

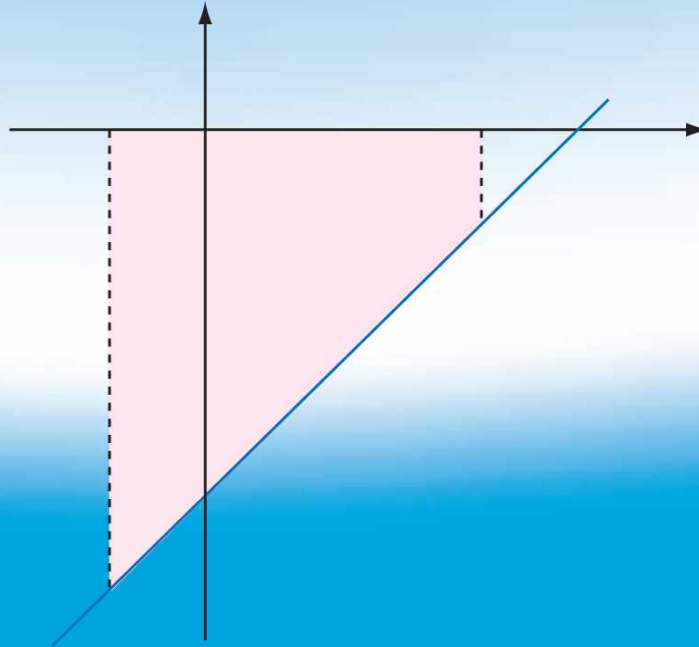


الجمهورية اليمنية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

للف الثالث الثانوي

(القسم الأدبي)



حقوق الطبع محفوظة لوزارة التربية والتعليم  
١٤٣٦هـ / ٢٠١٥م

إيماناً منا بأهمية المعرفة ومواكبة لعصر التكنولوجيا تتشرف  
الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني بخدمة أبنائنا الطلاب والطالبات  
في ربوع الوطن الحبيب بهذا العمل آمليين أن ينال رضا الجميع

## فكرة وإعداد

أ. عادل علي عبدالله البقع

## مساعد

أ. زينب محمود السمان

## مراجعة وتدقيق

أ. ميسونة العبيدي

أ. فاطمة العجل

أ. أفراح الحزمي

## متابعة

أمين الإدريسي

إشراف مدير عام

الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

أ. محمد عبده الصرمي



الجمهورية العربية الفلسطينية  
وزارة التربية والتعليم  
قطاع المناهج والتوجيه  
الإدارة العامة للمناهج

# الرياضيات

## للف الثالث الثانوي

### القسم الأدبي

#### فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| د. أمة الإله علي حُمد الحوري.   | أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً. |
| د. عوض حسين البكري.             | د. محمد علي مرشد.               |
| د. محمد رشاد الكوري.            | أ. يحيى بكار مصطفى.             |
| د. محمد حسن عبده المسوري.       | أ. عبدالباري طه حيدر.           |
| د. عبدالله سالم بن شحنة.        | أ. نصر محمد بدر.                |
| د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. | أ. جميلة إبراهيم الرازحي.       |
| أ. مريم عبدالجبار سلمان.        | أ. عادل علي مقبل البننا.        |
| أ. يحيى محمد الكنز.             | أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.     |

#### فريق المراجعة:

- أ/ أحمد عبده الصغير الديعي. / أ/ سميرة حسن فضائل.  
أ/ زايد مقبل عبدالخالق الأغبري. / أ/ محمد صالح الخضر.  
أ/ خالد محمد القلندي.

تنسيق: أ / سعيد محمد ناجي الشرعبي.

تدقيق: د/ أمة الإله علي حُمد الحوري.

إشراف: د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

#### الإخراج الفني

- صف وتصميم وإخراج : جلال سلطان علي.  
إدخال التصويبات : علي عبدالله السلفي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

٢٠١٥ / ١٤٣٦ هـ



المصدر: قانون رقم (٢٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

### أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

- |                                |                              |
|--------------------------------|------------------------------|
| د. عبدالله عبده الحامدي.       | أ/ علي حسين الحيمي.          |
| د/ صالح ناصر الصوفي.           | د/ أحمد علي المعمري.         |
| أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.      | أ.د/ صالح عوض عرم.           |
| أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.    | د/ إبراهيم محمد الحوثي.      |
| د/ عبدالله علي أبو حورية.      | د/ شكيب محمد باجرش.          |
| د/ عبدالله لمّس.               | أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي. |
| أ/ منصور علي مقبل.             | أ/ محمد هادي طواف.           |
| أ/ أحمد عبدالله أحمد.          | أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع. |
| أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي. | أ/ محمد عبدالله زيارة.       |
| أ.د/ محمد حاتم المخلافي.       | أ/ عبدالله علي إسماعيل.      |
| د/ عبدالله سلطان الصلاحي.      |                              |

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية د يناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعد يلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً ، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر ر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبما يتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهد افها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ.د . عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

## بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

### المقدمة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .  
إن إعادة النظر في مناهج الرياضيات، وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي،  
وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مساهمة التغييرات الاجتماعية .  
واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي القسم الأدبي » كحلقة  
ضمن سلسلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية ( ١-٩ ) والثانوية من ( الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي ) .  
لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل، وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق  
الفردية، وتم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سلس واضح لا غموض فيه ولا تعقيد؛ حيث أوردنا قدرًا كافيًا من  
الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعدد من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة  
ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .  
واتساقاً مع كتاب الصف الثاني الثانوي ( القسم الأدبي ) والمواد المرافقة له؛ فإن هذا الكتاب وما  
يرافقه من كتاب التمارين ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف  
سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما يحفز المدرسين على ابتكار  
أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .  
إن الاهتمام بالرياضيات في القسم الأدبي يُعد اتجاهاً حديثاً وهاماً في عصرنا الحاضر؛ لما تمثله الرياضيات  
من أداة علمية لفهم الكثير من الظواهر العلمية والإنسانية ، وهذا ما يخدم تحقيق الأهداف العامة للتربية  
والتعليم في بلدنا .  
ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في  
تدريس الرياضيات وهذا لا يتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ  
المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء إستراتيجيات تهدف إلى  
تقديم الأجود ( مادة وطريقة )؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا ذوو العلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .  
نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه، فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء  
السبيل .

المؤلفون

## المحتويات

الصفحة	الموضوع
٦	الوحدة الأولى - مبدأ العد
٦	١ - ١ مبدأ العد
١١	٢ - ١ التباديل
١٦	٣ - ١ التوافيق
٢٣	الوحدة الثانية - الإحصاء
٢٣	١ - ٢ مراجعة
٣٣	٢ - ٢ الارتباط وأشكال الانتشار
٤٣	٣ - ٢ الانحدار
٤٩	الوحدة الثالثة - التكامل
٤٩	١ - ٣ التكامل غير المحدد
٥٤	٢ - ٣ التكامل المحدد
٥٨	٣ - ٣ تطبيقات التكامل في المساحات

## مبدأ العد

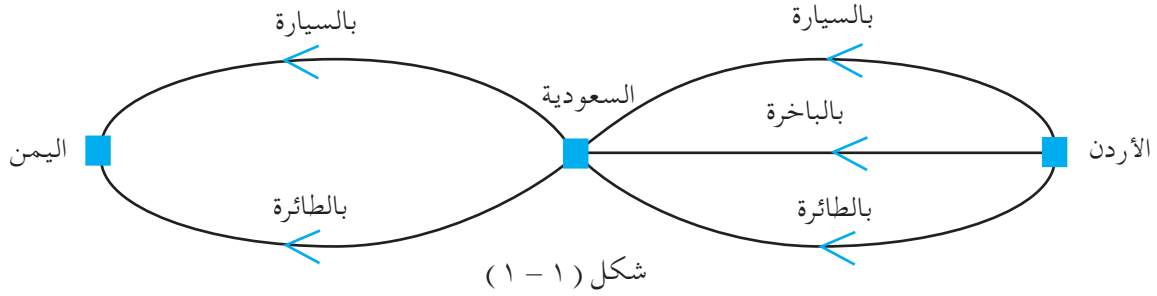
١ - ١

العد من المهارات الأساسية والضرورية في حياتنا ، ولذلك فقد اهتم العلماء منذ القدم بهذه المهارات ، وأوجدوا لها قواعد وقوانين تسهل معرفة الجواب بأقل جهد ، وأقصر وقت .

ونتعرف في هذا البند على بعض الأساليب التي تسهل عملية العد للمجموعات الكثيرة العناصر .  
لنأخذ مثالا مبسطاً لتوضيح كيفية إجراء عملية العد :

أراد رجل أن يسافر من الأردن إلى اليمن ماراً بالسعودية فإذا كان بإمكانه أن ينتقل من الأردن إلى السعودية بثلاث طرق هي : بالسيارة أو بالباخرة أو بالطائرة ومن السعودية إلى اليمن بطريقتين هما : بالسيارة أو بالطائرة . فبكم طريقة يمكنه أن ينتقل من الأردن إلى اليمن .

انظر الشكل ( ١ - ١ ) .



الجدول ( ١-١ ) يوضح الطرق المختلفة للانتقال من الأردن إلى اليمن

من الأردن إلى اليمن	من السعودية إلى اليمن	من الأردن إلى السعودية
( سيارة ، سيارة )	سيارة	سيارة
( سيارة ، طائرة )	طائرة	
( باخرة ، سيارة )	سيارة	باخرة
( باخرة ، طائرة )	طائرة	
( طائرة ، سيارة )	سيارة	طائرة
( طائرة ، طائرة )	طائرة	

لاحظ أن كل اختيار لوسيلة انتقال من الأردن إلى السعودية يتبعه اختياران للانتقال من السعودية إلى اليمن .

إذن عدد طرق الخيارات الممكنة للانتقال من الأردن إلى اليمن =  $3 \times 2 = 6$  طرق

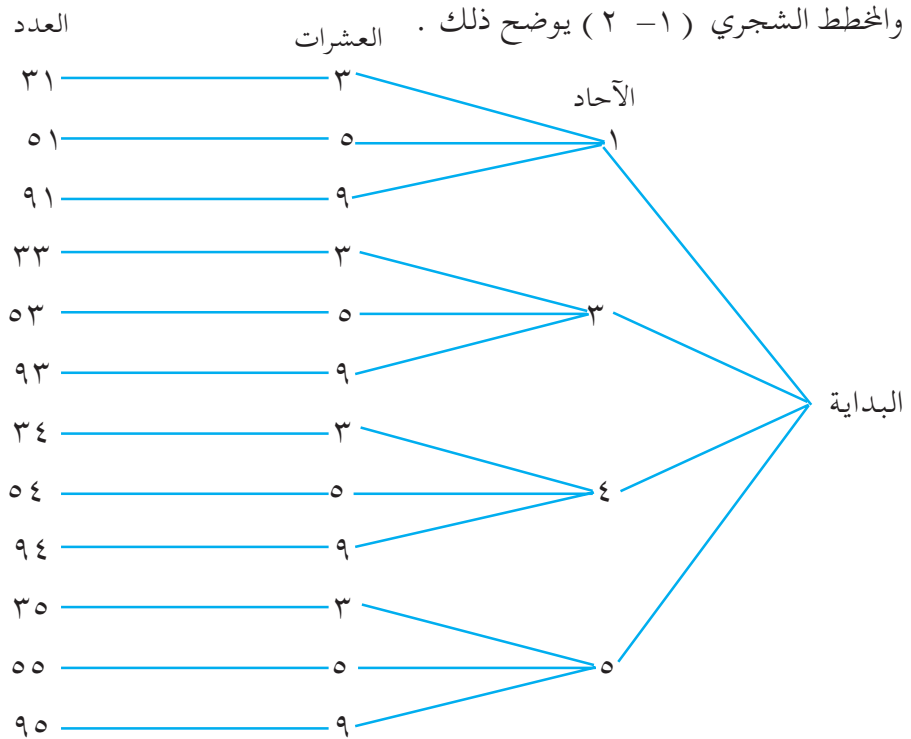
أي أن عدد الخيارات في المرحلة الأولى مضروبة في عدد الخيارات في المرحلة الثانية .



كم عدداً مؤلفاً من رقمين إذا كان رقم آحاده أحد عناصر المجموعة  $S = \{1, 3, 4, 5\}$  ، ورقم عشراته أحد عناصر المجموعة  $V = \{3, 5, 9\}$  ؟

**الحل :**

يمكن اختيار رقم منزلة الآحاد بأربع طرق وذلك باختيار رقم من الأرقام الأربعة المعطاة في  $S$  ، ويمكن اختيار رقم منزلة العشرات بثلاث طرق باختيار رقم من الأرقام المعطاة في  $V$  .  
وبذلك يكون عدد الأعداد المراد تكوينها  $= 3 \times 4 = 12$  عدداً .



شكل (١ - ٢)

### تدريب (١ - ١)

محل تجاري له أربعة أبواب فإذا أراد شخص دخول هذا المحل من أحد هذه الأبواب الأربعة، وأن يخرج من باب آخر غير الذي دخل منه ، فكم عدد الطرق الممكنة لذلك موضحاً ذلك بمخطط شجري ؟

مما سبق نجد أنه إذا تمت عملية من خطوتين مستقلتين ، أي إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى  $n$  وعدد طرق إجراء الخطوة الأخرى  $m$  ؛ فإن : عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو  $n \times m$  .  
ويعمم أسلوب عدد الطرق الممكنة في قاعدة عامة تسمى المبدأ الأساسي للعد :

إذا تكونت عملية من  $m$  مرحلة مستقلة

وكان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى  $n_1$  ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية  $n_2$  ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثالثة  $n_3$  ، ... ، وعدد طرق إجراء الخطوة الأخيرة  $n_m$  ؛  
فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة =  $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \dots \times n_m$

مثال (١ - ٢)

بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس على خمسة مقاعد متجاورة ؟

الحل :

عدد طرق جلوس الشخص الأول = ٥ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الثاني = ٤ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الثالث = ٣ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الرابع = طريقتان .

عدد طرق جلوس الشخص الخامس = طريقة واحدة .

وحسب مبدأ العد فإن :

عدد الطرق التي يجلس بها الأشخاص على المقاعد الخمسة =  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  طريقة .

نلاحظ أن :  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  هو حاصل ضرب عوامل صحيحة عددها ٥ ، وأكبرها ٥ ؛ وكل عامل

فيه يصغر عن سابقه بمقدار ١ ، وآخر عامل فيه هو ١

ويرمز له بالرمز  $5!$  ( ويقرأ مضروب ٥ ) ؛

أي أن  $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

وبشكل عام يمكن تعريف مضروب  $n$  على النحو الآتي :

تعريف (١ - ١)

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n, \quad n \geq 1$$

ونصطلح على أن مضروب الصفر هو الواحد أي :  $0! = 1$

مثال (١ - ٣)

احسب قيمة الآتي : أ)  $7!$

ب)  $5! - 3!$

ج)  $\frac{7!}{4! \times 2!}$

$$\frac{7!}{4! \times 2!}$$

## الحل :

$$٥٠٤٠ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ \times ٦ \times ٧ = ٧! \quad (أ)$$

$$٣! - ٤! = ٣! - ٤ \times ٣! = ٣! (١ - ٤) = ٣! \times (-٣) = -٣ \times ٣! = -٣ \times ٦ = -١٨ \quad (ب)$$

$$١١٤ = ١ \times ٢ \times ٣ \times ١٩ =$$

$$١٥ = \frac{٦!}{٢! \times ٤!} = \frac{٦!}{٢! \times ٤!} \quad (ج)$$

## مثال (١ - ٤)

أوجد قيمة  $٥٠٤٠$  في كل مما يأتي : (أ)  $٥٠٤٠ = ٣!$  (ب)  $٣٦٠ = ٣!$

## الحل :

$$(أ) \quad ٥٠٤٠ = ٧!$$

$٧!$  هو حاصل ضرب عوامل متتالية أصغرها ١ وأكبرها ٧ ، ولإيجاد قيمة  $٧!$  نقسم  $٥٠٤٠$  على ١ ، ثم نقسم خارج القسمة على ٢ ، ثم نقسم خارج القسمة على ٣ ... وهكذا ، حتى يكون ناتج خارج القسمة يساوي ١ .

$$\text{نلاحظ أن : } ٧! = ٧ \times ٦ \times ٥ \times ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٥٠٤٠$$

$$٧! = ٧ \quad \leftarrow$$

$$(ب) \quad ٣! = ٣٦٠ \quad \text{بقسمة الطرفين على ٣}$$

$$١٢٠ = ٣!$$

$$١ \times ٢ \times ٣ \times ٤ \times ٥ = ٣!$$

$$\therefore ٣! = ٥ \quad \leftarrow$$

## مثال (١ - ٥)

يتكون مجلس إدارة إحدى المؤسسات من ستة أعضاء ، فبكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين للسر من بين أعضاء المجلس ؟

## الحل :

يمكن أن يكون الرئيس أي عضو من الأعضاء الستة ، وعليه يكون عدد طرق اختيار الرئيس = ٦ طرق . ولاختيار نائب الرئيس يمكن أن يكون أي عضو من الخمسة الأعضاء الباقين بعد اختيار الرئيس ، فيكون عدد طرق اختيار النائب = ٥ طرق

ولاختيار أمين السر يمكن أن يكون أي عضو من الأعضاء الأربعة الباقين بعد اختيار الرئيس ونائبه ، فيكون عدد طرق اختياره = ٤ طرق .

