جامعة الملك عبد العزيز
كلية الاقتصاد و الإدارة
قسم العلوم الإدارية
انتساب

طرق كمية

ECON 206

كتبة واعدة محبكم / محمد أبو سلاف & سفانه
في محرم عام ١٤٣٥هـ
٠٥٤٣٥٥٥٧١٧
alsabaan@hotmail.com

طرق كمية ٢٠٦

الفصل الاول

* الدوال وتطبيقاتها الادارية والاقتصادية .

* مفهوم الدالة :

هي قاعدة تربط متغيراً بمتغير آخر .

- المتغير المستقل = س
- 〃 التابع = ص

• يسمى المتغير الاول (متغير التابع) والمتغير الاخر (متغير مستقل) .

* الاشكال الرياضية للدوال :

١- الدالة الخطية . من الدرجة الاولى (ص = ٣ + ٥,٠ س)

٢- الدوال كثيرة الحدود : الدالة التربيعية (ص = س^{٢} + ٥ س + ٣) من الدرجة الثانية

٣- 〃 الأسية . من الدرجة الثانية (ص = م^{س})

٤- 〃 اللوغاريتمية . من الدرجة الثانية (ص = لو$_{م}$ س) .

١] الدالة الخطية

الجزء الاول

من الدرجة الاولى

* الصورة العامة للدالة الخطية :

متغير تابع ← ص ، س → متغير مستقل

$$\boxed{ص = ي + م س}$$

ص = ٣ + ٥,٠ س

ص = المتغير التابع

ي = مقطع الدالة (قيمة ص اذا كانت س = صفر)

م = ميل الخط او ظل الزاوية .

س = المتغير المستقل او التفسيري

MODE 3 , 2 X س , Y ص يتم تعبئة البيانات

ثم

س AC → shift → 1 → 7 (reg) → 1 (A) = (؟) الناتج

ص 〃 → 〃 → 〃 → 〃 → 2 (B) = (؟)

* ايجاد معادلة الخط المستقيم (ايجاد الدالة الخطية).

١] الدالة الخطية بمعلومية (نقطتين)

احفظ القانون

$$\boxed{\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}}$$

٢] الدالة الخطية بمعلومية (الميل ونقطة واحدة).

$$\boxed{\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}} \quad \text{او} \quad \boxed{\text{ص} - \text{ص}_1 = \text{م}\,(\text{س} - \text{س}_1)}$$

مثال / اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(\overset{\text{س}_1}{٢}\,،\,\overset{\text{ص}_1}{٢})$ و $(\overset{\text{س}_2}{٤}\,،\,\overset{\text{ص}_2}{٨})$

الحل /

① $\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$

② $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{٨ - ٢}{٤ - ٢}$

③ $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{٦}{٢}$

④ $\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٢} = \frac{٣}{١}$

⑤ $\text{ص} - ٢ = ٣\text{س} - ٦$

⑥ $\text{ص} = ٣\text{س} - ٦ + ٢$

⑦ الدالة الخطية $\text{ص} = ٣\text{س} - ٤$

مثال / اوجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطة $(\overset{\text{س}_1}{٣}\,،\,\overset{\text{ص}_1}{-٢})$ اذا كانت $\overset{\text{الميل}}{\text{ظل الزاوية}}$ التي يصنعها ذلك المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات يساوي (-٥).

$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \text{م}$

$\frac{\text{ص} - ٢}{\text{س} - ٣} = \frac{-٥}{١}$

$\text{ص} - ٢ = -٥\text{س} - ١٥$

$\text{ص} = -٥\text{س} - ١٥ + ٢$

الدالة الخطية $\text{ص} = -٥\text{س} - ١٣$

ملاحظة / للحل السريع يعوض بقيمة (س١) من السؤال في الاجابات والناتج = قيمة (ص١)

$\text{ص} = ٣ \times ٢ - ٤ = ٢$

تابع الداله الخطيه

* الدوال الاقتصاديه والاداريه (تطبيقات على الدوال الخطيه):
١- داله الطلب (-)   ٢- داله العرض (+)
٣- توازن السوق. (تحديد كميه العرض والطلب في حاله السوق المتوازن)
٤- داله تكاليف الانتاج الخطيه. (في الدخل القومي).
٥- داله الاستهلاك (في الدخل القومي)

اولاً / داله الطلب: سالب (-) (ط) ← عكسيه

الطلب: هي الكميات التي يرغب المستهلكين في شرائها من سلعه او خدمه خلال فتره زمنيه محدده بين اسعار مختلفه، على ان تكون هذه رغبه مدعومه بالقدره على الشراء.

* محددات الطلب:
هي العوامل المؤثره في الطلب على سلعه او خدمه. اي (التي تؤدي الى زياده او انخفاض الطلب على الكميه المطلوبه من سلعه او خدمه ما).
العوامل المؤثره = المتغير المستقل (س)
الكميه = " التابع (ص)

العلاقه بين (سعر السلعه والكميه المطلوبه). عكسيه

* اثر تغير الدخل:
العلاقه طرديه بين دخل المستهلك والكميه المطلوبه.

* اثر تغير سعر سلعه مكمله:
العلاقه عكسيه بين سعر سلعه مكمله والكميه المطلوبه من سلعه مثل البنزين والسيارات الامريكي

* اثر تغير سعر سلعه بديله:
العلاقه طرديه بين سعر سلعه بديله والكميه المطلوبه من سلعه مثل لحم الغنم " الدجاج

تابع الدالة الخطية

ملاحظة * دالة الطلب نعوض في (س)

* دالة الطلب الخطية : سالب (−) الطلب

صفة

$$\boxed{ط = ي - م ث}$$

الإشارة سالبة تدل على وجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة والسعر

ط = ٥٠ − ٦ ث

ط = الكمية المطلوبة

ي = " " عندما يكون السعر = صفر (حد الاشباع) = ٥٠

م = ميل دالة الطلب الخطية ، وهو ثابت . يمثل معدل التغير في الكمية المطلوبة بتغير السعر

ث = سعر السلعة .

١) مثال / اذا كانت العلاقة بين الكمية المطلوبة (ط) ، سعر الوحدة (ث) بأحد المؤسسات علاقة خطية بحيث السعر ١٥٠٠ ريال تكون الكمية المطلوبة ٢٠ وحدة ، وعندما يصبح السعر ١٠٠٠ ريال تزيد الكمية المطلوبة الى ١٠٠ وحدة .

اوجد : ١- ايجاد دالة الطلب الخطية .

٢- " الكمية المطلوبة عند سعر بيع ١٢٠٠ ريال .

الحل / ١] $ث_١ = ١٥٠٠$ ($س_١$) ، $ط_١ = ٢٠$ ($ص_١$)

$ث_٢ = ١٠٠٠$ ($س_٢$) ، $ط_٢ = ١٠٠$ ($ص_٢$)

① $\dfrac{ص - ص_١}{س - س_١} = \dfrac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$

② $\dfrac{ص - ٢٠}{س - ١٥٠٠} = \dfrac{١٠٠ - ٢٠}{١٠٠٠ - ١٥٠٠}$

③ $\dfrac{ص - ٢٠}{س - ١٥٠٠} = \dfrac{٨٠}{-٥٠٠} = \dfrac{-٤}{٢٥}$

④ $٢٥ص - ٥٠٠ = -٤س + ٦٠٠٠$

⑤ $٢٥ص = -٤س + ٦٠٠٠ + ٥٠٠$

⑥ $ص = \dfrac{-٤س + ٦٥٠٠}{٢٥}$ دالة الطلب

٢] عند ايجاد الكمية المطلوبة عند سعر بيع ١٢٠٠ ريال نعوض محل (س) = ١٢٠٠ ريال لنحصل على قيمة (ص) .

$ص = \dfrac{-٤ \times ١٢٠٠ + ٦٥٠٠}{٢٥} = ٦٨$ وحدة

الكمية عند سعر ١٢٠٠ ريال

٢ ثانياً/ دالة العرض: موجب (+) (ض) ← طردية

العرض: هي الكميات التي ترغب وتستطيع الوحدات الانتاجية انتاجها وبيعها عند اسعار مختلفة وخلال فترة زمنية معينة.

* محددات العرض:

العلاقة بين سعر سلعة ما والكمية المعروضة منها:

١- سعر السلعة = علاقة طردية بين سعر السلعة والكمية المعروضة
٢- اسعار عناصر الانتاج = علاقة عكسية بين اسعار عناصر الانتاج والكمية المعروضة (ارتفاع اجور العمال)
٣- الضرائب غير المباشرة = علاقة عكسية بين الضرائب غير المباشرة والكمية المعروضة
٤- الاعانات = علاقة طردية بين الاعانات والكمية المعروضة
٥- المستوى التقني والفني = علاقة طردية لان زيادة المستوى التقني والفني يؤدي الى زيادة الكمية المعروضة
٦- اهداف الوحدة الانتاجية = علاقة طردية اذا كان الهدف تقليل المخاطر
" " " عكسية " " انتاجها كثير المخاطر
٧- اسعار السلع المنافسة في استخدام الموارد = علاقة عكسية مع الكمية المعروضة
٨- عدد الوحدات الانتاجية = علاقة طردية كلما زاد العدد زادت الكمية المعروضة.

التغير = تغير على العرض

* دالة العرض الخطية: موجب (+) العرض

$$\boxed{ض = ى + م ث}$$ حفظ

ض = ٥٠ + ٦ ث

ض = الكمية المعروضة
ى = " " عندما يكون السعر = صفر (حد الاشباع) = ٥٠
م = ميل دالة العرض الخطية، وهو ثابت ويمثل معدل التغير في الكمية المعروضة عند تغير السعر
ث = سعر السلعة.

تابع الدالة الخطية

ملاحظة * دالة العرض نعوض في (ص)

(٢) مثال / اذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة من احد الاجهزة الكهربائية (ص) وسعرها (ث) علاقة خطية، بحيث انه اذا كان السعر ٤٠٠ ريال يتم عرض ٢٠ جهاز وعندما يرتفع السعر الى ١٦٠٠ يتم عرض ١٠٠ جهاز.

المطلوب: ١- ايجاد دالة العرض الخطية.

٢- " سعر البيع عندما تكون الكمية المعروضة ٢٠٠ جهاز.

الحل / ١]

$\text{ث}_1 = ٤٠٠$ ، $\text{ص}_1 = ٢٠$

$\text{ث}_2 = ١٦٠٠$ ، $\text{ص}_2 = ١٠٠$

$$\frac{\text{ص} - \text{ص}_1}{\text{س} - \text{س}_1} = \frac{\text{ص}_2 - \text{ص}_1}{\text{س}_2 - \text{س}_1}$$

$$\frac{\text{ص} - ٢٠}{\text{س} - ٤٠٠} = \frac{١٠٠ - ٢٠}{١٦٠٠ - ٤٠٠}$$

$$\frac{\text{ص} - ٢٠}{\text{س} - ٤٠٠} = \frac{٨٠}{١٢٠٠} = \frac{١}{١٥}$$

$$١٥\text{ص} - ٣٠٠ = \text{س} - ٤٠٠$$

$$١٥\text{ص} = \text{س} - ٤٠٠ + ٣٠٠$$

$$١٥\text{ص} = \text{س} - ١٠٠$$

$$\frac{١٥\text{ص}}{١٥} = \frac{\text{س} - ١٠٠}{١٥}$$

$\therefore$ دالة العرض $= \text{ص} = \dfrac{\text{س} - ١٠٠}{١٥}$

٢] عند ايجاد سعر البيع ٢٠٠ جهاز نعوض محل (ص) = ٢٠٠ جهاز

$$\text{ص} = \frac{\text{س} - ١٠٠}{١٥}$$

$$\frac{٢٠٠}{١} = \frac{\text{س} - ١٠٠}{١٥}$$

$$\text{س} - ١٠٠ = ٣٠٠٠$$

$$\text{س} = ٣٠٠٠ + ١٠٠$$

$\text{س} = ٣١٠٠$ ريال السعر عند عرض ٢٠٠ جهاز

٣/ ثالثاً / توازن السوق : (تحديد كمية العرض والطلب في حالة توازن السوق)

* يتحقق توازن السوق عندما :

١- يتساوى (العرض = الطلب) ض = ط

٢- " (الإيرادات = التكاليف) ر = ت

٣- " عندما يكون (هامش الربح = صفر)

---

① مثال / حدد سعر التوازن وكمية التوازن في حالة ما اذا كانت دالتي العرض والطلب في السعر ث على النحو التالي :

العرض : ض = ٣ ث + ٥ (١)

الطلب : ط = ٢٥ - ٢ ث (٢)

الحل / شرط التوازن : العرض = الطلب

∴ بمساواة المعادلتين (١) ، (٢) نحصل على :

١/ العرض = الطلب

٣ ث + ٥ = ٢٥ - ٢ ث

٣ ث + ٢ ث = ٢٥ - ٥

$\frac{\text{٥ ث}}{\text{٥}} = \frac{\text{٢٠}}{\text{٥}}$

ث = ٤ ريال سعر التوازن

٢/ لإيجاد (كمية التوازن) نعوض بالثمن (السعر ث ٤) في احدى الدالتين :

العرض : ٣ ث + ٥

٣ × ٤ + ٥ = ١٧ وحدة كمية التوازن

الطلب : ٢٥ - ٢ ث

٢٥ - ٢ × ٤ = ١٧ وحدة كمية التوازن

تابع الداله الخطيه

(ت)

٤ رابعاً / داله تكاليف الانتاج : (في الاجل القصير).

