التّابع اللوغاريتمي النيبري

للاستاذ **إياد ادريس**

مشرف مادّة الرّياضيّات في ثانويّة السّعادة

$5^3 = 125 \iff \log_{5} 125 = 3$ الأساس، البحث عن الأس

$\log_e = \ln$

$e^0 = 1 \iff \log_e 1 = 0 \Rightarrow \ln 1 = 0$

$e = 2.7$ / /

التابع اللوغرتمي النيبري

تعريف: يوجد تابع وحيد معرف واشتقاقي على المجال $]0,+\infty[$ ينعدم عند $x=1$ ومشتقه على المجال $]0,+\infty[$ هو $\frac{1}{x}$ يسمى هذا التابع بالتابع اللوغرتمي النيبري

ونرمز له بـ $\ln$ أي:

$$\ln :]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R} : x \longrightarrow \ln x$$

$$\ln x = y$$

نتائج:

1) التابع اللوغرتمي النيبري $\ln$ معرف ومستمر واشتقاقي على المجال المفتوح $]0,+\infty[$

2) بما أن $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ فالتابع $\ln$ متزايد تماماً على المجال $]0,+\infty[$

3)
1) $\ln x = 0 \iff x = 1$

$\lim =$

2) $\ln x > 0 \iff x > 1$

3) $\ln x < 0 \iff 0 < x < 1$

إشارة $\ln x$:

$+\ln \frac{1}{2} = \ominus$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

4) إذا كان العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a , b فإن:

1) $\ln a = \ln b \iff a = b$

2) $\ln a > \ln b \iff a > b$

3) $\ln a < \ln b \iff a < b$

مجموعة تعريف التابع $f(x)=\ln(u(x))$

التابع $f(x)=\ln(u(x))$ معرف عندما $\boxed{u(x)>0}$

مثال: عين مجموعة تعريف كل من التوابع:

1) $f(x)=\ln(2x-4)$

f معرف عندما $2x-4>0$

$2x>4 \Rightarrow x>2$

$D_f=]2,+\infty[$

2) $f(x)=\ln(4-x)$

f معرف عندما $4-x>0 \Rightarrow x<4$

$D_f=]-\infty,4[$

3) $f(x)=\ln(x^2-5x)$

نبدء دراسة إشارة

(B) ندرس على

f معرف عندما $x^2-5x>0 \Leftarrow x^2-5x=0$

$x(x-5)=0$ → $x=0$ ، $x=5$

x	$-\infty$		0		5		$+\infty$
x^2-5x		$+$	0	$-$	0	$+$	
المراجعة (المخزون موجب عكسه)		مقبول				مقبول	

$D_f=]-\infty,0[\cup]5,+\infty[$

4) $f(x)=\ln(9-x^2)$

f معرف عندما $9-x^2>0$

$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9$ → $x=-3$ ، $x=3$

x	$-\infty$		-3		3		$+\infty$
$9-x^2$		$-$	0	$+$	0	$-$	
				مقبول			

$D_f=]-3,3[$

5) $f(x) = \ln\left(\frac{x+7}{2x-1}\right)$

معرفة عندما f : $\frac{x+7}{2x-1} > 0$

$x+7 = 0 \Rightarrow x = -7$

$2x-1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-7		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+7$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
الأثر		$+$	0	$-$	||	$+$	
المتراجحة		مقبول				مقبول	

$D_f =]-\infty, -7[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[$

6) $f(x) = \ln(x^3 - 3x + 2)$

معرفة عندما f : $x^3 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$

$x = -2$, $x = 2$, $x = -1$, $x = 1 \Rightarrow$ حل (بعد التجريب)

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 3x + 2 & x - 1 \\ \hline -x^3 + x^2 & x^2 + x - 2 \\ \hline x^2 - 3x & \\ -x^2 + x & \\ \hline -2x + 2 & \\ +2x - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (x-1)(x^2+x-2) = 0$

إما $x - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$ أو $x^2 + x - 2 = 0$

$(x+2)(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1$ أو $\boxed{x = -2}$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^3-3x+2		$-$	0	$+$	0	$+$	
متراجحة				مقبل		مقبل	

$D_f =]-2, 1[\cup]1, +\infty[$

3) $f(x) = \frac{3}{\ln x}$

$x > 0$ و $\ln x \neq 0$

$D_f =]0, +\infty[\setminus \{1\}$

8) $f(x) = \frac{1}{x} \ln(x+1)$

$\mathbb{R} \setminus \{0\} \cap]-1, +\infty[$

$D_f =]-1, +\infty[\setminus \{0\}$

9) $f(x) = \ln x^2$ ← صحيح موجب

$D_f = \mathbb{R}^*$

10) $f(x) = [\ln x]^2$

$D_f =]0, +\infty[$

شرط الموجب محقق يبقى شرط الانعدام

11) $f(x) = \ln(x-4)^2$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{4\}$

12) $f(x) = \ln|x+3|$ $\quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

13) $f(x) = \ln|x-1| + \ln|x+1|$

$\mathbb{R} \setminus \{1\} \cap \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

المعادلات اللوغرتمية:

لحل المعادلة $\ln(U_1(x)) = \ln(U_2(x))$

* نعين D_1 مجموعة تعريف $\ln(U_1(x))$
* نعين D_2 مجموعة تعريف $\ln(U_2(x))$
* نعين $D = D_1 \cap D_2$ مجموعة تعريف المعادلة
* نحل المعادلة $U_1(x) = U_2(x)$ على $\mathbb{R}$ والحل المقبول هو الذي ينتمي لـ D

ملاحظة:

لحل معادلة لوغرتمية من الشكل المباشر $\ln U = \ln u$ - يمكن أن نكتفي بتحديد مجموعة تعريف أحد الطرفين.

مثال: حل المعادلة $\ln(3x-4) = \ln(x^2-4)$

$\ln(3x-4)$ معرف على $D_1 =]\frac{4}{3}, +\infty[$

نحل المعادلة $3x-4 = x^2-4$ على $\mathbb{R}$

ومنه $x^2 - 3x = 0 \Leftarrow x(x-3) = 0$

إما $x = 0$ مرفوض، $x = 3$ مقبول

$S = \{3\}$

1) $\ln x^2 = \ln(x^2+8x)$

2) $\ln(x+1) = \ln(x+3)(x+2)$

182

مثال : حل المعادلة $\ln(2x) = \ln(x^2-1)$

$\ln(2x)$ معرف على $D_f =]0,+\infty[$

نحل المعادلة $2x = x^2-1$ (على $\mathbb{R}$)

ومنه $x^2-2x-1=0$

$\Delta = 8$

مرفوض $x_2 = 1-\sqrt{2}$ مقبول $x_1 = \frac{2+2\sqrt{2}}{2} = 1+\sqrt{2}$

$S = \{1+\sqrt{2}\}$

مثال : حل المعادلة

$\ln(-3x) = \ln(x^2-4)$

$\ln(-3x)$ معرف على $D_1 =]-\infty, 0[$

نحل المعادلة : $-3x = x^2-4$ (على $\mathbb{R}$)

ومنه $x^2+3x-4=0$

$(x+4)(x-1) = 0$

لـ مقبول $x=-4$ مرفوض $x=1$

$S = \{-4\}$

المتراجحات اللوغرتمية:

لحل المتراجحة $\ln(U_1(x)) \gtrless \ln(U_2(x))$

* نعين D_1 مجموعة تعريف $\ln(U_1(x))$.
* نعين D_2 مجموعة تعريف $\ln(U_2(x))$.
* نعين $D = D_1 \cap D_2$ مجموعة تعريف المتراجحة.
* نحل المتراجحة $\ln(U_1(x)) \gtrless \ln(U_2(x))$ على $\mathbb{R}$ ونعين ما ينتمي من D

ملاحظة:

لحل المتراجحة من الشكل المباشر $\ln U \gtrless \ln v$ يمكن أن نكتفي بتحديد مجموعة تعريف الطرف الأصغر.

مثال : حل المتراجحة: $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$

$\ln(x-2)$ معرف على $D_1 =]2,+\infty[$

نحل المتراجحة $x-2 \leq 2x-1$ ومنه $-1 \leq x$

$x \in [-1,+\infty[$

وما ينتمي منها لـ D_1 هي $S =]2,+\infty[$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

مثال: حل المتراجحة $\ln(2x) \geq \ln(x^2-1)$

$\ln(x^2-1)$ معرف على $D_2 =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

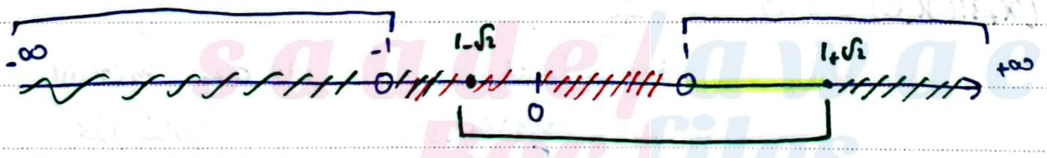
نحل المتراجحة $\boxed{x^2-2x-1 \leq 0}$

$x^2-2x-1=0 \to x=1-\sqrt{2}$

$ \to x=1+\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$1-\sqrt{2}$		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2-2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة				مقبول			

$x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$



وما ينتمي منها لـ D_1 هي: $S=]1,1+\sqrt{2}]$ مجموعة متراجحة المعطاة.

مثال: حل المتراجحة $\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geq \ln x$

$\ln x$ معرف على $D_1 =]0,+\infty[$

نحل المتراجحة $1+\frac{2}{x} \geq x$

ومنه $1+\frac{2}{x}-x \geq 0$

$$\frac{x+2-x^2}{x} \geq 0 \Rightarrow \boxed{\frac{-x^2+x+2}{x} \geq 0}$$

البسط $-x^2+x+2=0$ مقام $x=0$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0 \to x=-1$

$ \to x=2$

لا يكون استخدام اللوغاريتم قبل تحديد مجموعة تعريف اللوغاريتم

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$-x^2+x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
الإشارة		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	
المتراجحة		مقبول				مقبول			

$$x \in]-\infty,-1] \cup]0,2]$$

وما ينتمي لـ D_1 هي $S=]0,2]$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة

تدريب، حل المعادلات والمتراجحات اللوغاريتمية التالية:

1) $\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

$\ln x^2$ معرف على $D_1 = \mathbb{R}/\{0\}$

نحل المعادلة $x^2 = 2x^2+8x$

$x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0$

إما $x=0$ مرفوض أو $x=-$ مقبول

$S=\{-8\}$

2) $\ln(x+11) = \ln(x+3)(x+2)$

$\ln(x+11)$ معرف على $D_1 =]-11,+\infty[$

نحل المعادلة $x+11 = (x+3)(x+2)$

$x+11 = x^2+5x+6 \Rightarrow x^2+4x-5=0$

$\Delta = 36$

$x_2 = -5$ مقبول $\quad$ $x_1 = 1$ مقبول

$S = \{1,-5\}$

3) $\ln x \leqslant \ln(x^2-2x)$

$\ln x$ معرف على $D_1 =]0,+\infty[$

نحل المتراجحة $x \leqslant x^2-2x \Rightarrow x^2-3x \geqslant 0$

$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0$

إما $x=3$ أو $x=0$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول				مقبول	

$\Rightarrow x \in]-\infty, 0] \cup [3, +\infty[$

وما ينتمي منها لـ D_1 :

$S = [3, +\infty[$

وهي مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

$\ln(6x+4) \leq \ln(3x^2-x-2)$

$\ln(6x+4)$ معرف على $D_1 =]-\frac{2}{3}, +\infty[$

حل المتراجحة: $6x+4 \leq 3x^2-x-2$

$3x^2-7x-6 \geq 0$

$3x^2-7x-6=0 \Rightarrow \Delta = 121$

$x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{2}{3}$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
$3x^2-7x-6$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول				مقبول	

$\Rightarrow x \in]-\infty, -\frac{2}{3}] \cup [3, +\infty[$

وما ينتمي منها لـ D_1

$S = [3, +\infty[$

وهي مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

خواص اللوغاريتم: (لا نستخدمها إلا بعد تحديد مجموعة التعريف)

1) خاصية لوغاريتم جداء: أياً يكن العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a , b فإنّ:

$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$

2) خاصية لوغاريتم كسر ولوغاريتم مقلوب: أياً يكن العددان الحقيقيان الموجبان تماماً a , b فإنّ:

$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$ ($\ln 1 = 0$)

3) خاصية لوغاريتم قوة: أياً يكن $a > 0$ وأياً يكن $r \in \mathbb{R}$ فإنّ:

$\ln a^r = r \ln a$, $[\ln a]^r \neq r \ln a$

$\frac{1}{157}$

1) $a = \ln 3 + \ln \frac{1}{3}$

$a = \ln 3 - \ln 3 = 0$

2) $b = \ln \frac{1}{16}$

$b = -\ln 16 = -\ln 2^4 = -4\ln 2$

3) $C = \frac{1}{2} \ln \sqrt{2}$

$C = \frac{1}{2} \ln (2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \ln 2$

$\frac{2}{157}$ اكتب كلا من الأعداد الآتية بدلالة $\ln 5$, $\ln 2$

1) $a = \ln 50$

$a = \ln (25 \times 2) = \ln 25 + \ln 2$

$a = \ln 5^2 + \ln 2 = 2\ln 5 + \ln 2$

2) $b = \ln \frac{16}{25}$

$b = \ln 16 - \ln 25 = \ln (2)^4 - \ln (5)^2$

$= 4\ln 2 - 2\ln 5$

3) $C = \ln 250$

$C = \ln (125 \times 2) = \ln 125 + \ln 2 = \ln (5)^3 + \ln 2$

$C = 3\ln 5 + \ln 2$

$\frac{4}{157}$ قارن بين العددين x و y

1) $x = \ln 5$, $y = \ln 2 + \ln 3$

$x = \ln 5$, $y = \ln 6$

$y > x$

2) $x = 2\ln 3$ $y = 3\ln 2$

$x = \ln 9$ $y = \ln 8$

$x > y$

$\frac{6}{158}$ اثبت صحة كل من المساواتين مما يأتي $x > 0$

1) $\ln (1+x) = \ln x + \ln (1 + \frac{1}{x})$

$L_2 = \ln x + \ln (1 + \frac{1}{x}) \Rightarrow L_2 = \ln \left[x(1 + \frac{1}{x})\right]$

$\Rightarrow L_2 = \ln (1+x) = L_1$

2) $\ln(1+x^2) = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$L_2 = 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) = \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

$L_2 = \ln\left[x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right] = \ln(1+x^2) = L_1$

$\frac{9}{158}$ حل كل متراجحة أو معادلة :

1) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

$2\ln x$ معرف على $D_1 =]0,+\infty[$

$\ln(x+4)$ معرف على $D_2 =]-4,+\infty[$

$\ln(2x)$ معرف على $D_3 =]0,+\infty[$

مجموعة تعريف المعادلة $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]0,+\infty[$

على المجموعة D نكتب:

$\ln x^2 = \ln(2x^2+8x)$

نحل المعادلة $x^2 = 2x^2 + 8x$ (على $\mathbb{R}$)

$x^2 + 8x = 0$

$x(x+8) = 0$

إما $x = -8$ مرفوض أو $x = 0$ مرفوض

$S = \phi$ المعادلة مستحيلة

2) $\ln(x+11) = \ln(x+3) + \ln(x+2)$

$\ln(x+11)$ معرف على $D_1 =]-11,+\infty[$

$\ln(x+3)$ معرف على $D_2 =]-3,+\infty[$

$\ln(x+2)$ معرف على $D_3 =]-2,+\infty[$

مجموعة تعريف المعادلة $D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]-2,+\infty[$

على المجموعة D نكتب :

$\ln(x+11) = \ln(x^2+5x+6)$

نحل المعادلة $x+11 = x^2+5x+6$ (على $\mathbb{R}$)

ومنه $x^2 + 4x - 5 = 0$

$(x+5)(x-1) = 0$

إما $x = 1$ مقبول $x = -5$ مرفوض

$S = \{1\}$

188

3) $\ln 4 + \ln 2 = \ln(x-6) + \ln(x+1)$

$\ln(x-6)$ معرف على $D_1 =]6,+\infty[$

$\ln(x+1)$ معرف على $D_2 =]-1,+\infty[$

مجموعة تعريف المعادلة: $D = D_1 \cap D_2 =]6,+\infty[$

على المجموعة D نكتب:

$$\ln 8 = \ln(x^2-5x-6)$$

نحل المعادلة $8 = x^2-5x-6$ (على $\mathbb{R}$)

ومنه $x^2-5x-14=0 \iff (x-7)(x+2)=0$

إما $x=7$ مقبول $x=-2$ مرفوض

$$S=\{7\}$$

4) $\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \ln\sqrt{x+1}$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\ln(2x) \text{ معرف على } D_1=]0,+\infty[\\ \ln(3-x) \text{ معرف على } D_2=]-\infty,3[\\ \ln\sqrt{x+1} \quad D_3=]-1,+\infty[\end{cases}$$

$D=D_1\cap D_2\cap D_3$

مجموعة تعريف المعادلة: $D =]0,3[$

على المجموعة D نكتب:

$$\frac{1}{2}\ln(2x) = \ln(3-x) - \frac{1}{2}\ln(x+1)$$

نضرب بـ 2

$\ln(2x) = 2\ln(3-x) - \ln(x+1) \implies 2x = \frac{9-6x+x^2}{x+1}$

$$\ln(3-x)^2 = \ln(2x) + \ln(x+1)$$

$$\ln(9-6x+x^2) = \ln(2x^2+2x)$$

نحل المعادلة: $9-6x+x^2 = 2x^2+2x$

$$x^2+8x-9=0$$

$$(x+9)(x-1)=0$$

إما $x=1$ مقبول أو $x=-9$ مرفوض

$$S=\{1\}$$

5) $\ln 3 \leq \ln(5-x) + \ln(x-1)$

$\ln(5-x)$ معرف على $D_1 =]-\infty,5[$

$\ln(x-1)$ -- -- $D_2 =]1,+\infty[$

مجموعة تعريف المتراجحة: $D = D_1\cap D_2 =]1,5[$

على المجموعة D نكتب: $\ln 3 \leq \ln(-x^2+6x-5)$

حل المتراجحة: $3 \le -x^2+6x-5$

$$\boxed{x^2-6x+8 \le 0}$$

$x^2-6x+8=0$

$(x-4)(x-2)=0 \to x=2$, $x=4$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
x^2-6x+8		+	0	−	0	+	
المتراجحة				مقبول			

$\Rightarrow x\in[2,4]$

وما ينتمي منها لـ D هي $S=[2,4]$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

6) $3\ln x > \ln(3x-2)$

$3\ln x$ معرف على $D_1=]0,+\infty[$

$\ln(3x-2)$ " " $D_2=]\frac{2}{3},+\infty[$

$\Leftarrow D=D_1\cap D_2=]\frac{2}{3},+\infty[$ مجموعة تعريف المتراجحة.

على المجموعة D نكتب:

$\ln x^3 > \ln(3x-2)$

نحل المتراجحة (على R) $x^3>3x-2 \Leftarrow \boxed{x^3-3x+2>0}$ (على R)

$x^3-3x+2=0$

$(x-1)(x^2+x-2)=0$

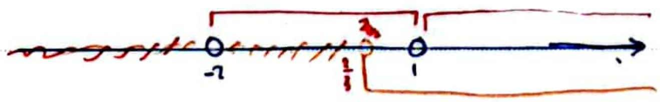
لـ! $x=1$ أو $x^2+x-2=0$

$(x+2)(x-1)=0 \to x=1$, $x=-2$

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
x^3-3x+2		−	0	+	0	+	
المتراجحة				مقبول		مقبول	

$\Rightarrow x\in]-2,1[\cup]1,+\infty[$

وما ينتمي منها لـ D هي



$S=]\frac{2}{3},1[\cup]1,+\infty[$

3) $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 2\ln 2$ (190)

$|x| = a \Rightarrow x = a$; $x = -a$

$|x| = |a| \Rightarrow x = a$ / $x = -a$

(14/175) حل كلا من المعادلات:

1) $\ln|x+2| + \ln|x-2| = 0$

$\ln|x+2|$ معرف على $D_1 = \mathbb{R}/\{-2\}$

$\ln|x-2|$ ~ ~ $D_2 = \mathbb{R}/\{2\}$

$D = D_1 \cap D_2 = \mathbb{R}/\{-2,2\}$

مجموعة تعريف المعادلة.

على المجموعة D نكتب:

$\ln|(x+2)(x-2)| = \ln 1$

$\ln|x^2-4| = \ln 1$

حل المعادلة $|x^2-4| = 1$

إما $x^2-4 = 1$ ومنه $x^2 = 5 \rightarrow x = -\sqrt{5}$ مقبول ، $x = \sqrt{5}$ مقبول

أو $x^2-4 = -1$ ومنه $x^2 = 3 \rightarrow x = \sqrt{3}$ مقبول ، $x = -\sqrt{3}$ مقبول

$S = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

2) $\ln|2x+3| + \ln|x-1| = 2\ln|x|$

$\ln|2x+3|$ معرف على $D_1 = \mathbb{R}/\{-\frac{3}{2}\}$

$\ln|x-1|$ ، $D_2 = \mathbb{R}/\{1\}$

$2\ln|x|$ ، $D_3 = \mathbb{R}/\{0\}$

$\Leftarrow D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = \mathbb{R}/\{-\frac{3}{2}, 1, 0\}$

مجموعة تعريف المعادلة

على المجموعة D نكتب

$\ln|2x^2+x-3| = \ln|x|^2$

حل المعادلة: $|2x^2+x-3| = x^2$

إما $2x^2+x-3 = x^2$ ، $x^2+x-3 = 0$

أو $2x^2+x-3 = -x^2$ ، $3x^2+x-3 = 0$

حل على D

15/175) في كل حالة آتية جد الحل المشترك لجملة المعادلتين

① $\begin{cases} x^2+y^2=10 & (1) \\ \ln x+\ln y=\ln 3 & (2) \end{cases}$

الجملة معرفة من أجل $x>0$ و $y>0$

من (2) نجد $\ln(x.y)=\ln 3$

ومنه $x.y=3 \quad ----(3)$

ومن (3) نجد $\boxed{y=\frac{3}{x}}$

نعوضها في (1) فنجد:

تكرار الخواص والتعويض

$x^2+\frac{9}{x^2}=10$

ومنه $x^4+9=10x^2 \Leftarrow x^4-10x^2+9$

$(x^2-9)(x^2-1)=0$

إما $x^2=9 \to x=3$ مرفوض ، $x=3$ مقبول أو $x^2=1 \to x=1$ مرفوض ، $x=-1$ مقبول

$x=3 \Rightarrow y=1$

$x=1 \Rightarrow y=3$

$S=\{(3,1),(1,3)\}$

② $\begin{cases} 2\ln x+\ln y=7 & \times 3 \\ 3\ln x-5\ln y=4 & \times 2 \end{cases}$

الحذف بالجمع

الجملة معرفة من اجل $x>0$ و $y>0$ لا نقاطع (الجمولين خاطئين نقطة)

الجملة تكافئ

$6\ln x+3\ln y=21$

$6\ln x-10\ln y=8$

بالطرح

$13\ln y=13 \overset{\text{ومنه}}{\Longrightarrow} \ln y=1$

ومنه $\boxed{y=e}$

نعوضها في (1) $2\ln x+1=7 \Leftarrow 2\ln x=6 \Leftarrow \ln x=3 \Leftarrow x=e^3$

عدد $\ln x= \Leftarrow x=e$ باسم الـ

ومنه $S\{(e^3,e)\}$

192

/ /

تدريب: حل المعادلة الآتية:-

1) $\ln|x-2| + \ln(x+4) = 3\ln 2$

$\ln|x-2|$ معرف على $D_1 = \mathbb{R}/\{2\}$

$\ln(x+4)$ معرف على $D_2 =]-4, +\infty[$

$\Leftarrow D = D_1 \cap D_2 =]-4, +\infty[/ \{2\}$ مجموعة تعريف المعادلة.

على المجموعة D نكتب:

$$\ln|x-2| = \ln 8 - \ln(x+4)$$

$$\ln|x-2| = \ln\left(\frac{8}{x+4}\right)$$

$$|x-2| = \frac{8}{x+4}$$

إما $x-2 = \frac{8}{x+4}$ أو $x-2 = -\frac{8}{x+4}$

$x^2+2x-8 = 8$

$x^2+2x-16 = 0$

$\Delta = 68 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-2\sqrt{17}}{2}$

$x_1 = -1-\sqrt{17}$ مرفوض ، $x_2 = -1+\sqrt{17}$ مقبول

$x^2+2x-8 = -8$

$x^2+2x = 0$

$x(x+2) = 0$

إما $x = 0$ مقبول أو $x = -2$ مقبول

مجموعة حلول المعادلة $S = \{0, -2, -1+\sqrt{17}\}$

2) $\ln\sqrt{2x-3} = \ln(6-x) - \frac{1}{2}\ln x$

$\ln(6-x)$ معرف على $D_1 =]-\infty, 6[$

$\frac{1}{2}\ln(x)$ معرف على $D_2 =]0, +\infty[$

$\ln\sqrt{2x-3}$ معرف على $D_3 =]+\frac{3}{2}, +\infty[$

$\Leftarrow D = D_1 \cap D_2 \cap D_3 =]\frac{3}{2}, 6[$ مجموعة تعريف المعادلة.