وحسب مبدأ العد فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائبه وأمين السر =  $٦ \times ٥ \times ٤ = ١٢٠$  طريقة .

**مثال (١ - ٦)**

كم عدداً مكوناً من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، وذلك في الحالتين الآتيتين:  
 أ) بدون تكرار الأرقام .  
 ب) مع تكرار الأرقام .

**الحل :**

- أ) يمكن ملئ خانة (منزلة) الآحاد بخمس طرق ، ومنزلة العشرات بأربع طرق .  
 إذن عدد طرق تكوين الأعداد  $= 5 \times 4 = 20$  طريقة .  
 ب) يمكن ملئ منزلة الآحاد بخمس طرق ، ومنزلة العشرات بخمس طرق أيضاً .  
 إذن عدد طرق تكوين الأعداد  $= 5 \times 5 = 25$  طريقة .

**تمارين ومسائل (١ - ١)**

- [١] ألقيت قطعة نقود مرتين، ما عدد النتائج الممكنة ؟  
 [٢] ألقى حجر نرد مرتين ، ما عدد النتائج الممكنة لذلك ؟ وضح ذلك بمخطط شجري .  
 [٣] كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة أرقام يمكن تشكيلها من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ } .  
 أولاً: مع تكرار الأرقام ، ثانياً: بدون تكرار؟  
 [٤] يتكون مجلس إدارة مدرسة من خمسة أعضاء ، فبكم طريقة يمكن اختيار مدير ، ووكيل ، ومسئول مالي؟  
 [٥] لدينا ثلاثة أنواع من التلفزيونات ونوعان من الفيديوها ، أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار تلفزيون وفيديو؛ موضحاً ذلك بالمخطط الشجري .  
 [٦] دُعي عشرة ضيوف للجلوس على عشرة مقاعد موضوعة في صف واحد ، فبكم طريقة يمكن تنظيم جلوسهم؟  
 [٧] بكم طريقة يمكن أن يستخدم ٥ أشخاص في آن واحد أجهزة الهاتف في مقسم يحتوي عشرة خطوط؟  
 [٨] كم عدداً مؤلفاً من رقمين يمكن تشكيله من مجموعة الأرقام التالية مع إمكانية التكرار :  
 أ) { ٢ ، ٤ ، ٦ } ب) { ٠ ، ٢ ، ٥ ، ٧ }  
 [٩] كم عدداً يمكن تكوينه من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } بحيث يتكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة ويكون أكبر من ٣٠٠ .  
 [١٠] ما عدد أرقام الهاتف الخماسية التي تبدأ بالرقم ٢ أو ٣ ؟  
 [١١] يحوي أحد الرفوف في المكتبة على ١٠ كتب عربية ، ٨ كتب إنجليزية ، فبكم طريقة يستطيع أحد الأشخاص اختيار كتابين أحدهما بالعربية والآخر بالإنجليزية ؟  
 [١٢] بكم طريقة يمكن إهداء طالب متفوق كتابين أحدهما في الرياضيات والآخر في العلوم مختارين من خمسة كتب في الرياضيات و ثلاثة كتب في العلوم ؟

[١٣] بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ أشخاص على ٨ مقاعد موضوعة في صف ؟

[١٤] أوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي ( حل المعادلات التالية ) :

أ)  $ك = ٤٠٣٢٠$  . ب)  $٥ ك = ٣٦٠٠$  .

ج)  $٣٠ س = س + ٢$  .

## التباديل

١ - ٢

### أولاً- تباديل و من العناصر :

مثال تمهيدي :

إن عدد الطرق الممكنة للحصول على عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من المجموعة  $س = \{ ١ ، ٣ ، ٦ \}$  يمكن معرفتها كما يلي :

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٣ طرق .

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٢ (طريقتان) .

عدد طرق اختيار رقم المئات = ١ (طريقة واحدة) .

وباستخدام المبدأ الأساسي للعد فإن :

عدد طرق الحصول على عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة =  $١ \times ٢ \times ٣ = ٦$  طرق، والأعداد المختلفة الممكنة

هي : ٦٣١ ، ٦١٣ ، ٣١٦ ، ٣٦١ ، ١٦٣ ، ١٣٦ . والأعداد مختلفة بسبب تغير قيمة العدد بتغير منزلة أي من أرقامه .

يسمى كل ترتيب حصلنا عليه للأرقام السابقة (تبديلة) أي أن عدد تباديل الأرقام

الثلاثة السابقة يساوي  $٣ \times ٢ \times ١ = ٦$  تبديلات أي تساوي  $٦$  .

وبالمثل إذا كان عدد عناصر المجموعة (س) ٤ عناصر فإن عدد التباديل الممكنة للحصول على عدد مكون من

أربعة أرقام مختلفة منها =  $٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$  تبديلة .

### تعريف (١-٢)

عدد تباديل و من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة هو  $ك$  ؛

ويرمز له بالرمز  $٣ ل$  أو  $ل (٣ ، ٣)$  حيث  $٣ ل \ni ٣$  .

$٣ ل = ك = ٣ (٣ - ٣) (١ - ٣) \dots \times ٣ \times ٢ \times ١$  .

بكم طريقة يمكن أن تجلس أربع طالبات على أربعة كراسي؟

**الحل:**

عدد الطرق التي يمكن أن تجلس بها الطالبة الأولى أربع طرق ، والثانية ثلاث طرق ، ... وهكذا .  
أي أن عدد الطرق =  $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$  طريقة .

**ثانياً : تباديل و من العناصر المختلفة مأخوذة مر في كل مرة :**

في كثير من الأحيان نحتاج إلى اختيار وترتيب عدد معين من عناصر مجموعة ما ، كأن نختار مثلاً مر عنصراً من مجموعة بها و عنصراً ، ثم نرتب هذه العناصر المختارة .  
والسؤال هو : ما عدد الطرق التي يمكننا بها القيام بمثل هذه العملية ؟ وللإجابة عن هذا السؤال فإننا نوضح ذلك على النحو التالي :

إذا كان لدينا أربعة أرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، وأردنا أن نكون منها أعداد ذات رقمين مختلفين فإن :  
عدد طرق ملء منزلة الآحاد ٤ طرق ، وعدد طرق ملء منزلة العشرات ٣ طرق .  
وحسب مبدأ العد يكون :

عدد الأعداد ذات الرقمين التي يمكن تكوينها من الأرقام الأربعة =  $4 \times 3 = 12$  عدداً ، كل عدد من هذه الأعداد الاثنى عشر يسمى تبديلاً لأربعة عناصر مأخوذة منها اثنين اثنين ( أي أننا أجرينا تبديلاً على أربعة عناصر مأخوذة مثنى مثنى ) ونرمز لذلك بالصورة  $4!_2$  وتقرأ ( ٤ لام ٢ ) ويقصد بها ٤ تبديل ٢ ، أي :  
 $4!_2 = 3 \times 4 = 12$  .

وبشكل عام فإن :  ${}^p P_r = (1-p) \dots (p-r+1) \dots (1-1) \dots$

أي أن :  ${}^p P_r$  تعني حاصل ضرب أعداد متتالية أكبرها  $p$  ، وعددها  $r$  ، وأصغرها يزيد واحد عن الفرق بين  $p$  ،  $r$  أي هو  $(p-r+1)$  .  
فمثلاً :  $8!_5 =$  حاصل ضرب أعداد متتالية أكبرها ٨ وعددها ٥ .

أي أن :  $8!_5 = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 1680$  [ لاحظ أن العامل الأخير =  $(8-5+1) = 4$  ] .  
ويمكن التعبير عن  ${}^p P_r$  باستخدام المضروب على النحو التالي :

$${}^p P_r = \frac{p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times (p-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (p-r)}$$

أي بضرب البسط والمقام في  $p-r$  .

$${}^p P_r = \frac{p!}{(p-r)!} \text{ حيث } p \geq r , p \in \mathbb{N} , r \leq p$$

## مثال (٨ - ١)

أوجد قيمة الآتي :

$$٢ل^٤ ، ٣ل ، ٤ل^٢ ، ٥ل^١٠٠$$

الحل :

$$١ = \frac{٣}{٣} = \frac{٣}{٣-٣} = ٣ل ، ١٢ = \frac{٢٣ \times ٤}{٢} = \frac{٤}{٢-٤} = ٢ل^٤$$

$$١١٨٨٠ = \frac{٩ \times ١٠ \times ١١ \times ١٢}{٩} = \frac{١٢}{٨} = \frac{١٢}{٤-١٢} = ٤ل^١٢$$

$$٩٩٠٠ = \frac{٩٩ \times ١٠٠}{٩٨} = \frac{١٠٠}{٩٨} = ٢ل^١٠٠$$

## مثال (٩ - ١)

أوجد قيمة الرمز المجهول في كل مما يأتي :

$$٥٦ = ٢ل^٣ \text{ ( أ ) ، } ٢٤ = ٣ل^٢-٣ \text{ ( ب ) ، } ١٧١٦٠ = ١٣ل^٣ \text{ ( ج )}$$

الحل :

$$٥٦ = ٢ل^٣ \text{ ( أ )} \quad \leftarrow \quad ٥٦ = (١-٣)٣$$

$$٥٦ = ٣-٢ \quad \leftarrow \quad ٥٦ = ٣-٢-٢$$

$$٥٦ = (٧+٣)(٨-٣) \quad \leftarrow$$

$$\text{إما } ٨ = ٣ \text{ أو } ٧ = ٣-٧ \text{ وهذا مرفوض لأنه سالب .}$$

$$\therefore ٨ = ٣$$

$$٢٤ = ٣ل^٢-٣ \text{ ( ب )}$$

$$٢٤ = ٣ل^٢-٣ \quad \leftarrow \quad ٢٤ = ٣ \times ٣ \times ٤ = ٣ل^٢-٣$$

$$٤ = ٢-٣ \quad \leftarrow$$

$$\therefore ٦ = ٣$$

(ج)  $١٧١٦٠ = ١٣ل^٣$  ؛ نوجد العوامل المتتالية التي أكبرها ١٣ ، ويكون حاصل ضربها  $١٧١٦٠$  ،

لذلك نقسم  $١٧١٦٠$  على ١٣ ، ثم نقسم خارج القسمة على ١٢ ، ثم نقسم خارج القسمة على ١١ ،

... وهكذا حتى يكون ناتج خارج قسمة يساوي واحد .

$$\text{فنحصل على } ١٣ \text{ مر} = ١٧١٦٠ = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠ \leftarrow ١٣ \text{ مر} = ٤ \text{ ل}^٣ \text{ .} \therefore ٤ = \text{مر} .$$

**مثال (١٠ - ١)**

بكم طريقة يمكن تكوين علم يتكون من ثلاثة ألوان إذا كان لدينا خمسة ألوان ؟

**الحل :**

$$\text{عدد الطرق} = ٣ \text{ ل}^٥ = ٣ \times ٤ \times ٥ = ٦٠ \text{ طريقة .}$$

**مثال (١١ - ١)**

ما عدد تباديل جلوس ٥ أشخاص حول طاولة مستديرة ؟

**الحل :**

$$\text{عدد تباديل جلوس خمسة أشخاص حول طاولة مستديرة} = ٥ - ١ = ٤ = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤ \text{ تبديلة .}$$

إن عدد تباديل مجموعة ذات  $n$  عنصراً حول أي شكل مغلق (مستدير) هو  $(n-1)!$  ، لأنه لم يتم تثبيت نقطة البداية .

**مثال (١٢ - ١)**

صف به خمسة وعشرون طالباً بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة طلابية مؤلفة من رئيس ونائب للرئيس، وأمين

صندوق، ومسئول ثقافي، ومسئول رياضي ؟

**الحل :**

$$\text{عدد الطرق} = ٥ \text{ ل}^{٢٥} = \frac{٢٥}{٥-٢٥} = \frac{٢٥}{٢٠} = \frac{٢٥ \times ٢١ \times ٢٢ \times ٢٣ \times ٢٤ \times ٢٥}{٢٠} = ٦٣٧٥٦٠٠ \text{ طريقة .}$$

**تمارين ومسائل (٢ - ١)**

[١] احسب قيمة الآتي :  $٧ \text{ ل}^٣ \times ٢ \text{ ل}^٧$  ،  $٩ \text{ ل}^٩$  ،  $\frac{٣ \text{ ل}^٥}{٥ \text{ ل}^٨}$  ،  $٥ \text{ ل}^٥$  ،  $٧ \text{ ل}^٧$  .

[٢] عبر عن كل مما يأتي بالشكل  $٣ \text{ ل}^٣$  :

(أ)  $٤ \times ٣ \times ٦ \times ٥ \times ٧$  . (ب)  $١٢٠$  . (ج)  $٢١٠$  .

(د)  $(٢ + ٣ - ٢)$  . (هـ)  $(٢ - ٣)(٣ - ٤)(٤ - ٥)$  .



[ ٣ ] أوجد قيمة  $٥$  في كل مما يأتي :

( ب )  $٣^٥ = ٣^٥$

( أ )  $٧٢٠ = ٥^٥$

( د )  $\frac{٣}{٥} = \frac{١-٥^{١+٥٢}}{٥^{١-٥٢}}$

( ج )  $١٤ = ٣^{٢-٥} = ٣^٥$

[ ٤ ] أثبت صحة الآتي :

( ب )  $٣^{١+٥} = ٣ + ٣^٥$

( أ )  $٣^{٢+٥} = \frac{٣+٥}{٥}$

( د )  $٣^{١-٥} = ٣^{-٥} + ٣^{-١}$

( ج )  $٥ = ٣^{١-٥} \div ٣^{-٥}$

[ ٥ ] أوجد  $٣^٥$  إذا كان  $٥ = ٣$

[ ٦ ] إذا كان  $٩^٥ = ٦٠٤٨٠$  ، فأوجد  $٥$

[ ٧ ] بكم طريقة يمكن ترتيب خمسة كتب على رف فيه ثلاث خانات فارغات ؟

[ ٨ ] كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ؟

[ ٩ ] بكم طريقة يمكن تلوين علم يتكون من لونين إذا كان لدينا أربعة ألوان ؟

[ ١٠ ] حل المعادلات التالية :

( ب )  $٤٢ = ٣^{٢+٥}$

( أ )  $٥^٧ = ٣^٥$

( د )  $٥^{٥+٥} = (٣^{٣+٥})٣٠$

( ج )  $٢٠ = (٣^٥) \frac{٢-٥}{٥}$

[ ١١ ] بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب مختلفة على أحد الرفوف؟ وبكم طريقة يمكن إجراء هذا الترتيب إذا كان

المطلوب أن يظل كتابان معينان متجاوران؟

[ ١٢ ] بكم طريقة يمكن وضع ٨ شمعات ذات ألوان مختلفة في شمعدان يسع خمس شمعات فقط إذا كان :

( ب ) الشمعدان دائري ؟

( أ ) الشمعدان خطي ؟

[ ١٣ ] كم عدد التطبيقات المتباينة التي يمكن تعريفها من المجموعة  $٥ = \{ ١ ، ٢ ، ٣ \}$  إلى المجموعة

$٥ = \{ ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ \}$  ؟

## التوافيق

١ - ٣

ليكن لدينا المجموعة  $S = \{١، ٢، ٣، ٤، ٥\}$  . من هذه المجموعة يمكن أن نستخرج فقط ست مجموعات جزئية ثنائية ( يحتوي كل منها على عنصرين ) وهي :

$\{١، ٢\}$  ،  $\{١، ٣\}$  ،  $\{١، ٤\}$  ،  $\{١، ٥\}$  ،  $\{٢، ٣\}$  ،  $\{٢، ٤\}$  ،  $\{٢، ٥\}$  ،  $\{٣، ٤\}$  ،  $\{٣، ٥\}$  ،  $\{٤، ٥\}$  .

كل من هذه المجموعات الجزئية تُسمى توفيقاً أو اختياراً ذا عنصرين من مجموعة عدد عناصرها أربعة . كذلك يمكن أن نستخرج من هذه المجموعة مجموعات جزئية ثلاثية ، وهي أربع مجموعات جزئية :

$\{١، ٢، ٣\}$  ،  $\{١، ٢، ٤\}$  ،  $\{١، ٢، ٥\}$  ،  $\{١، ٣، ٤\}$  ،  $\{١، ٣، ٥\}$  ،  $\{١، ٤، ٥\}$  ،  $\{٢، ٣، ٤\}$  ،  $\{٢، ٣، ٥\}$  ،  $\{٢، ٤، ٥\}$  ،  $\{٣، ٤، ٥\}$  .

