in d$ نعوض في معادلات d و نكتب A' بدلالة t

$$\begin{cases} x' = -t + 3 \\ y' = -t + 2 \\ Z' = t \end{cases}$$

$$A'(-t+3, -t+2, t), A(3,-1,2)$$

نحسب $\overrightarrow{AA'}(-t, -t+3, t-2)$

موجه المستقيم $\vec{u}(-1,-1,1)$

$\overrightarrow{AA'} \perp \vec{u}$ إذاً

$$\overrightarrow{AA'}.\vec{u} = 0 / (-t)(-1) + (-t+3)(-1) + (t-2)(+1) = 0$$

$$t + t - 3 + t - 2 = 0 / t = \frac{5}{3}$$

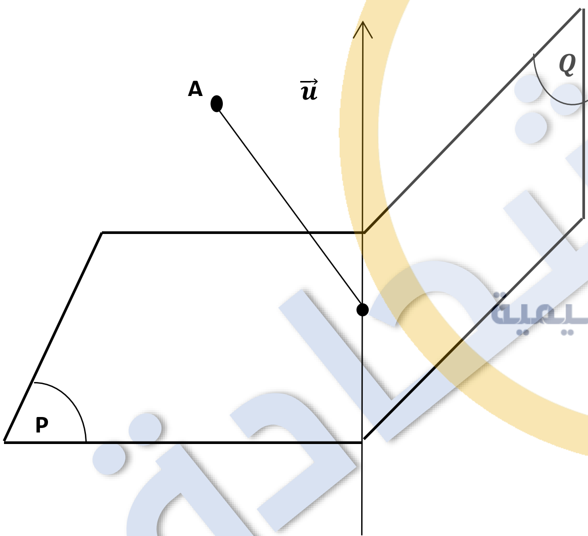
نعوض t في الشعاع $\overrightarrow{AA'}$ ونحسب طوله

$$\begin{cases} \overrightarrow{AA'}\left(\frac{-5}{3}, \frac{-5}{3} + 3, \frac{5}{3} - 2\right) \\ \overrightarrow{AA'}\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{-1}{3}\right) \end{cases}$$

$$(AA') = \sqrt{\left(\frac{-5}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 + \left(\frac{-1}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{16}{9} + \frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

رسم توضيحي:



③

إذا كان R يعامد المستويان Q, P عندها تكون نواظم Q, P أشعة توجيه لـ R

$\overrightarrow{n_P}(2,-1,1)$ $\quad \overrightarrow{n_R}(a,b,c)$

$\overrightarrow{n_Q}(1,1,2)$

$$\left.\begin{aligned} \overrightarrow{n_P}.\overrightarrow{n_R} &= 0 / 2a - b + c = 0 \\ \overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_R} &= 0 / a + b + 2c = 0 \end{aligned}\right\} c = 1 \text{ نعرض}$$

$$\begin{cases} 2a - b + 1 = 0 \\ a + b + 2 = 0 \end{cases}$$

$$3a + 3 = 0 / \ a = -1$$

نعوض في ②

$$-1+b+2=0 \rightarrow b=-1$$

مستوي R

$\vec{n}(-1,-1,1)$ $\qquad$ $A(3,-1,2)$

$$-1(x-3)-1(y+1)+1(Z-2)=0$$
$$R:\ -x-y+Z+3-1-2=0$$
$$R:\ -x-y+Z=0$$

السؤال الخامس:

❖ في معلم متجانس نتأمل النقطة $A(2,1,1)$ والمستويات:

$$P: x+2y-z+3=0$$
$$Q: -x+y+z+1=0$$
$$R: x+z-3=0$$

ولتكن لدينا مجموعة النقاط M من الفراغ تعطى بالمعالة:

$$x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z-3=0$$

1) أثبت أن المستويان P و Q متعامدان
2) احسب بعد النقطة A عن كل من المستويان P و Q
3) استنتج بعد A عن الفصل المشترك d للمستويان
4) تأكد أن المستوي R يعامد P و Q ومار من A
5) أثبت أن مجموعة النقاط M من الفراغ تمثل معادلة كرة مركزها A حدد نصف قطرها
6) تأكد أن S تقطع المستوي P في دائرة C حدد نصف قطر دائرة المقطع
7) أثبت أن المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة A'

الحل:

1) إذا كان المستويان متعامدان تكون النواظم متعامدة

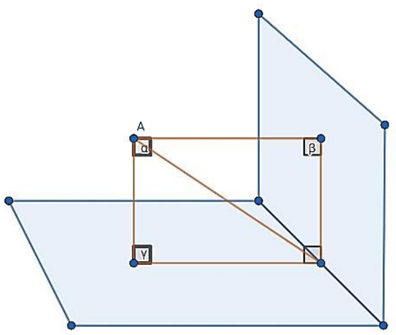
$$\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{n_Q}=(1)(-1)+(2)(1)+(-1)(1)=0$$