على المجموعة D نكتب:

$$\ln(6-x) = \ln\sqrt{2x-3} + \ln\sqrt{x}$$

$$\ln(6-x) = \ln\left(\sqrt{2x-3} \cdot \sqrt{x}\right)$$

$$\ln(6-x) = \ln\left(\sqrt{2x^2-3x}\right)$$

$$6-x = \sqrt{2x^2-3x}$$

/ /

$36-12x+x^2=2x^2-3x$ تربيع الطرفين.

$x^2+9x-3=0$ … $=0$

$(x+12)(x-3)=0$

إما $x=3$ أو $x=-12$

مقبول … مرفوض

$S=\{3\}$

3) $\ln(3x^2-x) \leq \ln x + \ln 2$

$\ln x$ معرف على $D_1 =]0,+\infty[$

$\ln(3x^2-x)$ معرف على $D_2 =]-\infty,0[\cup]\frac{1}{3},+\infty[$ $\Leftarrow$ $D = D_1 \cap D_2 =]\frac{1}{3},+\infty[$

على D نكتب:

$\ln(3x^2-x) \leq \ln 2x$

$3x^2-x \leq 2x \Rightarrow 3x^2-3x \leq 0$

$3x^2-3x=0 \Rightarrow 3x(x-1)$

إما $\boxed{x=1}$ أو $3x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$3x^2-3x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المراجحة		مرفوض		مقبول		مرفوض	

$\Rightarrow x \in [0,1]$

وما ينتمي منها لـ D:

$S=]\frac{1}{3},1]$

3) $\begin{cases} (\ln x)(\ln y) = -12 & \ldots (1) \\ \ln(x.y) = 1 & \ldots (2) \end{cases}$

$\left[\frac{15}{175}\right.$ تكملة

الجملة معرفة من أجل $x>0$ و $y>0$

من (2) نجد

$\ln x + \ln y = 1 \ldots (3)$

من (1) و (3) نبحث عن عددين جداؤهما -12 ومجموعهما 1 بالتحليل المباشر

إما:

$\begin{cases} \ln x = 4 \Rightarrow x = e^4 \\ \ln y = -3 \Rightarrow y = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \end{cases}$

أو:

$\begin{cases} \ln x = -3 \Rightarrow x = \frac{1}{e^3} \\ \ln y = 4 \Rightarrow y = e^4 \end{cases}$

$\Rightarrow S=\left\{\left(e^4,\frac{1}{e^3}\right),\left(\frac{1}{e^3},e^4\right)\right\}$

194 $e \approx 2.7 \Rightarrow e^2 \approx 7.2$

ملاحظة هامة:

أيا يكن $u(x) > 0$ فإن:

1) $\ln u = a \iff u = e^a$

2) $\ln u > a \iff u > e^a$

3) $\ln u < a \iff u < e^a$

$\frac{4}{162}$ حل تراجحة أو معادلة

1) $\ln(1-x) = -2$

$\ln(1-x)$ معرف على $D =]-\infty, 1[$ وهي مجموعة تعريف المعادلة

المعادلة تكافئ: $1-x = e^{-2}$

ومنه $x = 1-e^{-2}$

$x = 1-\frac{1}{e^2}$ مقبول

$S = \{1-\frac{1}{e^2}\}$

2) $\ln(x-2) - \ln(x+1) = 2$

$\ln(x-2)$ معرف على $D_1 =]2, +\infty[$

$\ln(x+1)$ معرف على $D_2 =]-1, +\infty[$

$\Leftarrow D = D_1 \cap D_2 =]2, +\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة.

على المجموعة D نكتب:

$\ln\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = 2$

ومنه $\frac{x-2}{x+1} = \frac{e^2}{1} \Leftarrow$

$x-2 = e^2x + e^2$

ومنه: $x - e^2x = 2+e^2 \Leftarrow x(1-e^2) = 2+e^2$

$x = \frac{2+e^2}{1-e^2}$ مرفوض

$S = \Phi$ المعادلة مستحيلة $\Leftarrow$

3) $(\ln x)^2 = 16$

$(\ln x)^2$ معرف على $D =]0, +\infty[$ مجموعة تعريف المعادلة

إما $\ln x = 4 \Rightarrow x = e^4$

أو $\ln x = -4 \Rightarrow x = e^{-4} \Rightarrow x = \frac{1}{e^4}$

$S = \{e^4, \frac{1}{e^4}\}$

$\ln e^{c}$ ...

4) $(\ln x - 1)(\ln x + 2) = 0$

$\ln x - 1$ معرف على $D_1 =]0, +\infty[$

$\ln x + 2$ معرف على $D_2 =]0, +\infty[$

مجموعة تعريف المعادلة $D = D_1 \cap D_2 =]0, +\infty[$

إما: $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$ أو: $\ln x = -2 \Rightarrow x = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

$$S = \left\{ e, \frac{1}{e^2} \right\}$$

5) $\ln(2-x) \geq 1$

$\ln(2-x) \geq 1$ معرف على $D =]-\infty, 2[$ مجموعة تعريف المتراجحة، تكافئ:

$2 - x \geq e$

ومنه $x \leq 2 - e$

$x \in]-\infty, 2-e]$

وما ينتمي منها لـ D هي

$S =]-\infty, 2-e]$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

6) $\ln \frac{1}{x} > 2$

$\ln \frac{1}{x}$ معرف على $D =]0, +\infty[$ وهي مجموعة تعريف المتراجحة

المتراجحة تكافئ:

$\frac{1}{x} > e^2 \Rightarrow x < \frac{1}{e^2}$

$x \in]-\infty, \frac{1}{e^2}[$

وما ينتمي منها لـ D

$S =]0, \frac{1}{e^2}[$ مجموعة حلول المتراجحة المعطاة.

$\frac{3}{162}$ في كل من الحالتين الآتيتين قارن بين العددين x و y

1) $x = \ln e^3 - 2$, $y = \ln(e\sqrt{e})$

$x = 3 - 2$, $y = \ln(e^{\frac{3}{2}})$

$x = 1$, $y = \frac{3}{2}$

$y > x$

2) $x = \ln\left(\frac{1}{e}\right)^3$, $y = \left(\ln \frac{1}{e}\right)^2$

$x = 3\ln\left(\frac{1}{e}\right)$, $y = (-1)^2$

$x = 3(-1)$, $y = 1$ $\Rightarrow$ $x = -3$, $y = 1$

$\left\{ \ln \frac{1}{e} = \ln 1 - \ln e = -1 \right\}$

$y > x$

15 / 156

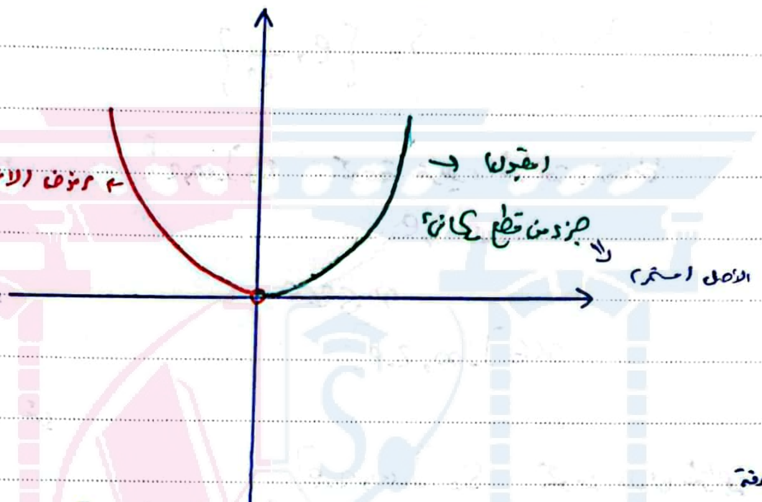
في كل حالة آتية ارسم في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$ مجموعة النقاط $M(x,y)$ المحققة للشرط:

1) $\ln y = 2\ln x$

المعادلة معرفة من أجل $x>0$ و $y>0$

ضمن هذين الشرطين نكتب: $\ln y = \ln x^2$

ومنه $y = x^2$



2) $\ln x = \ln(y+1)$

المعادلة معرفة من أجل $x>0$ و $y>-1$ ، ضمن هذين الشرطين نكتب:

$x = y+1$

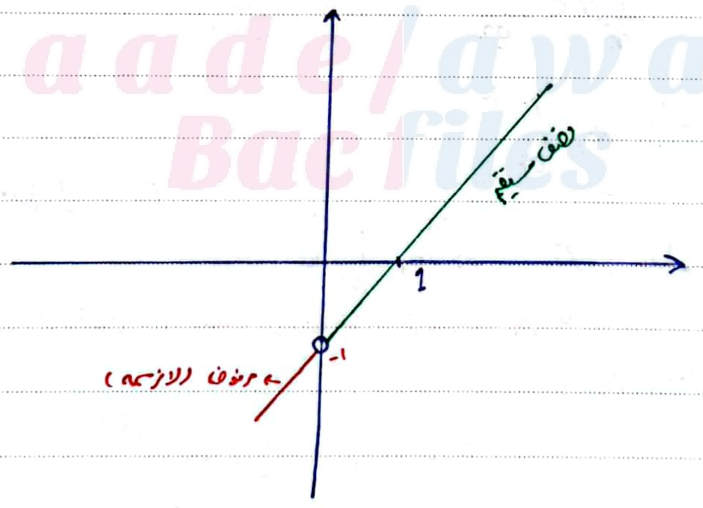
ومنه $y = x-1$

نرسم

$y = x-1$

x	0	$+1$
y	-1	0

نقطة معرفة لا تحقق الشرط



3) $\ln x + \ln y = 0$

المعادلة معرفة من أجل $x>0$ و $y>0$ ، ضمن هذين الشرطين نكتب

$\ln(x.y) = \ln 1$

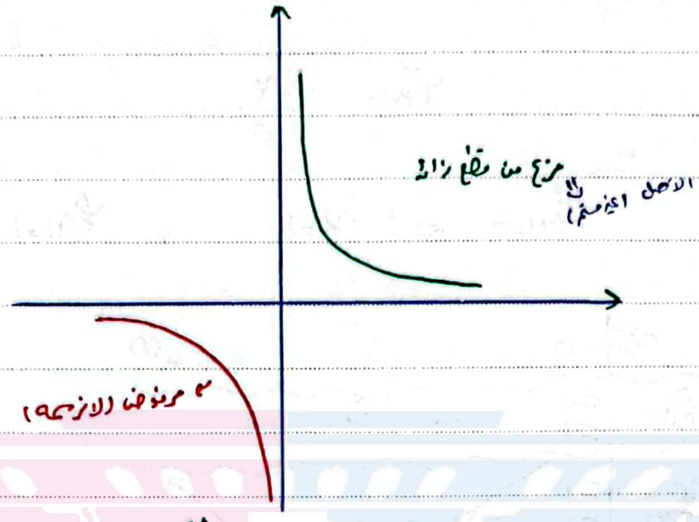
ومنه $x.y = 1$

$y = \frac{1}{x}$

- يمكن الاستفادة من جدول الإطراد معاني اثبات صحة متراجحة

نفرض تابع ... مدروس إطراده ...

/ /



2 / 154 ليكن f هو التابع المعرف على المجال $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = 2 + \ln x$

بيّن أنّ f اشتقاقي على I واحسب $f'(x)$ واكتب معادلة المماس للخط البياني للتابع f في النقطة التي فاصلتها 1

الحل:

* التابع $x \to 2$ اشتقاقي على I
* التابع $x \to \ln x$ اشتقاقي على I

إذاً f مجموع تابعين اشتقاقيين على I فهو اشتقاقي على I

$$f(1) = 2 \qquad , \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$$

نقطة التماس $N(1,2)$ ، $f'(1) = 1$ ميل المماس

ومنه معادلة المماس في النقطة N

$$y - 2 = 1(x-1) \Rightarrow \boxed{y = x + 1}$$

3 / 154 ليكن f هو تابع معرف على $I = \mathbb{R}_+^*$ وفق $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

1) أثبت أنّ f اشتقاقي على I واحسب تابعه المشتق $f'(x)$

2) نظّم جدولاً يبين جهة اطراد f (الجدول الإطراد مثل جدول التغيرات ولكن بدون نهايات ⟸ نبدأ الخطوة الأولى من الاشتقاق)

3) استنتج من الجدول السابق أنّ $f(x) \geq 1$ أيّاً يكن $x \in I$

1) التابع $x \to \frac{1}{x}$ اشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ فهو اشتقاقي على I.