كل من هذه المجموعات الجزئية يسمى توفيقاً أو اختياراً ثلاثي العناصر من مجموعة رباعية . وبصفة عامة إذا كان لدينا مجموعة  $S$  عدد عناصرها  $n$  فإن كل مجموعة جزئية ذات  $m$  عنصراً يسمى توفيقاً أو اختياراً ذا  $m$  عنصراً؛ لعناصر عددها  $n$  حيث  $(m \leq n)$  .

### تعريف (١-٣)

توفيق  $m$  عنصراً من مجموعة  $S$  تضم  $(n)$  عنصراً دون أهمية، للترتيب يسمى توفيقاً، ويرمز له بالرمز :

$${}^n C_m \text{ أو } \binom{n}{m} \text{ أو } (n, m) \text{ ويقراً (نون توافيق راء) .}$$

والفرق بين التباديل والتوافيق هو أننا في التباديل نهتم بالترتيب لأننا لو أخذنا تباديل  $\{١، ٢، ٣، ٤\}$  مأخوذة اثنين اثنين سنجدها اثنا عشر تبديلاً :  $\{١، ٢\}$  ،  $\{١، ٣\}$  ،  $\{١، ٤\}$  ،  $\{٢، ٣\}$  ،  $\{٢، ٤\}$  ،  $\{٣، ٤\}$  ،  $\{١، ٢، ٣\}$  ،  $\{١، ٢، ٤\}$  ،  $\{١، ٣، ٤\}$  ،  $\{٢، ٣، ٤\}$  . ومن الملاحظ أن :  $\{١، ٢\}$  ،  $\{٢، ١\}$  يعتبران تبديلين مختلفين ولكنهما يمثلان توفيقاً واحداً، لأن  $\{١، ٢\}$  هو نفسه  $\{٢، ١\}$  وفي المسائل العملية نحتاج أحياناً إلى إيجاد التباديل إذا كان الترتيب مهماً ، وأحياناً نحتاج إيجاد التوافيق إذا كان الترتيب لا يهمنا ، وذلك حسب واقع الحالة التي نعالجها .

ولإيجاد عدد توافيق  $n$  من العناصر مأخوذة  $m$  في كل مرة ، نوضح ذلك كالتالي :

من المجموعة  $S = \{١، ٢، ٣، ٤\}$  حصلنا على ١٢ تبديلاً، أخذت اثنين اثنين يقابلها ستة توافيق ( كل تبديلين يحصل منهما على توفيق واحد ) أي أن عدد التوافيق يمكن أن يستنتج من عدد التباديل بالقسمة على ٢

$$\text{(أي } ١٢ \text{ تبديلاً} = \frac{١٢}{٢} = ٦ \text{ توفيقاً، والعدد } ٢ \text{ هو في الحقيقة } ٢! = ٢ \times ١ = ٢ \text{) .}$$

وبالمثل نحصل على أربعة توافيق مأخوذة ثلاثة ثلاثة يقابلها ٢٤ تبديلة (  $٤!$  ) .



**مثال (١ - ١٤)**

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة خماسية من تسعة أشخاص ؟

**الحل :**

هنا لايهمنا ترتيب الأشخاص في اللجنة التي نختارها لذلك فإن هذه اللجان هي توفيقات .

$$\text{عدد الطرق} = {}^9C_5 = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 126 \text{ طريقة .}$$

**مثال (١ - ١٥)**

كم عدد الطرق الممكنة لانتخاب لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص ثلاثة رجال وامرأتين من بين ثلاثين شخصاً من الرجال وعشر من النساء ؟

**الحل :**

$$\text{عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاثة رجال} = {}^3C_3 = \frac{3!}{3! \times 0!} = 1 \text{ طريقة .}$$

$$\text{عدد الطرق الممكنة لاختيار امرأتين} = {}^{10}C_2 = \frac{10!}{8! \times 2!} = 45 \text{ طريقة .}$$

$$\text{إذن عدد الطرق الممكنة لتشكيل هذه اللجنة} = {}^3C_3 \times {}^{10}C_2 = 1 \times 45 = 45 \text{ طريقة .}$$

**مثال (١ - ١٦)**

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من خمسة مديرين على الأقل من بين ٧ مديرين ؟

**الحل :**

اختيار خمسة مديرين على الأقل يعني أننا يمكن أن نختار خمسة مديرين أو ستة أو سبعة (دون ترتيب) .

$$\text{عدد طرق اختيار خمسة مديرين} = {}^7C_5 = \frac{7!}{5! \times 2!} = 21 \text{ طريقة .}$$

$$\text{عدد طرق اختيار ستة مديرين} = {}^7C_6 = \frac{7!}{6! \times 1!} = 7 \text{ طرق .}$$

$$\text{عدد طرق اختيار سبعة مديرين} = {}^7C_7 = \frac{7!}{7! \times 0!} = 1 \text{ طريقة .}$$

إذن عدد الطرق الممكنة لاختيار خمسة مديرين على الأقل

$$= {}^7C_5 + {}^7C_6 + {}^7C_7 = 21 + 7 + 1 = 29 \text{ طريقة .}$$



**مثال (١ - ١٨)**

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة سلسبيل؟

**الحل :**

عدد حروف كلمة سلسبيل = ٦ أحرف .

عدد تكرار حرف السين = ٢ (حرفان) ، و عدد تكرار حرف اللام = ٢ (حرفان).

عدد تكرار حرف الباء = ١ (حرف واحد) ، و عدد تكرار حرف الياء = ١ (حرف واحد)

$$\therefore \text{عدد الطرق} = \binom{6}{1, 1, 2, 2} = \frac{6!}{\cancel{1} \times \cancel{1} \times 2 \times 2} = \frac{720}{4} = 180 \text{ طريقة .}$$

**مثال (١ - ١٩)**

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيع ١٢ كتاباً مختلفاً على ثلاثة طلاب بحيث يأخذ الأول ٥ كتب والثاني

٤ كتب والثالث ٣ كتب؟

**الحل :**

بما أنه سيتم توزيع جميع الكتب على الطلاب الثلاثة؛ فإن العملية هي تجزئة مجموعة مؤلفة من ١٢ عنصراً

إلى ثلاث مجموعات جزئية منفصلة أعداد عناصرها ٥ ، ٤ ، ٣ على الترتيب وعليه يكون :

$$\text{عدد الطرق الممكنة} = \binom{12}{5, 4, 3} = \frac{12!}{\cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{3}} = \frac{479001600}{60} = 7983360 \text{ طريقة .}$$

**مثال (١ - ٢٠)**

اختبار مكون من ثمانية أسئلة ، بكم طريقة يستطيع طالب أن يختار ستة منها إذا كان عليه أن يجيب عن

سؤالين على الأقل من بين الثلاثة الأولى؟

**الحل :**

$$\text{عدد الطرق} = {}^3P_2 \times {}^5P_3 + {}^3P_3 \times {}^4P_2 = 60 + 120 = 180$$

$$= \frac{3!}{\cancel{1} \times \cancel{2}} \times \frac{5!}{\cancel{2} \times \cancel{3}} + \frac{3!}{\cancel{1} \times \cancel{2} \times \cancel{3}} \times \frac{4!}{\cancel{1} \times \cancel{2}} = 6 \times 60 + 6 \times 120 = 180$$

$$= 180 + 120 = 300 \text{ طريقة .}$$

**مثال ( ٢١ - ١ )**

أثبت صحة العلاقة التالية :

$$\frac{1+r-2}{r} = \binom{2}{r} \div \binom{2}{1-r}$$

**الحل :**

(١)..... ،  $\frac{2}{r-2} = \binom{2}{r} ::$

(٢).....  $\frac{2}{1+r-2} = \binom{2}{1-r}$

الطرف الأيمن =  $\binom{2}{r} \div \binom{2}{1-r} = \frac{2}{r-2} \div \frac{2}{1+r-2}$

$$\frac{1+r-2}{2} \times \frac{2}{r-2} =$$

الطرف الأيسر =  $\frac{1+r-2}{r} = \frac{r-2}{r} \times \frac{1+r-2}{1+r-2} =$

**تمارين ومسائل ( ١ - ٣ )**

[١] احسب الآتي :

•  $98 \times 100$  ،  $10^3 + 3 \times 10^2$  ،  $\binom{11}{2}$  ،  $70 \times 70 - 68 \times 70$  ،  $10^8$  ،  $10^2$

[٢] أوجد قيمة  $r$  في كل مما يأتي :

( أ )  $10^{10} = r \times 10^{10}$  ، ( ب )  $2 + r^{20} = r^{20}$

( ج )  $10^{28} = r + 2$  ، ( د )  $120 = r^3 - r$

[٣] أوجد قيمة  $r$  في كل مما يأتي :

( أ )  $435 = r^3$  ، ( ب )  $5 = r^3 - 12$  ، ( ج )  $2 = r^3$  ،  $35 = r^{\frac{3}{2}}$

[ ٤ ] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف ما يلي :

أ ( لا إله إلا الله ؟      ب ( عزيز ؟      ج) سمسم ؟

[ ٥ ] بكم طريقة يمكن اختيار خمسة أسئلة للإجابة عنها في امتحان اشتمل على ثمانية أسئلة؟

[ ٦ ] لدى مؤسسة ما خمس وظائف شاغرة للعمل، فبكم طريقة يمكن شغل هذه الوظائف من قبل ١٠ أشخاص؟

[ ٧ ] من بين عشرة طلاب يراد اختيار فريق لكرة السلة المكون من خمسة لاعبين ، بكم طريقة يتم ذلك؟

[ ٨ ] بكم طريقة يمكن اختيار ( ٤ ) كتب على الأقل من بين ( ٨ ) كتب مختلفة؟

[ ٩ ] أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار ( ٤ ) كتب على الأكثر من بين ( ٨ ) كتب مختلفة.

[ ١٠ ] بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين تتكون كل منها من ثلاثة أشخاص من بين ١٢ شخصاً، بحيث لا يشترك

الشخص في أكثر من لجنة؟

[ ١١ ] مجموعة مكونة من عشرة طلاب ، وخمس طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من سبعة

أشخاص في الحالات التالية ؟

أ ( بدون شرط .

ب) من طالب رئيساً وعضوية ثلاث طالبات وثلاثة طلاب .

ج) من ثلاثة طلاب على الأقل .

[ ١٢ ] من بين عشرة طلاب، وستة مدرسين يراد تشكيل جماعة للرياضيات في مدرسة بحيث تتألف من خمسة

طلاب ، وأربعة مدرسين ، فبكم طريقة يتم ذلك ؟

[ ١٣ ] بكم طريقة يتم تقسيم ٢٤ طالباً إلى ثلاث مجموعات مكونة من ( ٧ ، ٨ ، ٩ ) طلاب؟

[ ١٤ ] من بين ثمانية عشر طالبة . بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث لجان مكونة من ثلاث طالبات ، أربع طالبات ،

خمس طالبات، بحيث لا تشترك أية طالبة في أكثر من لجنة ؟

[ ١٥ ] أثبت صحة الآتي :

$$١ + r + r^2 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (أ)$$

$$r + r^2 + r^3 + \dots + r^{n-1} = \frac{r^n - r}{r - 1} \quad (ب)$$

$$\frac{r^2 - 1}{r^3 - 1} = \frac{r^2 + 1}{r^3 + r^2 + r + 1} \quad (ج)$$



## مراجعة

١ - ٢

تعرفت في دراستك السابقة على مقاييس النزعة المركزية ( المتوسط الحسابي - الوسيط - المنوال ) وسُميت بمقاييس النزعة المركزية؛ لأنها تحدد موضع، أو موقع تركز القيم حول قيمة معينة .

## أولاً - المتوسط الحسابي (س) :

( ١ ) في حالة البيانات غير المبوبة (مفردة) :

المتوسط الحسابي لمجموعة ذات (د) من القيم  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_d$  يساوي مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها ، أي أن :

(١-٢)

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^d s_r}{d}$$

حيث  $\bar{s}$  المتوسط الحسابي ، د عدد القيم ،  $s_r$  القيم المختلفة ،  $r$  دليل القيم .

( ٢ ) في حالة البيانات المبوبة يكون المتوسط الحسابي :

(٢-٢)

$$\bar{s} = \frac{\sum_{r=1}^k s_r \times k_r}{\sum_{r=1}^k k_r}$$

حيث  $\sum_{r=1}^k k_r$  هو مجموع التكرارات ،  $k_r$  تكرار الفئات ،  $s_r$  مركز الفئة .

## ثانياً- الوسيط (و) :

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها وهناك حالتان لحساب الوسيط :

( ١ ) في حالة البيانات غير المبوبة (مفردة) فننظر لعدد القيم :

أ ( إذا كان عدد القيم فردي فيكون الوسيط هو العدد الذي رتبته هي :  $\frac{1+d}{2}$  .

ب ( إذا كان عدد القيم زوجي فيكون الوسيط هو المتوسط الحسابي للعددين الذين رتبتهما

هي :  $\frac{d}{2}$  ،  $\frac{d}{2} + 1$  .

( ٢ ) في حالة البيانات المبوبة يتم حساب الوسيط بإحدى الطريقتين التاليتين :

أ ( في حالة التكرار المتجمّع الصاعد :

(٣-٢)

$$\text{الوسيط (و)} = ١ + \frac{\frac{2}{2} - ك}{٢} \times ل$$

حيث ١ الحد الأدنى للفئة الوسيطة ، 2 مجموع التكرارات ، ك<sub>١</sub> التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطة ، ك<sub>٢</sub> تكرار الفئة الوسيطة ، ل طول الفئة الوسيطة .  
 (ب) في حالة التكرار المتجمع النازل :

(٤-٢)

$$\text{الوسيط (و)} = ب - \frac{\frac{2}{2} - ك}{٢} \times ل$$

حيث ب الحد الأعلى للفئة الوسيطة ، 2 مجموع التكرارات ، ك<sub>٢</sub> التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطة ، ك<sub>١</sub> تكرار الفئة الوسيطة ، ل طول الفئة الوسيطة .

### ثالثاً- المنوال :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في البيانات ، وفي حالة البيانات المبوبة يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية ( المناظرة لأكثر تكرار) . وقد يكون في التوزيع أكثر من منوال .

#### مثال (١ - ٢)

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات التالية: ١٠، ١٠، ١٣، ١٤، ١١، ١٣، ١٢، ١٣

#### الحل :

$$\text{المتوسط الحسابي : } \bar{س} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{١٠+١٠+١٣+١٤+١١+١٣+١٢+١٣}{٨} = \frac{٩٦}{٨} = ١٢$$

ولإيجاد الوسيط نرتب البيانات تصاعدياً كما يلي :

١٠، ١٠، ١١، ١٢، ١٣، ١٣، ١٣، ١٤ ، وحيث إن عدد القيم زوجي (٨ قيم) فتكون رتبنا العديدين

الأوسطين هما : الرابع والخامس ، وبالتالي فإن العديدين هما : ١٢ ، ١٣ .

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{١٢+١٣}{٢} = \frac{٢٥}{٢} = ١٢,٥$$

المنوال = ١٣ وهي القيمة الأكثر تكراراً .

#### مثال (٢ - ٢)

أوجد المتوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات المبوبة في الجدول (١-٢) والتي تمثل محصول البن في

إحدى السنوات لدى ٣٠ مزارعاً (الكمية بالطن) :

المحصول	٦-٢	١١-٧	١٦-١٢	٢١-١٧
التكرار	٤	١٢	٨	٦

جدول (١-٢)

**الحل :** لإيجاد كل من المتوسط الحسابي والوسيط في مثل هذه البيانات نكوّن الجدول كما في (٢-٢):

الفئات	مركز الفئة $s_r$	التكرار $k_r$	$s_r \times k_r$	التكرار المتجمع الصاعد
٦-٢	٤	٤	١٦	٤ ← $k_1$
١١-٧	٩	١٢	١٠٨	١٦
١٦-١٢	١٤	٨	١١٢	٢٤
٢١-١٧	١٩	٦	١١٤	٣٠
المجموع		٣٠	٣٥٠	

جدول (٢-٢)

$$\text{المتوسط الحسابي : } \bar{s} = \frac{\sum (s_r \times k_r)}{\sum k_r} = \frac{350}{30} = 11,7 \approx 11,7$$

الوسيط : لاحظ أن  $\frac{3}{4} = 15$  ، فتكون الفئة الوسيطة هي ١١ - ٧ ، وبالتالي فإن :

$k_1 = 4$  التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطة،  $k_2 = 12$  تكرار الفئة الوسيطة .

الفئة التي تناظر  $k_2$  هي ١١ - ٧ فيكون الحد الأدنى للفئة الوسيطة  $l = 7$  .