$P \perp Q$ مستويان متعامدان

2) $d[A:P]=\frac{|2+2-1+3|}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$

$$d[A:Q]=\frac{|-2+1+1+1|}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

3)



لحساب بعد A عن المستقيم d

نستفيد من المثلث القائم ABC حيث البعد هو طول $[AB]$:

$$AC=\sqrt{6}\ ,BC=\frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$[AC]^2+[BC]^2=[AB]^2$$
$$6+\frac{1}{3}=[AB]^2 \rightarrow \boxed{AB=\sqrt{\frac{19}{2}}}$$

4) طريقة 1:

(معادلة مستوي مار من نقطة يعامد مستويان) تصبح أشعة التوجيه هو نواظم P و Q

موجه أول $R\perp P \rightarrow \overrightarrow{n_P}=\vec{u}$

موجه ثاني $R\perp Q \rightarrow \overrightarrow{n_Q}=\vec{v}$

نفرض الناظم: $\vec{n}(a,b,c)$ $\qquad$ $\vec{u}(1,2,-1)$

$\vec{v}(-1,1,1)$

$a=(2)-(-1)=3$ $\qquad$ $\vec{n}(3,0,3)$

$\downarrow$

$b=(1)-(1)=0$ $\qquad$ $\vec{n}(1,0,1)$

$c=(1)-(-2)=3$

مستوي R

$\vec{n}(1,0,1)$ $\qquad$ $A(2,1,1)$

$2+0+1+d=0 \to \boxed{d=-3}$

$R: x+z-3=0$

طريقة 2:

نعوض A في معادلة المستوي R

$2+1-3=0 \to 0=0$

$A \in \mathbb{R}$ تنتمي إلى المستوي

$\overrightarrow{n_R}(1,0,1)$ من المعادلة:

$\overrightarrow{n_R}\cdot\overrightarrow{n_Q}=(1)(1)+(2)(0)+(1)(-1)=0$

$\overrightarrow{n_R}\cdot\vec{n}=(1)(-1)+(1)(0)+(1)(1)=0$

اذاً R مستوي مار من A ويعامد كلاً من المستويان P و Q

5) $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z-3=0$

نتمم إلى مربع كامل نجد:

$$x^2-4x+4-4+y^2-2y+1-1+z^2-2z+1-1-3=0$$

$$(x-2)^2+(y-1)^2+(z-1)^2-9=0$$

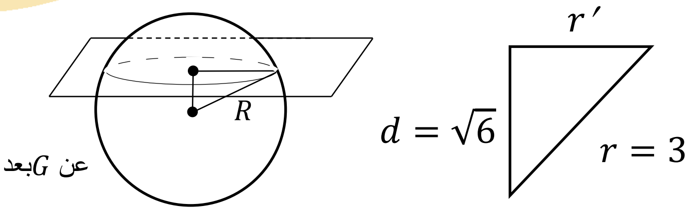
6) حتى تكون S قاطعة لـ المستوي P يجب أن يكون

$d[A:P]<r$

$\sqrt{6}<3 \qquad d=\sqrt{6}$

$r=3$

اذاً بعد مركز الكرة من المستوي p أصغر من نصف قطر الكرة إذاً p قاطع لـ S



حسب مبرهنة فيثاغورث نجد:

$d^2+r'=r^2$

$\to r^{2}{}'=r^2-d^2=9-6$

$r'=\sqrt{3}$ نصف قطر دائرة المقطع

7) نحل جملة معادلات حلاً مشتركاً

① $x+2y-z+3=0$

② $-x+y+z+1=0$

③ $x+z-3=0$

من ③ نجد: $\boxed{x=-z+3}$ *

نعوض * في ②

$+z-3+y+z+1=0 \to^{**} \boxed{y=-2z+2}$

نعوض * و ** في المعادلة ①

$-z+3-4z+4-z+3=0$

$-6z+10=0 \to z=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$

نعوض في * و ** نجد:

$y=-2\left(\frac{5}{2}\right)+2=-\frac{4}{3}$

$x=-\frac{5}{3}+3=\frac{4}{3}$

$A'(-\frac{4}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3})$

السؤال السادس:

في معلم متجانس ليكن لدينا النقاط

$A(2,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$ $D(2,1,0)$

ونعرف أن G مركز ثقل المثلث ABC

ونعرف ان G' مركز أبعاد متناسبة لـ :

$(A,2)$, $(B,2)$, $(D,-1)$

1) عين مجموعة النقاط M من الفراغ والتي تحقق

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

2) عين مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق:

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\|$

3) حدد احداثيات G'

4) عين مجموعة النقاط M من الفراغ والتي تحقق

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|$

الحل: 1)