- الانتاج : هي اي عمليه تؤدي الى خلق السلع والخدمات. ← الايدي العامله ، المواد الخام

- داله الانتاج : العلاقه بين مدخلات الانتاج (عناصر الانتاج) والمخرجات (الكميه المنتجه من سلعه او خدمه ما)

- داله الانتاج في الاجل القصير : هو يستطيع تغيير احد عناصر الانتاج مع ثبات عنصر آخر . اي (جميع العناصر ثابته وواحد متغير)

مثل (عدد عنصر العمل (متغير) ، وعنصر الارض (ثابت))

※ (داله تكاليف الانتاج الخطيه في الاجل القصير).

* تكاليف الانتاج في الاجل القصير : هي الفتره الزمنيه التي تكون خلالها الكميه المستخدمه من بعض عناصر الانتاج ثابته ، والاخرى متغيره.

الاجل القصير

صيغها

التكاليف الكليه = التكاليف الثابته + التكاليف المتغيره
$ت = ت ث + ت غ$
ت = ١,٨ + ٥ ك

ارقام دون رموز رقم ثابت — ارقام ورموز

* تكاليف الانتاج في الاجل الطويل : هي الفتره الزمنيه التي يمكن للمنشأه خلالها تغيير الكميه المستخدمه من جميع عناصر الانتاج بتغيير حجم الانتاج.

∴ تكاليف الانتاج في الاجل الطويل = تكاليف متغيره ولا توجد تكاليف ثابته.

الاجل الطويل

صيغها

التكاليف الكليه = التكاليف المتغيره
$ت = ت غ$

* (انواع تكاليف الانتاج في الدخل القومي) :

- ١- التكاليف الثابته : ت ث (هي ارقام في الدالة دون رموز) ١,٨

هي التكاليف التي تتحملها المنشأه سواء انتجت ام لم تنتج مثل الايجار

ت = ١,٨ + ت غ

- ٢- التكاليف المتغيره : ت غ (هي ارقام في الدالة مع رموز) ٥ ك

هي التكاليف التي تتغير مع تغير حجم الانتاج مثل المواد الخام

ت = ت ث + ٥ ك

اي (الكمية المستخدمة من عناصر الانتاج المتغيرة X اثمانها)

- ٣- التكاليف الحديه : ت ح

هي مقدار او معدل التغير في التكلفة الكليه ت ك او التكلفة المتغيره ت غ نتيجة لتغير الكميه الانتاج بمقدار وحده واحده .

اي : ت ح : التكاليف الكليه الحاليه – التكلفة الكليه السابقة

او : " : " المتغيره " – " المتغيره "

او : " : ميل داله التكاليف (م)

- ٤- التكاليف المتوسطه : ت م

هي تكلفة الوحده الواحده في المتوسط .

$$ت\ م = \frac{\text{التكاليف الكليه}\quad ت}{\text{حجم الانتاج}\quad ج}$$

* التكاليف المتوسطه المتغيره : ت م غ

$$ت\ م\ غ = \frac{ت\ غ}{ج}\qquad \frac{\text{تكاليف متغيرة}}{\text{حجم الانتاج}}$$

* التكاليف المتوسطه الثابته : ت م ث

$$ت\ م\ ث = \frac{ت\ ث}{ج}\qquad \frac{\text{تكاليف ثابتة}}{\text{حجم الانتاج}}$$

* الصيغة العامة لدالة تكاليف الإنتاج الخطية :

ت ث = التكاليف الثابتة

$$\boxed{ت = ى + م جـ}$$

ت = تكلفة الانتاج
ى = " الثابتة = (ت ث)
م = ميل الدالة / التكلفة الحدية / تكلفة انتاج الوحدة الواحدة المتغيرة
جـ = حجم الانتاج / عدد الوحدات المنتجة

---

① مثال / اذا كانت العلاقة بين كمية الانتاج (جـ) وتكاليف الانتاج (ت) بأحد المصانع علاقة خطية بحيث انه عند انتاج ٣٠ وحدة تكون التكاليف الكلية ٨٠٠ ريال وعند انتاج ١٠٠ وحدة تكون التكلفة الكلية ١٥٠٠ ريال.

اوجد : ١/ ايجاد معادلة الخط المستقيم (دالة التكلفة الخطية).
٢/ " تكلفة إنتاج ٢٠٠ وحدة.

الحل / ١]

جـ١ = ٣٠ ، ت١ = ٨٠٠

جـ٢ = ١٠٠ ، ت٢ = ١٥٠٠

* ايجاد دالة التكلفة الخطية باستخدام نقطتين :

$$\frac{ص - ص_١}{س - س_١} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} \quad | \quad \frac{ص - ٨٠٠}{س - ٣٠} = \frac{١٥٠٠ - ٨٠٠}{١٠٠ - ٣٠} = \frac{٧٠٠}{٧٠}$$

$$\frac{ص - ٨٠٠}{س - ٣٠} = \frac{١٠}{١} \quad | \quad ص - ٨٠٠ = ١٠ س - ٣٠٠$$

تكاليف حدية ، الثابت

ص = ١٠ س - ٣٠٠ + ٨٠٠ | ص = ١٠ س + ٥٠٠ دالة تكلفة الانتاج

٢] تكلفة الانتاج عند انتاج ٢٠٠ وحدة =

ص = ١٠ س + ٥٠٠ | التكلفة الثابتة = ٥٠٠ ت ث

ص = ١٠ × ٢٠٠ + ٥٠٠ | " الحدية او الانتاج = ١٠

ص = ٢٥٠٠ ريال | ت حـ او ت الانتاج او ميل الدالة

تابع الدالة الخطية

(س)

٥] خامساً / (دالة الاستهلاك) : (في الدخل القومي)

- الاستهلاك يتوقف على مستوى الدخل القومي .
- كلما زاد الدخل زاد الاستهلاك ، وكلما قل الدخل قل الاستهلاك .
- العلاقة بين الدخل والاستهلاك = علاقة طردية .

* دالة الاستهلاك :

$$\boxed{س = ى + م ل}$$

$$س = ٥٠ + ٠٫٩ ل$$

س = الاستهلاك

ى = مستوى الاستهلاك عندما يكون الدخل = صفر / حد الكفاف / الحد الأدنى للاستهلاك

م = ميل دالة الاستهلاك / الميل الحدي للاستهلاك

ل = الدخل .

① مثال / بفرض أن العلاقة خطية بين الاستهلاك القومي (س) والدخل القومي (ل) بحيث أنه عند المستويات المختلفة للدخل يكون الاستهلاك مساوياً (٥) مليون ريال بالإضافة إلى (٦٥٪) من الدخل .

أوجد : ١- معادلة الخط المستقيم التي توضح العلاقة بين الاستهلاك والدخل .

٢- احسب الاستهلاك عندما يكون الدخل ١٥ مليون ريال

الحل / ١] ى = ٥٠٠٠٠٠٠ ، م = ٠٫٦٥

$$س = ى + م ل$$

$$س = ٥٠٠٠٠٠٠ + ٠٫٦٥ ل$$ معادلة الخط المستقيم

٢] تحديد الاستهلاك عند مستوى دخل ١٥ مليون ريال =

$$س = ٥٠٠٠٠٠٠ + ٠٫٦٥ \times ١٥٠٠٠٠٠٠$$

$$س = ١٤٧٥٠٠٠٠ \text{ ريال}$$ ← مستوى الدخل

* داله الادخار

$$\boxed{خ = -ي + (١ - م) ل}$$

خ = الادخار

-ي = الادخار الثابت / الحد الادنى للادخار / الادخار التلقائي

م = الميل الحدي للادخار / ميل الخط

ل = الدخل

ملاحظه / (الميل الحدي للاستهلاك + الميل الحدي للادخار) = $\boxed{١}$

٨, + ٢, = ١

∴ الميل الحدي للادخار = ١ - الميل الحدي للاستهلاك

= ١ - ٨,

= ٢, " " "

---

* مضاعف الاستثمار

قانون

$$\boxed{\text{مضاعف الاستثمار} = \frac{١}{\text{الميل الحدي للادخار}}}$$

١٢

الجزء الثاني

الفصل الاول

٢ الدوال غير الخطيه (س^٢) من الدرجه الثانيه

* الداله كثيرة الحدود (داله متعددة الحدود)

* الداله التربيعيه : س^٢ (التكعيبيه س^٣ من الدرجه الثالثه)

هي داله كثيرة الحدود من الدرجه الثانيه

* ١ الداله التربيعيه (المعادله من الدرجه الثانيه).

هناك تطبيقات متعدده لهذه الداله. امثله :

١- داله التكلفه المتوسطه.

٢- " الانتاجيه الحديه.

٣- " الايراد ← (السعر × الكميه)

٤- " الربح ← (الايراد − التكلفه)

حفظ

* الصوره الصفريه للداله :

$$\boxed{\text{ا س}^2 + \text{ب س} + \text{جـ} = \text{صفر}}$$

* عند الحل يجب فك الاقواس في المعادله وتحويلها الى داله صفريه

مثل / ٣س^٢ + ٣ = ٥ − ٥س

∴ ٣س^٢ + ٥س + ٣ − ٥ = صفر

∴ ٣س^٢ + ٥س − ٢ = صفر ← داله صفريه ثم

الحل / باستخدام (الحاسبه) MODE → 5 ، 3

ثم ادخل ٣ = ؟ و ٥ = ؟ و −٢ = ؟ ثم = ، =

النتائج $X_1 = \frac{1}{3}$ (س١)

$X_2 = -2$ (س٢) الاجابه

* طريقه التحليل :

قانون طريقه التحليل حفظ شكل

$$\text{س} = \frac{-\text{ب} \pm \sqrt{\text{ب}^2 - 4\,\text{ا}\,\text{جـ}}}{2\,\text{ا}}$$

MODE 5 ، 3

- * طرق حل المعادلة من الدرجة الثانية .

. (طريقة التحليل) :-

القانون موجود في الصفحة السابقة $س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - 4 أ ج}}{2 أ}$

هي طريقة بسيطة ولكن يجب اعداد المعادلة اولاً بالتخلص من الكسور والاقواس إن وجدت واعادة الترتيب بحيث تأخذ المعادلة الصورة التي سبق الاشارة اليها ثم يتم التحليل .

① مثال / اوجد جذري المعادلة التالية باستخدام طريقة التحليل ؟ $3 س^2 - 7 س - 6 = صفر$

الحل / باستخدام الحاسبة MODE 5 , 3

ثم ندخل $3 =$ ، $-7 =$ ، $-6 =$ ، ثم $=$

الناتج $س_1 = \boxed{3}$

$س_2 = \boxed{-\frac{2}{3}}$

※ تطبيقات على الدوال التربيعية .

أولاً / التعبير عن المتغيرات الاقتصادية . (حل المشكلات الاقتصادية)

يمكن حل كثير من المشكلات التطبيقية التي يمكن التعبير عنها في صورة معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد ، حيث يتم ترجمة المعلومات المعطاة

١) معادلة من الدرجة الثانية في مجهول واحد .

MODE 5,3

ر = الربح
ي = الإيراد
ت = التكلفة
ث = السعر
س = الكمية

∴ الإيراد = السعر × الكمية
ي ث س

الربح = الإيراد - التكلفة
ر (ث × س) ت

---

① مثال / في سوق إحدى السلع يفرض ان عدد الوحدات المنتجة والمباعة من تلك السلعة في الاسبوع (س مليون وحدة) وكان سعر الوحدة الواحدة هو : ث بحيث أن : ث = ٢ - س السعر

وتبين ان التكاليف الكلية اللازمة للانتاج س مليون وحدة في الاسبوع كما يلي : ت = (٠٫٣ + ٠٫٥ س) مليون ريال

المطلوب /

١- اوجد دالة الايراد الكلي (ي) ؟

٢- " " الربح (ر) ؟

٣- اوجد كمية الانتاج (س) التي بها يمكن تحقيق ربح اسبوعي قدره (٠٫٢) مليون ريال .

الحل /

١- دالة الإيراد الكلي :

الإيراد = السعر × الكمية

ى = ث × س

ى = (٢ - س) × س (٢×س=٢س)، (-س×س=-$س^2$)

ى = ٢س - $س^2$ دالة الإيراد

٢- دالة الربح :

الربح = الإيراد - التكلفة

ر = (ث × س) - ت

ر = (٢س - $س^2$) - (٠,٣ + ٠,٥ س)

ر = - $س^2$ + ~~٢س~~ - ٠,٣ - ~~٠,٥~~ س ← غيرنا الإشارة

ر = - $س^2$ + ١,٥ س - ٠,٣ دالة الربح

٣- لإيجاد كمية الإنتاج (س) يتم التعويض في دالة الربح السابقة (ر=٠,٢٠).