طول الفئة الوسيطة (ل) = الحد الأعلى الحقيقي للفئة - الحد الأدنى الحقيقي للفئة  $11,5 - 6,5 = 5$  . ∴  $l = 5$

$$\therefore \text{الوسيط (و)} = l + \frac{\frac{3}{4} - k_1}{k_2} \times 5 = 7 + \frac{1 - 4}{12} \times 5 \approx 11,6$$

$$\text{المنوال} = \frac{11 + 7}{2} = 9$$

**تدريب (٢-١)**

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من مما يأتي :

أ ( ١٢ ، ١١ ، ١١ ، ١٢ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ )

ب ( ٢٦ ، ٢٣ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٦ ، ٢٨ )

**تدريب ( ٢ - ٢ )**

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات المبوبة في الجدول (٣-٢) :

٧٤-٧٠	٦٩-٦٥	٦٤-٦٠	٥٩-٥٥	٥٤-٥٠	٤٩-٤٥	الوزن بالكيلوجرام
٢	٣	٢٣	١٣	٧	٢	عدد الطلاب

جدول (٣-٢)

**مقاييس التشتت :**

من أهم مقاييس التشتت المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ، وفيما يلي نقدم تعاريف وأمثلة لكل مقياس من هذه المقاييس .

**المدى :**

المدى للبيانات غير المبوبة هو الفرق بين أعلى قيمة، وأدنى قيمة فيها، ويعطى بالعلاقة :

$$\text{المدى} = \text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة}$$

وفي حالة البيانات المبوبة يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لآخر فئة والحد الأدنى لأول فئة ، أي أن :

$$\text{المدى} = \text{الحد الأعلى الحقيقي لآخر فئة} - \text{الحد الأدنى الحقيقي لأول فئة}$$

**مثال ( ٣ - ٢ )**

إذا كان لدينا البيانات التالية تمثل قدرة ستة لاعبين على الوثب العالي وهي : ٣,٢٥ م ، ٣ م ، ٣,٥٠ م ، ٣,١٠ م ، ٣,٤ م ، ٢,٩ م ، فاحسب مدى هذه البيانات .

**الحل :**

$$\text{المدى} = \text{أعلى قيمة} - \text{أدنى قيمة} .$$

$$= ٣,٥٠ - ٢,٩٠ = ٠,٦٠ \text{ م} .$$

**مثال ( ٤ - ٢ )**

الجدول (٤-٢) يمثل درجات ٥٠ طالباً في اختبار شهري لمادة الفيزياء الدرجة العظمى ٢٠ درجة :

٢٠-١٧	١٦-١٣	١٢-٩	٨-٥	فئة الدرجات
٩	٢١	١٦	٤	التكرار

جدول (٤-٢)

أوجد المدى لدرجات الطلبة الموضحة في الجدول (٤-٢) .

## الحل :

$$\begin{aligned} \text{المدى} &= \text{الحد الأعلى لآخر فئة} - \text{الحد الأدنى لأول فئة} . \\ &= 20,5 - 4,5 = 16 . \end{aligned}$$

## الانحراف المتوسط :

هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة بُعد العلامة الخام عن متوسطها الحسابي ويرمز له بالرمز  $(\bar{c})$  ،

$$\text{أي أن : } |c_r - \bar{c}| = |s_r - \bar{s}|$$

ولحساب الانحراف المتوسط نتبع ما يلي :

١ - إيجاد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات .

٢ - إيجاد القيم المطلقة لانحراف كل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن المتوسط الحسابي من العلاقة :

$$|c_r - \bar{c}| = |s_r - \bar{s}|$$

٣- إيجاد المتوسط الحسابي للانحرافات المطلقة بالعلاقة :

$$(5-2) \quad \bar{c} = \frac{\sum_{r=1}^k |c_r - \bar{c}|}{n} = \frac{\sum_{r=1}^k |s_r - \bar{s}|}{n}$$

وفي حالة البيانات المبوبة نجد الانحراف المتوسط من العلاقة :

$$(6-2) \quad \bar{c} = \frac{\sum_{r=1}^k |c_r - \bar{c}| \cdot k_r}{\sum_{r=1}^k k_r}$$

حيث  $k_r$  هو تكرار الفئة  $r$  .

وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي، وكلما كبرت قيمة هذا

المتوسط كلما ابتعدت عنه، أي أن متوسط الانحرافات يعتبر دليلاً، أو مؤشراً على قرب، أو بعد المشاهدات عن

متوسطها الحسابي .

## مثال (٥ - ٢)

أوجد الانحراف المتوسط للمشاهدات التالية : ١٩ ، ١٤ ، ٢٠ ، ١٧ ، ١٥ .

## الحل :

$$\bar{s} = \frac{190}{17} = \frac{19 + 14 + 20 + 17 + 15}{17} = 17$$

$$|c_1 - \bar{c}| = |19 - 17| = 2$$

$$|c_2 - \bar{c}| = |14 - 17| = 3$$

$$3 = |17 - 20| = |ح_3|$$

$$3 = |17 - 14| = |ح_4|$$

$$2 = |17 - 19| = |ح_5|$$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط } (\bar{ح}) = \frac{\sum_{r=1}^n |ح_r|}{n} = \frac{2+3+3+0+2}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

### مثال (٢-٦)

البيانات في الجدول (٢-٥) تمثل أوزان مائة طالب بالكيلو جرام

فئات الأوزان	٤٤-٤٠	٤٩-٤٥	٥٤-٥٠	٥٩-٥٥	٦٤-٦٠	٦٩-٦٥
التكرار	٥	١٠	٣٠	٣٥	١٢	٨

جدول (٢-٥)

أوجد الانحراف المتوسط لأوزان هؤلاء الطلبة .

**الحل :**

نكون الجدول (٢-٦) التالي :

الفئات	مركز الفئة $س_r$	التكرار $ك_r$	$س_r \times ك_r$	$ ح_r  =  س_r - \bar{س} $	$ ح_r  \times ك_r$
٤٤-٤٠	٤٢	٥	٢١٠	١٣,١٥	٦٥,٧٥
٤٩-٤٥	٤٧	١٠	٤٧٠	٨,١٥	٨١,٥٠
٥٤-٥٠	٥٢	٣٠	١٥٦٠	٣,١٥	٩٤,٥٠
٥٩-٥٥	٥٧	٣٥	١٩٩٥	١,٨٥	٦٤,٧٥
٦٤-٦٠	٦٢	١٢	٧٤٤	٦,٨٥	٨٢,٢
٦٩-٦٥	٦٧	٨	٥٣٦	١١,٨٥	٩٤,٨٠
المجموع		١٠٠	٥٥١٥		٤٨٣,٥

جدول (٢-٦)

$$\bar{س} = \frac{\sum_{r=1}^n س_r \times ك_r}{\sum_{r=1}^n ك_r} = \frac{٥٥١٥}{١٠٠} = ٥٥,١٥$$

$$\text{الانحراف المتوسط } \bar{ح} = \frac{\sum_{r=1}^n |ح_r| \times ك_r}{\sum_{r=1}^n ك_r} = \frac{٤٨٣,٥}{١٠٠} = ٤,٨٣٥$$

## التباين :

يعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحراف القيم عن متوسطها الحسابي مقسوماً على عددها (ع) مطروحاً منه واحد ويرمز له بالرمز (ع<sup>٢</sup>) .

$$(٧-٢) \quad \frac{\sum_{i=1}^n \frac{d_i^2}{f_i} - \frac{(\sum_{i=1}^n d_i)^2}{n}}{n-1}$$

ويعبر عن هذا التعريف رمزياً بالصورة :

حيث ع<sup>٢</sup> التباين ، س<sup>٢</sup> القيم المختلفة ، م<sup>٢</sup> دليل القيم ، س<sup>٢</sup> المتوسط الحسابي للقيم ، د<sup>٢</sup> حجم العينة (عدد القيم) ، وتستخدم هذه العلاقة عندما يكون المطلوب إيجاد التباين لقيم مفردة من البيانات .  
أما إذا كان المطلوب إيجاد التباين لبيانات مبوبة في فئات نستخدم العلاقة :

$$(٨-٢) \quad \frac{\sum_{i=1}^k \frac{f_i^2}{n_i} - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i)^2}{n}}{n-1} = \text{ع}^2$$

حيث ك<sup>٢</sup> هو تكرار الفئة م<sup>٢</sup> ، س<sup>٢</sup> هي مركز الفئة م<sup>٢</sup> .  
وفي حالة إيجاد التباين لبيانات مبوبة في فئات ومن خلال البيانات نستخدم العلاقة :

$$(٩-٢) \quad \left[ \frac{\sum_{i=1}^k \left( \frac{f_i^2}{n_i} \right)}{\sum_{i=1}^k \frac{f_i}{n_i}} - \frac{(\sum_{i=1}^k f_i)^2}{n} \right] \frac{1}{n-1} = \text{ع}^2$$

## الانحراف المعياري :

يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين، ويرمز له بالرمز (ع) ويعبر عنه رمزياً بالصورة :

$$\text{ع} = \sqrt{\text{ع}^2}$$

وبذلك يمكن أخذ الجذر التربيعي للقوانين (٧-٢) ، (٨-٢) ، (٩-٢) حسب الحالات المعنية .

**مثال (٧-٢)**

أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم ٥، ٧، ١٠، ١٢، ٦ .

**الحل :**

لحساب التباين نوجد أولاً المتوسط الحسابي للقيم :

$$\bar{x} = \frac{40}{5} = \frac{6+12+10+7+5}{5} = 8$$

ثم نكون الجدول (٧-٢) كما يلي :

س م	س م - $\bar{x}$	(س م - $\bar{x}$ ) <sup>٢</sup>
٥	٣-	٩
٧	١-	١
١٠	٢	٤
١٢	٤	١٦
٦	٢-	٤
المجموع		٣٤

جدول (٧-٢)

$$\text{التباين : } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} = \frac{34}{4} = 8,5$$

$$\text{الانحراف المعياري : } \sigma = \sqrt{8,5} \approx 2,9$$

**مثال (٨-٢)**

الجدول (٨-٢) يمثل درجات ٤٥ طالباً في اختبار مادة الفلسفة، حيث الدرجة العظمى (١٠) درجات :

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٤	٧	٩	١٢	٩	٣	١

جدول (٨-٢)



أوجد التباين، والانحراف المعياري لدرجات الطلبة .

### الحل :

لحساب التباين والانحراف المعياري نكون الجدول (٢-٩) كما يلي :

س <sub>ر</sub>	ك <sub>ر</sub>	س <sub>ر</sub> × ك <sub>ر</sub>	(س <sub>ر</sub> - $\bar{س}$ )	(س <sub>ر</sub> - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup>	(س <sub>ر</sub> - $\bar{س}$ ) <sup>٢</sup> × ك <sub>ر</sub>
٤	٤	١٦	-٢,٦	٦,٧٦	٢٧,٠٤
٥	٧	٣٥	-١,٦	٢,٥٦	١٧,٩٢
٦	٩	٥٤	-٠,٦	٠,٣٦	٣,٢٤
٧	١٢	٨٤	٠,٤	٠,١٦	١,٩٢
٨	٩	٧٢	١,٤	١,٩٦	١٧,٦٤
٩	٣	٢٧	٢,٤	٥,٧٦	١٧,٢٨
١٠	١	١٠	٣,٤	١١,٥٦	١١,٥٦
المجموع	٤٥	٢٩٨			٩٦,٦٠

جدول (٢-٩)

$$\bar{س} = \frac{\sum_{r=1}^n ك_r \times س_r}{\sum_{r=1}^n ك_r} = \frac{٢٩٨}{٤٥} \approx ٦,٦$$

المتوسط الحسابي :  $\bar{س}$

$$ع^٢ = \frac{\sum_{r=1}^n (س_r - \bar{س})^2 \times ك_r}{\sum_{r=1}^n ك_r - ١} = \frac{٩٦,٦}{٤٤} \approx ٢,٢$$

التباين :  $ع^٢$

$$ع = \sqrt{٢,٢} \approx ١,٤٨$$

الانحراف المعياري :  $ع$

### مثال (٢-٩)

الجدول (٢-١٠) يوضح الزمن بالدقائق ٣٥ متسابقاً لقطع مسافة ٦ كيلومتر :

الزمن بالدقيقة	١٥-١٧	١٨-٢٠	٢١-٢٣	٢٤-٢٦
التكرار	٦	١٤	١٢	٣

جدول (٢-١٠)

أوجد التباين والانحراف المعياري لنتائج السباق .

## الحل :

نوجد التباين باستخدام العلاقة المختزلة:

$$E^2 = \frac{1}{n} \left[ \frac{\sum_{i=1}^m (s_i \cdot k_i)^2}{\sum_{i=1}^m k_i} - \frac{(\sum_{i=1}^m s_i \cdot k_i)^2}{n} \right]$$

الفرقة	مركز الفرقة س <sub>م</sub>	التكرار ك <sub>م</sub>	س <sub>م</sub> × ك <sub>م</sub>	س <sub>م</sub> <sup>2</sup> × ك <sub>م</sub>
١٥-١٧	١٦	٦	٩٦	١٥٣٦
١٨-٢٠	١٩	١٤	٢٦٦	٥٠٥٤
٢١-٢٣	٢٢	١٢	٢٦٤	٥٨٠٨
٢٤-٢٦	٢٥	٣	٧٥	١٨٧٥
المجموع		٣٥	٧٠١	١٤٢٧٣

جدول (٢-١١)

$$\therefore E^2 = \frac{1}{34} \left[ \frac{701^2}{34} - 14273 \right] \approx 6,85$$

$$E = \sqrt{6,85} \approx 2,6$$

## تمارين ومسائل (٢-١)

[١] إذا كان لديك البيانات التالية :

أ) ٧، ٨، ١٠، ١٢، ١٣ . ب) ١٢، ٠، ٦، ٨ . ج) ٤، ٥، ٣، ٥، ٣ .

اعتماداً على البيانات السابقة ؛ أوجد كل مما يلي :

أ) المتوسط الحسابي . ب) المدى . ج) الوسيط .  
د) الانحراف المتوسط . هـ) التباين . و) الانحراف المعياري .

[٢] الجدول (٢-١٢) يوضح عدد زيارات بعض السيدات الحوامل لمركز الأمومة، والطفولة في إحدى مدن الجمهورية

خلال ستة أسابيع :

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس
عدد الزيارات	٨٨	٨٥	٩٢	٧٥	٧٨	٨٢

جدول (٢-١٢)

- أ) أوجد المدى للزيارات ، كذلك الانحراف المتوسط لها .  
 ب) احسب التباين، والانحراف المعياري للزيارات .  
 [ ٣ ] بيانات الجدول (٢-١٣) تمثل درجات ١٠٠ طالب في مادة الرياضيات .  
 ( علماً بأن الدرجة من ٥٠ ) .

الفئة	١٠-١	٢٠-١١	٣٠-٢١	٤٠-٣١	٥٠-٤١
التكرار	٢	٥	٢٩	٤٥	١٩

جدول (٢-١٣)

- أوجد : أ) المدى . ب) الانحراف المتوسط . ج) التباين . د) الانحراف المعياري .  
 [ ٤ ] الجدول (٢-١٤) يمثل الأجر اليومي بالريال لخمسين عاملاً :

الفئة	٦٩٩ - ٥٠٠	٨٩٩ - ٧٠٠	١٠٩٩ - ٩٠٠	١٢٩٩ - ١١٠٠
التكرار	٥	٢٥	١٢	٨

- أوجد : أ) المدى . ب) الانحراف المتوسط .  
 ج) التباين . د) الانحراف المعياري .

## الارتباط وأشكال الانتشار

٢ - ٢

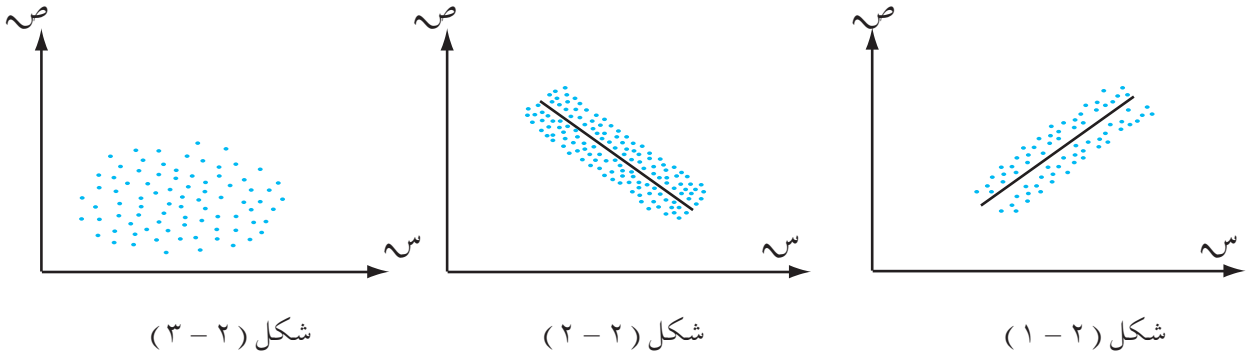
اقتصرت دراستك السابقة لبعض المقاييس الإحصائية لبيانات تتعلق بمتغير واحد، وهي مقاييس النزعة المركزية والتشتت . وفي هذا البند سوف نتعرف على مفهوم إحصائي يبين العلاقة بين متغيرين ، ويسمى الارتباط . مثل العلاقة بين طول الفرد ووزنه والعلاقة بين كمية الأمطار وارتفاع منسوب المياه في الحواجز المائية .