نفرض $M(x,y,z)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(2-x,-y,-z)$

$\overrightarrow{MB}(-x,1-y,-z)$

$\to(2-x)(-x)+(1-y)(-y)+(-z)(-z)=0$

$-2x+x^2-y+y^2+z^2=0$

$$x^2-2x+1-1+y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+z^2=0$$

$$(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2+z^2=\frac{5}{4}$$:؟

معادلة كرة مركزها $\Omega(1,\frac{1}{2},0)$

نصف قطرها $r=\frac{\sqrt{5}}{2}$

(2

نعلم أن G مركز ثقل المثلث ABC إذا G مركز أبعاد متناسبة لنقاط تحمل أثقالاً متساوية

$(A,1)\ \ (B,1)\ \ (C,1)$

حسب مبرهنة الاختزال:

$$\boxed{\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MG}}\ *$$

ونعلم أن G' مركز أبعاد متناسبة لـ النقاط

$(A,2),\ \ (B,2),\ \ (D,-1)$

حسب مبرهنة الاختزال نجد:

$$\boxed{2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}}\ **$$

من العلاقة:

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}\|$$

نعوض * و ** في العلاقة نجد:

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MG'}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG'}\|$$

اذاً M تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

(3

لحساب احداثيات G'

$G'(x,y,z)$

نعوض في القانون

$$x=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(2)+2(0)-(2)}{3}=\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{2(0)+2(1)-(1)}{3}=\frac{1}{3}$$

$$z=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_D}{\alpha+\beta+\gamma}=\frac{3(0)+2(0)-(0)}{3}=0$$

$$G'(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$$

(4

$$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MC}-3\overrightarrow{MG'}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{G'C}\|$$

$$G'C=\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+(1)}=\sqrt{\frac{14}{9}}$$

$$\|\overrightarrow{MG}\|=\frac{\sqrt{14}}{3}$$

اذا مجموعة النقاط M من الفراغ تمثل كرة مركزها G نصف قطرها $r=\frac{\sqrt{14}}{3}$

السؤال السابع:

في معلم متجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن

$C(0,2,-1), A(1,1,1), B(3,2,0)$

P مستوي مار من B و ناظمة $\overrightarrow{AB}$

Q معادلته : $Q: x-y+2Z+4=0$

δ كرة مركزها A و نصف قطرها AB

① أثبت أن معادلة المستوي P تعطى بالشكل:

$$2x+y-Z-8=0$$

② أوجد معادلة الكرة S ثم أثبت أنها تمس المستوي Q

③ أثبت أن P قاطع لـ Q و اكتب معادلة فصلهما المشترك

④ أثبت المستقيم d محتوى في المستوي المحوري لـ $[BC]$ و ليكن R

الحل:

① معادلة P

$\vec{n}(2,1-1)=\overrightarrow{AB}$ $\qquad$ $B(3,2,0)$

$$P: 2(x-3)+1(y-2)-(Z-0)=0$$

$$P: 2x+y-Z-8=0$$

②

كرة S

مركز $A(1,1,1)$

نصف قطر $R=[AB]=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$$S:(x-1)^2+(y+1)^2+(Z-1)^2=6$$

★ حتى يكون Q مماس للكرة يجب أن يكون بعد مركز الكرة عن المستوي مساويا نصف القطر

$$d[A:Q]=\frac{|ax_0+by_0+cZ_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|1-1+2(1)+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}$$

إذاً $d[A:Q]=R$

Q يمس الكرة S

③

$\overrightarrow{n_P}(2,1,-1)$, $\overrightarrow{n_Q}(1,-1,2)$

شعاعين غير مرتبطان خطياً $\Longrightarrow \frac{2}{1}\neq\frac{1}{-1}$

إذاً P قاطع لـ Q

$$2x+y-Z-8=0$$
$$x-y+2Z+4=0$$
$$3x+Z-4=0$$
$$Z=-3x+4$$

نعوض في ① نجد: $2x+y+3x-4-8=0$

$$y=-5x+12$$

نفرض $x=t$

$$d:\begin{cases}x=t\\ y=-5t+12\ :\ t\epsilon R\\ Z=-3t+4\end{cases}$$

④ نوجد معادلة المستوي المحوري لـ BC

مستوي محوري R

منتصف BC $I\left(\frac{3}{2},0,\frac{-1}{2}\right)$

$\vec{n}=\overrightarrow{BC}(-3,0,-1)$

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(Z+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$-3x-Z+\frac{9}{2}-\frac{1}{2}=0$$

$$R:\ -3x-Z+4=0$$

★ لمعرفة إذا كان d محتوى في المستوي المحوري نعوض معادلات d في R

$$-3t-(-3t+4)+4=0$$
$$-3t+3t-4+4=0$$
$$0=0$$

للجملة عدد لا نهائي من الحلول و المستقيم d محتوى في المستوي R

السؤال الثامن:

في الشكل الموضح في الرسم نفرض المعلم المتجانس $\left(0,\frac{1}{2}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)$

حيث: $OA=OB=OC=2$

① ضمن المعلم المفروض أوجد احداثيات A, B, C, G م.ث.م (ABC)