التابع $x \to \ln x$ اشتقاقي على I ⟸ إذاً f مجموع تابعين اشتقاقيين على I فهو اشتقاقي على I

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \Rightarrow \boxed{f'(x) = \frac{-1+x}{x^2}}$$

2) اشتقاق f على I

$$f'(x) = \frac{-1+x}{x^2}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1$, $f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

3) من جدول الإطراد نجد

$f(1)=1$ قيمة صغرى محلياً على I ومنه $\Leftarrow$ $f(x) \geq 1$ أياً يكن $x \in I$

ملاحظة هامة جداً:

لإثبات صحة متراجحة معطاة ننقل جميع حدودها لطرف واحد فتأخذ الصيغة $f(x) \geq 0$ $f(x) \leq 0$ حيث $f(x)$ هو التابع الذي تحدده المتراجحة ثم ندرس إطراد التابع f ومن جدول الإطراد نثبت صحة المتراجحة المعطاة

تمرين: أثبت أن $\ln x < 2\sqrt{x}$ أياً يكن $x>0$

$\ln x < 2\sqrt{x} \Rightarrow 0 < 2\sqrt{x} - \ln x$

التابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وليكن $f(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$ $\Leftarrow$ لنثبت صحة $f(x) > 0$ أياً يكن $x>0$

$x \to 2\sqrt{x}$ ندرس إطراد التابع f :

اشتقاق f على $]0,+\infty[$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$$

$f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1$

$x=1$

$f(1)=2$

من جدول الإطراد نجد $f(1)=2$ قيمة صغرى محلية على المجال $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	2	↗	

ومنه $f(x) \geq 2 > 0$ أيا يكن $x>0$

ومنه $\ln x < 2\sqrt{x}$ أيا يكن $x>0$

2) أثبت أنه $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ أيا يكن $\boxed{x>0}$ واستنتج أنه $2<e<4$ باختيار قيم مناسبة للعدد x

المتراجحة $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ تكافئ $2(\sqrt{x}-1)-\ln x \geq 0$

وهي تكافئ $f(x) \geq 0$

حيث $f(x)=2(\sqrt{x}-1)-\ln x$ تابع معرف على $\boxed{]0,+\infty[}$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{\sqrt{x}-1}{x} \quad , \quad f'(x)=0 \Rightarrow \sqrt{x}=1 \Rightarrow x=1$$

$$f(1)=0$$

من جدول الإطراد نجد $f(1)=0$ قيمة صغرى محلية على المجال $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	↘	0	↗	

ومنه $f(x) \geq 0$ أيا يكن $x>0$

ومنه $\ln x \leq 2(\sqrt{x}-1)$ أيا يكن $x>0$

من أجل $\boxed{x=e}$ نجد: $2<e<4$ ← نعوض به ونعقلوه في المتراجحة المثبتة

$$\ln e \leq 2(\sqrt{e}-1)$$

$$1 \leq 2(\sqrt{e}-1)$$

$$\frac{1}{2} \leq \sqrt{e}-1 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq \sqrt{e}$$

نربع $2 < \frac{9}{4} \leq e$ ومنه $\boxed{2<e}$

200

من أجل $x=\frac{1}{e}$: نجد $\ln\frac{1}{e}\leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}}-1\right)$

$-1\leq 2\left(\sqrt{\frac{1}{e}}-1\right) \Rightarrow -\frac{1}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{e}}-1$

$\frac{1}{2}\leq\sqrt{\frac{1}{e}}$

نربع: $\frac{1}{4}\leq\frac{1}{e}$ ومنه $4\geq e$ أي $\boxed{e\leq 4}$

ومنه $\boxed{2\leq e\leq 4}$

التمرين الأول ص 27

المراجحة $\ln x\leq x-1$ تكافئ $x-1-\ln x\geq 0 \Leftarrow$ وهي تكافئ

$f(x)\geq 0$ حيث $f(x)=x-1-\ln x$ تابع معرف على $]0,+\infty[$

f معرف واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$

$f(1)=0$, $f'(x)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1$

من جدول التغيرات نجد: $\Leftarrow$

$f(1)=0$ قيمة صغرى محلياً على المجال $]0,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖	$\searrow$	0	$\nearrow$	

ومنه $f(x)\geq 0 \Leftarrow \ln x\leq x-1$ أياً يكن $x>0$

نعوض $x=e^{\frac{1}{3}}$: $\ln e^{\frac{1}{3}}\leq e^{\frac{1}{3}}-1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\ln e\leq e^{\frac{1}{3}}-1$

$1+\frac{1}{3}\leq e^{\frac{1}{3}} \Rightarrow e^{\frac{1}{3}}\geq\frac{4}{3}$

$\Rightarrow \sqrt[3]{e}\geq\frac{4}{3} \xRightarrow{\text{نكعب}} \boxed{e\geq\frac{64}{27}}$

نعوض $x=e^{-\frac{1}{3}}$: $\ln e^{-\frac{1}{3}}\leq e^{-\frac{1}{3}}-1 \Rightarrow 1-\frac{1}{3}\leq e^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow e^{-\frac{1}{3}}\geq\frac{2}{3} \Rightarrow \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}}\geq\frac{2}{3}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\geq\frac{2}{3} \xRightarrow{\text{نكعب}} \frac{1}{e}\geq\frac{8}{27}$ ~~...~~ $\Rightarrow e^{-1}\geq\frac{8}{27} \Rightarrow \frac{1}{e}\geq\frac{8}{27}$

$\boxed{e\leq\frac{27}{8}}$

ومنه $\boxed{\frac{64}{27}\leq e\leq\frac{27}{8}}$

/ /

التمرين الثاني ص 208 أثبت $\ln(x+1) \geq \frac{x}{1+x}$ أياً يكن $x \in]-1,+\infty[$

المتراجحة $\ln(x+1) \geq \frac{x}{1+x}$ تكافئ $\ln(x+1) - \frac{x}{1+x} \geq 0$

ونكتب $f(x) \geq 0$ حيث $f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{1+x}$

التابع المعرف على $]-1,+\infty[$

f معرف واشتقاقي على المجال $]-1,+\infty[$

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

من جدول الاطراد $f(0)=0$ قيمة صغرى محلية على المجال $]-1,+\infty[$ ومنه

$x \in]-1,+\infty[$ أياً يكن $f(x) \geq 0 \Leftarrow$ أياً يكن $\ln(x+1) \geq \frac{x}{1+x}$ $x \in]-1,+\infty[$

مشتق التابع المركب $f(x) = \ln(u(x))$

إذا كان u تابعاً اشتقاقياً على المجال I وموجباً تماماً على I كان التابع $f(x) = \ln(u(x))$ اشتقاقياً على I وكان

$$\boxed{f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}}$$ تابع المشتق

$\frac{4}{165}$ في كل مما يأتي أثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ ، $I =]1,+\infty[$

$x-1>0$ على I

$x+1>0$ على I

التابع $x \to \frac{x-1}{x+1}$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I (لأنه اشتقاقي على $R/\{-1\}$)

فالتابع f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'}{\frac{x-1}{x+1}} = \frac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x-1}$$

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(x-1)} = \frac{2}{x^2-1}$$

2) $f(x) = \ln(1+x^2)$ ، $I = R$

لأن التابع $x \to 1+x^2$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

202

3) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$: $I =]0, +\infty[$

التابع $x \to \frac{1}{x}$ اشتقاقي على I لأنه اشتقاقي على R^*

كما أن التابع $x \to 1 + \frac{1}{x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع $x \to \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ اشتقاقي على I

إذاً: f اشتقاقي على I لأنه مجموع تابعين اشتقاقيين على I

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2+x}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - x + x^2}{x^2(x^2+x)} = \frac{-1}{x(x^2+x)}$$

4) $f(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$: $I =]2, +\infty[$

كما أن التابع $x \to x-2$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع $x \to \ln(x-2)$ اشتقاقي على I

كما أن التابع $x \to x+2$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

$x \to \ln(x+2)$ اشتقاقي على I

إذاً f مجموع تابعين اشتقاقيين على I منه اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \Rightarrow f'(x) = \frac{x+2-x+2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4}{x^2-4}$$

$\frac{9}{172}$) في كل مما يأتي أثبت أن التابع f اشتقاقي على المجال I ثم احسب f'

1) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)$: $I =]1, +\infty[$

التابع $x \to x+1$ موجب تماماً على I، اشتقاقي على I

التابع $x \to \ln x$ موجب تماماً على I $]1,+\infty[$ واشتقاقي على I لا يوجد داعي إلى تفصيل $\ln x$ عند ما موجب ....

(واغا كان مجال من $]0,1[$)

فالتابع $x \to \frac{x+1}{\ln x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I (لأنه تابع مرجعي) فيمكن كتابته مباشرة

فالتابع f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{\ln x}\right)'}{\frac{x+1}{\ln x}} = \frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+1)}{(\ln x)^2} \cdot \frac{\ln x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - \frac{1}{x}(x+1)}{\ln x\,(x+1)} = \frac{x\ln x - x - 1}{x\ln x\,(x+1)}$$

عند ln المسبق يجب يشترط أن يكون

جميع الحدود موجبة تماماً

2) $f(x) = \ln(\ln(\ln x))$, $I =]e, +\infty[$

التابع $x \to \ln x$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I

فالتابع $x \to \ln(\ln x)$ اشتقاقي على I وهو موجب تماماً على I لأنه

$\ln(\ln x)$: اشتقاقي على I، موجب تماماً على I

ومنه
$x > e$
$\ln x > 1$
$\ln(\ln x) > 0$

فالتابع f اشتقاقي على I

$$f'(x) = \frac{[\ln(\ln x)]'}{\ln(\ln x)} = \frac{\frac{\frac{1}{x}}{\ln x}}{\ln(\ln x)} = \frac{1}{x \ln x \ln(\ln x)}$$

نهايات التابع اللوغاريتمي

1] $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

2] $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$

تعميم: بشرط أن يسعى إلى $+\infty$ + أن يكون نفس المقدار في البسط والمقام

3] $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$

$x \to ?$

4] $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0^-$

$x \to 2$, $x - 2 \to 0$

إنتهاية: $\ln(+\infty) = +\infty$

إنتهاية: $\ln(0) = -\infty$

5] $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = 1$

$x \to 4$, $(x-3)$, $(x-4)$ يسعى 0

الإزالة:
- إخراج عامل مشترك
- خواص اللوغاريتم
- استرجاع الفاصلة

تمرين: احسب كلاً من نهايات التوابع الآتية

1) $f : x \to \frac{1}{x} + \ln x$, $a = 0$

$f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$

$\lim_{x \to 0^+} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين، عندما $x \to 0^+$ نكتب:

$f(x) = \frac{1}{x}\left[1 + x \ln x\right]$

بما أن $\lim_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ فإن $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty(1+0) = +\infty$

204

2) $f: x \longrightarrow \ln(2x-1) - \ln(x+2)$ $\quad a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $+\infty - \infty$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 2$$

3) $f: x \longrightarrow x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ $\quad a = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $0 \cdot \infty$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

لدينا:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$$

$\boxed{\frac{1}{165}}$ احسب كلا من النهايات الآتية:

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2}$

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \cdot \frac{1}{x}$$

لدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ $\quad$ فإن $\quad$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} (x^2 - x)\ln x$

$$f(x) = (x^2 - x)\ln x$$

$\lim\limits_{x \to} f(x)$ من الشكل $0(-\infty)$ عدم تعيين ، عندما $x \to 0^+$ نكتب:

$$f(x) = (x-1)x\ln x$$

لدينا: $\lim\limits_{x \to 0^+} (x \ln x) = 0$ $\quad$ إذن: $\quad$ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = (-1)(0) = 0$

3] $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x}$

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x\to+\infty$ نكتب

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\ln(\sqrt{x})^2}=\frac{\sqrt{x}}{2\ln\sqrt{x}}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to} \frac{\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{t}{\ln t}=+\infty$

إذا: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$\boxed{\frac{2}{165}}$ حدد نهاية f عند أطراف مجالات تعريفه

1) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

$D_f=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$ ، (حيث $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}$) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2) $f(x)=\frac{x-\ln x}{x}$

$D_f=]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\frac{+\infty}{0^+}=+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{+\infty-\infty}{\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)=1-\frac{\ln x}{x}$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ينتج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1-0=1$

3) $f(x)=x-\ln x$

$D_f=]0,+\infty[$

$$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\infty-\infty$ عدم تعيين ، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$$f(x)=x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)$$

لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ ينتج: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty(1-0)=+\infty$

$\ln\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = +\infty$ 206

4) $f(x) = x + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

عندما $x \to -\infty$ نكتب، وعندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = x\left(1 + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-1^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)$ ش.ع.ت $0.\infty$ عدم تعيين، عندما $x \to 0^+$ نكتب:

$f(x) = x + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x) = x + x\ln(x+1) - x\ln x$

لدينا: $\lim_{x\to 0^+} (x\ln x) = 0$ ومنه $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0+0-0 = 0$

5) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

6) $f(x) = \frac{x\ln x}{x+1}$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$ ومنه $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$f(x) = \frac{x\ln x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{\ln x}{1+\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

7) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{0^+} = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

8) $f(x) = x(1 - \ln x)$

$D_f =]0, +\infty[$

$f(x) = x - x\ln x$

لدينا $x \to 0^+$ نجد:

لدينا $\lim_{x \to 0^+} (x\ln x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 - 0 = 0$ ومنه

9) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$D_f =]-\infty, -1[\cup]4, +\infty[$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ln 1 = 0$ ، $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$

10) $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x - 1)$

$D_f =]0, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ من الشكل $0.\infty$ عدم تعيين ، لدينا $x \to +\infty$ نجد:

$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$

11) $f(x) = \frac{x+1}{\ln x}$

$D_f =]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$ ، $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \frac{2}{0^-} = -\infty$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{2}{0^+} = +\infty$

لدينا $x \to +\infty$ نجد: $f(x) = \frac{x}{\ln x} + \frac{1}{\ln x}$

ولدينا $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\ln x} = +\infty$ ومنه $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(2) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln x$

$D_f =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$$

تمارين إضافية:

أوجد نهايات كل من الدوال عند a

1) $f(x) = x(\ln x)^2$ $\quad a = 0$

عندما $x \to 0$ نكتب:

$$f(x) = \left[\sqrt{x}\ln x\right]^2 = \left[\sqrt{x}\,\ln(\sqrt{x})^2\right]^2 \Rightarrow$$

$$f(x) = \left[2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})\right]^2$$

بما أن

$$\lim_{x \to 0^+} (\sqrt{x}\cdot\ln\sqrt{x}) = \lim_{t \to 0} t\cdot\ln t = 0$$

فإن $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

2) $f(x) = \dfrac{\ln(x-2)}{x-3}$ $\quad a = +\infty \;,\; a = 3$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-3}\cdot\frac{x-2}{x-2} = \frac{\ln(x-2)}{x-2}\cdot\frac{x-2}{x-3}$$

بما أن:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x-2)}{x-2} = \lim_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

فإن $\lim_{x \to +\infty} f(x) = (0)(1) = 0$

عندما $x \to$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x-3)}{x-3}$$

بما أن $\lim_{x \to} \dfrac{\ln(1+x-3)}{x-3} = \lim_{t \to 0} \dfrac{\ln(1+t)}{t} = 1$

فإن $\lim_{x \to 3} f(x) = 1$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)-y_d$	‖	$+$	0	$-$	
الوضع النسبي	‖	(C) فوق d		(C) تحت d	

$(1,2)$ نقطة مشتركة بين (C) و d

3) $f(x) = \dfrac{\ln(2-x)}{x^2-x}$ عند (1)

عندما $x \to 1$ نكتب:

$$f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x(x-1)} = \frac{\ln(1+1-x)}{-x(1-x)} = \frac{1}{-x} \cdot \frac{\ln(1+1-x)}{(1-x)}$$

وبما أن

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln(1+1-x)}{(1-x)} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

فإن

$$\lim_{x\to 1} f(x) = -1$$

4) $f(x) = 1 + x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ عند (0) و عند $+\infty$

عندما $x \to +\infty$ نكتب:

$$f(x) = 1 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

وبما أن

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$$

فإن

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1+1 = 2$$

عندما $x \to 0^+$ نكتب:

$$f(x) = 1 + x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \Rightarrow f(x) = 1 + x\ln(x+1) - x\ln x$$

وبما أن $\lim_{x\to 0} x\ln x = 0$

فإن $\lim_{x\to 0} f(x) = 1+0-0 = 1$

$\frac{3}{165}$) ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I =]0,+\infty[$ وفق $f(x) = x+1-\frac{\ln x}{x}$

1) لماذا المستقيم d الذي معادلته $y=x+1$ مقارب للخط (C) ؟

2) ادرس الوضع النسبي للخطين d و (C)

1) $f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{x}$

لأنه $\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0\right.$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y_d\right] = 0$$ مايؤول للانهاية حسب I

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

2) وضع (C) مع d:

$f(x) - y_d = -\frac{\ln x}{(x)}$ ، $f(x)-y_d = 0 \Rightarrow -\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 0$

$x = 1$ ، $f(1) = 2$

$C = I$ موجب دائماً من المجال الجواب

$\ln 2$

$\ln 3 \approx 1.1$ $\downarrow +0.4$

$\ln 4 \approx 1.5$

21'0 / /

(23/27

$I:]0,+\infty[$, $f(x) = x - \ln(2+\frac{1}{x})$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولا بها

f معرفة ومستمرة واشتقاقية على $]0,+\infty[$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = 1 - \frac{-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}} \Rightarrow f'(x) = 1 + \frac{1}{2x^2+x} > 0$

x	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	‖		+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$1-\ln 3$	$2-\ln(\frac{5}{2})$	$+\infty$

② أثبت أن $d: y = x - \ln 2$ مائل مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

$f(x) - y_d = x - \ln(2+\frac{1}{x}) - x + \ln 2 \Rightarrow f(x) - y_d = \ln 2 - \ln(2+\frac{1}{x})$

$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_d] = \ln 2 - \ln 2 = 0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

③ ادرس الوضع النسبي لـ (C) مع d

$f(x) - y_d = \ln 2 - \ln(2+\frac{1}{x}) < 0$

لأنه $2 < 2 + \frac{1}{x}$ أيا يكن $x \in I$

$\ln 2 < \ln(2+\frac{1}{x})$

ومنه (C) تحت d أيا يكن $x \in I$

④ أثبت أن للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد α ينتمي للمجال $]1,2[$

$f(1) = 1 - \ln 3 < 0$

$f(2) = 2 - \ln(\frac{5}{2}) > 0$

من جدول التغيرات: f مستمر ومتزايد تماما على المجال $]1,2[$

$0 \in f(]1,2[) =]1-\ln 3, 2-\ln(\frac{5}{2})[$

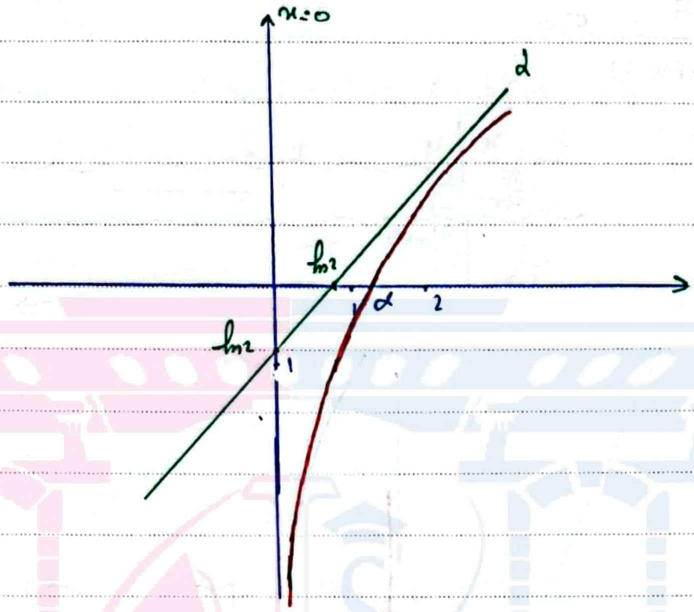
إذاً للمعادلة $f(x)=0$ حل وحيد $\alpha \in]1,2[$

/ /

(5) ارسم في معلم واحد المستقيم d و الخط (C)

نرسم $d: y = x - \ln 2$

x	0	$\ln 2$
y	$-\ln 2$	0



$\left(\frac{24}{177}\right.$ $\quad f(x) = 5 - 2x + 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$, $I =]4, +\infty[$

(1) أثبت أن $d: y = 5 - 2x$ مقارب للخط (C)

$f(x) - y_d = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - y_d] = 3\ln 1 = 0$$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

(2) وضع (C) مع d:

$f(x) - y_d = 3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$

لدينا: $x+1 > x-4$ أيا يكن $x \in I$

ومنه $\frac{x+1}{x-4} > 1$ ومنه $\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$

ومنه

$$3\ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right) > 0$$

ومنه (C) فوق d أيا يكن $x \in I$

(3) ادرس تغيرات f ونظم جدولا لها ثم ارسم في معلم واحد المستقيم d و الخط (C)

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]4, +\infty[$

$\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ ومنه $x = 4$ مقارب شاقولي لـ (C)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$$

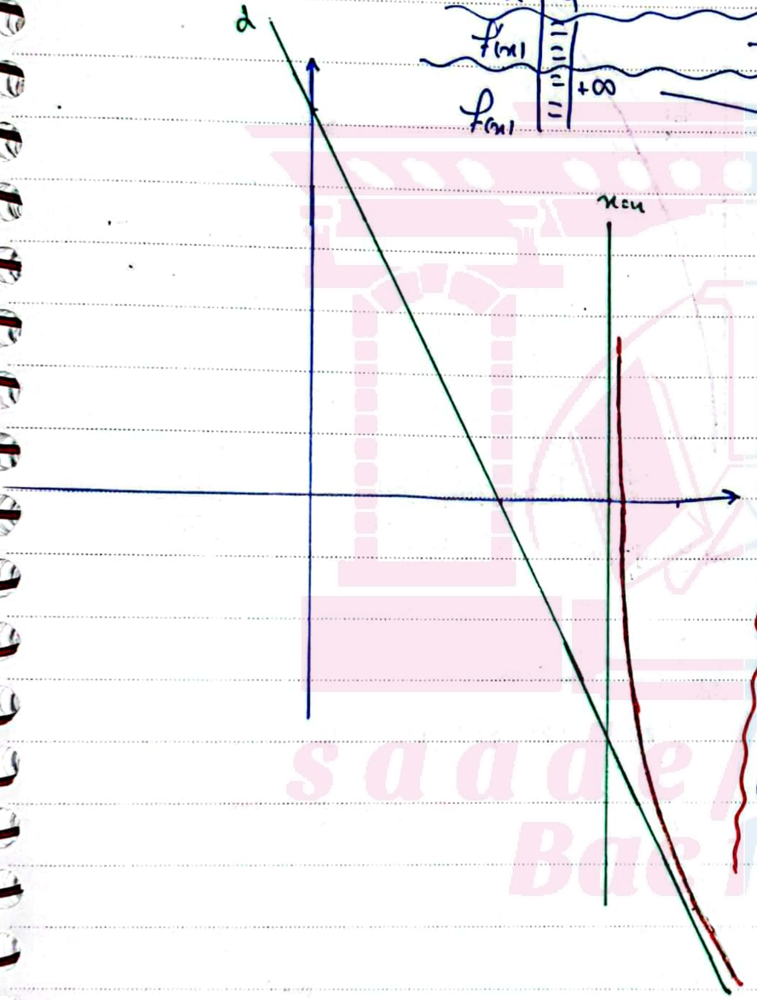
$\frac{71}{172}$ $\frac{28}{178}$

$\boxed{212}$

$$f'(x) = -2 + 3 \cdot \frac{\left(\frac{x+1}{x-4}\right)'}{\left(\frac{x+1}{x-4}\right)} \Rightarrow f'(x) = -2 + 3 \cdot \frac{-5}{(x-4)^2} \cdot \frac{x-4}{x+1}$$

$$f'(x) = -2 - \frac{15}{(x-4)(x+1)} < 0$$

x	4	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$
$f(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$ $-\infty$



نرسم $d: y = 5 - 2x$

x	0	$\frac{5}{2}$
y	5	0

4) أثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد α، احصره في مجال طوله سِ دي.