ر = ٠,٢٠

- $س^2$ + ١,٥ س - ٠,٣ = ٠,٢٠

+ $س^2$ - ١,٥ س + ٠,٣ + ٠,٢٠ = صفر

+ $س^2$ - ١,٥ س + ٠,٥ = صفر

MODE 5 , 3

١ = ، ١,٥- = ، ٠,٥ =

$س_1$ = $\boxed{1}$

$س_2$ = $\boxed{\frac{1}{2}}$

MODE 5,3

٢ ثانياً/ منحنيات امكانية الانتاج: (منحنيات تحويل المنتج)

* يمثل منحنى امكانيات الانتاج اقصى ما يمكن للمنتج انتاجه من سلعتين مختلفتين، بافتراض انه يستخدم كمية معينة من المدخلات.

- اذا اراد زيادة انتاج احدى السلعتين لابد ان يخفض انتاجه من السلعة الاخرى. اي {ص = صفر ثم نعوض في المعادلة او س = صفر}

① مثال/ مصنع يجب ينتج كميات س، ص (بالالاف الوحدات) من سلعتين مختلفتين باستخدام نفس خطوط وطريقة الانتاج، وفقاً للمعادلة التالية الممثلة لمنحنى امكانيات الانتاج:

$$ص^2 + س + 8ص - 20 = صفر$$

المطلوب/ ١- تحديد اقصى كميات يمكن انتاجها من كل سلعة؟

الحل/

** اذا اراد اقصى انتاج من (ص)، عندما تكون (س) = صفر

* $ص^2 + س + 8ص - 20 = صفر$

$ص^2 + 0 + 8ص - 20 = صفر$

$ص^2 + 8ص - 20 = صفر$ / (باستخدام الحاسبة MODE 5,3)

✓ $س_1$، $ص_1 = 2$ ← مقبول = ص = ٢٠٠٠ وحدة انتاج

✗ $س_2$، $ص_2 = -10$ ← مرفوض

** اذا اراد اقصى انتاج من (س)، عندما تكون (ص) = صفر

* $ص^2 + س + 8ص - 20 = صفر$

$0^2 + س + 8 \times 0 - 20 = صفر$

$س - 20 = صفر$

✓ $س = 20$ ← (اقصى كمية انتاج ممكنة)

∴ س = ٢٠٠٠٠ وحدة انتاج

٣ ثالثاً / توازن السوق .

من الناحية الاقتصادية يتحقق التوازن في السوق بالنسبة لأي سلعة بينما يتعادل العرض من هذه السلعة مع الطلب عليها ، وعلى ذلك فإنه بمساواة دالتي الطلب والعرض نحصل على سعر التوازن وكمية التوازن .

① مثال / اوجد السعر (ث) بمئات الريالات والكمية التوازنية بالدف الاجهزة الكهربية المنتجة لمعادلتي العرض والطلب التاليتين : معادلة العرض = ض = $ث^2 + ث - ٣$

" الطلب = ط = $٣ث^2 - ث - ٢٧$

الحل /

١/ ايجاد السعر التوازني :

العرض = الطلب

$ث^2 + ث - ٣ = ٣ث^2 - ث - ٢٧$

∴ $٣ث^2 - ث - ٢٧ - ث^2 - ث + ٣ = صفر$

$٢ث^2 - ٢ث - ٢٤ = صفر$ (الحل بالآلة MODE 5,3)

∴ $ث_1 = \boxed{٤}$ ← مقبول = السعر التوازني

$ث_2 = \boxed{-٣}$ ← مرفوض

∴ السعر التوازني (ث) = ٤٠٠ ريال للجهاز

٢/ ايجاد الكمية التوازنية : نعوض السعر (ث ٤) في الدالة

ض = $٤^2 + ٤ - ٣ = ١٧$ وحدة .

ط = $٣ \times ٤^2 - ٤ - ٢٧ = ١٧$ وحدة .

∴ الكمية التوازنية = ١٧٠٠ وحدة

مثال تدريب.

* في دراسة تطبيقية أجريت على إحدى المنشآت المنتجة للألبان وجد أن بالإمكان كتابة كل من:

- دالة التكاليف: ت = ٣ك² + ٨ك + ٥
- دالة الإيرادات: ر = ٣ + ١٧ك

المطلوب:

١- هل دالة التكاليف بهذا المثال تمثل الأجل الطويل؟ أم الأجل القصير؟ ولماذا.

الحل/ الدالة للتكاليف من الأجل القصير لوجود رقم ثابت في الدالة=٥

٢- هل دالة التكاليف بهذا المثال تمثل التكاليف الثابتة؟ أم المتغيرة؟ أم الكلية؟

الحل/ تمثل التكاليف الكلية لأنها تشتمل على تكاليف الثابتة والمتغيرة.

٣- أوجد الكمية التي تتساوى عندها التكاليف مع الإيرادات، وماذا يطلق على تلك الكميات؟ ولماذا؟

الحل/ ٣ك² + ٨ك + ٥ = ٣ + ١٧ك

٣ك² + ٨ك + ٥ - ٣ - ١٧ك = صفر

٣ك² - ٩ك + ٢ = صفر

MODE 5,3 بالحاسبة

- الكمية التي تتساوى عندها التكاليف مع الإيرادات = ك₁ = ٢,٧٥ / ك₂ = ٠,٢٤
- يطلق على تلك الكميات السابقة كميات التوازن
- لأن الإيراد = التكاليف

٤- أوجد معادلة (الأرباح / الخسائر) الخاصة بهذه المنشأة؟

الحل/ الإيراد - التكاليف

٣ + ١٧ك - ٣ك² - ٨ك - ٥

-٣ك² + ٩ك - ٢ دالة الأرباح (ل)

٢ * ٢] الدالة الأسية :

* الدالة الأسية : هي الدالة التي يظهر فيها المتغير المستقل (س) في صورة قوة او (أس) والمقدار الثابت هو الأس

$٢^٥ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢ = ٣٢$ (٢ مضروبة في نفسها خمس مرات)

* الصورة العامة للدالة الأسية :

$$\boxed{ص = م^س}$$

* قواعد الأسس :

- ١) $م^٣ \times م^ن \times م^هـ = م^{٣ + ن + هـ}$ والعكس (عند الضرب تحول لجمع والعكس)

$٣^٢ \times ٣^٣ \times ٣^١ = ٣^{٢+٣+١} = ٣^٦ = ٧٢٩$

او * $٧٢٩ = ٣^٦ = ٣^{٣+٣} = ٣^{٢+٤} = ٣^{١+٥} = ٣ \times ٣^٥$

* $٥^{ص+٢} = ٥^ص \times ٥^٢$

* $٥^{ص+١} = ٥^ص \times ٥$

- ٢) $\frac{م^٣}{م^ن} = م^{٣-ن}$ والعكس (عند القسمة تحول الى طرح والعكس)

او * $\frac{٢^٧}{٢^٢} = ٢^{٧-٢} = ٢^٥ = ٣٢$

- ٣) $\frac{م^٣}{م^٣} = م^{٣-٣} = م^{صفر} = ١$

$\frac{٢^٣}{٢^٣} = ٢^{٣-٣} = ٢^{صفر} = ١$

* ملاحظة / ١- اذا كان المجهول يقع في الأس نقوم بتوحيد الاساسات .

٢- " " " " الاساس " " الأس .

① مثال / موظف بجامعة الملك عبدالعزيز يحصل على (س) الف ريال كراتب شهري .

المطلوب : ١- ايجاد راتب الموظف اذا تحدد المتغير (س) وفقاً لدالة أسية على النحو التالي :

$$٢٥^{س+١} = ١٢٥^{٢س-٥}$$

الحل /

∵ لان المجهول (س) في الاس . نوحد الأساسات :

$$٢٥^{س+١} = ١٢٥^{٢س-٥}$$

٢×س=٢س ، ٢×١=٢

$$(٥^{٢})^{س+١} = (٥^{٣})^{٢س-٥}$$

٣×٢س=٦س ، ٣×٥=١٥

$$\cancel{٥}^{٢س+٢} = \cancel{٥}^{٦س-١٥}$$

∴ $٢س + ٢ = ٦س - ١٥$

$٢س - ٦س = -١٥ - ٢$

$\frac{\cancel{-٤}س}{\cancel{-٤}} = \frac{-١٧}{-٤}$

$س = \frac{-١٧}{-٤} = \frac{١٧}{٤} = ٤,٢٥$

$س = ٤,٢٥ \times ١٠٠٠$

س = ٤٢٥٠ ريال

٣ * ٣ الداله اللوغاريتميه :

من الدراسه السابقه للأسس وجدنا انه من وجهه النظر للصوره الاسيه
على سبيل المثال : $٢^{٧} = ١٢٨$
حيث ان :

٢ = الأساس
٧ = الأس
١٢٨ = العدد

من وجهه نظر الداله الأسيه

* ومن وجهه النظر للصوره اللوغاريتميه . يمكن ان نطلق على

١٢٨ = العدد
٢ = الأساس
٧ = اللوغاريتم

من وجهه نظر الداله اللوغاريتميه

اي ان :
* لوغاريتم العدد (١٢٨) للأساس (٢) = ٧
* ويمكن التعبير عن ذلك رياضياً : $لو_{٢}\ ١٢٨ = ٧$
* ومن هنا يمكن تحويل المعادله من الصوره الاسيه الى الصوره اللوغاريتميه

$ص^{١٢٨} = م_{٢}^{س^{٧}}$ ⟵ (صوره أسيه)

$لو_{م_{٢}}\ ص^{١٢٨} = س^{٧}$ ⟵ (صوره لوغاريتميه)

* اي ان اللوغاريتم هو (أس^{٧} أساس^{٢} العدد^{١٢٨})

* شكل صوره الداله اللوغاريتميه :

$$\boxed{ص = لو_{م}\ س}$$

* قواعد اللوغاريتم :

- ١) لو$_{م}$ س × ص × ع = لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص + لو$_{م}$ ع

لو$_{١٠}$ ٣ × ٢ × ٥ = لو$_{١٠}$ ٣ + لو$_{١٠}$ ٢ + لو$_{١٠}$ ٥

- ٢) لو$_{م}$ س + لو$_{م}$ ص + لو$_{م}$ ع = لو$_{م}$ س × ص × ع

لو$_{١٠}$ ٣ + لو$_{١٠}$ ٢ + لو$_{١٠}$ ٥ = لو$_{١٠}$ ٣ × ٢ × ٥

او لو$_{١٠}$ (١٠٠٠٠) = لو$_{١٠}$ (١٠ × ١٠٠٠)

= لو$_{١٠}$ ١٠ + لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = ١ + ٣ = ٤

او لو$_{١٠}$ ١٠ + لو$_{١٠}$ ١٠٠٠ = لو$_{١٠}$ ١٠ × ١٠٠٠ = لو$_{١٠}$ ١٠٠٠٠

- ٣) لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$ = لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص

لو$_{١٠}$ $\frac{٣}{٥}$ = لو$_{١٠}$ ٣ − لو$_{١٠}$ ٥

- ٤) لو$_{م}$ س − لو$_{م}$ ص = لو$_{م}$ $\frac{س}{ص}$

لو$_{١٠}$ ٣ − لو$_{١٠}$ ٥ = لو$_{١٠}$ $\frac{٣}{٥}$

- ٥) لو$_{م}$ م = ١ اذا كان اللوغاريتم ومقداره = مقدار نفس الاساس = ١

لو$_{١٠}$ ١٠ = ١ ، لو$_{٥}$ ٥ = ١

٦) $\text{لو}_{\text{م}}\ \text{ب}^{\text{ن}} = \text{ن}\ \text{لو}_{\text{م}}\ \text{ب}$

$\text{لو}_{٥}\ ٣^{٢} = ٢\ \text{لو}_{٥}\ ٣$

---

٧) $\text{ن}\ \text{لو}_{\text{م}}\ \text{ب} = \text{لو}_{\text{م}}\ \text{ب}^{\text{ن}}$

$٢\ \text{لو}_{٥}\ ٣ = \text{لو}_{٥}\ ٣^{٢}$

---

٨) $\text{لو}_{\text{م}}\ ١ = \text{صفر}$

$\text{لو}_{١٠٠٠}\ ١ = \text{صفر}$

---

٩) $\text{لو}_{\text{م}}\ \text{ص} = \dfrac{\text{لو}_{١٠}\ \text{ص}}{\text{لو}_{١٠}\ \text{م}}$

$\text{لو}_{٧٥}\ ٣٦٥ = \dfrac{\text{لو}_{١٠}\ ٣٦٥}{\text{لو}_{١٠}\ ٧٥}$

① مثال / إذا كانت مدخرات احد المواطنين يعادل (س) الف ريال باحدى البنوك ، اوجد : مدخرات ذلك الشخص اذا تحددت قيمة (س) وفقاً للمعادلة اللوغاريتمية التالية :

$لو_{٢}$ س = ٧

الحل / ١] اخذ الاجابة من الاختيارات وتعويضها في قيمة س

[١٨٢ ، ١٢٨ ، ١٣٠ ، ١٠٣]

$لو_{٢}$ ١٢٨ = ٧

٢] او اعادتها الى صيغتها السابقة الاسية . $٢^{٧}$ = ١٢٨ = س

∴ مدخراته بالبنك = ١٢٨٠٠٠ ريال

---

② مثال / المصروف الشهري الثابت لاحد الطلاب يعادل (س) الف ريال ، اوجد : اوجد مصروف الطالب اذا تحدد المتغير (س) وفقاً للدالة اللوغاريتمية التالية : $لو_{٧}$ ٣٤٣ = س

الحل / باستخدام الحاسبة

$لو_{٧}$ ٣٤٣ = ٣

س = ٣

٣ × ١٠٠٠ = ٣٠٠٠ ريال شهرياً

الفصل الثاني

※ حل المعادلات الخطية في متغير واحد وفي متغيرين

١ أولاً / حل المعادلات الخطية في متغير واحد . (س)

المعادلة : هي تعبير رياضي له طرفان بينهما علامة (=) بين تعبيرين جبريين في (س) ويطلق على المتغير في المعادلة لفظ المجهول .