② اكتب معادلة (ABC) مستوي

③ أوجد احداثيات O' مسقط قائم لـ O على المستوي ABC و تأكد أنها هي G ذاتها م . ث . م

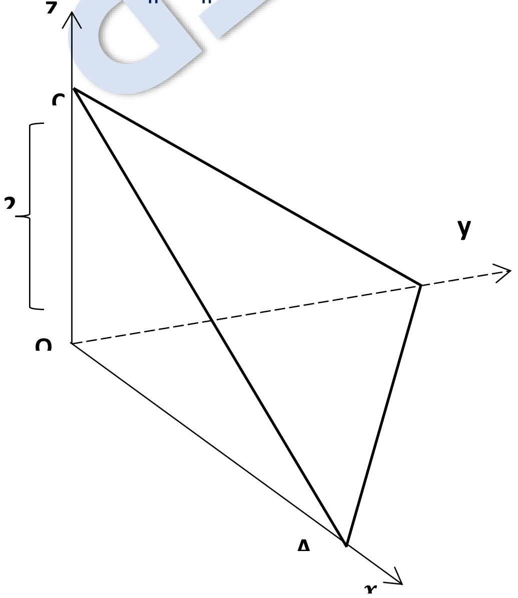
④ أثبت أن المستوي P يعامد (ABC)

$$P: x+y-2Z-5=0$$

⑤ اكتب معادلة كرة S تمر من A, B, C مركزها O المبدأ للإحداثيات

⑥ ماذا تمثل مجموعة النقاط M من الفراغ التي تحقق العلاقة :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\|=\|3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\|$$



الحل :

①

$O(0,0,0)$ $\quad B(0,2,0)$

$A(2,0,0)$ $\quad C(0,0,2)$

G م . ث . م ABC

$$G\left(\frac{2+0+0}{3},\frac{0+2+0}{3},\frac{0+0+2}{3}\right)=$$

$$G\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

②

$\overrightarrow{AB}(-2,2,0)$ $\quad \vec{n}(a,b,c)$

$\overrightarrow{AC}(-2,0,2)$

$\overrightarrow{AB}.\vec{n}=0/-2a+2b=0$ | نفرض $a=1$

$\overrightarrow{AC}.\vec{n}=0/-2a+2c=0$ |

$-2+2b=0\longrightarrow b=1$

$-2+2c=0\longrightarrow c=1$

مستوي(ABC)

$\vec{n}(1,1,1)$ $\quad A(2,0,0)$

$|(x-2)+1(y-0)+1(Z-0)=0$

$(ABC): x+y+Z-2=0$

③

إيجاد $O'(x,y,Z)$ مسقط قائم لـO على المستوي (ABC) أولاد نوجد:

✶ تمثيل وسيطي لـ d مار من O يعامد المستوي (ABC)

d مستقيم

$d\perp(ABC)\longrightarrow\vec{n}=\vec{u}(1,1,1)$ $\quad O(0,0,0)$

$$d\begin{cases}x=t\\ y=t \quad : t\epsilon R\\ Z=t\end{cases}$$

تكون O' المسقط القائم هي نقطة تقاطع d مع (ABC)

نعوض معادلات d في (ABC) إذاً

$t+t+t-2=0|\ t=\frac{2}{3}$

نعوض في معادلات d لحساب نقطة التقاطع

$$\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{2}{3} \quad \rightarrow O'(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3})\\ Z=\frac{2}{3}\end{cases}$$

نلاحظ أن $G=O'$ م . ث . ABC

④

$\overrightarrow{n_P}(1,1,-2)$, $\vec{n}(1,1,1)$

$\vec{n}.\overrightarrow{n_P}=(1)(1)+(1)(1)+(1)(-2)=$

$1+1-2=0|\vec{n}.\overrightarrow{n_P}=0$

إذاً المستويان متعامدان

⑤

إذا كان المركز O و تمر من C,B,A

نلاحظ أن : $OA=OB=OC=2$

إذاً : $R=2$ نصف قطر الكرة .

كرة S

$R=2$ $\quad O(0,0,0)$

$S:\ x^2+y^2+Z^2=4$

⑥

نعلم أن G م . ث . م إذا G م . أ . م لـ

$(c,1),(B,1),(A,1)$

مبرهنة الاختزال

$$1\overrightarrow{MB}+1\overrightarrow{MC}+1\overrightarrow{MA}=(1+1+1)\overrightarrow{MG}$$
$$=3\overrightarrow{MG}$$

من العلاقة :

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA}\|$$
$$=\|3\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MA}\|$$
$$\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MD}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MA})\|$$
$$\Rightarrow\|3\overrightarrow{MG}\|=\|3\overrightarrow{MD}-3\overrightarrow{MG}\|$$
$$\Rightarrow 3\|\overrightarrow{MG}\|=3\|\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{GD}\|$$