من جدول التغيرات:

f مستمر ومتناقص تماماً على $]4, +\infty[$

$0 \in f(]4,+\infty[) =]-\infty, +\infty[$

إذاً المعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in]4, +\infty[$

* نبدأ بالتجريب بدءاً من مجموعة التعريف

إذاً خلصت $f(5) > 0$ يكون محصور بين 4 و 5

$f(5) = -5 + 3\ln 6 > 0$

$f(6) = -7 + 3\ln\left(\frac{7}{2}\right) < 0$

$\alpha \in]5, 6[$

$\left(\frac{21}{177}\right.$ $I =]1, +\infty[$, $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1, +\infty[$

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty \Rightarrow$ $x = 1$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

213

دو هي مقابلات

$$f'(x) = 1 + 2\,\frac{\left(\frac{x}{x-1}\right)'}{\frac{x}{x-1}} = 1 + 2 \cdot \frac{-1}{(x-1)^2} \cdot \frac{x-1}{x} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{2}{x(x-1)}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}, \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

إما $x = -1$ مرفوض أو $x = 2$ مقبول

$$f(2) = 3 + 2\ln 2$$

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

① أثبت أنّ $d: y = x+1$ مقارب لـ (C) بجوار $+\infty$

$$f(x) - y_d = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - y_d\right] = 2\ln(1) = 0$$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

③ ادرس وضع (C) مع d

$$f(x) - y_d = 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$

لأنّ $x > x-1$ أيا كان $x \in I$

$$\frac{x}{x-1} > 1$$

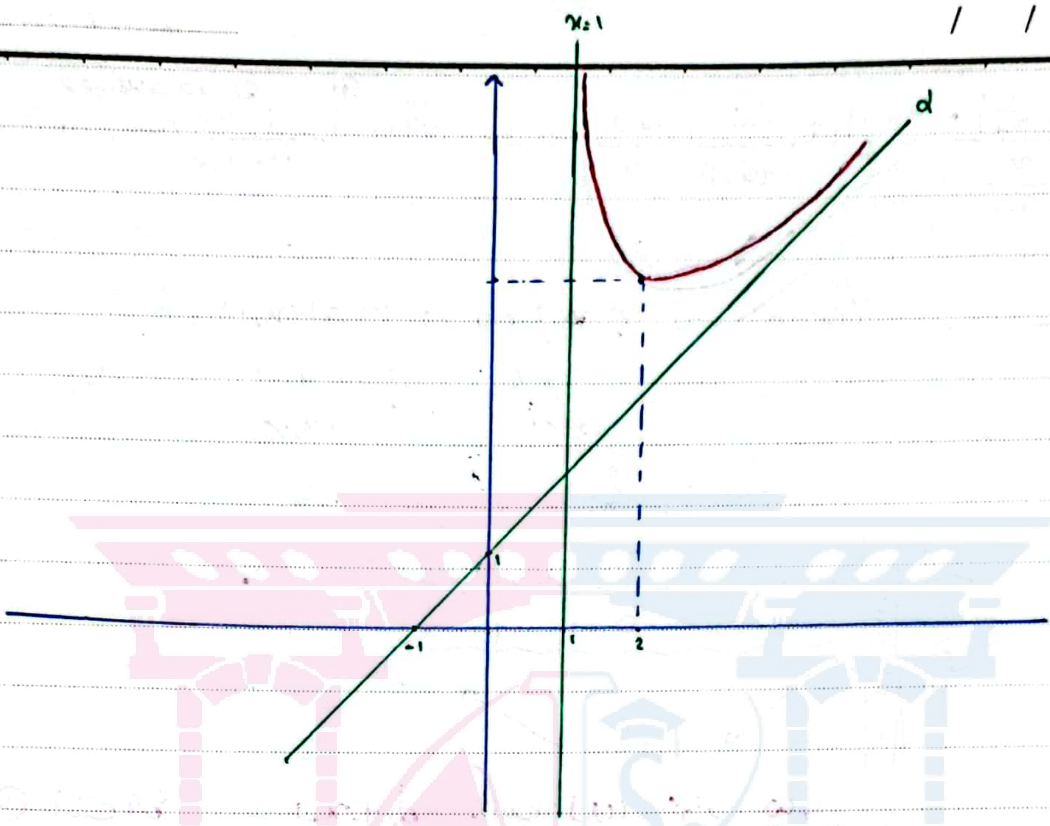
$$\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0 \Rightarrow 2\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) > 0$$ ومنه (C) فوق d أيا كان $x \in I$

④ ارسم d ثم (C)

نرسم $d: y = x+1$

x	y		
0	1	$\Rightarrow$	$(0,1)$
-1	0	$\Rightarrow$	$(-1,0)$

ALADIB



28/173) $f(x) = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$, $I =]0,+\infty[$

① احسب النهايات عند الأطراف ، ما المقاربات ؟

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

ومنه $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

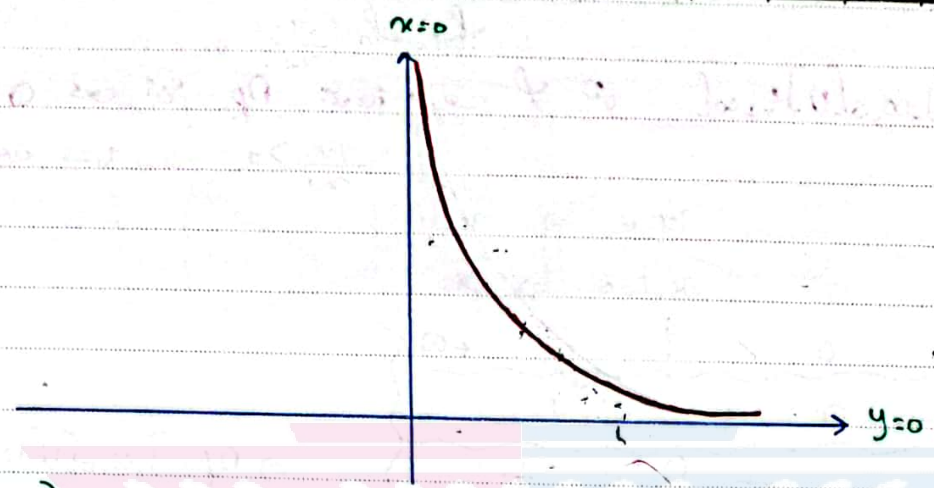
② ادرس تغيرات f ثم ارسم (C)

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x) = \dfrac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x^2+x} + \dfrac{1}{(x+1)^2}$

$f'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)}_{(x+1)} + \dfrac{1}{(x+1)^2}_{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{x(x+1)^2} < 0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	0



للتمرين $\frac{22}{177}$) ليكن C الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-4+\ln\left[\frac{x}{x+1}\right]$

① أثبت أن f متزايد تماماً على I

$f'(x)=1+\dfrac{\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{\frac{x}{(x+1)}}=1+\dfrac{1}{x(x+1)}$ (f اشتقاقي على I)

$f'(x)=\dfrac{x(x+1)+1}{x(x+1)}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x}$

$f'(x)=0 \Rightarrow x^2+x+1=0 \quad , \Delta=-3<0$

مستحيلة الحل

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x(x+1)}>0$

ومنه f متزايد تماماً على I

② أثبت أن $d: y=x-4$ مقارب مائل ③ وادرس الوضع النسبي

$f(x)-y_d=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

لأن $x<x+1$

$\ln x<\ln(x+1)$

$\ln x-\ln(x+1)<0$

$\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)<0$ ومنه C تحت d

$f(x)-y_d=\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-y_d)=\ln(1)=0$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

④ ارسم في معلم d ثم (C)

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\ln(0)=-\infty$

ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

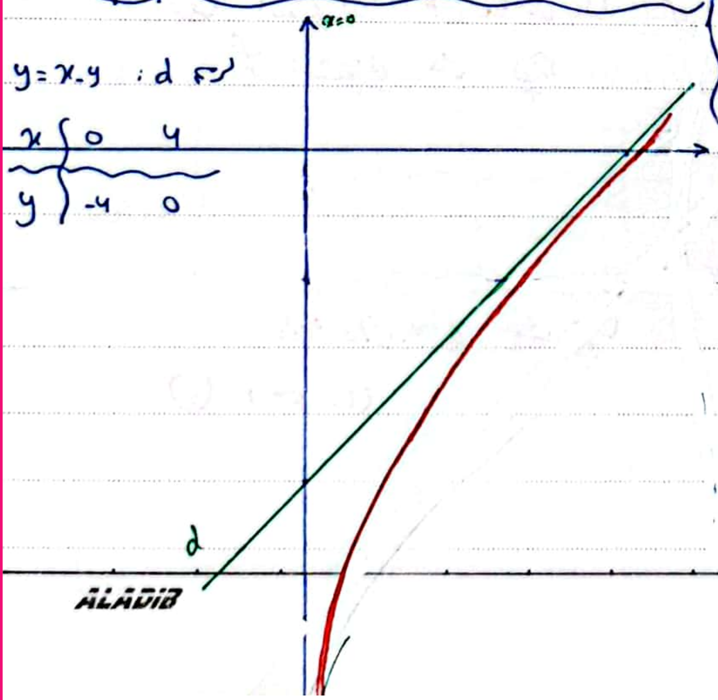
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2+x}>0$

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

لرسم $d: y=x-4$

x	0	4
y	-4	0



$f(x) = \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)$ $\left(\frac{26}{178}\right.$

① تحقق أن D_f مجموعة تعريف f هي $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

f معرف عندما : $\frac{2x}{x-1} > 0$

$2x=0 \Rightarrow x=0$

$x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$2x$		−	0	+		+	
$x-1$		−		−	0	+	
إش		+	0	−	‖	+	
المراجحة		مقبول				مقبول	

$\Rightarrow D_f =]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$

② احسب نهاية f عند أطراف مجموعة تعريف D_f

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ln 2$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ln 2$

$\Rightarrow$ $y=\ln 2$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $-\infty$ و بجوار $+\infty$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = -\infty$ ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ ومنه $x=1$ مقارب شاقولي لـ (C)

③ أثبت أن f متناقص تماما على كل من مجالي D_f

f اشتقاقي على D_f

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{2x}{x-1}\right)'}{\frac{2x}{x-1}} = \frac{2x-2-2x}{\cancel{(x-1)^2}} \cdot \frac{\cancel{x-1}}{2x}$$

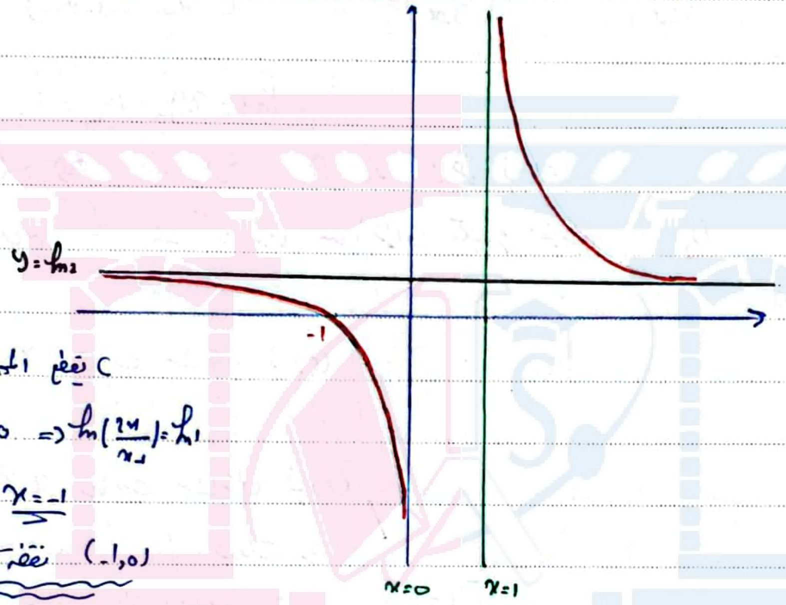
$$f'(x) = \frac{-\cancel{2}}{\cancel{2}x(x-1)} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{x(x-1)} < 0$$

لأن $x(x-1)>0$ على D_f

④ ارسم (C)

/ /

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||		||	$-$	
$f(x)$	$\ln 2$ ↘		$-\infty$ ||		|| $+\infty$	↘	$\ln 2$



$y=0$ تقطع المحور xx' C

$\ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)=0 \Rightarrow \ln\left(\frac{2x}{x-1}\right)=\ln 1$

$2x = x-1 \Rightarrow \underline{x=-1}$

نقطة التقاطع $(-1,0)$

27/178) ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على بالعلاقة $f(x)=\ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right)$

① تحقق أن مجموعة تعريف f ولتكن D_f هي $]1,3[$

f معرف عندما $\frac{x-1}{3-x}>0$

$3-x=0 \Rightarrow x=3$, $x-1=0 \Rightarrow x=1$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-x$		$+$		$+$	0	$-$	
الكسر		$-$	0	$+$	||	$-$	
المتراجحة		مرفوض		مقبول	||	مرفوض	

$\Rightarrow D_f =]1,3[$

② أثبت أنه $(4-x)\in D_f$ أياً يكن x من D_f + ③ ....