مثال / ٣س - ٣ = ٩ - ٦س

① مثال / بفرض ان تكلفة انتاج الوحدة الواحدة هي (س) ريال من منتج معين يتحدد بالمعادلة التاليه : ٥س - ٣ = ٢س + ٩

المطلوب / ١- ايجاد تكلفة الانتاج س ؟

الحل /

١- بالتعويض مباشرة من الاختيارات الاجابه بقيمة (س) .

٢- بتجميع الحدود التي تحتوي على المجهول (س) في الطرف الايمن والباقي الحدود في الايسر . (سنحل ٢ الآن)

الحل ②

٥س - ٣ = ٢س + ٩

٥س - ٢س = ٩ + ٣

$\frac{٣س}{٣} = \frac{١٢}{٣}$

س = ٤

الحل ① بالتعويض بقيمة (س) من الاجابات الاختيار

✱ الاختيارات في اجابة السؤال ($\boxed{٤}$ ، ٤,٥ ، ٥)

٥س - ٣ = ٢س + ٩

٥ × ٤ - ٣ = ١٧

٢ × ٤ + ٩ = ١٧

الاجابة الصحيحة $\boxed{٤}$

٢ ثانياً / حل المعادلات الخطية في متغيرين (س ، ص)

المعادلة الرياضية في متغيرين : هو تعبير جبري يوضح تساوي (=) مقدارين يحتويان على متغيرين (س ، ص) .

* طرق حل المعادلات بمتغيرين : س ، ص

١- طريقة التعويض ✓

٢- " الحذف ✓

٣- " المحددات ✗

٤- " المصفوفات ✗

** ١ طريقة التعويض :

- يتم ايجاد قيمة متغير بدلالة المتغير الآخر في المعادلتين ثم يتم ايجاد قيمة المتغير الآخر بالتعويض في المعادلة الثانية.
- يتم التعويض عن القيمة المتحصل عليها للمتغير الآخر في اي من المعادلتين للحصول على قيمة المتغير الاول .
- هكذا يتم الحصول على قيمتي المتغيرين التي تحقق المعادلتين معاً .

الحل / باستخدام الحاسبة . MODE 5 ، 1 وادخل المعادلة الاولى ثم الثانية

① مثال / اوجد كميتي السلعتين (س ، ص) اللتان تحققان دالتي الانتاج معاً :

$$٢ س + ٤ ص = ٢٠ \quad (١)$$

$$٥ س - ١٠ ص = ١٠ \quad (٢)$$

حل معادلتين في مجهولين

الحل / MODE 5 ، 1

٢ = ، ٤ = ، ٢٠ = الناتج فيه س = ٦ X = ٦

٥ = ، -١٠ = ، ١٠ = " " ص = ٢ Y = ٢

نعوض ٢ X ٦ + ٤ X ٢ = ٢٠ ✓

للتأكد من الاجابة

٥ X ٦ - ١٠ X ٢ = ١٠ ✓

** ٢] طريقة الحذف والاستبعاد :

تعتمد هذه الطريقة على حذف احد المتغيرين من المعادلات وايجاد قيمة المتغير الآخر . بالتعويض عن قيمة المتغير الآخر في اي معادلة نحصل على قيمة المتغير الذي حذف في البداية .

- (يجب) قبل الحل بالحاسبة ترتيب المعادلة . واذا كانت احدى المعادلتين صفرية فيجب الغاء الصفر وتحويل الرقم الثابت الى الطرف الاخر .

① مثال / باستخدام طريقة الحذف اوجد قيمة (س ، ص) من الدالتين التاليتين تمثل كمية الانتاج من سلعتين :

- ٣ص + ٦س = ٢١٠   (١)

- س + ٤ص - ٤٢٠ = صفر   (٢)

الحل /

١/ الغاء الصفر وتحويل الرقم الثابت الى الجانب الآخر .

- ٣ص + ٦س = ٢١٠   (١)

- س + ٤ص = ٤٢٠   (٢)

٢/ ترتيب الدالتين : بحيث تكون (س) في الاول و (ص) في الثاني

٦س - ٣ص = ٢١٠   (١)

- س + ٤ص = ٤٢٠   (٢)

٣/ باستخدام الحاسبة (MODE 5 ، 1) . الناتج

ندخل الدالة (١) / ٦ = ، -٣ = ، ٢١٠ = ، ٢(

ثم (٢) على التوالي كالآتي / -١ = ، ٤ = ، ٤٢٠ = ،

∴ الناتج ← س = ١٠٠

ص = ١٣٠

٢ مثال/ اوجد نقطة التوازن لدالتي السعر (س، ص)

٢س - ٢٠ = - ٤ص

٥س - ١٠ = ١٠ص

الحل/ ١/ الترتيب

٢س + ٤ص = ٢٠ (١)

٥س - ١٠ص = ١٠ (٢)

٢/ حل المعادلتين عن طريق الحذف. (باستخدام الحاسبة)

MODE 5,1 =

X س = ٦

Y ص = ٢

∴ ٢ × ٦ + ٤ × ٢ = ٢٠ ✓

٥ × ٦ - ١٠ × ٢ = ١٠ ✓

الفصل الثالث

المحددات وتطبيقاتها الاقتصادية والادارية.

أ/ تعريفات هامة:

١/ المحدد: هو مجموعة من العناصر (اعداد / رموز) موضوعة في صورة صفوف واعمدة موضوعة بين خطين رأسيين ا..١، مع توافر شرط اساسي وهو (ان يكون عدد الصفوف = عدد الاعمدة).

$$\begin{vmatrix} -٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix}$$

العرضي — الرئيسي

٢×٢ ← رتبة

٢/ رتبة المحدد: عبارة عن (عدد الصفوف × عدد الاعمدة) (٢×٢)(٢×٢)

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$$ ← محدد من الدرجة الثانية / من الرتبة (٢×٢)

الرتبة (٢×٢)

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$$ ← محدد من الدرجة الثالثة / من الرتبة (٣×٣)

الرتبة (٣×٣)

المحيدد ومصفوفة المحيدات:

١/ المحيدد: لكل عنصر في اي محدد مهما كانت رتبته محدداً أصغر يطلق عليه لفظ المحيدد، ومحيدد العنصر هو (المحدد الاصلي بعد حذف الصف والعمود اللذان بهما هذا العنصر). اي نلغي صف وعمود لكل عنصر مطلوب مثل (٢)(٥)

*
$$\begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$$ فإن محيدد العنصر ٢ = ٦

٢×٢

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{vmatrix}$$ فإن محيدد العنصر ٥ = $$\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٧ & ٩ \end{vmatrix}$$ ٢×٢

٣×٣

٢/ مصفوفة المحيدات : (المرافق) ← هو المحيد بعد تطبيق قاعدة الاشارات

* ١/ في حالة مصفوفة المحدد من الرتبة الثانية : ٢×٢

- نحصل عليها باحلال كل عنصر محل العنصر المقابل له مع الاخذ في الاعتبار قاعدة (تعاقب الاشارات الضمنية).
- هي المصفوفة التي نحصل عليها بتحويل صفوفها الى اعمدة واعمدتها الى صفوف.

اي (نقلب القطر الرئيسي فقط وتكون اشارة القطر الفرعي سالب (-)).

قاعدة الاشارات

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}_{2\times2}$$

← تستخدم عند ايجاد (المحيدد)

← اشارات مرافقات العناصر في المحدد من الرتبة الثانية.

مثال / $P = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}_{2\times2}$ ← القطر الرئيسي ← القطر الفرعي (المحدد)

مرافق العنصر ٣ = +٧
حذف صف وعمود العنصر ٣

١/ اوجد المحيدد للمحدد من الرتبة الثانية. (المرافق)

الحل/ $P = \begin{vmatrix} ٥- & ٧ \\ ٣ & ٢- \end{vmatrix}$ ← المحيدد المرافق

(نقلب القطر الرئيسي فقط وتكون اشارة القطر الفرعي سالب فقط)

* ٢/ في حالة مصفوفة المحدد من الدرجة الثالثة : ٣×٣

- نحصل على مصفوفة المحيدات باحلال (محدد المصفوفات الجزئية) الخاصة بكل عنصر محل ذلك العنصر، مع الاخذ في الاعتبار بقاعدة تعاقب الاشارات الضمنية.

قاعدة الاشارات

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}_{3\times3}$$

← اشارات مرافقات العناصر في المحدد من الرتبة الثالثة.

مثال/ $P = \begin{vmatrix} ٧ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٤ \\ ٠ & ٣ & ١ \end{vmatrix}_{3\times3}$

١/ اوجد المحيدد للمحدد من الرتبة الثالثة.

الحل/ المحيدد

$$P = \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٦ & ٤ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} + \\ \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٠ & ١ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} - \\ \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} ٧ & ٥ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} + \end{vmatrix}_{3\times3}$$

مثل ايجاد محيدد رقم ٣ نحذف الصف والعمود

الرقم نجد محيدد الرقم ٣ = $+\begin{vmatrix} ٦ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix}$ ← المرافق

بالحاسبة
المحدد (det)

٢/ * القيمه الحسابيه للمحدد .

١/ القيمه الحسابيه للمحدد من الرتبه الثانيه : ٢×٢

هو (حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي) - (حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي).

مثال/

القطر الرئيسي

$أ = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٢ & ٧ \end{vmatrix}$ * اوجد حساب المحدد؟ Δ

القطر الفرعي

الحل /

حساب المحدد Δ جـ = (٣ × ٧) - (٥ × ٢) = ١١

Δ جـ = ١١

٢/ القيمه الحسابيه للمحدد من الرتبه الثالثه : ٣×٣

* باستخدام الحاسبه

$أ = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ٧ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ & ٠ \end{vmatrix}$ * اوجد حساب المحدد؟ Δ

الحل /

① MODE → 6 , 1 → 1 (3X3) → ادخال بيانات المصفوفه صف صف = → AC

② shift → 4 → 7 (det) المحدد ايجاد المحدد

③ shift → 4 → 3 (A) →) اغلاق القوس → = ? الناتج

Δ جـ = ٤٦

م٢

٣ * حل المعادلات الخطية [باستخدام طريقة كرامر]

خطوات الحل

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ثابت} & & \text{ص} & & \text{س} & \\ ١٧ & = & \text{ص} & + & ٣\,\text{س} \\ ٦- & = & ٢\,\text{ص} & - & \text{س} \end{array}$$

١/ إيجاد المحدد العام (المعاملات):

$$\Delta\ \text{العام} = \begin{array}{cc} \text{س} & \text{ص} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ ١ & ٢- \end{vmatrix} = (٣ \times ٢-) - (١ \times ١) = ٧-$$

٢/ إيجاد المحدد الخاص س:

$$\Delta\,\text{س} = \begin{array}{cc} \text{ثابت} & \text{ص} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ١٧ & ١ \\ ٦- & ٢- \end{vmatrix} = (١٧ \times ٢-) - (١ \times ٦-) = ٢٨-$$

٣/ إيجاد المحدد الخاص ص:

$$\Delta\,\text{ص} = \begin{array}{cc} \text{س} & \text{ثابت} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ٣ & ١٧ \\ ١ & ٦- \end{vmatrix} = (٣ \times ٦-) - (١٧ \times ١) = ٣٥-$$

٤/ إيجاد قيمة س:

$$\text{س} = \frac{\text{محدد س}}{\text{المحدد العام}} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} = \frac{٢٨-}{٧-} = \boxed{٤}\ \text{قيمة س}$$

٥/ إيجاد قيمة ص:

$$\text{ص} = \frac{\text{محدد ص}}{\text{المحدد العام}} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta} = \frac{٣٥-}{٧-} = \boxed{٥}\ \text{قيمة ص}$$

① مثال / اذا كانت دالتي تكاليف الانتاج الكميات (س، ص) من سلعتين محددتين على النحو التالي :

$$\text{س} + \text{ص} = ١٠٠$$

$$٤\text{س} + ٦\text{ص} = ٥٠٠$$

ثابت

الحل /

١/ محدد المعاملات

$$\Delta = \begin{array}{cc} \text{ص} & \text{س} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} = (١ \times ٦) - (١ \times ٤) = ٢$$

٢/ محدد س

$$= \begin{array}{cc} \text{ص} & \text{الثابت} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ١ & ١٠٠ \\ ٦ & ٥٠٠ \end{vmatrix} = (١٠٠ \times ٦) - (١ \times ٥٠٠) = ١٠٠$$

٣/ محدد ص

$$= \begin{array}{cc} \text{ثابت} & \text{س} \\ \end{array} \begin{vmatrix} ١٠٠ & ١ \\ ٥٠٠ & ٤ \end{vmatrix} = (١ \times ٥٠٠) - (١٠٠ \times ٤) = ١٠٠$$

٤/ قيمة س

$$= \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

٥/ قيمة ص

$$= \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta} = \frac{١٠٠}{٢} = ٥٠$$

باكاسبر

المحددات → det (7)

مصفوفات → Dim (1)

مقلوب → Trn (8)

معكوس → hyp (x^{-1})

الفصل الرابع

* المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية والادارية

أ) * تعريف المصفوفة : هي عبارة عن مجموعة من الارقام او العناصر (مرتبة) في شكل صفوف واعمدة . ويتم وضع عناصر المصفوفة بين قوسين اما في صورة ( ) او [ ] .