من الشكل الأخير نلاحظ أن M تمثل كرة مركزها G و نصف قطرها $R = \|\overrightarrow{GD}\|$

السؤال التاسع:

الحالة الأولى:

أثبت أن المستويات P, Q, R تتقاطع في نقطة وحدد احداثياتها

$$P\ : x + 2y - Z - 4 = 0$$
$$Q : 2x + 3y - 2Z - 5 = 0$$
$$R : x + 3y - 3Z - 4 = 0$$

الحل:

نكتب الجملة بالشكل:

$$\begin{cases} x + 2y - Z = 4 & L_1 \\ 2x + 3y - 2Z = 5 & L_2 \\ x + 3y - 3Z = 4 & L_3 \end{cases}$$

$$-2L_1 + L_2 \ / -L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} x + 2y - Z = 4 & L_1 \\ 0 - y\ 0 = -3 & L_2 \\ 0 + y - 2Z = 0 & L_3 \end{cases}$$

$$L_2 + L_3$$

$$\begin{cases} x + 2y - Z = 4 & L_1 \\ 0 - y\quad 0 = -3 & L_2 \\ 0 \quad 0 - 2Z = -3 & L_3 \end{cases}$$

من الشكل الأخير ومن L_3 نحسب Z

$Z = \frac{3}{2}$ إذاً المستويات الثلاث تتقاطع في نقطة وحيدة (للجملة حل وحيد)

لإيجاد نقطة التقاطع نعرض Z في L_2

من L_2 نجد $y = 3$ نعوض L_1

$$x + 2(3) - \frac{3}{2} = 4$$

$$x = 4 - 6 + \frac{3}{2} = -2 + \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2}$$

$$M\left(\frac{-1}{2}, 3, \frac{3}{2}\right)$$

الحالة الثانية:

أثبت أن المستويات الثلاثة P , R , Q تتقاطع في فصل مشترك d أعط تمثيل وسيطي له

$$P\ : x - 3y + Z = 0$$
$$Q : 2x + y - Z = 0$$
$$R : 5x - y - Z = 0$$

الحل:

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y + Z = 0 \\ L_2 : 2x + y - Z = 0 \\ L_3 : 5x - y - Z = 0 \end{cases}$$

$$-2L_1 + L_2 \ / -5L_1 + L_3$$

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y + Z = 0 \\ L_2 : 0 + 7y - 3Z = 0 \\ L_3 : 0 + 14y - 6Z = 0 \end{cases}$$

$$-2\ L_2 + L_3$$

$$\begin{cases} L_1 : x - 3y + Z = 0 \\ L_2 : 0 + 7y - 3Z = 0 \\ L_3\ : 0 \quad 0 \quad 0 = 0 \end{cases}$$

إذاً للجملة عدد لا نهائي من الحلول والمستويات الثلاث تتقاطع في مستقيم d معادلاته:

من L_2 نجد: $y = \frac{3}{7}Z$ نعوض في L_1 :

$$x - 3\left(\frac{3}{7}Z\right) + Z = 0$$

$$x = \frac{9}{7}Z - Z = \frac{2}{7}Z$$

$$x = \frac{2}{7}Z$$

نفرض $Z = t$ إذاً

$$d \begin{cases} x = \frac{2}{7}t \\ y = \frac{3}{7}t \quad : t \in R \\ Z = t \end{cases}$$

السؤال العاشر:

ضمن المعلم المتجانس $(0,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ تعطى احداثيات النقاط

$A(5,0,6), E(-1,-2,2)$
$F(4,-2,8), B(2,-1,4)$

① أعط تمثيل وسيطي لـ $(FB),(AE)$
② أثبت أن F,A,B,E تقع في مستوي واحد
③ اكتب معادلة المستوي P ناتج عن تقاطع $(FB),(AE)$

الحل :

①

مستقيم (AE)

$\overrightarrow{AE}(-6,-2,4) \qquad A(5,0,6)$

$$(AE)\begin{cases} x=-6t+5 \\ y=-2t \\ Z=-4t+6 \end{cases} : t\in R$$

مستقيم (FB)

$\overrightarrow{FB}(-2,1,-4) \qquad B(2,-1,4)$

$$(FB)\begin{cases} x=--2S+2 \\ y=S-1 \\ Z=-4S+4 \end{cases} : S\in R$$

②

حتى تكون النقاط في مستوي واحد يجب أن يتقاطع المستقيمان $(FB),(AE)$ ندرس التقاطع

$\overrightarrow{FB}(-2,1,-4), \overrightarrow{AE}(-6,-2,4)$

إذاً شعاعين غير مرتبطان خطياً $\frac{-2}{-6} \neq \frac{+1}{-2}$

(إما تخالف أو تقاطع)

نحل جملة ثلاث معادلات بالمجاهيل $t\,,s$ حلاً مشتركاً

① $-6t+5=-2S+2$
② $-2t=S-1$
③ $-4t+6=-4S+4$

من ① و ② نضرب ② بـ (2)