### أشكال الانتشار :

من السهل تكوين فكرة أولية عن اتجاه وقوة العلاقة بين متغيرين دون حساب معامل الارتباط ، وذلك من خلال رسم ما يسمى بشكل الانتشار فمثلاً إذا رمزنا لأحد المتغيرين بالرمز (س) والمتغير الآخر بالرمز (ص) فإن بيانات هذين المتغيرين يمكن كتابتها على شكل أزواج مرتبة كما يلي :

(س<sub>١</sub> ، ص<sub>١</sub>) ، (س<sub>٢</sub> ، ص<sub>٢</sub>) ، (س<sub>٣</sub> ، ص<sub>٣</sub>) ، . . . ، (س<sub>٣</sub> ، ص<sub>٣</sub>) ، (س<sub>٣</sub> ، ص<sub>٣</sub>) ؛ كما يمكن تمثيلها بيانياً في المستوى

الإحداثي كنقاط ، ويسمى التمثيل البياني الناتج **بشكل الانتشار** . ويظهر في الأشكال التالية ثلاثة أنواع من الانتشار :



الشكل (١-٢) يوحي بوجود ارتباط موجب بين المتغيرين  $S$  ،  $V$  ؛ حيث إن المتغير ( $V$ ) يزيد بزيادة المتغير ( $S$ ) .

يوحي الشكل (٢-٢) بوجود ارتباط سالب بين المتغيرين  $S$  ،  $V$  ؛ حيث ينقص المتغير ( $V$ ) بزيادة المتغير ( $S$ ) .

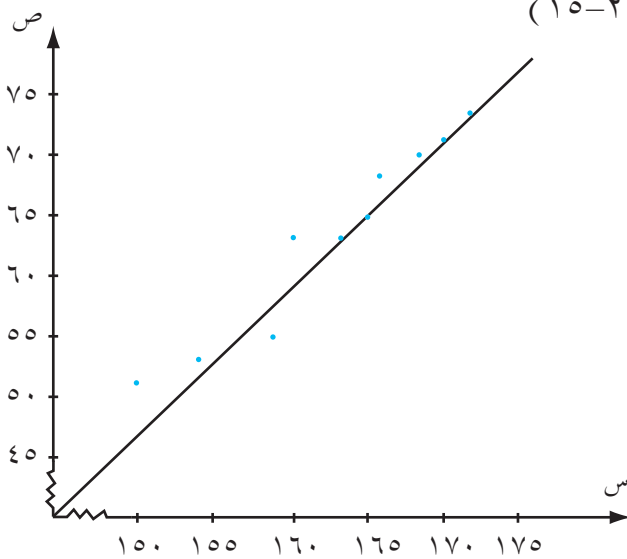
الشكل (٣-٢) يوحي بعدم وجود ارتباط بين المتغيرين  $S$  ،  $V$  .

### مثال (١٠ - ٢)

تم اختيار عشرة طلاب من طلبة الصف الثالث الثانوي عشوائياً، وسُئل كل طالب عن طوله بالسنتيمترات، ووزنه بالكيلو جرامات فكانت إجاباتهم كما هي موضحة في الجدول (١٥-٢) :

١٧٢	١٦٦	١٦٠	١٦٥	١٥٨	١٦٣	١٥٤	١٦٨	١٧٠	١٥٠	الطول بـ (سم)
٧٣	٦٧	٦٣	٦٥	٥٥	٦٣	٥٣	٧٠	٧٢	٥٢	الوزن بـ (كجم)

جدول (١٥-٢)



شکل (٢-٤)

ارسم شكل الانتشار، وبين نوع الارتباط بين الطول والوزن .

### الحل :

نرمز للطول بالرمز ( $S$ ) ، ونرمز للوزن بالرمز ( $V$ ) ، ونمثل ذلك بالشكل (٢-٤) ؛ نلاحظ أن :  
نوع الارتباط طردي (موجب) ؛ لأن قيم ( $V$ ) تزيد بزيادة قيم ( $S$ ) . كما أن الارتباط قوي لأن نقاط الانتشار قريبة من المستقيم .

## الارتباط الخطي :

يقصد بالارتباط الخطي بين متغيرين أو ظاهرتين ، وجود علاقة بينهما بحيث إذا تغيرت إحداهما في اتجاه معين فإن الثانية تميل إلى التغير في الاتجاه نفسه أو الاتجاه المضاد وقد لا توجد أية علاقة بين متغيرين مثل الذكاء ولون العيون ، أو الذكاء والنوع . وانعدام العلاقة بين المتغيرين يعني أن معرفتنا في اتجاه أحد المتغيرين وقيمته لا تساعدنا بأي حال من الأحوال على التنبؤ في اتجاه أو قيمة المتغير الآخر . وعادة ما تقاس درجة الارتباط بين متغيرين بمقياس إحصائي يسمى معامل الارتباط ويرمز له بالرمز (  $r$  ) (  $r \in [-1, 1]$  ) .

فإذا كانت قيمة  $r = 1$  فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين علاقة طردية تامة (ارتباط خطي موجب قوي) .  
وإذا كانت قيمة  $r = -1$  فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين علاقة عكسية تامة (ارتباط خطي سالب قوي) .  
وإذا كانت قيمة  $r = 0$  فهذا يعني عدم وجود ارتباط بين المتغيرين .  
نستنتج مما سبق أن معاملات الارتباط تفيد في :

١- تحديد مدى قوة الارتباط بين متغيرين (قوية ، ضعيفة ، منعدمة) .

٢- تحديد اتجاه العلاقة بين المتغيرين (طردية ، عكسية) .

٣- تعطى مؤشرات لإمكانية تقدير المتغير بدلالة الآخر .

٤- تُعد الأساس في دراسة تحليل علاقات السببية .

وهناك أنواع عديدة لمعاملات الارتباط وسوف نتعرف هنا على نوعين هما : معامل ارتباط بيرسون ، ومعامل ارتباط سبيرمان .

## معامل ارتباط بيرسون :

يُعدُّ معامل ارتباط بيرسون من أكثر معاملات الارتباط شيوعاً ، واستخداماً ؛ ولحساب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين مثل  $S$  ،  $V$  نتبع الخطوات التالية :

١- إيجاد  $\bar{S}$  (المتوسط الحسابي لقيم  $S$ ) ،  $\bar{V}$  (المتوسط الحسابي لقيم  $V$ )

٢- إيجاد  $\frac{\sum (S - \bar{S})(V - \bar{V})}{n}$  (  $\bar{S} - S$  ) (  $\bar{V} - V$  ) .

٣- إيجاد  $\sigma_S$  (الانحراف المعياري لقيم  $S$ ) ،  $\sigma_V$  (الانحراف المعياري لقيم  $V$ ) .

٤- نحسب معامل الارتباط ( $r$ ) من العلاقة :

$$r = \frac{\frac{\sum (S - \bar{S})(V - \bar{V})}{n}}{\sigma_S \times \sigma_V} \times \frac{1}{1 - \rho}$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون بيرسون للارتباط كما يمكن كتابتها بالصورة :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})(v_i - \bar{v})}{\sqrt{[\sum_{i=1}^n (s_i - \bar{s})^2][\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2]}}$$

كما يمكن حساب معامل ارتباط بيرسون من القيم الأصلية للمتغيرين  $s$  ،  $v$  بالعلاقة :

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n s_i v_i - n \bar{s} \bar{v}}{\sqrt{[\sum_{i=1}^n s_i^2 - n \bar{s}^2][\sum_{i=1}^n v_i^2 - n \bar{v}^2]}}$$

### مثال (٢ - ١١)

فسر درجة الارتباط ونوعه بين المتغيرين  $s$  ،  $v$  في كل من الحالات الآتية :

- أ)  $r = ٠,٨٨$  .      ب)  $r = -٠,٨٣$  .      ج)  $r = ٠,٢٥$  .  
 د)  $r =$  صفر .      هـ)  $r = -٠,٥٦$  .      و)  $r = ٠,٦٢$  .

### الحل :

بملاحظة قيمة معامل الارتباط في كل حالة نجد أن :

- أ)  $r = ٠,٨٨$  الارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط قوي .  
 ب)  $r = -٠,٨٣$  الارتباط عكسي (سالب)، وهو ارتباط قوي .  
 ج)  $r = ٠,٢٥$  الارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط ضعيف .  
 د)  $r =$  صفر لا يوجد ارتباط بين المتغيرين .  
 هـ)  $r = -٠,٥٦$  ارتباط عكسي (سالب)، وهو ارتباط متوسط .  
 و)  $r = ٠,٦٢$  ارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط متوسط .

### مثال (٢ - ١٢)

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين  $s$  ،  $v$  من بيانات الجدول (٢-١٦) :

٩٥	٩٠	٩٠	٥٥	٦١	٨٥	٧٠	س
٩٤	٩٢	٨٨	٥٨	٦٣	٨٢	٧٥	ص

جدول (٢-١٦)

## الحل :

$$\cdot 78 = \frac{546}{7} = \frac{\text{مجد} \frac{3}{1} \text{س ر}}{\text{د}} = \bar{\text{س}}$$

$$\cdot 79 \approx \frac{552}{7} = \frac{\text{مجد} \frac{3}{1} \text{ص ر}}{\text{د}} = \bar{\text{ص}}$$

ولحساب مجد (س ر - س) (ص ر - ص) نكوّن الجدول (١٧-٢) التالي :

س	ص	س ر - س	س ر - س	ص ر - ص	ص ر - ص	(س ر - س)(ص ر - ص)
٧٠	٧٥	٨-	٦٤	٤-	١٦	٣٢
٨٥	٨٢	٧	٤٩	٣	٩	٢١
٦١	٦٣	١٧-	٢٨٩	١٦-	٢٥٦	٢٧٢
٥٥	٥٨	٢٣-	٥٢٩	٢١-	٤٤١	٤٨٣
٩٠	٨٨	١٢	١٤٤	٩	٨١	١٠٨
٩٠	٩٢	١٢	١٤٤	١٣	١٦٩	١٥٦
٩٥	٩٤	١٧	٢٨٩	١٥	٢٢٥	٢٥٥
المجموع			١٥٠٨		١١٩٧	١٣٢٧

جدول (١٧-٢)

$$ع ر = \sqrt{\frac{\text{مجد} \frac{3}{1} (\text{س ر} - \text{س})^2}{1 - \text{د}}} = \sqrt{\frac{1508}{6}} \approx 16$$

$$ع ص = \sqrt{\frac{\text{مجد} \frac{3}{1} (\text{ص ر} - \text{ص})^2}{1 - \text{د}}} = \sqrt{\frac{1197}{6}} \approx 14$$

$$\cdot 99 \approx \frac{1327}{14 \times 16 \times 6} = \frac{\text{مجد} \frac{3}{1} (\text{س ر} - \text{س})(\text{ص ر} - \text{ص})}{ع ر \times ع ص} \times \frac{1}{1 - \text{د}} = \text{ر}$$

## مثال (١٣-٢)

أوجد معامل ارتباط بيرسون من القيم الأصلية للمتغيرين س ، ص والموضحة بالجدول (١٨-٢) التالي :

س	١	٢	٣	٤	٦	٨	٩	١١	١٤
ص	١	٢	٤	٤	٤	٥	٧	٨	٩

جدول (١٨-٢)

## الحل :

نكون الجدول (٢-١٩) كما يلي :

س <sub>١</sub> × ص <sub>١</sub>	ص <sub>٢</sub>	س <sub>٢</sub>	ص <sub>٣</sub>	س <sub>٣</sub>	المجموع
١	١	١	١	١	
٦	٤	٩	٢	٣	
١٦	١٦	١٦	٤	٤	
٢٤	١٦	٣٦	٤	٦	
٤٠	٢٥	٦٤	٥	٨	
٦٣	٤٩	٨١	٧	٩	
٨٨	٦٤	١٢١	٨	١١	
١٢٦	٨١	١٩٦	٩	١٤	
٣٦٤	٢٥٦	٥٢٤	٤٠	٥٦	

جدول (٢-١٩)

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{S_i}{n} \times \frac{V_i}{n} - \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{n} \times \frac{\sum_{i=1}^n V_i}{n}}{\sqrt{\left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{S_i}{n} \right)^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n S_i \right)^2}{n} \right] \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{V_i}{n} \right)^2 - \frac{\left( \sum_{i=1}^n V_i \right)^2}{n} \right]}}$$

$$= \frac{(40 \times 56) - 364 \times 8}{\sqrt{[2(40) - 256 \times 8] [2(56) - 524 \times 8]}}$$

$$= \frac{672}{687,8} = \frac{2240 - 2912}{(1600 - 2048)(3136 - 4192)}$$

$$\approx 0,98$$

### معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

يعرف معامل سبيرمان على أنه ارتباط بين متغيرين كل منهما يقع على مقياس رتبي مثل معامل الارتباط بين رتبة مستوى النشاط الرياضي (س) لطالب في مجموعة معينة، ورتبة مستوى نشاطه الفني (ص) في المجموعة نفسها .

ونرمز لهذا المعامل بالرمز (  $r_s$  ) للتمييز بينه وبين معامل بيرسون .  
ولحساب معامل ارتباط سبيرمان نستخدم العلاقة :



$$r = \frac{6 \text{ مج ف } 2}{5(2-1)} - 1$$

حيث ف الفرق بين رتبة س ، رتبة ص ، د عدد المشاهدات .  
ولتسهيل حساب معامل ارتباط الرتب بين قيم س ، ص نرتب قيم كل من س ، ص تصاعدياً أو تنازلياً .

### مثال (٢ - ١٤)

أوجد معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين المتغيرين س ، ص والموضح بياناتهما في الجدول (٢٠-٢) التالي :

١	٥	٦	٨	٧	٤	س
٨	٤	٧	٧	٦	٢	ص

جدول (٢٠-٢)

### الحل :

نكون جدول (٢١-٢) كما يلي :

رتبة ص	قيم ص مرتبة تصاعدياً	رتبة س	قيم س مرتبة تصاعدياً	مسلسل
١	٢	١	١	١
٢	٤	٢	٤	٢
٣	٦	٣	٥	٣
٤,٥	٧	٤	٦	٤
٤,٥	٧	٥	٧	٥
٦	٨	٦	٨	٦

جدول (٢١-٢)

نلاحظ أنه عند ترتيب قيم ص أن القيمة ٧ تكررت مرتين ، ولإيجاد رتبة القيمة ٧ نقسم مجموع الأرقام

المتسلسلة المقابلة للعدد ٧ المتكررة على عدد التكرارات وعليه فإن رتبة القيمة ٧ هي :  $4,5 = \frac{5+4}{2}$  .

ثم نكون الجدول (٢٢-٢) التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س - رتبة ص	ف <sup>٢</sup>
٤	٢	٢	١	١	١
٧	٦	٥	٣	٢	٤
٨	٧	٦	٤,٥	١,٥	٢,٢٥
٦	٧	٤	٤,٥	٠,٥-	٠,٢٥
٥	٤	٣	٢	١	١
١	٨	١	٦	٥-	٢٥
المجموع					٣٣,٥٠

جدول (٢ - ٢٢)

$$r = 1 - \frac{6 \text{ مج ف}}{(1 - 2) 6} - 1 = \frac{33,50 \times 6}{(1 - 36) 6} - 1 = \frac{201}{210} - 1 = -0,047$$

يتضح أن معامل الارتباط للرتب بين س، ص ضعيف جداً .

### مثال (٢ - ١٥)

الجدول (٢ - ٢٣) يوضح درجات عشرة طلاب في مادتي الجغرافية (س)، والإحصاء (ص). علماً بأن الدرجة من عشرين .

١٦	١٠	٥	١٧	٩	٨	١٨	١٢	١٨	١٩	درجات الجغرافية (س)
١٥	٨	٨	١٦	١٣	١٢	١٦	١٢	١٨	١٧	درجات الإحصاء (ص)

جدول (٢ - ٢٣)

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين درجات الجغرافيا ودرجات الإحصاء، للطلاب باستخدام الترتيب التنازلي للدرجات .

### الحل :

نرتب قيم س، ص تنازلياً كما في الجدول (٢ - ٢٤) التالي :

مسلسل	قيم س	رتبة س	قيم ص	رتبة ص
١	١٩	١	١٨	١
٢	١٨	٢,٥	١٧	٢
٣	١٨	٢,٥	١٦	٣,٥
٤	١٧	٤	١٦	٣,٥
٥	١٦	٥	١٥	٥
٦	١٢	٦	١٣	٦
٧	١٠	٧	١٢	٧,٥
٨	٩	٨	١٢	٧,٥
٩	٨	٩	٨	٩,٥
١٠	٥	١٠	٨	٩,٥

جدول (٢-٢٤)

ثم نكوّن الجدول (٢-٢٥) التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = (رتبة س - رتبة ص)	ف <sup>٢</sup>
١٩	١٧	١	٢	١-	١
١٨	١٨	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٢	٦	٧,٥	١,٥-	٢,٢٥
١٨	١٦	٢,٥	٣,٥	١-	١
٨	١٢	٩	٧,٥	١,٥	٢,٢٥
٩	١٣	٨	٦	٢	٤
١٧	١٦	٤	٣,٥	٠,٥	٠,٢٥
٥	٨	١٠	٩,٥	٠,٥	٠,٢٥
١٠	٨	٧	٩,٥	٢,٥-	٦,٢٥
١٦	١٥	٥	٥	٠	٠
المجموع	١٩,٥				

$$١ = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ ف}}{٥(١ - ٢)} ، ١٠ = ٥$$

$$١ = ١ - \frac{١٩,٥ \times ٦}{(١ - ١٠٠) ١٠} - ١ = \frac{١١٧}{٩٩٠} - ١ = ٠,١٢ - ١ = -٠,٨٨$$

## تمارين ومسائل (٢-٢)

[١] الجدول (٢٦-٢) التالي يمثل درجات ٨ طلاب في اختباري مادتي الرياضيات ، واللغة العربية .