تعديل. ② أثبت أنه $A(2,0)$ مركز تناظر لـ (C)

أياً يكن $x\in]1,3[$ فإن $2x_0-x = 4-x \in]1,3[$ ①

لأنّ
$$\begin{cases} x \in]1,3[\\ -x \in]-3,-1[\\ 4-x \in]1,3[\end{cases}$$
محقق

② $f(2x_0 - x) + f(x) = 2y_0$

$$L_1 = f(4-x) + f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x-1}\right) + \ln\left(\frac{x-1}{3-x}\right) = \ln\left[\frac{3-x}{x-1} \cdot \frac{x-1}{3-x}\right]$$

$L_1 = \ln 1 = 0 = 2y_0 = L_2$ محقق

من ① و ② نجد أنّ A مركز تناظر لـ (C)

③ احسب نهاية f عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه D_f

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$ ومنه $x=1$ مقارب شاقولي لـ (C)

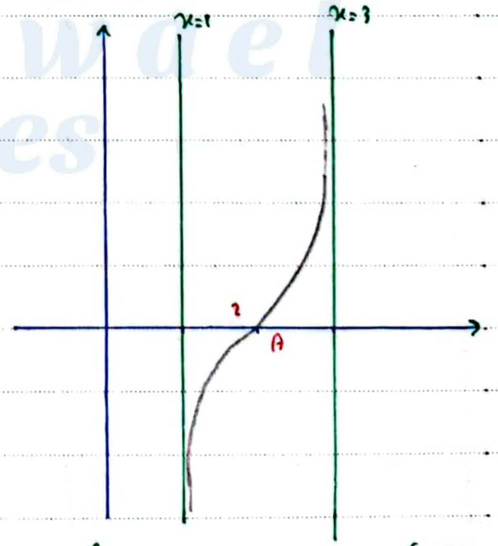
$\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty$ ومنه $x=3$ مقارب شاقولي لـ (C)

④ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,3[$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x-1}{3-x}\right)'}{\frac{x-1}{3-x}} = \frac{2}{(3-x)^2} \cdot \frac{3-x}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{(3-x)(x-1)} > 0$$

x	1		3
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$



$\frac{25}{178}$) $f(x) = x + \ln(x^2 - 1)$ $\qquad I =]1, +\infty[$

1) أثبت أنّ f تزايدية على I

f اشتقاقي على I

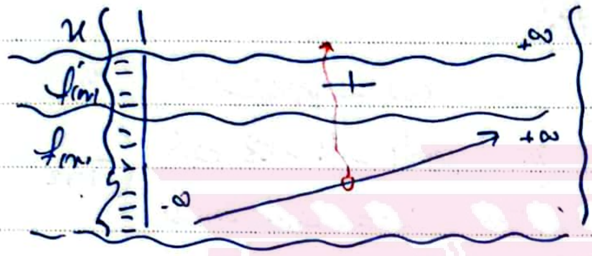
$$f'(x) = 1 + \frac{2x}{x^2-1} > 0$$

(لأنّ $x \in I$ أيا يكن $\frac{2x}{x^2-1} > 0$ و $1 > 0$)

④ أثبت أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]1,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=-\infty$



f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,+\infty[$

$0\in f(]1,+\infty[)=]-\infty,+\infty[$

إذاً المعادلة $f(x)=0$ لها حل وحيد

$\alpha\in]1,+\infty[$

⑤ أثبت أن $1<\alpha<\sqrt{1+\frac{1}{e}}$

$$f\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{e}}\right)=\sqrt{1+\tfrac{1}{e}}+\ln\left(\tfrac{1}{e}\right)=\sqrt{1+\tfrac{1}{e}}-1>0$$

f مستمر ومتزايد تماماً على المجال $]1,\sqrt{1+\frac{1}{e}}[$

$$0\in f\left(]1,\sqrt{1+\tfrac{1}{e}}[\right)=]-\infty,\sqrt{1+\tfrac{1}{e}}-1[$$

إذاً $\alpha\in]1,\sqrt{1+\frac{1}{e}}[$ $\Leftarrow$ $1<\alpha<\sqrt{1+\frac{1}{e}}$

$\frac{6}{171}$) أثبت أن المستقيم الذي معادلته $y=x-1$ مقارب للخط البياني للتابع $f:x\longrightarrow x-x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ في جوار $+\infty$

$d: y=x-1$

$$f(x)-y_d=x-x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)-x+1=1-x\ln\left(1+\tfrac{1}{x}\right)=1-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

نعلم أن
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to0}\frac{\ln(1+t)}{t}=1$$

فإن
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-y_d]=1-1=0$$

ومنه d مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

$\frac{7}{171}$) نتأمل التابع f المعرف على المجال $I=]0,+\infty[$ وفق

$$f(x)=\begin{cases}x^2(1-\ln x) & ; x>0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

احسب $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}$ ، واستنتج أن f اشتقاقي عند 0

$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x(1-\ln x)-0}{x} = x(1-\ln x) = x-x\ln x$

علماً أن: $\lim_{x\to0^+}(x\ln x)=0$

فإن: $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=0$

نلاحظ أن: $\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \underset{\in\mathbb{R}}{0} = f'(0)$

إذاً f اشتقاقي عند (0)

4/172) كيف نختار العدد الحقيقي m ليكون للمعادلة $x^2-2x+\ln(m+1)=0$ جذران مختلفان؟

المعادلة معرفة عندما $m+1>0 \Leftarrow \{m>-1\}$ ①

$x^2-2x+\ln(m+1)=0$

$\Delta = 4-4\ln(m+1) = 4[1-\ln(m+1)]$

يكون للمعادلة جذران مختلفان عندما $\Delta>0$

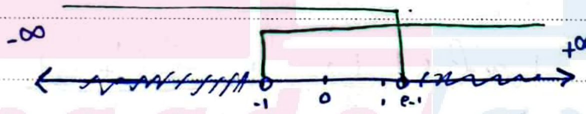
$\Delta>0 \Leftrightarrow 4[1-\ln(m+1)]>0 \overset{\div4}{\Longrightarrow}$

$\Delta>0 \Leftrightarrow 1-\ln(m+1)>0 \Rightarrow -\ln(m+1)>-1$

$\Delta>0 \Leftrightarrow \ln(m+1)<+1 \Rightarrow \ln(m+1)<\ln e$

$\Delta>0 \Leftrightarrow \Rightarrow m+1<e \Rightarrow \{m<e-1\}$ ②

تقاطع ① و ②



(أي) $-1<m<e-1$ $\quad m\in]-1,e-1[$

يكون للمعادلة جذران مختلفان عندما $-1<m<e-1$

5/172) لتكن $(U_n)_{n\geq1}$ متتالية معرفة على N^* وفق $U_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

① جد غاية لهذه المتتالية

② نضع $S_n=U_1+U_2+\dots+U_n$

ⓐ أثبت بالتدريج أن $S_n=\ln(n+1)$

ⓑ ما غاية $(S_n)_{n\geq1}$

① $\lim_{n\to+\infty}U_n=\ln 1=0$

② ⓐ لنبرهن بالتدريج صحة القضية: $E(n): S_n=\ln(n+1)\ ;\ n\geq1$

I) القضية $E(1)$ صحيحة لأن:

$\left.\begin{array}{l} L_1=S_1=U_1=\ln 2 \\ L_2=\ln 2 \end{array}\right\}$ $L_1=L_2$ محققة

/ /

II) نفرض صحة القضية

$E(n): S_n = \ln(n+1) \quad ; n \geq 1$

III) نبرهن صحة القضية

$E(n+1): S_{n+1} = \ln(n+2)$

الإثبات:

$S_{n+1} = S_n + U_{n+1} \Rightarrow S_{n+1} = \ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$S_{n+1} = \ln(n+1) + \ln(n+2) - \ln(n+1) = \ln(n+2) \Rightarrow S_{n+1} = \ln(n+2)$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة ، ومنه القضية $E(n)$ صحيحة أيا $n \geq 1$

(b)

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$

(2 / 1+1

$f(x) = ax + b + \frac{1}{x}\ln x$ معرف على $\mathbb{R}_+^*$

* النقطة $A(1,0)$ هي نقطة من (C) * والمماس للخط (C) في A يوازي المستقيم

$y = 3x + 2$ عين a , b

$A(1,0) \in (C) \Rightarrow f(1) = 0$

$\Rightarrow a + b = 0$ ——— (1)

f اشتقاق على $]0,+\infty[$

$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}\ln x + \frac{1}{x^2}$

ولدينا $m = 3$ ميل المماس لأنه يوازي المستقيم

ومنه $f'(1) = 3$

$f'(1) = 3 \Rightarrow a + 1 = 3$ ------ (2)

من (2) نجد $\boxed{a = 2}$ نعوض في (1) نجد $\boxed{b = -2}$

ومنه $f(x) = 2x - 2 + \frac{1}{x}\ln x$

f,

الانسحاب على الـ ... يحافظ على الإشارة .

... يغير الإشارة .

استنتاجات الخطوط البيانية :

إذا كان C_f الخط البياني لتابع f ، وكان C_g الخط البياني لتابع g عندئذٍ :

1. $g(x) = -f(x) \overset{\text{الفواصل}}{\Longleftrightarrow}$ C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $x'x$

2. $g(x) = f(-x) \overset{\text{الـ x السينية}}{\Longleftrightarrow}$ C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $y'y$

3. $g(x) = -f(-x) \overset{\text{الفو، الـ x، الفو}}{\Longleftrightarrow}$ C_g نظير C_f ⟵ لمبدأ الإحداثيات

4. $g(x) = f(x) + \alpha \overset{\text{ضفنا للـ y} \ \alpha}{\Longleftrightarrow}$ C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u} = +\alpha \vec{j}$ (yy)

5. $g(x) = f(x+\alpha) \overset{\text{ضفنا للـ x} \ \alpha}{\Longleftrightarrow}$ C_g ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{v} = -\alpha \vec{i}$ (xx)

6. $g(x) = |f(x)| \overset{\text{اضفنا قيمة مطلقة للـ g}}{\Longleftrightarrow}$ (كل شيء موجب متخلي محله (فوق)) نقط C_g هي اجتماع نقط C_f ذات التراتيب الموجبة مع نظائر نقط C_f ذات ⟵ السالبة بالنسبة للمحور $x'x$

دورة 2010 :

ليكن (1) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,1[\cup]1,+\infty[$ وفق $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

1) جد نهايات f عند أطراف مجالات تعريفه ثم استنتج معادلة كل مقارب أفقي أو شاقولي

2) أوجد المستقر الفعلي للتابع f

3) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها

4) ارسم مقاربات (1) ثم ارسم (1)

5) استنتج رسم الخط البياني للتابع g المعين بالعلاقة $g(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$

① $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ (لأن $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$)

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (1)

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ (1)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$

$y=0$ مقارب أفقي لـ (1) بجوار $+\infty$

(2) f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,1[\cup]1,+\infty[$

$$f'(x)=\frac{-(x\ln x)'}{(x\ln x)^2}=\frac{-(\ln x+1)}{(x\ln x)^2}\quad,\quad f'(x)=0\Rightarrow \ln x+1=0$$

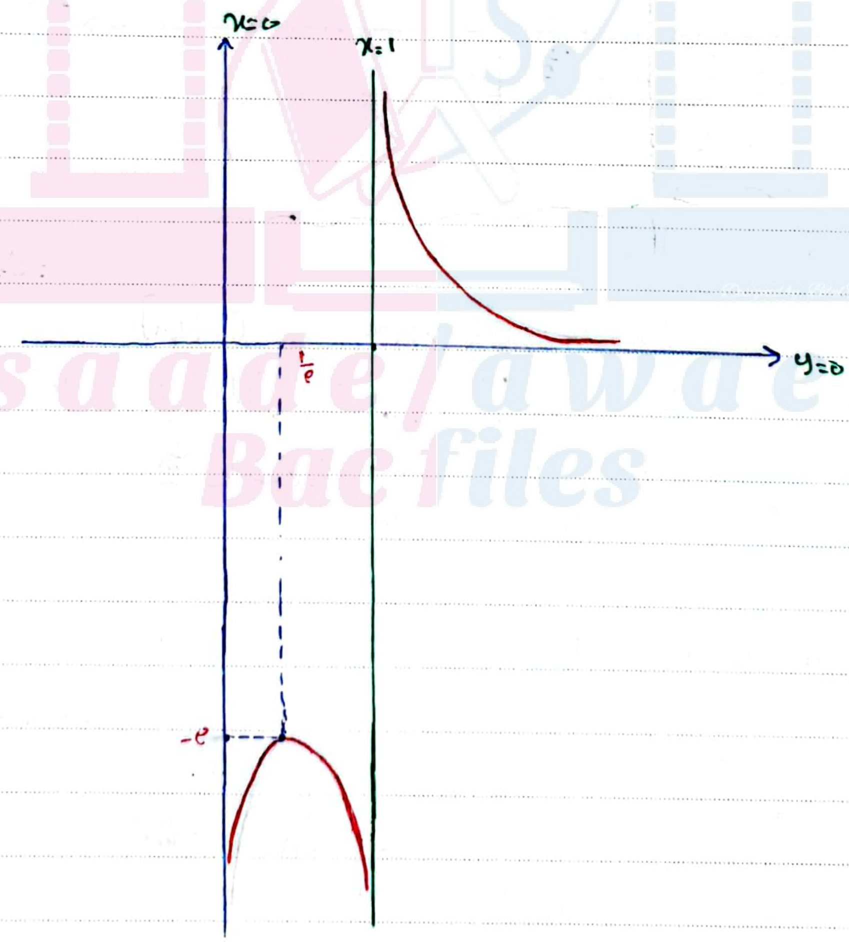
$$\Rightarrow \ln x=-1\Rightarrow x=\frac{1}{e}$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right)=-e$$