$-6t+5=-2S+2$
$-4t=2S-2 \quad +$

$-10t+5=0 \,/\, t=\frac{1}{2}$ نعوض في ②

$-2\left(\frac{1}{2}\right)=S-1$

$S=0$

نعوض كل من t,S في المعادلة ③

$-4\left(\frac{1}{2}\right)+6=-4(0)+4$

محققة: $4=4$

إذاً: (AE) قاطع لـ (FB)

وبما أن المستقيمان متقاطعان إذاً المستقيمان يقعان في مستوي واحد و النقاط F,A,B,E تقع في مستوي واحد

③

لكتابة معادلة مستوي ناتج عن تقاطع مستقيمان يكون $\overrightarrow{FB},\overrightarrow{AE}$ أشعة توجيه و نأخذ B مثلاً كنقطة

✶ نفرض $n(a,b,c)$ نكتب

$\overrightarrow{AE}.\vec{n}=0 \,/\, -6a-2b+4c=0$
$\overrightarrow{FB}.\vec{n}=0 \,/\, -2a+b-4c=0$

نفرض $a=1$

$-6=2b+4c=0$
$-2+b-4c=0 \quad +$

$-8-b=0 \,/\, b=-8$

نعوض في ②

$-2-8-4c=0$

$4C=-10/c=\frac{-10}{4}=\frac{-5}{2}$

معادلة مستوي P

$\vec{n}\left(1,-8,\frac{-5}{2}\right) \qquad B(2,-1,4)$

$\downarrow\times 2$

$\vec{n}\,(2,-16,-5)$

$2(x-2)-16(y+1)-5(Z-4)=0$

$P: 2x-16y-5Z=0$

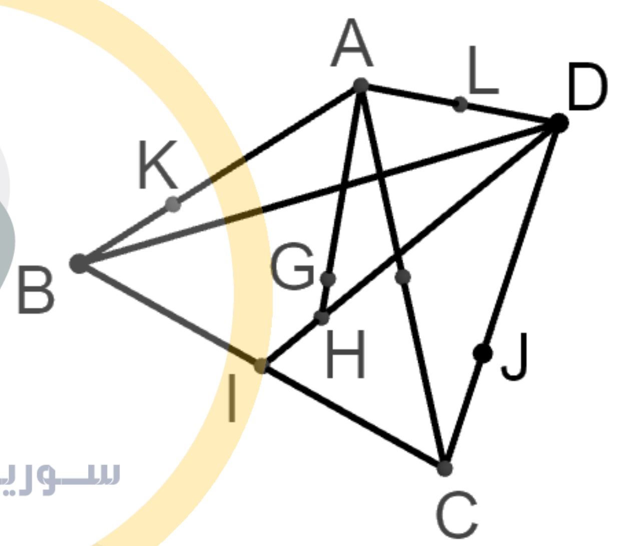
السؤال الحادي عشر:

تأمل الرسم، فيه $ABCD$ رباعي وجوه و

- J تحقق: $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$
- K تحقق: $\overrightarrow{Bk} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$
- L منتصف AD
- I منتصف BC

① أثبت أن G الموضح بالرسم م . أ . م ل $(D,\delta),(C,\gamma),(B,\beta),(A,\alpha)$ وعين الثوابت $\alpha,\beta,\gamma,\delta$

② أثبت أن النقاط I,k,J,L تقع في مستوي واحد



من الشكل نلاحظ أن I منتصف BC

★ I م . أ . م ل $(c,2),(B,2)$

الأمثال متساوية (2) رقم اختياري مناسب

★ من الرسم أصبح $(I,4)$ و تكون $(H,5)$ م . أ . م ل

$(D,1),(I,4)$

حيث : $\overrightarrow{DH} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DI}$

علاقة إنشائية من الرسم

★ من الرسم نلاحظ :

$(G,6)$ م . أ . م ل $(A,1),(H,5)$

حيث $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AH}$

★ وحسب الخاصة التجميعية يكون المركز الأخير (G)

م . أ . م ل $(D,1),(C,2),(B,2),(A,1)$

$\delta = 1/\delta = 2/\beta = 2/\alpha = 1$

②

نعلم برهاناً أن I م . أ . م ل C,B

★ من الرسم $(L,2)$ م . أ . م ل $(A,1),(D,1)$

لأن الأمثال متساوية و L في المنتصف

★ k م . أ . م ل $(A,1),(B,2)$

من العلاقة $\overrightarrow{Bk} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

★ J م . أ . م ل $(D,1),(C,2)$

من العلاقة $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

أصبح G م . أ . م ل I,L و نقاط على استقامة واحدة (I,L,G)

و G م . أ . م ل J,k و النقاط على استقامة واحدة (k,J,G)

أصبح المستقيمان $(kJ),(LI)$ متقاطعان في G إذاً يقعان في مستوي واحد و النقاط I,k,J,L تقع في ذات المستوي