* لا يشترط عدد الصفوف يساوي عدد الاعمدة .

$$\overset{*}{P} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ & ٠ \\ س & -ص & -٥ \end{bmatrix} \longrightarrow \text{او} \begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٠ \\ س & -ص & -٥ \end{pmatrix}$$

م × ن / ٢ × ٣ > رتبة المصفوفة (عدد الصفوف × عدد الاعمدة) = ٢ × ٣

∴ ″ ″ $\overset{*}{P} = |P| \longleftarrow$ ترمز الى رتبة P

* يرمز للمصفوفة بحرف عربي يعلوه * ($\overset{*}{P}$)

$$\overset{*}{P} = \begin{array}{c|ccc} & ١ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٤ & ٥ \\ ٢ & ٧ & ٨ & ٩ \end{array} \quad ٢ \times ٣$$

∴ فان العنصر (P م ن) هو العنصر الموجود في الصف رقم (م) والعمود رقم (ن)

* اوجد : P_{11} = (٣) اي الرقم الموجود في الصف الاول والعمود الاول

P_{12} = (٤) ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ الثاني

P_{13} = (٥) ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ الثالث

P_{21} = (٧) ″ ″ ″ ″ ″ الثاني ″ الاول

P_{22} = (٨) ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ الثاني

P_{23} = (٩) ″ ″ ″ ″ ″ ″ ″ الثالث

٢* أنواع المصفوفات :

١/ المصفوفة المربعة : م = ن

هي المصفوفة التي يكون فيها عدد الصفوف يساوي عدد الأعمدة ٢×٢ ، ٣×٣ ، ٤×٤

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٩ & ٧ \end{bmatrix} \quad ٢×٢ \qquad \begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٢ \\ ٨ & ٩ & ٧ \\ ٠ & ٤ & ١ \end{bmatrix} \quad ٣×٣$$

٢/ المصفوفة المستطيلة : م ≠ ن

اذا كان عدد الصفوف لا يساوي عدد الأعمدة . ٢×٣ ، ٣×٢ ، ٣×٤

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٦ & ٩ \\ ١ & ٤ & ٣ \end{bmatrix} \quad ٣×٢ \qquad \begin{bmatrix} ٦ & ٩ \\ ٣ & ٨ \\ ١ & ٤ \end{bmatrix} \quad ٢×٣ \qquad \begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٦ & ٩ \\ ٧ & ٨ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ١ & ٢ \end{bmatrix} \quad ٤×٣$$

٣/ المصفوفة المتماثلة :

هي مصفوفة مربعة اذا استبدلت الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف كان الناتج هو ذات المصفوفة الأصلية . ٢×٢ ، ٣×٣ ، ٤×٤

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٤ & ٧ & ٢ \\ ٩ & ٨ & ٧ \\ ٣ & ٩ & ٤ \end{bmatrix}$$

٤/ المصفوفة الصفرية :

هي مصفوفة جميع العناصر بها عبارة عن أصفار .

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

٥/ مصفوفة الوحدة :

هي مصفوفة مربعة بحيث ان عناصر قطرها الرئيسي هو الواحد اما بقية العناصر صفر

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = ١ \qquad \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix} = ١$$

القطر الرئيسي

القطر الرئيسي

٦/ المصفوفه المحوره :

(مدور المصفوفه) هي المصفوفه الناتجه من استبدال الصفوف بالاعمده واستبدال الاعمده بالصفوف .

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix} = أ$$ نابد محور المصفوفه $$= أ^{*} = \begin{bmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢ \\ ٦ & ٣ \end{bmatrix}$$

٣ * العمليات الحسابيه الاساسيه للمصفوفه .

- ١/ جمع وطرح المصفوفات : (يتم جمع وطرح العناصر المتناظره معاً)

* أ) جمع المصفوفات :

يمكن جمع المصفوفتين اذا كان لهما نفس الرتبه .

$$\underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}} = أ \qquad + \qquad \underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ١- \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢- & ٥ \end{bmatrix}} = ب$$

الحل/

$$أ + ب = \underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ٥ & ٥ & ٢ \\ ٥ & ٦ & ٦ \\ ١ & ٠ & ٦ \end{bmatrix}}$$

(٥=٤+١) ، (٥=٣+٢) ، (٢=١-+٣)

(٥=٢+٣) ، (٦=١+٥) ، (٦=٢+٤)

(١=١+٠) ، (٠=٢-+٢) ، (٦=٥+١)

* ب) طرح المصفوفات :

يمكن طرح المصفوفتين اذا كان لهما نفس الرتبه .

$$\underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ١ \end{bmatrix}} = أ \qquad - \qquad \underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ٤ & ٣ & ١- \\ ٢ & ١ & ٢ \\ ١ & ٢- & ٥ \end{bmatrix}} = ب$$

الحل/

$$أ - ب = \underset{٣\times٣}{\begin{bmatrix} ٣- & ١- & ٤ \\ ١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٤ & ٤- \end{bmatrix}}$$

(٣- = ٤ - ١) ، (١- = ٣ - ٢) ، (٤ = ١-- ٣)

(١ = ٢ - ٣) ، (٤ = ١ - ٥) ، (٢ = ٢ - ٤)

(١ = ١- - ٠) ، (٤ = ٢-- ٢) ، (٤- = ٥ - ١)

٢] ضرب المصفوفات .

* الضرب في عدد ثابت . غير مجهول

* شروط ضرب مصفوفتين :

(أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية)

$$٣ \times \underbrace{٢}_{\text{الأعمدة}} \overset{\text{الشرط}}{=} \underbrace{٢}_{\text{الصفوف}} \times ٣$$

. نقوم بضرب عناصر كل صف من المصفوفة الأولى $\times$ في عناصر كل عمود من المصفوفة الثانية .

. تكون المصفوفة الناتجة من عملية الضرب (لها عدد صفوف = يساوي عدد صفوف المصفوفة الأولى) ، و (لها عدد أعمدة = يساوي عدد أعمدة المصفوفة الثانية) .

* رتبة حاصل ضرب المصفوفتان = $(\underset{\text{صف}}{٢} \times \underset{\text{عمود}}{٣}) \times (\underset{\text{صف}}{٣} \times \underset{\text{عمود}}{٢})$ ← الشرط

البداية ، النهاية ← رتبة الناتج

٢×٢

① مثال / أوجد (س $\times$ ص)

$$س = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٧ & ٦ \end{bmatrix} ، \quad ص = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$$

$٢ \times ٣ \overset{\text{الشرط}}{=} ٣ \times ٢$

الحل / ①

$$= \begin{bmatrix} (٣\times٣)+(٥\times٢)+(٤\times٥) & (٣\times١)+(٥\times٤)+(٤\times٧) \\ (٢\times٣)+(٧\times٢)+(٦\times٥) & (٢\times١)+(٧\times٤)+(٦\times٧) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ٣٩ & ٥١ \\ ٥٠ & ٧٢ \end{bmatrix}$$

٢×٢

مصفوفة باﻟﺤﺎسبة (Dim)

* استخدام الحاسبة في الضرب.

س = $\begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٧ & ٦ \end{bmatrix}$ ، ص = $\begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{bmatrix}$

الحل/ ②

* باستخدام الحاسبة

① MODE → 6 , 1 (A) → اختر رتبة المصفوفة → ادخال بيانات المصفوفة A صف صف → AC

إيجاد المصفوفة

② shift → 4 → 1 (Dim) → 2 (B) → اختر رتبة المصفوفة → ادخال بيانات المصفوفة B صف صف → AC

③ shift → 4 → 3 (A) → ثم X →

④ shift → 4 → 4 (B) = الناتج

الناتج = $\begin{bmatrix} ٣٩ & ٥١ \\ ٥٠ & ٧٢ \end{bmatrix}$ ٢×٢

② مثال/ أوجد الإيراد الكلي لبيع عدد من الوحدات (أ ، ب) بالآف ريالات.

أ = [٢٠ ، ١٥ ، ١٢] ب = $\begin{bmatrix} ٥ \\ ٦ \\ ٤ \end{bmatrix}$

الحل/

الإيراد الكلي = أ X ب

= (٥ X ٢٠) + (٦ X ١٥) + (٤ X ١٢)

= ٢٣٨

= $\boxed{\text{٢٣٨٠٠ ريال}}$

٣ ايجاد مقلوب المصفوفة (معكوس المصفوفة). ($أ = أ^{-1}$)

* شروط ايجاد ~~مقلوب~~ معكوس المصفوفة:

١/ ان تكون المصفوفة مربعة. ٢×٢ ، ٣×٣ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & ٧ \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٢ \\ ٤ & ٥ & ٦ \\ ٧ & ٨ & ٩ \end{bmatrix}$

٢/ " " قيمة محدد المصفوفة لا يساوي صفر. ($\neq$ صفر)

* خطوات ايجاد ~~مقلوب~~ معكوس المصفوفة:

١/ ايجاد قيمة محدد المصفوفة

٢/ " مصفوفة المرافقات مع مراعاة قاعدة الاشارات

٣/ " " " المحورة (منقول)

٤/ المقلوب = $\frac{١}{\text{قيمة المحدد}}$ × المنقول

بالحاسبة المقلوب (Trn)

① ايجاد المقلوب:

الحل/

$أ = \begin{bmatrix} ٩ & ٧ \\ ٦ & ٨ \end{bmatrix}_{٢×٢}$ ، $ب = \begin{bmatrix} ٣ & ١ & ٤ \\ ٥ & ٧ & ٩ \\ ٨ & ٦ & ٢ \end{bmatrix}_{٣×٢}$

باستخدام الحاسبة:

① MODE → 6 ، 1 (A) → اختر رتبة المصفوفة → ادخل بيانات المصفوفة A صف صف → AC

② shift → 4 → 8 (Trn) ايجاد المقلوب

③ shift → 4 → 3 (A) → ثم اغلاق القوس → = الناتج

$أ = \begin{bmatrix} ٩ & ٦ \\ ٧ & ٨ \end{bmatrix}_{٢×٢}$ ← مقلوب المصفوفة أ

$ب = \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٨ \\ ١ & ٧ & ٦ \\ ٤ & ٩ & ٢ \end{bmatrix}_{٣×٣}$ ← مقلوب المصفوفة ب

بالحاسبة

(hyp (x^{-1})) المعكوس

② ايجاد المعكوس :

أ = $\begin{bmatrix} ٧ & ٩ \\ ٨ & ٦ \end{bmatrix}$ ٢×٢

ب = $\begin{bmatrix} ٤ & ١ & ٣ \\ ٩ & ٧ & ٥ \\ ٢ & ٦ & ٨ \end{bmatrix}$ ٣×٣

الحل / باستخدام الحاسبة :

① MODE → 6 ، 1 (A) → ادخل رتبة المصفوفة → ادخل بيانات المصفوفة صف صف → AC

ايجاد المعكوس

② shift → hyp →

المعكوس

③ shift → 4 → 3 (A) → ثم) اغلاق القوس → X^{-1} = الناتج

أ = $\begin{bmatrix} \frac{-٧}{٢٠} & \frac{٤}{١٥} \\ \frac{٣}{١٠} & \frac{-١}{٥} \end{bmatrix}$

ب = $\begin{bmatrix} \frac{١٩}{١٦٢} & \frac{-١١}{٨١} & \frac{٢٠}{٨١} \\ \frac{٧}{١٦٢} & \frac{١٣}{٨١} & \frac{-٣١}{٨١} \\ \frac{-٨}{٨١} & \frac{٥}{٨١} & \frac{١٢}{٨١} \end{bmatrix}$

٤/ * استخدام المصفوفات في حل المعادلات الخطيه .

* الشروط : ٢

١/ ان يكون عدد المعادلات = عدد المجاهيل .

٢/ ،، تكون مصفوفة المجاهيل مربعه ولها معكوس . ٢×٢ ، ٣×٣

خطوات الحل

١/ نستخرج مصفوفة المعاملات الفنيه : [أ] × [س] = [ب]

* مصفوفة ليونتيف (المعاملات) × مصفوفة المجاهيل = مصفوفة الثوابت

[أ] × [س] = [ب]

٢/ نوجد قيمه محدد Δ المصفوفه الرئيسي |أ| المعاملات ونتأكد من انه ≠ صفر

٣/ نوجد المرافقات للعناصر ، وعمل مصفوفة المرافقات = $\bar{أ}$

* بقلب القطر الرئيسي والفرعي لمصفوفة المعاملات مع تغير اشارة الفرعي ±

٤/ نوجد المصفوفة المبدله (المدوره) : (مدور مصفوفة المرافقات) بنفس الاشارات

* وهي عباره عن تبديل مصفوفة المرافقات، حيث يتم تبديل الصفوف الى اعمده والاعمده الى صفوف (دون تغير الاشارات) .