١٠	١٩	١٨	١٤	١٧	١٥	١٢	٧	درجات الرياضيات
١٢	١٧	١٧	١٣	١٩	٩	١٤	١٠	درجات اللغة العربية

الجدول (٢٦-٢)

ارسم شكل الانتشار، وبين نوع الارتباط بين درجات الطلبة في كل من هاتين المادتين .

[٢] فسر طبيعة الارتباط بين المتغيرين س ، ص لكل حالة مما يأتي :

أ (٠,٩٤ . ب -٠,٨٦ . ج ٠,٥٢ . د -٠,٢٢ . هـ ٠,٣٢ . و) صفر .

[٣] الجدول (٢٧-٢) التالي يمثل عشرة طلاب في كل من مادتي الرياضيات والعلوم :

٧٨	٦٥	٦٢	٥٥	٥٣	٢٤	٤٢	٤٨	٤٩	٥٤	الرياضيات (س)
٨١	٦٧	٥٨	٥٥	٥٣	٢٨	٣٢	٥٢	٤٧	٥٧	العلوم (ص)

الجدول (٢٧-٢)

أ) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س ، ص . ب) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص .

[٤] الجدول (٢٨-٢) التالي يوضح العمر (س) وضغط الدم (ص) لثمانية أشخاص .

٤٢	٣٨	٤٩	٥٥	٦٣	٧٢	٤٢	٥٦	العمر (س)
١١٠	١٠٥	١١٥	١٥٠	١١٨	١٦٠	١٢٥	١٤٧	ضغط الدم (ص)

الجدول (٢٨-٢)

أ) احسب معامل ارتباط بيرسون س ، ص . ب) احسب معامل سبيرمان للترتيب بين س ، ص .

[٥] الجدول (٢٩-٢) التالي يوضح أوزان عينة مكونة من ٨ آباء (س) وأكبر الأبناء (ص) .

٧٥	٦٩	٨٢	٧٤	٦٣	٧٢	٦٥	٦٦	الوزن (س) للأب
٥٩	٥٥	٦٢	٥٨	٤٩	٦٠	٥٠	٤٧	الوزن (ص) للأب

الجدول (٢٩-٢)

أ) احسب معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص . ب) احسب معامل ارتباط سبيرمان للترتيب بين س ، ص .

[٦] أوجد معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط سبيرمان للترتيب لقيم المشاهدات التالية :

١٦	١٤	١٢	١٠	٨	٤	س
١	٣	٥	٧	٨	١٢	ص

جدول (٣٠-٢)

١٤	١٢	١٠	٧	٦	٤	س
١٠	٨	١٢	٨	٤	٥	ص

جدول (٣١-٢)

تعلم أن المعادلة  $ص = ٢س + ب$  تمثل خطأً مستقيماً ، وأن (٢) يمثل ميل هذا المستقيم ، أي ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن (ب) تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات ونسمي هذه المعادلة **معادلة خط الانحدار** ( أو للتبسيط **معادلة الانحدار** ) .

### مفهوم الانحدار :

من أهم أغراض دراسة الانحدار هو التنبؤ بقيمة متغير ما بمعرفة قيمة متغير آخر . يسمى المتغير المعلوم بالمتغير المستقل والمتغير المراد معرفة قيمته بالمتغير التابع ونرمز عادة للمتغيرين بالرمز  $س$  ،  $ص$  .

### الانحدار الخطي :

في الانحدار الخطي يرتبط المتغيرين  $س$  ،  $ص$  بعلاقة خطية، ويتم التنبؤ بأحدهما من خلال معرفة الآخر . إذا أردنا التنبؤ بقيمة (ص) من خلال معرفة قيمة (س) نستخدم المعادلة الخطية :  $ص = ٢س + ب$  ، وتسمى هذه المعادلة معادلة انحدار  $ص$  على  $س$  أو معادلة انحدار  $ص$  بدلالة  $س$  . أما إذا أردنا التنبؤ بقيمة  $س$  من خلال معرفة قيمة  $ص$  نستخدم المعادلة الخطية  $س = ٢ص + ب$  ، وتسمى هذه المعادلة معادلة انحدار  $س$  على  $ص$  أو معادلة انحدار  $س$  بدلالة  $ص$  .

لاحظ في معادلة الانحدار  $ص = ٢س + ب$  ، أو  $س = ٢ص + ب$  يتطلب منا حساب الثابتين  $٢$  ،  $ب$  على أساس البيانات المتوفرة للمتغيرين  $س$  ،  $ص$  . ويسمى الثابتين  $٢$  ،  $ب$  بمعاملَي الانحدار . ومما يجدر الإشارة إليه أن استخراج قيمة  $٢$  شرط مسبق لاستخراج قيمة  $ب$  .

في حالة التنبؤ بقيمة (ص) من خلال قيمة  $س$  فإن :

$$٢ = \frac{\sum_{r=1}^n (س_r \times ص_r) - (\sum_{r=1}^n س_r) (\sum_{r=1}^n ص_r)}{\sum_{r=1}^n س_r^2 - (\sum_{r=1}^n س_r)^2}$$

$$ب = \bar{ص} - ٢ \bar{س}$$

وفي حالة التنبؤ بقيمة (س) من خلال قيمة  $ص$  ، فإن :

$$٢ = \frac{\sum_{r=1}^n (س_r \times ص_r) - (\sum_{r=1}^n س_r) (\sum_{r=1}^n ص_r)}{\sum_{r=1}^n ص_r^2 - (\sum_{r=1}^n ص_r)^2}$$

$$ب = \bar{س} - ٢ \bar{ص}$$

### العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط :

العلاقة بين معامل انحدار  $ص$  على  $س$  ومعامل الارتباط للمتغيرين  $س$  ،  $ص$  يعرف بالعلاقة :

$$m = \frac{E}{E_s} \times m_s$$

- حيث  $m$  معامل انحدار  $v$  على  $s$  ،  $m_s$  معامل الارتباط بين  $s$  ،  $v$  .  
 $E_s$  الانحراف المعياري لقيم  $v$  ،  $E$  الانحراف المعياري لقيم  $s$  .

- في حالة انحدار  $s$  على  $v$  ، فإن :  $m_s = \frac{E_s}{E} \times m$

### مثال (٢-١٦)

- إذا كانت  $\bar{s} = 70$  ،  $E_s = 15$  ،  $\bar{v} = 80$  ،  $E_v = 12$  ،  $m = 0,7$  ،  
 اكتب معادلة انحدار  $v$  على  $s$  ، ثم أوجد قيمة  $v$  عندما  $s = 60$  .

### الحل :

معادلة انحدار  $v$  على  $s$  هي :  $v = m_s + b$

في حالة انحدار  $v$  على  $s$  ؛ فإن :  $m = \frac{E_v}{E_s} \times m_s = 0,7 \times \frac{12}{15} = 0,56$

$$b = \bar{v} - m_s \bar{s} = 80 - 0,56 \times 70 = 80 - 39,2 = 40,8$$

∴ معادلة انحدار  $v$  على  $s$  هي :

$$v = m_s + b = 0,56s + 40,8$$

$$\therefore v = 0,56 \times 60 + 40,8 = 74,4$$

### مثال (٢-١٧)

- إذا كانت  $\bar{s} = 20$  ،  $\bar{v} = 25$  ،  $E_s = 8$  ،  $E_v = 5$  ،  $m = 0,8$  ،  
 اكتب معادلة انحدار  $s$  على  $v$  ، ثم أوجد قيمة  $s$  عندما  $v = 30$  .

### الحل :

معادلة انحدار  $s$  على  $v$  هي :

$$s = m_s v + b$$

في حالة انحدار  $s$  على  $v$  فإن :  $m_s = \frac{E_s}{E_v} \times m = 0,8 \times \frac{8}{5} = 1,28$

$$b = \bar{s} - m_s \bar{v} = 20 - 1,28 \times 25 = 20 - 32 = -12$$

∴ معادلة انحدار  $s$  على  $v$  هي :

$$\begin{aligned} \text{س} &= \text{ص} + \text{ب} \quad , \quad 1,28 = \text{ا} \quad , \quad \text{ص} = 30 \quad , \quad \text{ب} = 12 \\ \text{س} &= 26,4 = (12) + 30 \times 1,28 \end{aligned}$$

### مثال (٢ - ١٨)

إذا كانت درجات خمسة طلاب في مادتي الكيمياء والفيزياء معطاة بالجدول (٢-٣٢) التالي ، علماً بأن الدرجات من عشرين :

درجة الكيمياء (س)	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
درجة الفيزياء (ص)	١٤	١٣	١٤	١٨	١٩

جدول (٢-٣٢)

المطلوب إيجاد :

- معادلة انحدار ص على س .
- معادلة انحدار س على ص .
- أوجد درجة الطالب خالد في مادة الكيمياء إذا كانت درجته في الفيزياء ١٠ درجات .
- أوجد درجة الطالبة ليلى في مادة الفيزياء إذا كانت درجتها في الكيمياء ١٤ درجة .

### الحل :

أولاً- نكون الجدول (٢-٣٣) التالي :

درجة الكيمياء (س)	درجة الفيزياء (ص)	س × ص	س <sup>٢</sup>	ص <sup>٢</sup>
١٥	١٤	٢١٠	٢٢٥	١٩٦
١٦	١٣	٢٠٨	٢٥٦	١٦٩
١٧	١٤	٢٣٨	٢٨٩	١٩٦
١٨	١٨	٣٢٤	٣٢٤	٣٢٤
١٩	١٩	٣٦١	٣٦١	٣٦١
٨٥	٧٨	١٣٤١	١٤٥٥	١٢٤٦

جدول (٢-٣٣)

$$\therefore \bar{س} = \frac{٨٥}{٥} = ١٧ \quad , \quad \bar{ص} = \frac{٧٨}{٥} = ١٥,٦$$

أ) في حالة انحدار ص على س فإن :

$$\frac{2}{\text{مر}} \text{مجم} - \text{ص} \text{مر} = \frac{2}{\text{مر}} (\text{مجم} \text{س} \text{مر}) - \text{ص} \text{مر}$$

$$1,5 = \frac{6630 - 6700}{7220 - 7270} = \frac{78 \times 85 - 1341 \times 5}{85 \times 85 - 1455 \times 5}$$

$$ب = \bar{\text{ص}} - \bar{\text{س}} = 15,6 - 17 \times 1,5 = 9,9$$

معادلة انحدار ص على س هي :

$$\text{ص} = \bar{\text{س}} + \text{ب} \quad \leftarrow \quad \text{ص} = 1,5 \text{س} - 9,9$$

(ب) في حالة انحدار س على ص فإن :

$$\frac{2}{\text{مر}} \text{مجم} - \text{ص} \text{مر} = \frac{2}{\text{مر}} (\text{مجم} \text{س} \text{مر}) - \text{ص} \text{مر}$$

$$0,5 = \frac{75}{146} = \frac{78 \times 85 - 1341 \times 5}{78 \times 78 - 1246 \times 5}$$

$$ب = \bar{\text{س}} - \bar{\text{ص}} = 17 - 15,6 \times 0,5 = 9,2$$

معادلة انحدار س على ص هي :

$$\text{س} = \bar{\text{ص}} + \text{ب} \quad \leftarrow \quad \text{س} = 0,5 \text{ص} + 9,2$$

(ج) عندما تكون درجة خالد في الفيزياء (ص) 10 درجات ؛ فإن درجته في الكيمياء (س)

$$\text{س} = 0,5 \text{ص} + 9,2 = 9,2 + 10 \times 0,5 = 14,2 \text{ درجة}$$

(د) عندما تكون درجة ليلى في الكيمياء (س) 14 ؛ فإن درجتها في الفيزياء (ص)

$$\text{ص} = 1,5 \text{س} - 9,9$$

$$= 11,1 - 14 \times 1,5 = 9,9$$

## تمارين ومسائل (٢-٣)

[١] إذا علمت أن  $\bar{\text{س}} = 50$  ،  $\bar{\text{ص}} = 100$  ،  $\text{ع} \text{س} = 15$  ،  $\text{ع} \text{ص} = 20$  ،  $\text{مر} = 70$  .

احسب :

(أ) القيمة المتوقعة لـ ص عندما تكون قيمة س = 82 .

(ب) القيمة المتوقعة لـ س عندما تكون قيمة ص = 75 .



[ ٢ ] ليكن لدينا البيانات التالية :

١١	٨	٦	٥	٤	٢	س
٥	٧	٨	١٠	١٢	١٨	ص

جدول (٢-٣٤)

أوجد معادلة انحدار ص على س ثم أوجد قيمة ص عندما  $s = 13$ 

[ ٣ ] رغبت إحدى الشركات في التعريف على جودة إنتاجها من السمن فسحبت عينة عشوائية (س) من علب السمن وتم فحصها وتحديد العيوب الموجودة بكل علبة (ص) فكانت البيانات المبينة في الجدول (٢-٣٥) التالي :

١٦	٢٠	٢٤	٣٦	٤٨	٦٠	عدد العلب (س)
٠	٢	٢	٣	٥	٦	عدد العيوب (ص)

جدول (٢-٣٥)

أوجد :

أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) قدر عدد العيوب الممكن ظهورها في عدد ١٥٠ علبة من السمن .

[ ٤ ] قام مدرس بإجراء اختبارين لعشرة طلاب الأول في الفلسفة (س) والثاني في المنطق (ص) ، وكانت درجات الاختبارين كما هي مبينة في الجدول (٢-٣٦) التالي :

٦	٥	٨	٨	٧	٦	١٠	٤	٩	٧	الاختبار الأول (س)
٨	٧	٧	١٠	٥	٨	١٠	٦	٨	٦	الاختبار الثاني (ص)

الجدول (٢-٣٦)

أوجد : أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) معادلة انحدار س على ص .

ج) معامل الارتباط لانحدار ص على س .

[ ٥ ] الجدول (٢-٣٧) التالي يوضح العمر (س) ، وضغط الدم (ص) لثمانية أشخاص :

٤٩	٦٠	٣٨	٦٨	٦٣	٤٢	٧٢	٥٦	العمر (س)
١٣٨	١٤٢	١١٥	١٤٧	١٤٥	١٢٥	١٤٠	١٥٥	ضغط الدم (ص)

الجدول (٢-٣٧)

- أوجد : أ ) معادلة انحدار ص على س .  
ب ) قدر ضغط الدم لشخص عمره ٥٣ سنة .  
[ ٦ ] ليكن لدينا الجدول (٢-٣٨) التالي :

٢	٤	٦	٧	٨	٨	٩	١٠	١٤	١٥	
١٢	١٤	٩	١٠	٨	٧	٨	٤	٦	٤	

جدول (٢-٣٨)

- أوجد :
- أ ) معامل ارتباط بيرسون س ، ص .  
ب ) معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين س ، ص .  
ج ) معامل انحدار ص على س .  
د ) معامل انحدار س على ص .

## التكامل غير المحدد

١ - ٣

تعلم أن هناك عمليات متعاكسة مثل الطرح والجمع ، والقسمة والضرب ، وبالمثل فإن هناك عملية عكسية للاشتقاق وهي عملية التكامل .

وعلى هذا الأساس فإننا في عملية التكامل نبحث عن الدالة الأصلية التي أعطي لنا مشتقتها الأولى .

فمثلاً : إذا كان  $ل (س) = ٣س + ٥$  ،  $د (س) = ٣س^٢$  ، فإن  $\frac{د}{س} = ل (س) = ٣س^٢$  .

أي أن :  $ل (س) = ٣س^٢$  .

∴  $ل (س) = د (س)$  .

وفي هذه الحالة نقول إن  $ل (س)$  دالة أصلية للدالة  $د (س)$  .

## تعريف (٣-١)

إذا كانت الدالة  $د (س)$  معرفة على الفترة  $ف \supset ح$  ، فإن كل دالة  $ل$  تحقق العلاقة :  
 $ل (س) = د (س)$  ،  $ل \supset ف$  تسمى دالة أصلية أو « تكامل » للدالة  $د (س)$  على  $ف$   
 ونكتب ذلك بالصورة  $ل (س) = [د (س)] س$  .