السؤال الثاني عشر:

إذا كان:

G_1 م . أ . م ل $(C,3),(B,2),(A,3)$

G_2 م . أ . م ل $(C,5),(B,4),(A,-1)$

ماذا تمثل مجموعة النقاط M في الفراغ

$\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\|$

الحل:

$$\|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = \|-\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}\|$$

$$\|(3+2+3)\overrightarrow{MG_1}\| = \|(-1+4+5)\overrightarrow{MG_2}\|$$

$$\|8\overrightarrow{MG_1}\| = \|8\overrightarrow{MG_2}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$$

$$8\|\overrightarrow{MG_1}\| = 8\|\overrightarrow{MG_2}\|$$

$$\|\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MG_2}\|$$

إذاً M تمثل مستوي محوري للقطعة المستقيمة $[G_1\ G_2]$

المسألة الشاملة للتدرب

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن لدينا النقاط
$A(7,1,1), B(1,7,1), D(-1,-1,-1)$
$C(1,1,7)$

1) بين أن النقاط C, B, A تعين مستوي P ثم تحقق أن المعادلة $x+y+z-9=0$ معادلة للمستوي P
2) اعط تمثيل وسيطي للمستقيم (oD) وأثبت أن (oD) عمود على المستوي P
3) بين أن $H(3,3,3)$ هي المسقط القائم للنقطة D على المستوي P
4) ليكن Q المستوي المحوري لـ $[CD]$ أثبت أن معادلته تعطى بالشكل $x+y+4z-12=0$
5) أثبت تقاطع المستويان Q, P ثم اعط تمثيل وسيطي لفصلهما المشترك
6) عين M نقطة تقاطع (oD) مع (Q)
7) هل النقاط D, C, B, A تشكل رؤوس رباعي وجوه
8) في حال كانت D, C, B, A تشكل رؤوس رباعي وجوه احسب حجمه علماً أن $S_{(ADC)}=18$
9) اكتب معادلة الكرة التي مركزها M ونصف قطرها $3\sqrt{3}$
10) أثبت أن P يقطع الكرة S ومن الدائرة يطلب تعيين مركزها

الحل:

1. نشكل شعاعي توجيه

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}(-6,6,0)=\vec{u}\\ \overrightarrow{AC}(-6,0,6)=\vec{v}\end{array}\right)\frac{-6}{-6}\neq\frac{-6}{0}$$

غير مرتبطان خطياً إذاً نفرض ناظم P:
$\vec{n}(a,b,c)$

$$\vec{n}.\vec{u}=0\Rightarrow -6a+6b=0$$
$$\vec{n}.\vec{v}=0\Rightarrow -6a+6c=0$$

نفرض $a=1$ يكون:

$$-6+6b=0\Rightarrow b=1$$
$$-6+6c=0\Rightarrow c=1$$

إذاً

P مستوي

$\vec{n}\,(1,1,1)$ $\quad$ $A(7,1,1)$

$$P: a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$
$$P: 1(x-7)+1(y-1)+1(z-1)=0$$
$$P: x+y+z-9=0$$

2. النقطة $O(0,0,0)$ ، $D(-1,-1,-1)$

(OD)مستقيم

موجه $\vec{u}=\overrightarrow{OD}$ $(-1,-1,-1)$ $\quad$ $D(-1,-1,-1)$

$$(OD)\begin{cases}x=-t-1\\ y=-t-1\\ z=-t-1\end{cases} : t\in R$$

حتى يكون مستقيم عمود على مستوي يجب أن يكون موجه المستقيم مرتبط خطياً مع ناظم المستوي

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}(-1,-1,-1)\\ \vec{n}(1,1,1)\end{array}\right)\frac{-1}{1}=\frac{-1}{1}=\frac{-1}{1}$$

الموجه لـ (OD) مرتبط خطياً مع ناظم $\vec{n}$ P

إذاً OD عمود على P

3. لكي تكون $H(3,3,3)$ مسقط قائم لـ D على P يجب أن يتحقق

1) H تنتمي لـ P

2) $\overrightarrow{HD}$ و ناظم P مرتبطان خطياً كي نضمن أن (HD) عمود على المستوي

نعوض H في معادلة P للتحقق

$$P:(3)+(3)+(3)-9=0$$
$$0=0$$

إذاً $H\in P$ تنتمي لـ P

ونحسب

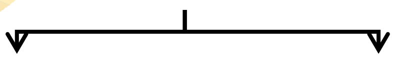
$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{HD}(4,4,4)\\ \vec{n}(1,1,1)\end{matrix}\right)\Rightarrow \frac{4}{1}=\frac{4}{1}=\frac{4}{1}$$