٥/ نوجد المعكوس : $[أ]^{-1}$

* بقسمه المصفوفة المبدله (المدوره) على قيمه المحدد $\frac{1}{\Delta}$

٦/ نوجد قيمه مصفوفة المجاهيل : [س]

* مصفوفة المعكوس × مصفوفة الثوابت

$[أ]^{-1}$ × [ب]

او (الوصول ١) (٢/٣ ،) باستخدام 1, 5 MODE X_1

X_2

① مثال/ لديك دالتي الطلب والعرض التاليتين:

دالة الطلب $\quad$ ٨و س + ١و ص = ٩٥٠

دالة العرض $\quad$ ٥و س + ٦و ص = ١٤٠٠

المطلوب/ ايجاد السعر التوازني والكمية التوازنية باستخدام المصفوفات:

الحل/

١/ نستخرج مصفوفة المعاملات الفنية:

مصفوفة المعاملات (أ) × مصفوفة المجاهيل (س) = مصفوفة الثوابت (ب)

$$\begin{array}{cc} \text{ص} & \text{س} \\ \end{array}\begin{bmatrix} \text{١و} & \text{٨و} \\ \text{٦و} & \text{٥و} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٩٥٠} \\ \text{١٤٠٠} \end{bmatrix}$$

٢/ نوجد قيمة محدد Δ المصفوفة الرئيسي: Δ

* حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسي − حاصل ضرب عناصر القطر الفرعي

(٨و × ٦و) − (١و × ٥و) = ٤٣و ← المحدد Δ

* باستخدام الحاسبة MODE 5 1 ← المرتبة ← البيانات ← AC ← shift ← ٤ ← det ← 3 ← D =

٣/ نوجد مصفوفة المرافقات: $\bar{P}$ من مصفوفة المعاملات ←

$$\begin{bmatrix} - & + \\ + & - \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \text{−٥و} & \text{٦و} \\ \text{٨و} & \text{−١و} \end{bmatrix}$$

٤/ نوجد المصفوفة المبدلة (المحورة): من مصفوفة المرافقات

$$\begin{bmatrix} \text{−١و} & \text{٦و} \\ \text{٨و} & \text{−٥و} \end{bmatrix}$$

٥/ نوجد المعكوس : $[P]^{-1} = \frac{1}{\Delta}$

قسمة المصفوفة المبدلة (المدورة) على قيمة المحدد

① $[P]^{-1} = \frac{1}{٠٫٤٣} \times \begin{bmatrix} -٠٫١ & ٠٫٦ \\ ٠٫٨ & -٠٫٥ \end{bmatrix} =$

أو

② $[P]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-٠٫١}{٠٫٤٣} & \frac{٠٫٦}{٠٫٤٣} \\ \frac{٠٫٨}{٠٫٤٣} & \frac{-٠٫٥}{٠٫٤٣} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-١٠}{٤٣} & \frac{٦٠}{٤٣} \\ \frac{٨٠}{٤٣} & \frac{-٥٠}{٤٣} \end{bmatrix}$

∴ المعكوس $= [P]^{-1} = \begin{bmatrix} -٠٫٢٣ & ١٫٣٩ \\ ١٫٨٦ & -١٫١٦ \end{bmatrix}$

٦/ قيمة مصفوفة المجاهيل : [س]

* مصفوفة المعكوس X مصفوفة الثوابت

$\begin{bmatrix} -٠٫٢٣ & ١٫٣٩ \\ ١٫٨٦ & -١٫١٦ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٩٥٠ \\ ١٤٠٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٠٠٠ \\ ١٥٠٠ \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow س \\ \rightarrow ص \end{matrix}$

الناتج

لإيجاد قيمة المجاهيل (س ، ص)
نستخدم الحاسبة

MODE 5 ، 1 → ادخال البيانات حق حق → = = X_1 س

X_2 ص

الفصل الخامس

※ البرمجة الخطية

* البرمجة الخطية : هي التخطيط الامثل للموارد المتاحة المحدودة على الاستخدامات البديلة المستمرة. (تحويل المشكلة الادارية الى عبارات رياضية)

* يهدف نموذج البرمجة الخطية :

الى (تعظيم الربح او العائد) او (خفض التكلفة) والتي تمثل دالة الهدف في ظل قيود معينة تنشأ عن حقيقة محدودية الموارد والامكانيات والتي لابد من استغلالها الاستغلال الامثل.

* ومن خلال تحديد القيود المفروضة نصل الى بدائل او حلول متاحة يتم بحث تأثير كل منها على دالة الهدف ومن ثم اختيار افضلها (الحل الامثل).

* القيود المنطقية او شروط اللاسالبية.

تتمثل في ان قيم المتغيرات (س، ص) ≤ صفر ، يجب ان تكون قيم المتغيرات موجبة وتستخدم هذه الطريقة في حالة وجود متغيرين.

* تتلخص الطريقة في اننا نقوم برسم القيود على شكل خطوط ثم نوجد منطقة التقاطعات او المنطقة المشتركة والتي تحتوي على عدة بدائل ، ومن طريق ايجاد قيمة دالة الهدف عند هذه البدائل يمكن اختيار البديل او الحل الامثل الذي يعظم او يخفض قيمة دالة الهدف.

※ خطوات البرمجة الخطية

1\] دالة الهدف :

* (اقصى ربح) تعظيم الارباح : ر ↑ (≥)

* (اقل تكلفة) خفض التكلفة : ت ↓ (≤)

٢/ استخراج القيود :

بحدود قيود في شكل متراجحات

* يستخدم علامة أكبر ≤ عند [لا يقل عن / أقل طلب / الحد الأدنى] ← إذا أعطيت أرضية العلاقة

- وغالباً تكون العلامة ≤ مع دالة التكاليف

* يستخدم علامة أصغر ≥ عند [لا يزيد / أقصى طلب / المتاح] ← إذا أعطيت سقف العلاقة

- وغالباً تكون العلامة ≥ مع دالة الربح

٣/ قيد عدم السالبية :

س، ، س، ≥ صفر

① مثال / مصنع ينتج نوعين من السلع وكانت ظروف العملية الإنتاجية كالتالي :

لدى المصنع قسمان : ١/ تجميع ٢/ تشطيب

* الحد الأقصى لساعات العمل كالتالي :

١- عملية التجميع = ٣٠٠ ساعة

٢- " التشطيب = ٣٢٠ ساعة

* يحتاج انتاج الوحدة من السلعة الأولى = ٦ ساعات تجميع / ٨ ساعات تشطيب

" " " " " " الثانية = ٦ " / ٤ " "

* ربح الوحدة من السلعة الأولى = ١٢٠ ريال

" " " " الثانية = ١٠٠ ريال

المطلوب / أوجد نموذج البرمجة الخطية لتحقيق أقصى ربح ؟

الحل بالطريقة البيانية

الحل / ١ تحديد عدد الوحدات الواجب انتاجها من نوعي السلع حتى يحقق المصنع اكبر ربح ممكن

القسم / السلعة	الاولى س	الثانية ص	الطاقة المتاحة
تجميع	٦	٦	≥ ٣٠٠
تشطيب	٨	٤	≥ ٣٢٠
ربح الوحدة	١٢٠	١٠٠	

دالة الهدف ←

٢ دالة الهدف :

* اقصى ربح = د = ١٢٠ س + ١٠٠ ص

٢ القيود : في صيغة متباينات .

التجميع = ٦ س + ٦ ص ≥ ٣٠٠

التشطيب = ٨ س + ٤ ص ≥ ٣٢٠

٣ قيد عدم السالبية .

س ، ص ≤ صفر

٤ تحويل القيود الى معادلات وحلها . (س ، ص)

٦ س + ٦ ص = ٣٠٠ ÷

$\frac{٣٠٠}{٦}$

(١)

س	٠	٥٠
ص	٥٠	٠

$\frac{٣٠٠}{٦}$

٨ س + ٤ ص = ٣٢٠ ÷

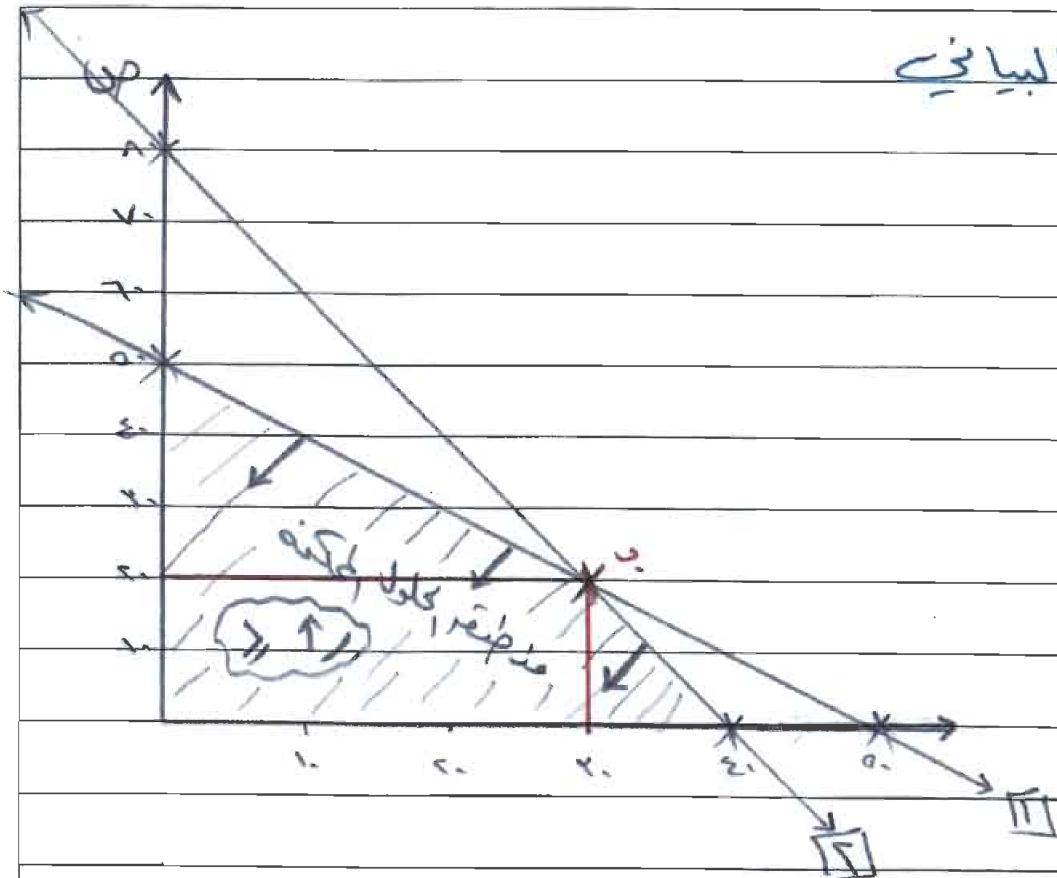
$\frac{٣٢٠}{٨}$

(٢)

س	٠	٤٠
ص	٨٠	٠

$\frac{٣٢٠}{٤}$

٥ الرسم البياني



٦ ايجاد الحل : س ص

نقطة الحل ← ب = (٣٠ ، ٢٠) هي الحل

او باستخدام الحاسبة :

MODE 5 ، 1 → ادخال البيانات صف صف → قيد المعادلة

(٦ = ، ٦ = ، ٣٠٠ = ، ٨ = ، ٤ = ، ٢٤٠ =)

X س = ٣٠

Y ص = ٢٠

٧ التعويض بنقطة الحل في دالة الهدف لتحديد قيمة الربح .

م ↑ = ١٢٠ س + ١٠٠ ص

م ↑ = (١٢٠ X ٣٠) + (١٠٠ X ٢٠) = ٥٦٠٠ الربح

م ↑ = ٥٦٠٠ ريال

② مثال / يتم تقديم وجبتين للمريض في مستشفى الملك عبدالعزيز بحيث:
* الوجبة الأولى تعطي ٤ سعر حراري ، وبها ٤ وحدات فيتامين
" الثانية " " ٦ " " ٣ " "
* فإذا كان المطلوب للمريض ٣٦ سعر حراري على الأقل و ٢٤ وحدة فيتامين
* وكان سعر الوحدة من الوجبة الأولى = ١٠ ريال
" " " " الثانية = ١٢ ريال

المطلوب / تحديد عدد الوجبات من النوعين التي تحقق أقل تكلفة ممكنة.