ملاحظة :

- \* الصورة  $[د (س)] س$  تقرأ تكامل الدالة  $د (س)$  بالنسبة ل  $س$  .
- \* الرمز  $[$  علامة التكامل ،  $د (س)$  الدالة المكاملة ،  $س$  يحدد متغير التكامل .
- \* من التعريف يتضح أن الدالة  $ل$  متصلة، وقابلة للاشتقاق على  $ف$  .
- \* سنعتبر كل الدوال المراد تكاملها في هذا البند متصلة .

## تدريب (٣-١)

لتكن  $د (س) = ٣س^٢$  . ماهي الدالة الأصلية ل  $د (س)$  ؟

ستجد أن كلاً من الدوال التالية :

$ل_١ (س) = ٣س^٣$  ،  $ل_٢ (س) = ٣س + ١$  ،  $ل_٣ (س) = ٣س - ٥$  .

دوال أصلية للدالة  $د (س)$  لأن :  $ل_١ (س) = ل_٢ (س) = ل_٣ (س) = د (س)$

وفي الحقيقية لأي عدد حقيقي  $ث \supset ح$  نجد أن :

- ل (س) = س<sup>٣</sup> + ث هي دالة أصلية للدالة (د(س) .  
 أي أن: [ ٣ س<sup>٢</sup> و س = س<sup>٣</sup> + ث حيث العدد ث يسمى ثابت التكامل .

**مثال (٣ - ١)**

أوجد الدالة الأصلية لكل من الدوال الآتية :

- أ) د(س) = ٥ .      ب) د(س) = ٥ س<sup>٤</sup> .      ج) د(ع) = ع<sup>٣</sup> .

**الحل :**

أ) [ د(س) و س ] = ٥ و س = ٥ س + ث ؛ لأن  $\frac{٥}{٥} = (٥ س + ث) = ٥$

ب) [ ٥ س<sup>٤</sup> و س = ٥ س + ث ؛ لأن  $\frac{٥}{٥} = (٥ س + ث) = ٥ س<sup>٤</sup>$

ج) [ ٣ ع<sup>٣</sup> و ع = ع +  $\frac{٣ ع^٤}{٤}$  ؛ لأن  $\frac{٣ ع^٤}{٤} = (٣ ع + \frac{٣ ع^٤}{٤}) = ٣ ع$

وبناءً على ما سبق نقدم القاعدة التالية :

$$[ س^٣ و س = س + \frac{١+٣ س}{١+٣} ] \text{ حيث } ٣ \neq ١$$

فمثلاً : [ ٥ س<sup>٥</sup> و س = س +  $\frac{٥ س^٦}{٦}$  ،

$$[ ٣ س^٢ و س = س + \frac{١+٣ س}{١+٣} = س + \frac{٥ س^٢}{٥} = س + \frac{٢}{٥} س ]$$

**خواص التكامل :**

١ - [ د(س) و س = د(س) + ث

٢ - [  $\frac{٥}{٥} = د(س) و س = د(س)$

٣ - [ ١ د(س) و س = ١ د(س) و س ، ١ ∃ ح

٤ - [ (د<sub>١</sub>(س) ± د<sub>٢</sub>(س) ) و س = د<sub>١</sub>(س) و س ± د<sub>٢</sub>(س) و س ]

احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} \text{أ) } & \int (6s^2 - 2s + 5) ds \\ \text{ب) } & \int (3s^2 - 2s + 7) ds \\ \text{ج) } & \int (s^2 - \frac{3}{s} + \frac{5}{3s}) ds \end{aligned}$$

**الحل :**

أ) استناداً إلى قاعدة التكامل وإلى الخاصيتين : ٣ ، ٤ .

$$\begin{aligned} \int (6s^2 - 2s + 5) ds &= \int 6s^2 ds - \int 2s ds + \int 5 ds \\ &= 6 \times \frac{s^3}{3} - \frac{2s^2}{2} + 5s + C = 2s^3 - s^2 + 5s + C \\ \text{ب) } \int (3s^2 - 2s + 7) ds &= \int 3s^2 ds - \int 2s ds + \int 7 ds \\ &= 3 \times \frac{s^3}{3} - \frac{2s^2}{2} + 7s + C = s^3 - s^2 + 7s + C \\ \text{ج) } \int (s^2 - \frac{3}{s} + \frac{5}{3s}) ds &= \int s^2 ds - \int \frac{3}{s} ds + \int \frac{5}{3s} ds \\ &= \frac{s^3}{3} - 3 \ln|s| + \frac{5}{3} \ln|s| + C = \frac{s^3}{3} - \frac{2}{3} \ln|s| + C \end{aligned}$$

احسب التكاملات التالية :

$$\begin{aligned} \text{أ) } & \int (3 - 2s) ds \\ \text{ب) } & \int (\frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} - 2) ds \\ \text{ج) } & \int (\frac{\sqrt{s^3} + s^3 - 2s}{\sqrt{s}}) ds \end{aligned}$$

**الحل :**

$$\begin{aligned} \text{أ) } \int (3 - 2s) ds &= \int 3 ds - \int 2s ds = 3s - s^2 + C \\ \text{ب) } \int (\frac{1}{\sqrt{s}} + \sqrt{s} - 2) ds &= \int s^{-\frac{1}{2}} ds + \int s^{\frac{1}{2}} ds - \int 2 ds \\ &= 2s^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}s^{\frac{3}{2}} - 2s + C \\ \text{ج) } \int (\frac{\sqrt{s^3} + s^3 - 2s}{\sqrt{s}}) ds &= \int (\frac{s^{\frac{3}{2}} + s^3 - 2s}{s^{\frac{1}{2}}}) ds \\ &= \int (s + s^{\frac{5}{2}} - 2) ds = \frac{s^2}{2} + \frac{2}{7}s^{\frac{7}{2}} - 2s + C \end{aligned}$$

$$(ب) \quad [ (2س - س\frac{1}{2} + س\frac{1}{3}) ] = [ (س\sqrt{3} + س - 2س) ]$$

$$= \frac{2س^2}{2} - \frac{س\frac{1}{2} + 1}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{س\frac{1}{3} + 1}{1 + \frac{1}{3}} - 2س = \frac{2س^2}{2} - \frac{س\frac{2}{3} + 1}{\frac{3}{2}} + \frac{س\frac{2}{3} + 1}{\frac{4}{3}} - 2س =$$

$$(ج) \quad [ (س\sqrt{3} + س^3 - 2س) ] = [ (س\frac{1}{2} - 2س + 3س) ]$$

$$= [ (س^2 - 2س + 3س) ] = [ (س\frac{1}{2} - 2س + 3س) ] = \frac{س^2}{2} - \frac{2س}{2} + \frac{3س}{2} = \frac{س^2}{2} + \frac{س}{2} = \frac{س(س+1)}{2}$$

**مثال (٣ - ٤)**

أ) إذا علمت أن: د(س) = س + \frac{1}{س} ، فأوجد د(س) علماً أن منحنى الدالة يمر بالنقطة (٢، ٧).

ب) أوجد الدالة الأصلية و(س) للدالة د(س) = 2س + س - 1 إذا علمت أن: و(١) = ٥

**الحل:**

$$أ) \quad د(س) = د(س) = د(س) = [ (س + \frac{1}{س}) ] = [ (س + س^{-1}) ]$$

$$د(س) = \frac{2س}{2} + \frac{س^{-1}}{1} = \frac{2س}{2} + \frac{1}{س} = \frac{2س}{2} + \frac{1}{س}$$

• المنحنى يمر بالنقطة (٢، ٧) فهي تحقق معادلته:

$$7 = \frac{2(2)}{2} + \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$7 = \frac{5}{2} + \frac{1}{س} \Rightarrow \frac{14}{2} = \frac{5}{2} + \frac{2}{س} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{2}{س} \Rightarrow \frac{9}{2} = \frac{5-14}{2} = \frac{5}{2} - 7 = \frac{5}{2} - 7 = \frac{9}{2}$$

$$\therefore د(س) = \frac{1}{س} + 2س - 2$$

$$(ب) \quad و(س) = (س + ٢س - ١) \cdot س = \frac{٣س}{٣} + \frac{٢س}{٢} - س + س = \frac{٣س}{٣} + \frac{٢س}{٢} - س + س$$

$$\therefore و(١) = ٥$$

$$\therefore و(س) = \frac{١}{٣} + ١ - \frac{١}{٢} + س = \frac{١}{٣} + \frac{٢}{٢} - \frac{١}{٢} + س = \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} + س$$

$$\frac{٣١}{٦} = \frac{١+٣٠}{٦} = س \quad \leftarrow \quad \frac{١}{٦} + ٥ = س$$

$$\therefore و(س) = \frac{٣١}{٦} + س - \frac{٢س}{٢} + \frac{٣س}{٣} = \frac{٣١}{٦} + س - س + س = \frac{٣١}{٦} + س$$

### تمارين ومسائل (١-٣)

[١] أكمل الجدول (١-٣) التالي :

الدالة الأصلية (د) (س)	الدالة د(س)
$\frac{٥س}{٥} + س$	$س^٤$
$٥ + س + ٢س + ٣س$	...
...	$٥س^٤$
...	$س^٢ + ٧$
...	$٦س^٢ - ٤س + ٣$
$س - \frac{٥س}{٣} + ٢س$	...
...	$\frac{١}{٣} + \sqrt{س}$
$\frac{٢}{٣س} - \sqrt[٣]{س}$	...
...	$\frac{٢}{\sqrt{س}} + \frac{١}{\sqrt[٣]{س}}$

جدول (١-٣)

[٢] احسب التكاملات التالية :

$$(ب) \quad \int (س^٣ + ٣س^٢ + ٥) \cdot س \, ds$$

$$(أ) \quad \int (س^٣ - ٤س) \cdot س \, ds$$

$$(د) \quad \int \left( \frac{١}{٤ز} + \frac{٣}{٣ز} - ٥ \right) \cdot ز \, dz$$

$$(ج) \quad \int (ع^٣ - \frac{٥}{٢ع}) \cdot ع \, dc$$

- (هـ)  $[s(s^2 - 3s + \sqrt{s})]$  .  
 (و)  $[s(2\sqrt{s} - 3s^2)]$  .  
 (ز)  $[s(\sqrt{s} - s^3)]$  .  
 (ح)  $[s(1 + s^2 - \sqrt{s})]$  .  
 (ط)  $[s(2 + s^3)]$  .  
 (ي)  $[s(\frac{1}{s} - s^2)]$  .  
 (ك)  $[s(\frac{s^3 - s}{s^3})]$  .  
 (ل)  $[s(\frac{1}{s} - s^2)]$  .

[٣] أثبت أن الدالة  $ل(s) = s^3 - s$  دالة أصلية للدالة  $د(s) = \frac{s^3 - s}{s^4}$  .

[٤] إذا كانت  $\frac{s}{s} = -s^2 + 2$  ، فأوجد الدالة  $ص$  التي تمر بالنقطة  $(١, ٣)$  .

[٥] لتكن  $د(s) = s^3 - 2s^2 + s + ١$  ، ومنحنى الدالة  $د(s)$  يمر بالنقطة  $(٢, ٥)$  ؛ فأوجد  $د(s)$  .

[٦] إذا علمت أن  $ل(s)$  هي الدالة الأصلية للدالة  $د(s) = s^2 - s + ١$  ، وكان  $ل(١) = ٢$  .  
 أوجد الدالة  $ل(s)$  .

## التكامل المحدد

٣ - ٢

تعلم أن  $[د(s) و s]$  هو التكامل غير المحدد للدالة  $د(s)$  بالنسبة ل  $s$  بينما :

$[د(s) و s]$  يسمى بالتكامل المحدد للدالة  $د(s)$  بالنسبة ل  $s$  من  $s = ا$  إلى  $s = ب$  . لأن قيمته محدّدة ؛ ويسمى  $ا$  بالحد الأدنى للتكامل ،  $ب$  بالحد الأعلى للتكامل .

وتمكننا المبرهنة التالية من حساب التكامل المحدد عن طريق حساب قيمتي تكامل غير محدّد للدالة القابلة للتكامل على فترة التكامل .

### مبرهنة (٣-١)

إذا كانت الدالة  $د(s)$  متصلة على  $[ا, ب]$  ، وكان  $ل$  تكاملاً غير محدود ل  $د(s)$

على هذه الفترة فإن :  $[د(s) و s] = ل(ب) - ل(ا)$  .

ملاحظة :

جرت العادة أن نستخدم الرمز  $ل(s) | ا$  =  $ل(ب) - ل(ا)$  ، وعلى هذا فإن :

$$[د(s) و s] = ل(s) | ا$$

فمثلاً :

$$[s^3 و s] = \frac{s^4}{4} | ا = \frac{s^4(4)}{4} - \frac{s^4(0)}{4} = \frac{256}{4} - 0 = 64 ؛$$



$$\left(1 - \frac{3}{3}\right) \frac{2}{3} = \left[1 - \frac{3}{2}(9)\right] \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \frac{3}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad \frac{52}{3} = 26 \times \frac{2}{3} =$$

## خواص التكامل المحدد :

- (١) إذا تساوى حدي التكامل، فإن قيمة التكامل تساوي صفراً. أي أن :  $\int_a^a f(x) dx = 0$ .
- (٢) إذا بادلنا بين حدي التكامل فإن إشارة التكامل تتغير.
- أي أن :  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ .
- (٣) إذا وجد عدد  $c \in [a, b]$  وكان  $a < c < b$ ، فإن :
- $$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

## مثال (٣ - ٥)

احسب ما يلي :

$$(ب) \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx$$

$$(أ) \int_1^2 (x^2 - 2x + 4) dx$$

$$(ج) \int_{-2}^3 (x^2 - 2x + 3) dx$$

## الحل :

$$(أ) \int_1^2 (x^2 - 2x + 4) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 4x\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - 2 + 8\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 4\right) = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} + 1 - 4 + 4 = \frac{16}{3} - \frac{1}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

$$\frac{32}{3} - \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3} - \frac{32}{3} = 0$$

$$(ب) \int_1^2 (x^2 - 3x + 2) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right) \Big|_1^2 = \left(\frac{8}{3} - \frac{6}{2} + 4\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2\right) = \frac{8}{3} - 3 + 4 - \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} - 3 + 4 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{7}{3} - 3 + 4 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{7}{3} + \frac{3}{2} = \frac{14}{6} + \frac{9}{6} = \frac{23}{6}$$

$$(ج) \int_{-2}^3 (x^2 - 2x + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 3x\right) \Big|_{-2}^3 = \left(\frac{27}{3} - 9 + 9\right) - \left(\frac{-8}{3} - 4 - 6\right) = 9 - \left(\frac{-8}{3} - 10\right) = 9 + \frac{8}{3} + 10 = \frac{27}{3} + \frac{8}{3} + \frac{30}{3} = \frac{65}{3}$$

$$\frac{50}{3} = 14 + \frac{8}{3} = \left(6 - 8 - \frac{8}{3}\right) - 9 + 18 - \frac{27}{3} =$$

احسب التكاملات المحدودة التالية :

$$(أ) \int_1^5 \left( \frac{3}{\sqrt{s}} - \sqrt{s} \right) ds \quad (ب) \int_1^2 \left( \sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$$

$$(ج) \int_1^9 \left( \frac{z+2}{\sqrt{z}} \right) dz$$

**الحل :**

$$(أ) \int_1^5 \left( \frac{3}{\sqrt{s}} - \sqrt{s} \right) ds = \int_1^5 \left( \frac{3}{s^{1/2}} - s^{1/2} \right) ds = \left[ \frac{3}{1/2} s^{1/2} - \frac{2}{3} s^{3/2} \right]_1^5 = \left[ \frac{6}{\sqrt{s}} - \frac{2}{3} s \sqrt{s} \right]_1^5$$

$$= \left( \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{2}{3} \cdot 5 \sqrt{5} \right) - \left( \frac{6}{\sqrt{1}} - \frac{2}{3} \cdot 1 \sqrt{1} \right) = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - 6 + \frac{2}{3} = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - 5 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - 5 + \frac{2}{3} = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = \frac{6}{\sqrt{5}} - \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{13}{3}$$

$$(ب) \int_1^2 \left( \sqrt[3]{x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} \right) dx = \int_1^2 \left( x^{1/3} - 3x^{-1/3} \right) dx = \left[ \frac{3}{4} x^{4/3} - \frac{9}{2} x^{2/3} \right]_1^2 = \frac{3}{4} (2^{4/3}) - \frac{9}{2} (2^{2/3}) - \left( \frac{3}{4} (1^{4/3}) - \frac{9}{2} (1^{2/3}) \right)$$

$$= \left[ \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} - \frac{9}{2} \sqrt[3]{2} \right] - \left[ \frac{3}{4} - \frac{9}{2} \right] = \frac{3}{4} \cdot 2\sqrt[3]{2} - \frac{9}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = \frac{3}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{9}{2} \sqrt[3]{2} - \frac{3}{4} + \frac{9}{2} = -\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{15}{4}$$

$$= -\frac{3}{2} \sqrt[3]{2} + \frac{15}{4} = \frac{15}{4} - \frac{3}{2} \sqrt[3]{2}$$

$$(ج) \int_1^9 \left( \frac{z+2}{\sqrt{z}} \right) dz = \int_1^9 \left( z^{1/2} + 2z^{-1/2} \right) dz = \left[ \frac{2}{3} z^{3/2} + 4z^{1/2} \right]_1^9 = \frac{2}{3} (9^{3/2}) + 4(9^{1/2}) - \left( \frac{2}{3} (1^{3/2}) + 4(1^{1/2}) \right)$$

$$= \left[ \frac{2}{3} \cdot 27 + 4 \cdot 3 \right] - \left[ \frac{2}{3} + 4 \right] = \left[ 18 + 12 \right] - \left[ \frac{2}{3} + 4 \right] = 30 - \frac{14}{3} = \frac{90}{3} - \frac{14}{3} = \frac{76}{3}$$

$$= \frac{76}{3} = 25 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{76}{3} = 25 \frac{1}{3}$$

$$= \frac{76}{3} = 25 \frac{1}{3}$$

احسب ما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{أ) } \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) إذا كانت د(س) = } \\ \text{س}^3 \end{array} \right]_{-1}^3 \\ \text{ب) } \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq 2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right]_{-1}^3 \\ \text{ج) } \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \geq 2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right]_{-1}^3 \end{array} \right\}$$

$$\text{ب) } \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq 2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right]_{-1}^3$$