إذاً $\vec{n},\overrightarrow{HD}$ مرتبطان خطياً

وبالتالي H مسقط قائم لـ D على المستوي P

4. إيجاد معادلة Q مستوي محوري لـ $[CD]$

مستوي Q



$\vec{n}=\overrightarrow{CD}$ $\quad$ $I(0,0,3)$

$(-2,-2,-8)$

$$I\left(\frac{x_C+x_D}{2},\frac{y_C+y_D}{2},\frac{z_C+z_D}{2}\right)$$
$$I\left(\frac{-1+1}{2},\frac{-1+1}{2},\frac{-1+7}{2}\right)$$
$$I(0,0,3)$$
$$Q:-2(x-0)-2(y-0)-8(z-3)=0$$
$$Q:-2x-2y-8z+24=0$$

بالتقسيم على 2:

$$\boxed{Q:x+y+4z-12=0}$$

5.

$$P:x+y+z-9=0$$
$$Q:x+y+4z-12=0$$
$$\left.\begin{matrix}\overrightarrow{n_P}(1,1,1)\\ \overrightarrow{n_Q}(1,1,1)\end{matrix}\right)\Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{4}$$

إذاً النواظم غير مرتبطة خطياً والمستويان متقاطعان في فصل مشترك

إيجاد معادلة Δ فصل مشترك لـ P و Q

$$(1)\quad x+y+z-9=0$$
$$(2)\quad x+y+4z-12=0\quad(-)$$
$$-3z+3=0$$
$$z=+1$$

نعوض في (1) و (2)

$$x+y+1-9=0$$
$$y=-x+8$$

عندئذ نكتب y بدلالة x كون z عدد ثابت ونفرض $x=t$

$$\Delta\begin{cases}x=t\\ y=-t+8\quad ;t\in R\\ z=+1\end{cases}$$

6. نعوض معادلات (OD) ضمن معادلة Q

$$(-t-1)+(-t-1)+4(-t-1)-12=0$$
$$-6t-1-1-4-12=0$$
$$-6t=18$$
$$t=-3$$

إذاً (OD) قاطع لـ Q في نقطة M

نعوض $t=3$ في معادلات (OD)

$$x=+3-1=+2$$
$$y=+3-1=+2$$
$$z=+3-1=+2$$

إذاً $M(2,2,2)$

7. أي نريد إثبات أن A,B,C,D لا تقع في مستوي واحد

يوجد عدة طرق نتبع الاسهل

في الطلب الأول أوجدنا معادلة P المستوي المار من C, B, A

لذا نعوض D في معادلة P

$$P: x + y + z - 9 = 0$$
$$P: -1 - 1 - 1 - 9 =? 0$$
$$-12 \neq 0$$

إذاً D لا تنتمي إلى المستوي P وبالتالي لا تقع النقاط الأربعة D, C, B, A ضمن مستوي واحد فهي تشكل رؤوس رباعي وجوه

.8 حجم رباعي الوجوه

$$v = \frac{1}{3} S_P * h$$

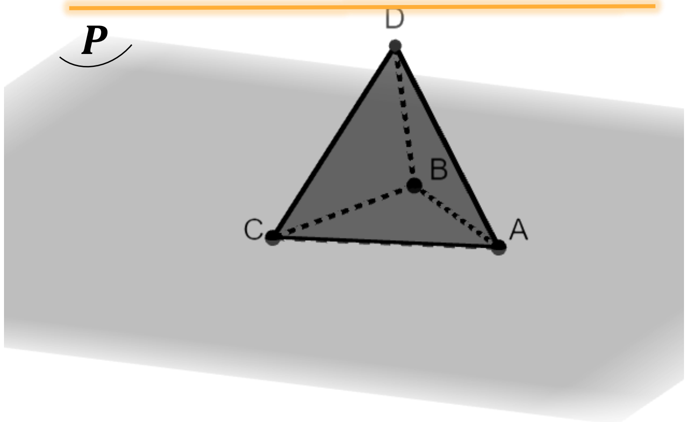
حيث

S_P: مساحة القاعدة

h: ارتفاع رباعي الوجوه

العمود النازل من D على المستوي P يشكل h ارتفاع رباعي الوجوه

$$h = d(D, P) = \frac{|-1 - 1 - 1 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}$$
$$= \frac{+12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$$
$$V = \frac{1}{3}(8 * 4\sqrt{3})$$
$$= \frac{(72\sqrt{3})}{3} = \frac{32\sqrt{3}}{3}$$



ملاحظة:

بعد النقطة D عن المستوي P يشكل طول الارتفاع h العمود النازل من الرأس D إلى القاعدة (ABC)

.9

S

$r = 3\sqrt{3}$ $M(2,2,2)$

$$S: (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$
$$S: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = (3\sqrt{3})^2$$
$$S: (x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 = 27$$

.10 حتى يكون P قاطع للكرة S يجب أن يكون بعد مركز الدائرة M عن المستوي P أصغر من نصف القطر r

نحسب

$$d(M, P) = \frac{|+2 + 2 + 2 - 9|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$