دالة الهدف:

ت = ١٠ س + ١٢ ص

حيث س هي عدد الوحدات من الوجبة الأولى
ص " " " " الثانية

القيود

٤ س + ٦ ص ≥ ٣٦ ①
٤ س + ٣ ص ≥ ٢٤ ②
بشرط أن س ، ص ≥ صفر

الحل / [1] تحويل القيود إلى معادلات وحلها. (س ، ص)

٤ س + ٦ ص = ٣٦

[1]

٩	٠	س
٠	٦	ص

$\frac{٣٦}{٤}$ ، $\frac{٣٦}{٦}$

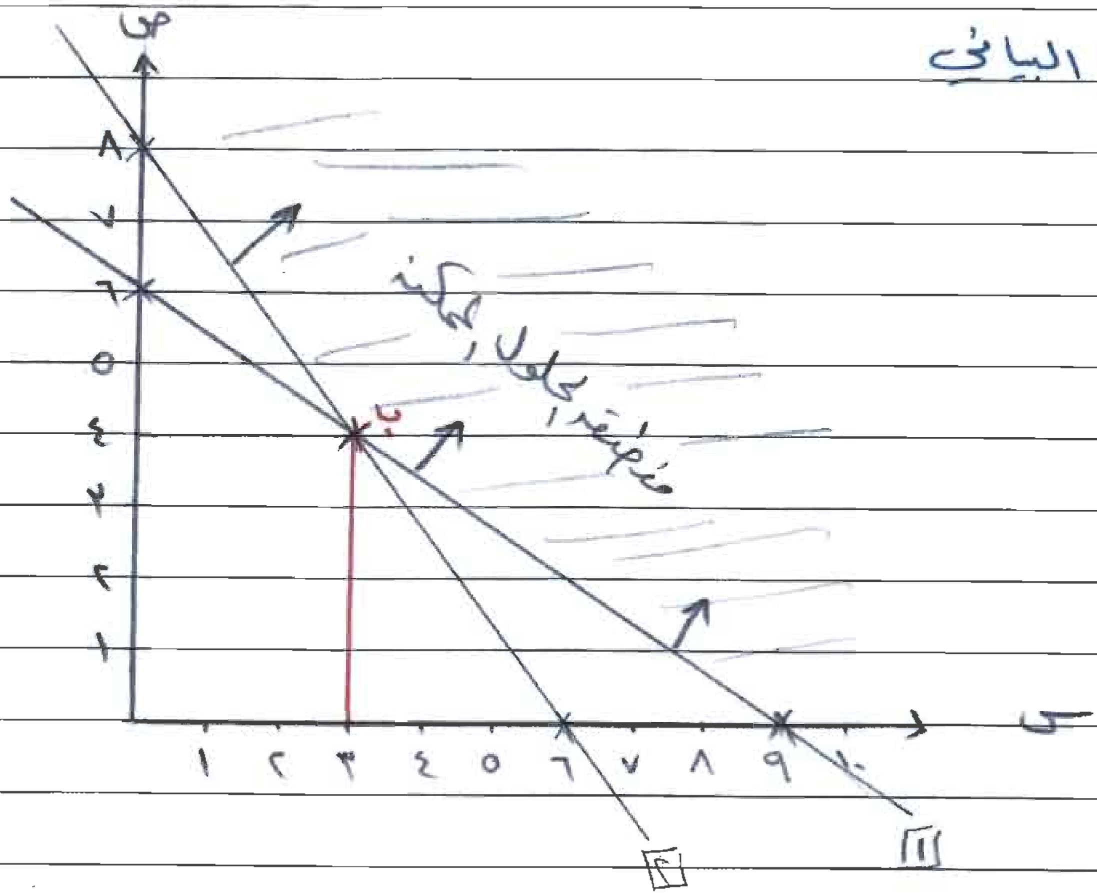
٤ س + ٣ ص = ٢٤

[2]

٦	٠	س
٠	٨	ص

$\frac{٢٤}{٤}$ ، $\frac{٢٤}{٣}$

٢ الرسم البياني



٣ اركان الحل :

نقطة الحل = ب = (٣ ، ٤)

باستخدام الحاسبة MODE 5 ، 1

٤ التعويض بنقطة الحل في دالة الهدف لايجاد التكلفة :

ت ↓ = ١٠ س + ١٢ ص

ت ↓ = (١٠ × ٣) + (١٢ × ٤)

ت ↓ = ٧٨ وحدة

$\frac{دص}{دس}$ /

الفصل السادس

* التفاضل وتطبيقاتها الاقتصادية والادارية . د(س)

* اذا كان الربح مثلاً يتغير بتغير كمية الانتاج . والطلب على سلعة ما يمكن ان يتغير بتغير السعر . فقد يكون من المهم ان يحسب معدل التغير للربح بالنسبة لكمية الانتاج او معدل تغير الكمية المطلوبة بالنسبة للسعر . ويدل معدل التغير على مقدار التغير في المتغير التابع اذا تغير المتغير المستقل او التفسيري بوحدة واحدة .

* رمز التفاضل : $\frac{دص}{دس}$ ، $د'(س)$

* قواعد التفاضل

1) تفاضل الرقم الثابت :

دائماً = صفر

$ص = ٥$

$ص' = صفر$

2) تفاضل كثيرة الحدود :

$ص = أ س^{ن}$

$ص' = ن \times أ س^{ن-١}$

مثال / $ص = ٥ س^{٤}$

$ص' = ٥ \times ٤ س^{٤-١}$

$= ٢٠ س^{٣}$

٣] تفاضل حاصل ضرب دالتين :

ص = ل(س) × هـ(س)

ص' = (المشتقة الاولى × الدالة الثانية) + (المشتقة الثانية × الدالة الاولى).

الاس-١ ثابت الاس-١ ثابتة تحذف

مثال/ ص = (٥س + ٨)(١٢س + ٤)

ص' = ٥(١٢س + ٤) + ١٢(٥س + ٨)

= (٦٠س + ٢٠) + (٦٠س + ٩٦)

= ١٢٠س + ١١٦

٤] تفاضل حاصل قسمة دالتين :

$$\text{ص} = \frac{\text{بسط}}{\text{مقام}}$$

$$\text{ص}' = \frac{(\text{مشتقة البسط} \times \text{المقام}) - (\text{مشتقة المقام} \times \text{البسط})}{(\text{المقام})^{٢}}$$

مثال/

$$\text{ص} = \frac{\text{٥س} + ٨}{\text{٢س} - ٤}$$

$$\text{ص}' = \frac{٥(\text{٢س} - ٤) - ٢(\text{٥س} + ٨)}{(\text{٢س} - ٤)^{٢}}$$

−٢ × ٨

$$= \frac{(\text{١٠س} - ٢٠) - (\text{١٠س} - ١٦)}{(\text{٢س} - ٤)^{٢}} = \frac{-٣٦}{(\text{٢س} - ٤)^{٢}}$$

٥) تفاضل دالة أســـــية :

ص = (هـ (س))^{ن}

ص َ = الأس ن . (هـ (س))$^{ن - ١}$ × (مشتقة ما بداخل القوس)

مثال/ ص = (٥ س^{٢} + ١٢ س − ٣)^{٦}

ص َ = ٦ (٥ س^{٢} + ١٢ س − ٣) × (١٠ س + ١٢)

---

٦) تفاضل دالة جذرية :

ص = $\sqrt{\text{هـ (س)}}$

ص َ = $\dfrac{\text{مشتقة ما أسفل الجذر}}{\text{٢ × الجذر نفسه}}$

مثال/ ص = $\sqrt{\text{٥ س}^{٢}\text{ − ١٢ س}}$

ص َ = $\dfrac{\text{١٠ س − ١٢}}{\text{٢ }\sqrt{\text{٥ س}^{٢}\text{ − ١٢ س}}}$

٧) المشتقات العليا للدالة :

١) المشتقة الأولى $ص'$

٢) " الثانية $ص''$

مثال/

$ص = ٢س^{٤} - ٦س^{٣} + \cancel{٤}$

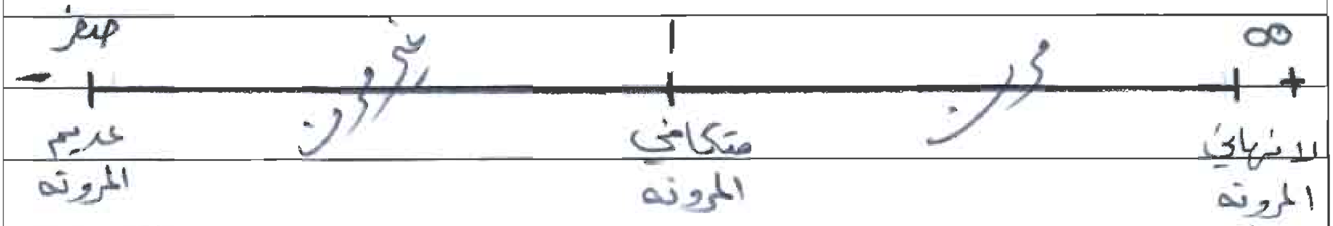
١) $ص' = ٨س^{٣} - ١٨س^{٢}$

٢) $ص'' = ٢٤س^{٢} - ٣٦س$

※ التطبيقات الاقتصادية للتفاضل

أولاً / مرونة الطلب   السعرية

مرونة الطلب /
مقدار التغير النسبي في الكمية المطلوبة اذا تغير السعر.



* مرونة الطلب السعرية : ث
مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة او خدمة للتغيرات في سعرها.

* مرونة الطلب الدخلية : ل الدخل
مدى استجابة التغيرات في الكمية المطلوبة من سلعة او خدمة للتغيرات في الدخل.

※ حالات المرونة السعرية :

١) القيمة المطلقة للمرونة = صفر (طلب عديم المرونة)
٢) " " " < ١ (طلب قليل المرونة او غير مرن)
٣) " " " = ١ (طلب متكافئ المرونة)
٤) " " " > ١ (طلب مرن)
٥) " " " = ∞ مالانهاية (طلب لانهائي المرونة)

مرونة سعر

※ حساب مرونة الطلب السعرية : م ث

م ث = مشتقة دالة الطلب × السعر / الكمية   مرونة السعر

① مثال/   ط = ١٠٠ − ٥ ث

اوجد: المرونة عند سعر ١٠ ريال.

الحل/

* السعر = ١٠ ريال
* الكمية المطلوبة = (نعوض محل الثمن في دالة الطلب ١٠ ريال)

∴ ط = ١٠٠ − ٥ × ١٠

" " = ٥٠ وحدة

* مشتقة دالة الطلب :

ط = ~~١٠٠~~ − ٥ ~~ث~~

ط' = −٥ ← المشتقة

* مرونة الطلب السعرية :

م ث = −٥ × ١٠ / ٥٠

= −١ ← نأخذ الرقم الناتج المطلق فقط دون الإشارة السالبة

المرونة = |١| السلعة متكافئة المرونة

② مثال/ ط = ٤ − ث

اوجد/ المرونه عند السعر ٨, ريال

الحل/

المرونه = مشتقه داله الطلب × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكميه}}$

* السعر = ٨, ريال
* الكميه = ط = ٤ − ٨,
= ٣,٢ وحده

* مشتقه الداله = ط = ٤ − ١ ث
ط َ = −١

* مرونه الطلب السعريه :

م ث = −١ × $\frac{٨,}{٣,٢}$

= −٢٥, ← نتجاهل الاشاره السالبه

= ٢٥, السلعه غير مرنه

* العلاقة بين الإيراد الحدي ومرونة الطلب

١] الطريقة الأولى:

* الإيراد الحدي = السعر × (١ + $\frac{١}{\text{ث} ٣ \text{ مرونة الطلب السعرية}}$)

٢] الطريقة الثانية:

* الإيراد الحدي = مشتقة دالة الإيراد الكلي

مثال / من دالة الطلب التالية: ط = ٣٫٥ - ٣٫ ث

أ/ احسب مرونة الطلب السعرية عند السعر ٧ ريال

ب/ " الإيراد الحدي.

الحل /

أ/ مرونة الطلب:

* السعر = ٧ ريال

* الكمية = ٣٫٥ - ٣٫ × ٧

" = ١٫٤

* مشتقة دالة الطلب: ط = ~~٣٫٥~~ - ٣٫ ~~ث~~

ط' = - ٣٫

* ∴ مرونة الطلب

= - ٣٫ × $\frac{٧}{١٫٤}$ = -١٫٥ مرونة الطلب

ب/ الإيراد الحدي: = السعر × (١ + $\frac{١}{\text{م ث}}$)

= ٧ × (١ + $\frac{١}{-١٫٥}$)

= ٢٫٣٣ ← الإيراد الحدي

ثانياً/ مرونة العرض — السعرية

مرونة العرض: مقياس لدرجة استجابة التغيرات في الكمية المعروضة من سلعة أو خدمة ما للتغيرات في سعرها.

* حالات مرونة العرض:

1] المرونة = صفر (عرض عديم المرونة)
2] ″ < ١ (عرض قليل المرونة أو غير مرن)
3] ″ = ١ (عرض متكافئ المرونة)
4] ″ > ١ (عرض مرن)
5] ″ = ∞ ما لا نهاية (عرض لا نهائي المرونة)

مرونة العرض = المشتقة الأولى لدالة العرض × $\frac{\text{السعر}}{\text{الكمية}}$

مرونة العرض السعرية = مرونة العرض × الثمن (السعر)

① مثال/ أوجد مرونة العرض السعرية إذا كانت دالة العرض لسلعة معينة كالتالي: ض = ٢٠ ث^٣ عند سعر ٧ ريال للوحدة.