الحل :

أ) لاحظ أن د(س) معرفة بقاعدتين حول العدد ٢ أي أن: د(س) = س - ٩ عندما س ≥ ٢ ،

د(س) = س<sup>٢</sup> + ٣ عندما س ≤ ٢ ، وبالتالي نستخدم خاصية (٣) من خواص التكامل المحدود.

$$\therefore \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq 2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right]_{-1}^3 + \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} > 2 \\ \text{س} - 9 \end{array} \right]_{-1}^3 = \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq 2 \\ \text{س}^2 \end{array} \right]_{-1}^3 + \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} > 2 \\ \text{س} - 9 \end{array} \right]_{-1}^3$$

$$= \left( \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) - 9 + \frac{27}{3} + \left( \frac{1}{2} - 9 \right) - \frac{4}{2} - 18 = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} - 9 + \frac{27}{3} + \left( \frac{1}{2} - 9 \right) - \frac{4}{2} - 18$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{(-1)}{3} - 9 + 9 + \frac{1}{2} + 9 + 2 - 18 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} + 37 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} + 12 + \frac{1}{2} + 25 = 6 - \frac{1}{3} - 9 + 9 + \frac{1}{2} + 9 + 2 - 18 =$$

$$= \frac{20.9}{6} = \frac{16-225}{6} = \frac{16-3+222}{6} =$$

ب) نعيد تعريف الدالة |س + ١| كما يلي :

$$\left. \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq -1 \\ \text{س} + 1 \\ \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \geq -1 \\ \text{(س + 1) - } \end{array} \right\} = |س + 1|$$

$$\therefore \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq -1 \\ \text{س} + 1 \\ \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \geq -1 \\ \text{(س + 1) - } \end{array} \right]_{-1}^3 = \left[ \begin{array}{l} \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \leq -1 \\ \text{س} + 1 \\ \text{د(س) د(س) د(س) عندما } \text{س} \geq -1 \\ \text{(س + 1) - } \end{array} \right]_{-1}^3$$

$$= \left( \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} \right) - 2 + \frac{4}{2} + \left[ \left( 2 - \frac{4}{2} \right) - 1 - \frac{1}{2} \right] = \frac{3^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} - 2 + \frac{4}{2} + \left[ \left( 2 - \frac{4}{2} \right) - 1 - \frac{1}{2} \right]$$

$$= \frac{27}{3} - \frac{(-1)}{3} - 2 + 2 + \left( 0 - 1 - \frac{1}{2} \right) = 9 - \frac{1}{3} - 2 + 2 - 1 - \frac{1}{2} = 8 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = 8 - \frac{2}{6} - \frac{3}{6} = 8 - \frac{5}{6} = \frac{48}{6} - \frac{5}{6} = \frac{43}{6}$$

## تمارين ومسائل (٢-٣)

احسب التكاملات الآتية :

$$\text{[٢] } \int_1^4 (3س^2 - ٢س + ٤) دس$$

$$\text{[١] } \int_{-1}^3 س^٤ دس$$

$$[4] \int_{-2}^2 (1 + s^2) s \, ds$$

$$[3] \int_{-1}^3 (s^2 - s - 6) s \, ds$$

$$[6] \int_1^4 (s^3 - 3) s \, ds$$

$$[5] \int_{-2}^3 (s^2 - 3) s \, ds$$

$$[8] \int_1^9 \sqrt{x} \, dx$$

$$[7] \int_{-2}^2 (s^2 - 3) s \, ds$$

$$[10] \int_1^4 \left( \frac{1}{s^2} - \frac{8}{s^3} \right) s \, ds$$

$$[9] \int_1^9 \left( \sqrt[3]{z} - \frac{3}{\sqrt{z}} \right) z \, dz$$

$$[12] \int_1^3 (2 + e)(1 - e) \, dx$$

$$[11] \int_1^4 s(\sqrt{s} - 2) \, ds$$

$$[14] \int_1^4 s^2 \left( \frac{2}{s} - \sqrt{s} \right) \, ds$$

$$[13] \int_1^3 (s^2 + 1) s \, ds$$

$$[16] \int_{-2}^2 (s^3 - 3) s \, ds$$

$$[15] \int_1^4 (\sqrt[3]{s} - \sqrt{s}) s^2 \, ds$$

$$[17] \int_{-1}^4 (s) s \, ds \text{ بفرض أن } (s) = \begin{cases} s^2 + 3 & \text{عند } s \leq 3 \\ s - 15 & \text{عند } s \geq 3 \end{cases}$$

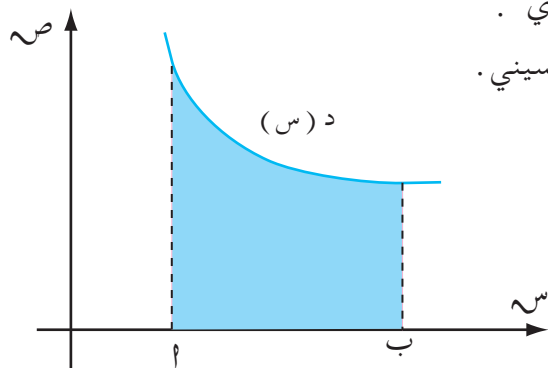
$$[19] \int_{-2}^4 |s^2 - 4| s \, ds$$

$$[18] \int_{-3}^3 |s + 1| s \, ds$$

## تطبيقات التكامل في المساحات

٣ - ٣

في هذا البند نتعرف على طريقة إيجاد مساحات مناطق مستوية باستخدام التكامل المحدد ، وهذا يتطلب



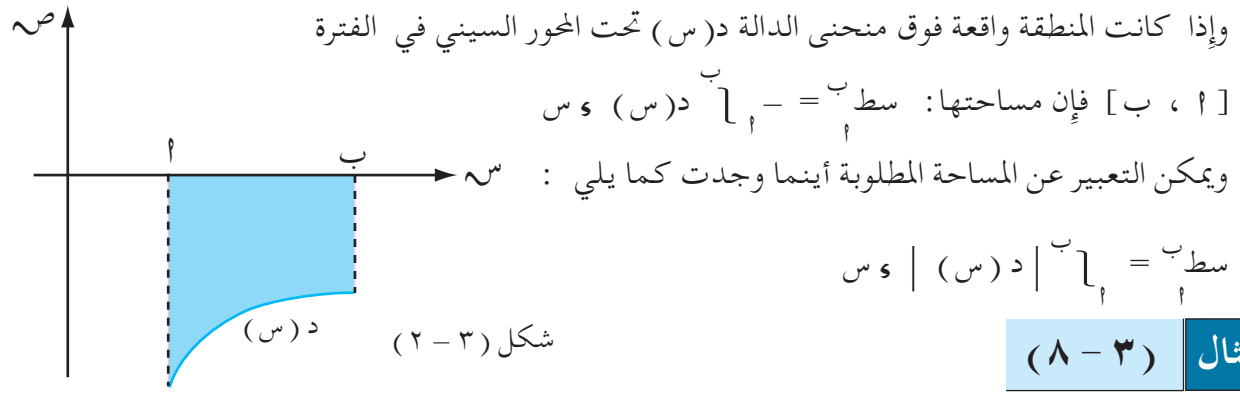
شكل (٣ - ١)

التعرف على موقع بيان الدالة بالنسبة للمحورين السيني والصادي .  
وتقتصر دراستنا هنا على المناطق المستوية فوق أو تحت المحور السيني .

فمثلاً : إذا كانت المنطقة واقعة تحت منحنى الدالة (س)

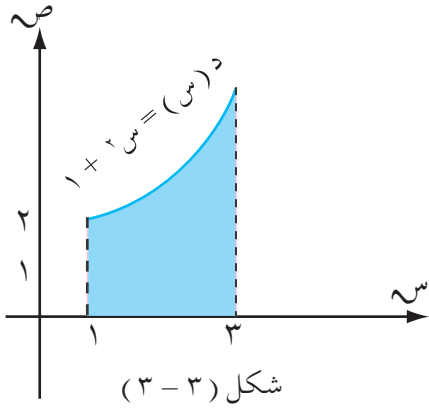
فوق المحور السيني في الفترة [ ا ، ب ]

$$\text{فإن المساحة : } \int_a^b (s) \, ds = \text{سطح } \int_a^b$$



احسب مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى  $v = s^2 + 1$  والمستقيمتين  $s = 1$ ،  $s = 3$ ، والمحور السيني.

**الحل:**



$$\text{سط}^b_a = \int_a^b |d(s)| ds$$

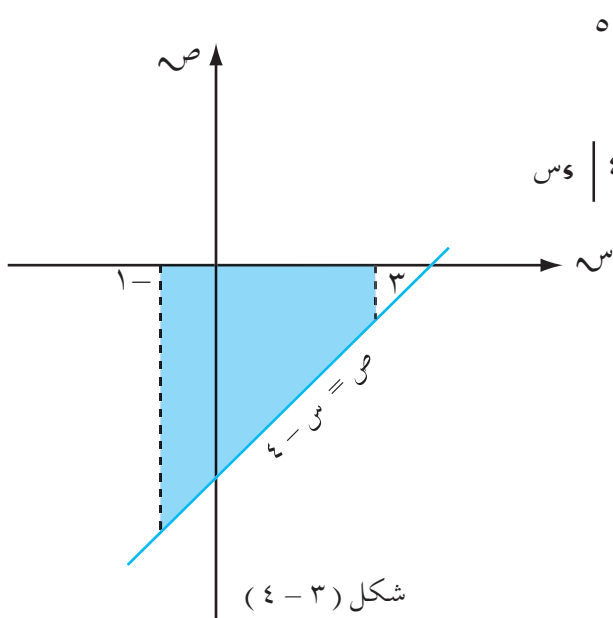
$$\therefore \text{سط}^3_1 = \int_1^3 |s^2 + 1| ds$$

$$= \left| \left(1 + \frac{1}{3}\right) - 3 + \frac{27}{3} \right| = \left| \left(s + \frac{s^3}{3}\right) \right|_1^3$$

$$= \left| 1 - \frac{1}{3} - 3 + 9 \right| = \left| \frac{1}{3} - 11 \right| = \left| 1 - \frac{1}{3} - 3 + 9 \right| = \frac{32}{3} \text{ وحدة مربعة.}$$

**مثال (٣-٩)**

احسب مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمستقيمتين  $v = s - 4$ ،  $v = -1$ ،  $s = 3$ ،  $v = 0$ .



**الحل:** عند  $s = -1$   $\leftarrow v = 5$

عند  $s = 3$   $\leftarrow v = -1$

$$\text{سط}^b_a = \int_a^b |d(s)| ds$$

$$\therefore \text{سط}^3_{-1} = \int_{-1}^3 |s - 4| ds$$

المنطقة واقعة تحت محور السينات.

$$\therefore \text{سط}^3_{-1} = \int_{-1}^3 (4 - s) ds$$

$$= \left[ \left(4s - \frac{s^2}{2}\right) \right]_{-1}^3$$

$$= \left[ \left(12 - \frac{9}{2}\right) - \left(-4 + \frac{1}{2}\right) \right] =$$

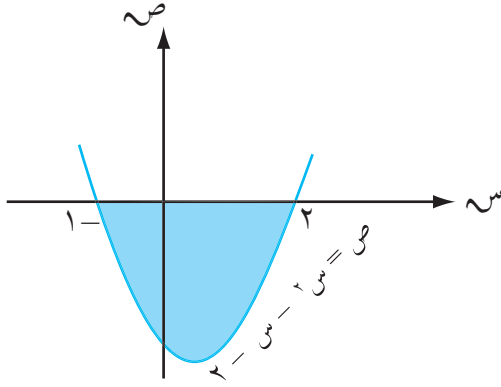
$$= \left[ \frac{9}{2} - 12 - \frac{9}{2} \right] = 12 \text{ وحدة مربعة.}$$

**مثال (٣ - ١٠)**

احسب المساحة المحددة بالمنحنى  $v = s^2 - s - 2$  ، ومحور السينات .

**الحل :**

لإيجاد حدود التكامل نوجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات فنضع  $v = 0$  .



شكل (٣ - ٥)

$$0 = s^2 - s - 2 \quad \leftarrow$$

$$0 = (s + 1)(s - 2) \quad \leftarrow$$

$$\text{إذن إما } s = 2 \text{ أو } s = -1$$

$$\therefore \text{سطح } s_1 = -1 \text{ ، } s_2 = 2 \text{ | } s$$

$$= - \left[ \left( s^2 - \frac{s^3}{2} - \frac{s^3}{3} \right) \right]_{-1}^2 \text{ ، ولماذا؟}$$

$$= - \left[ \left( 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left( -4 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} \right) \right]$$

$$= - \left( 2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} \right) = - \left( 8 - \frac{1}{2} + \frac{9}{3} \right) = - \left( 8 - \frac{1}{2} + 3 \right) = - \left( \frac{1}{2} - 5 \right)$$

$$= \frac{9}{2} \text{ وحدة مربعة .}$$

**تمارين ومسائل (٢ - ٣)**

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات والمستقيمين في كل مما يأتي :

[١]  $v = s^2 - 2s - 3$  ،  $s = 1$  ،  $s = 3$

[٢]  $v = s^2 - 5$  ،  $s = 2$  ،  $s = 2$

[٣]  $v = s^3 - 1$  ،  $s = 1$  ،  $s = 2$

[٤]  $v = s^2 - 1$  ،  $s = 2$  ،  $s = 3$

[٥]  $v = s^3 + 1$  ،  $s = 2$  ،  $s = 1$

[٦]  $v = s^2 + 3$  ،  $s = 1$  ،  $s = 3$

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات للآتي :

[٧]  $v = s^2 - 1$

[٨]  $v = s^2 - 4$

[٩]  $v = s^3 + 2s^2$

[١٠]  $v = s^3 - 9s^2$

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

## استبانة تقويم الكتاب

### بيانات المستجيب:

الاسم /.....	المؤهل وتاريخه /.....	التخصص /.....
العمل الحالي /.....	المحافظة /.....	

### بيانات الكتاب:

المادة /.....	الصف /.....	اسم الكتاب /.....
الجزء /.....	الطبعة /.....	السنة الدراسية /.....
تاريخ تعبئة الاستبانة /.....		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبقات القادمة،  
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

بند	ضعيف	مقبول	جيد	جداً	بند	ضعيف	مقبول	جيد	جداً
<b>أولاً - الأهداف:</b>					<b>ثالثاً - الوسائل التعليمية:</b>				
- وضوح الصياغة.					- وضوحها ودقتها.				
- تقيس فكرة محددة.					- ارتباطها بموضوعات الدرس.				
- يمكن قياسها.					- مدى ارتباطها بالأهداف.				
- شاملة (معرفة - مهارة - وجدانية).					<b>رابعاً - التقويم:</b>				
<b>ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:</b>					- الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة.				
- ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم.					- بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع.				
- سلامة ووضوح لغة الكتاب.					- الأسئلة والتمارين تقيس مدى تحقيق الأهداف.				
- ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية.					- مناسبة لمستوى المتعلم.				
- مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة.					- دقة ووضوح الصياغة.				
- ملائمة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته.					- تراعي الفروق الفردية.				
- مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات.					- متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية.				
- مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية.					- تساعد المتعلم في تطبيق ما تعلمه في مواقف الحياة المختلفة.				
- خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات.					- كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب.				
- يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي.					<b>خامساً - الشكل والإخراج الفني:</b>				
- مراعاة مادة الكتاب للحدائق والدقة العلمية.					- ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب.				
- عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير.					- متانة تجليد الكتاب.				
- تحقيق المحتوى لأهداف المادة.					- وضوح الألوان ومناسبتها.				
					- وضوح ودقة الطباعة.				
					- نوعية ورق الكتاب.				









الإدارة العامة للتعليم الإلكتروني

[el-online.net](http://el-online.net)

el-online.net