الحل/ مرونة العرض:

* السعر = ٧ ريال

* الكمية = ض = ٢٠ × ٧^٣

= ٦٨٦٠

* مشتقة دالة العرض = ض = ٢٠ ث^٣

ضَ = ٦٠ ث^٢

∴ مرونة العرض:

= ٦٠ ث^٢ × $\frac{٧}{٦٨٦٠}$ = ٠,٠٦١ ث^٢

= ٠,٠٦١ × ٧^٢ = ٢,٩٨٩

ثالثاً/ الدخل بين الاستهلاك والادخار

قانون: الدخل = الاستهلاك + الادخار

* دالة الاستهلاك :

س = س. + س١ ل

الاستهلاك التلقائي

الاستهلاك التبعي اي المرتبط بالدخل

١) مثال/ اذا كانت دالة الاستهلاك هي :

س = ٥ + ٫٤ ل

اوجد/ الميل الحدي للاستهلاك .
" " للادخار .

* الاستهلاك التلقائي = ٥
* " التبعي = ٫٤ ل

* الميل الحدي للاستهلاك = ٫٤

* دالة الادخار : خ = - س. + (١ - س١) ل

خ = - ٥ + ٫٦ ل

١ - ٫٤ = ٫٦

الاستهلاك الادخار

* الميل الحدي للادخار = ٫٦

* النهايات العظمى والصغرى وتطبيقاتها الاقتصادية

* النهاية العظمى : ايجاد كمية الانتاج التي تحقق اعلى ربح
* " الصغرى : " " " " " أدنى تكلفة

* خطوات ايجاد النهاية العظمى والصغرى.

1] نوجد مشتقة الدالة المراد حساب نهايتها (المشتقة الاولى) $\frac{دص}{دس}$.

2] نساوي المشتقة بالصفر ونحصل على قيمة س .

3] نوجد المشتقة الثانية $\frac{د^2ص}{دس^2}$ ونعوض فيها بقيمة س السابقة :

اذا كان

أ) الناتج بالسالب النهاية عظمى ① المشتقة الاولى = صفر ② " الثانية = سالب

ب) " " بالموجب " صغرى ① المشتقة الاولى = صفر ② " الثانية = موجب

① مثال/ تقوم شركة الخزف السعودي ببيع س وحدة في الشهر بسعر قدره (ث = ٢٠٠ - ٢,٠ س) وكانت التكاليف الكلية تتحدد بالعلاقة التالية : (ت = ٥٠ س + ١٠٠٠٠)

المطلوب : ١/ ايجاد عدد الوحدات المنتجة س التي تحقق اعلى ربح .

٢/ تحديد قيمة أعلى ربح

٣/ ايجاد سعر بيع الوحدة عند نقطة النهاية العظمى للربح .

الحل/

1] لتحديد عدد الوحدات المنتجة (س) التي تحقق اعلى ربح

الربح = الايراد الكلي - التكاليف الكلية

الايراد الكلي = (الكمية × السعر) ← هي رمز الموجود في دالة السعر (س أو ص أو ق) أي رموز موجود في دالة السعر

∴ الربح = (الكمية × السعر) - التكاليف الكلية

ر = (س) × (٢٠٠ - ٢,٠ س) - ٥٠ س + ١٠٠٠٠

ر = ٢٠٠ س - ٢,٠ س² - ٥٠ س + ١٠٠٠٠

٢٠٠ - ٣٠٠ - ٥٠٠

دالة

ر = - ٢,٠ س^{2} + ١٥٠ س - ١٠٠٠٠ ← الربح

* نوجد مشتقة دالة الربح :

① ر َ = - ٤,٠ س + ١٥٠ ← مشتقة دالة الربح الأولى

* نساوي المشتقة بالصفر ، نحصل على قيمة س :

- ٤,٠ س + ١٥٠ = ٠

- ٤,٠ س = - ١٥٠

$\frac{-٤,٠ س}{-٤,٠} = \frac{-١٥٠}{-٤,٠}$

قيمة س ← س = ٣٧٥ ← التي تحقق أعلى ربح ممكن

* نوجد المشتقة الثانية ، ونعوض فيها بقيمة س السابقة

① ر َ = - ٤,٠ س + ١٥٠

② ر ً = - ٤,٠ ← مشتقة دالة الربح الثانية

∴ - ٤,٠ < الصفر

∴ تحقق قيمة (النهاية العظمى)

② مثال/ اذا كانت تكاليف انتاج (س) بالمليون ريال و تتحدد بالعلاقة التالية : ت = ٢٠ − ٦ س + س² حيث ت تمثل تكاليف الانتاج

المطلوب/ ١− تحديد حجم الانتاج الذي يحقق تدنية تكاليف الانتاج عند ادنى حد لها.

٢− ״ ادنى مستوى ممكن من التكاليف.

٣− ״ التكلفة المتوسطة لانتاج الوحدة.

الحل/

* تكاليف الانتاج بالمليون ريال.

$ت = \cancel{٢٠} - ٦ \cancel{س} + س^٢$

* المشتقة الاولى :

$ت' = - ٦ + ٢ س$

* نساوي الدالة بالصفر

$ت' = - ٦ + ٢ س = صفر$

$ت' = ٢ س = ٦$

$\frac{٢ س}{٢} = \frac{٦}{٢}$

$س = ٣$ قيمة س

* للتاكد انها تدنية تكاليف الانتاج =

$ت'' = ٢$

∴ ٢ > الصفر

∴ تحقق قيمة (النهاية الصغرى)

الفصل الثامن

* الرياضيه الماليه

* انواع الفائده:

- ١/ الفائده البسيطه:

هي الفائده التي تدفع على اصل المبلغ الثابت خلال مده الاستثمار او القرض.

* النتيجه / ان مقدار الفائده عن كل فتره زمنيه متساوي مع مقدارها لأي فتره زمنيه اخرى

(الفائده البسيطه = اصل المبلغ الثابت × معدل الفائده × مده الاستثمار)

- ٢/ الفائده المركبه:

هي الفائده التي تدفع على اصل المبلغ يتزايد باضافه فائده كل فتره زمنيه إليه.

* النتيجه / ان الفائده تتزايد بزياده عدد الفترات الزمنيه.

* لحساب الفائده يجب معرفه الاتي:

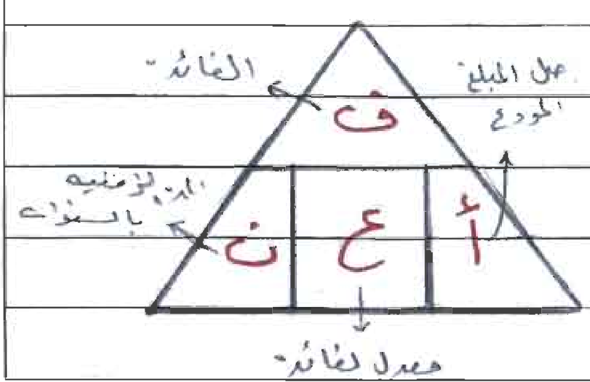
١- أ = المبلغ المستثمر / اصل المبلغ الموجود

٢- ع = معدل الفائده (يعبر عنه بنسبه مئويه على أساس سنوي) %

٣- ن = مدة الاستثمار / الفتره الزمنيه

٤- ف = مقدار الفائده

٥- ج = جملة المبلغ / مبلغ السداد القرض / المبلغ المستحق للوديعه.



١] الفائدة البسيطة

* قوانين الفائدة البسيطة :

١- مبلغ الفائده = أصل المبلغ X المعدل X المده

ف = أ X ع X ن

* الاشتقاق من القانون السابق

١- اصل المبلغ (أ)

أ = $\frac{\text{مبلغ الفائده}}{\text{المعدل X المده}}$ ، $\frac{\text{ف}}{\text{ع X ن}}$

٢- المده (ن)

ن = $\frac{\text{مبلغ الفائده}}{\text{الاصل X المعدل}}$ ، $\frac{\text{ف}}{\text{أ X ع}}$

٣- المعدل (ع)

ع = $\frac{\text{مبلغ الفائده}}{\text{الاصل X المده}}$ ، $\frac{\text{ف}}{\text{أ X ن}}$

① مثال / اودع شخص ١٠٠٠ ريال لمده ٥ سنوات بمعدل فائده ٨٪

المطلوب / ماهو معدل الفائده ؟

الحل /

م = ١٠٠٠	ف = م × ع × ن
ع = ٨٪ (٠,٠٨)	ف = ١٠٠٠ × ٠,٠٨ × ٥
ن = ٥ سنوات	ف = ٤٠٠ ريال
ف = ؟	

② مثال / استثمر شخص مبلغ من المال بفائده بسيطه بمعدل ٩٪

وفي نهايه ٣ سنوات كانت الفوائد = ١٣٥٠ .

المطلوب / ماهو أصل المبلغ المستثمر ؟

الحل

م = ؟	م = ف / (ع × ن)
ع = ٩٪ (٠,٩)	
ن = ٣	م = ١٣٥٠ / (٠,٩ × ٣) = ٥٠٠٠ ريال
ف = ١٣٥٠	

* مشاكل مدة الاستثمار

يلاحظ ان معدل الفائده يكون عن العام الواحد وبالتالي يتم تعديل المده، اذا لم تكن سنوات، الى عدد بالسنوات، كتالي:

١- اذا كانت الفترة بالشهور نقسم ن: (عدد الاشهر ÷ ١٢ شهر) لنحسب

الاشهر $\frac{\text{عدد الاشهر}}{\text{١٢ شهر}}$

٢- اذا كانت الفترة بالايام نقسم ن: (عدد الايام ÷ ٣٦٠ يوم) لنحسب

الايام $\frac{\text{عدد الايام}}{\text{٣٦٠ يوم}}$

٣- اذا كانت الفترة بالاسابيع نقسم ن: (عدد الاسابيع ÷ ٥٢ اسبوع) لنحسب

الاسابيع $\frac{\text{عدد الاسابيع}}{\text{٥٢ اسبوع}}$

---

① مثال/ اقترض شخص مبلغ ١٠٠٠٠ ريال من احد البنوك لمده ٢٥ اسبوع بفائده بسيطه ٨٪ سنويا. المطلوب/ ماهي الفوائد المستحقه عليه

الحل/

م = ١٠٠٠٠

ع = ٠.٠٨

ن = $\frac{٢٥}{٥٢}$

ف = ؟

ف = م × ع × ن

ف = ١٠٠٠٠ × ٠.٠٨ × ٢٥ ÷ ٥٢

ف = ٣٨٤,٦

② مثال / ماهو معدل الفائدة، اذا كان اصل المبلغ ١٢٠٠ ريال، واصبح بعد ٦٠ يوم ١٢٤٠ ريال؟

الحل /

م = ١٢٠٠
ع = ؟
ن = $\frac{٦٠}{١٢}$
ف = ١٢٤٠

ع = $\frac{ف}{م \times ن}$

ع = $\frac{١٢٤}{١٢٠٠ \times \frac{٦٠}{١٢}}$ = ٢ر

ع = ٢ر × ١٠٠ = ٢٠٪

※ جملة الاستثمار (الرصيد في نهاية المدة)

قانون: جملة المبلغ = م + ف
= م + (م × ع × ن)

---

① مثال / اودع شخص مبلغ ٥٠٠٠٠ ريال في احد البنوك بفائدة بسيطة ١٠٪ فما هو الرصيد بعد ٥ سنوات؟

الحل /

م = ٥٠٠٠٠
ع = ١٠ر
ن = ٥ سنوات
ف = ؟
جـ = ؟

ف = م × ع × ن
ف = ٥٠٠٠٠ × ١٠ر × ٥
ف = ٢٥٠٠٠ ريال

جـ = م + ف
جـ = ٥٠٠٠٠ + ٢٥٠٠٠
جـ = ٧٥٠٠٠ ريال

٢) مثال / اودع شخص مبلغ ما في احد المصارف التجارية بمعدل فائدة بسيطة ٨،٥ ٪ وفي نهاية ١٥ شهر وجد جملة المستحق ١٨٨٠٦،٢٥ ريال

المطلوب / ماهو المبلغ الاصلي ؟

الحل /

م = ؟
ع = ٨،٥ ٪
ن = ١٥/١٢
ف = ؟
جـ = ١٨٨٠٦،٢٥

جـ = م + ف

جـ = م + (م × ع × ن)

١٨٨٦،٢٥ = م + (م × ٠،٠٨٥ × ١٥/١٢)

نعوض عن م ← ١ ، ١ ← نعوض عن م

١٨٨٦،٢٥ = ١ + (١ × ٠،٠٨٥ × ١٥/١٢)

١٨٨٦،٢٥ = ١،١٠٦٢٥

١٨٨٦،٢٥ / ١،١٠٦٢٥ = ~~١،١٠٦٢٥ / ١،١٠٦٢٥~~

م = ١٨٨٦،٢٥ / ١،١٠٦٢٥

م = ١٧٠٠٠ ريال (١)

ف = م × ع × ن

= ١٧٠٠٠ × ٠،٠٨٥ × ١٥/١٢

ف = ١٨٠٦،٢٥ (٢)

جـ = م + ف = (١٧٠٠٠ + ١٨٠٦،٢٥)

جـ = ١٨٨٠٦،٢٥ (٣)