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-e$	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	0

المستقر الفعلي $f(D_f)=]-\infty,-e]\cup]0,+\infty[$

(3)



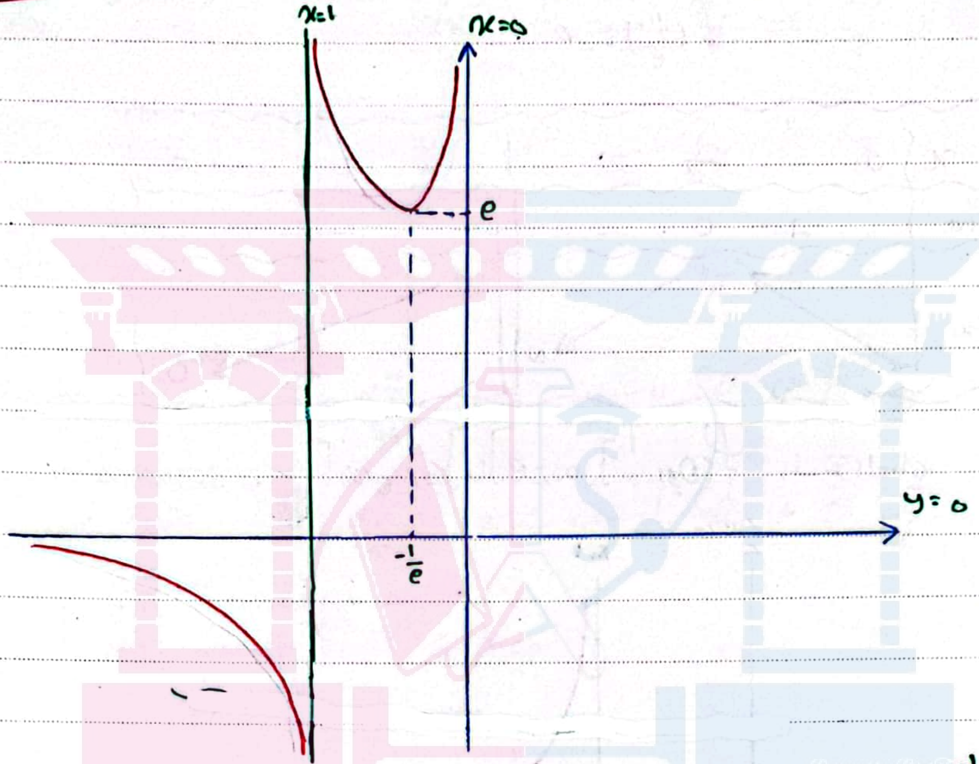
⑤ $g(x) = \frac{1}{x\ln(-x)}$

وبات

$g(x) = \frac{(x)'}{x\ln(-x)} = \frac{1}{x\ln(-x)} \Rightarrow g(x) = -f(x)$

حل ذلك

C_g نظير C_f بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



التمرين الأول :

$f(x) = ax + b + c\ln x$, $I = [1,4]$

عين a , b , c علماً أن $A(1,1)$ نقطة من (C)

وأن $f(2) = 3 - 4\ln 2$ قيمة حدية محلية للتابع f.

• $f(1) = 1 \iff a + b = 1$ --- (1)

• $f(2) = 3 - 4\ln 2 \iff 2a + b + c\ln 2 = 3 - 4\ln 2$ --- (2)

f اشتقاقي على I

• $f'(x) = a + \frac{c}{x}$

لكن $f(2) = 3 - 4\ln 2$ قيمة حدية

فإن $f'(2) = 0$

$f'(2) = 0 \iff a + \frac{c}{2} = 0 \Rightarrow 2a + c = 0$ --- (3)

بالحل نجد $c = -4$, $a = 2$, $b = -1$

التمرين الثالث: $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$, $I=]0,+\infty[$

① احسب $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ ما مقاربات الخط (C)

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim_{x\to +\infty} f(x)$ من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ عدم تعيين ، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}$

بما أنه $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإنه $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ومنه

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

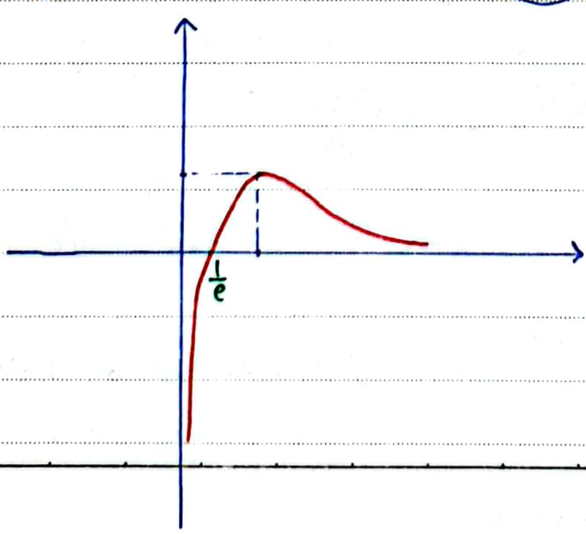
② ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم الخط (C)

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$f'(x)=\frac{1-1-\ln x}{x^2}=\frac{-\ln x}{x^2}$

$f'(x)=0 \Rightarrow \ln x=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=1$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	



نقطة مساعدة:

$f(x)=0 \Rightarrow 1+\ln x=0$

$\Rightarrow \ln x=-1$

$\Rightarrow x=\frac{1}{e}$

حيث a فاصلة نقطة التماس $\quad T: y = f'(a)(x-a)+f(a)$

نعوض بـ $(0,0)$

226

3) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في نقطة تقاطعه مع محور الفواصل

عند التقاطع مع محور الفواصل نجعل $f(x)=0$

فنجد $x=\frac{1}{e}$ ⟸ نقطة التماس $A\left(\frac{1}{e},0\right)$

ميل المماس $f'\left(\frac{1}{e}\right)=e^2$

ومنه معادلة المماس في النقطة $A\left(\frac{1}{e},0\right)$

$$y=e^2\left(x-\frac{1}{e}\right) \Rightarrow y=e^2x-e$$

4) إيجاد معادلة مماس من نقطة مجهولة والمماس يمر من نقطة معلومة

أكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في نقطة منه علما أنه المماس يمر من مبدأ الإحداثيات

بفرض نقطة التماس $B(x_B, f(x_B))$ / $(a, f(a))$

$$B\in(C) \Rightarrow \left(x_B, \frac{1+\ln x_B}{x_B}\right)$$

ومنه معادلة المماس في النقطة B:

$$y-\frac{1+\ln x_B}{x_B} = f'(x_B)(x-x_B) \Rightarrow y-\frac{1+\ln x_B}{x_B} = \frac{-\ln x_B}{x_B^2}(x-x_B)$$

وبما أن المماس يمر من النقطة $\overset{x\ y}{(0,0)}$

فإن: $\frac{-1-\ln x_B}{x_B} = \frac{\ln x_B}{x_B} \Rightarrow -1-\ln x_B = \ln x_B$

ومنه: $2\ln x_B = -1 \Rightarrow \ln x_B = \frac{-1}{2} \Rightarrow$

$$x_B = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{\sqrt{e}}{2}$

$\Rightarrow m = \frac{e}{2}$

حارباليا؟ $\boxed{y=mx}$

$y=\frac{e}{2}x$

ومنه معادلة المماس في النقطة B

$$y-\frac{\sqrt{e}}{2} = \frac{e}{2}\left(x-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

5) اكتب معادلة المماس للمنحنى (C) في نقطة منه ينعدم فيها المشتق الثاني التابع f

f' اشتقاقي على I

$$f''(x) = \frac{-x+2x\ln x}{x^4} = \frac{x(-1+2\ln x)}{x^4} = \frac{-1+2\ln x}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow -1+2\ln x = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$f(\sqrt{e}) = \frac{3}{2\sqrt{e}} \Rightarrow D\left(\sqrt{e}, \frac{3}{2\sqrt{e}}\right)$ نقطة التماس

ميل المماس $f'(\sqrt{e}) = -\frac{1}{2e}$

مفروض بالمشتق الأول وليس الثاني

ومنه معادلة المماس في النقطة D

$$y-\frac{3}{2\sqrt{e}} = -\frac{1}{2e}(x-\sqrt{e})$$

نقول أن التابع g مقصور التابع f إذا وفقط إذا تحقق

$g(x)=f(x)$, $D_g \subset D_f$ ↳ محتواة

$\in$ لا محتواة ولا ينتمي $\not\subset$

18/176) $f(x)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, $I=]-1,1[$

حل 2

$f(-x)=\ln(1-x)-\ln(x+1)$

$f(-x)=-[\ln(x+1)-\ln(1-x)]$

$f(-x)=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$

① اثبت أن f تابع فردي

(1) أياً يكن $x\in I$ فإن $-x\in I$ محقق

(2) $f(-x)=\ln\left(\frac{1-x}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{-1}$

$f(-x)=-\ln\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=-f(x)$

من (1) و (2) نجد أن f تابع فردي

② a) أثبت أن f اشتقاقي على I

$1-x>0$ على I و $x+1>0$ على I

التابع $x\to\frac{x+1}{1-x}$ موجب تماماً على I واشتقاقي على I ⇐ فالتابع f اشتقاقي على I

b) ادرس تغيرات f على المجال $[0,1[$ ، ③ ارسم الخط البياني للتابع f

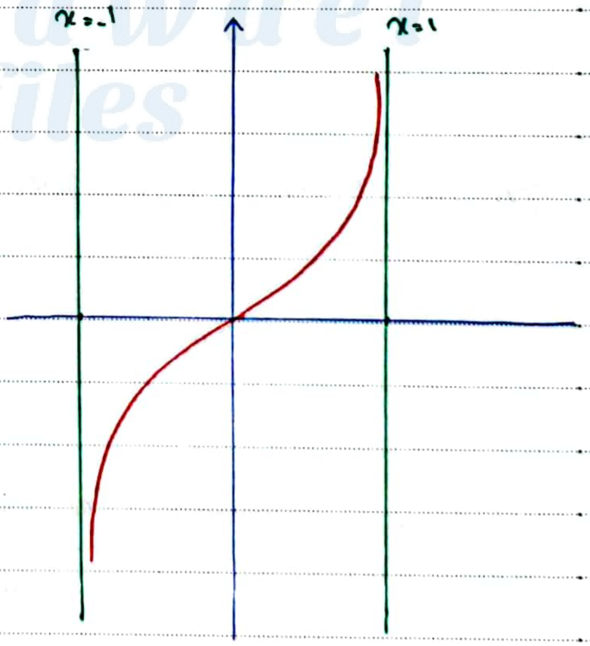
f معرف ومستمر واشتقاقي على $[0,1[$

$f(0)=0$, $\lim_{x\to1^-} f(x)=+\infty$

$x=1$ مقارب شاقولي لـ (C)

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{x+1}{1-x}\right)'}{\frac{x+1}{1-x}}=\frac{1-x+x+1}{(1-x)^2}\cdot\frac{1-x}{x+1}=\frac{2}{(1-x)(x+1)}>0$$

x	0		1
$f'(x)$		+	‖
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖



تمرين: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق $f(x)=x-x\ln x$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ثم ارسم (C)

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0$ (لأنه $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$)

$(0,0)$ نقطة مقاربة

$\lim_{x\to+\infty} f(x)$ من الشكل $\infty-\infty$ عدم تعيين، عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=x(1-\ln x) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

$f'(x)=1-(\ln x+1)=-\ln x$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow f(1)=1$

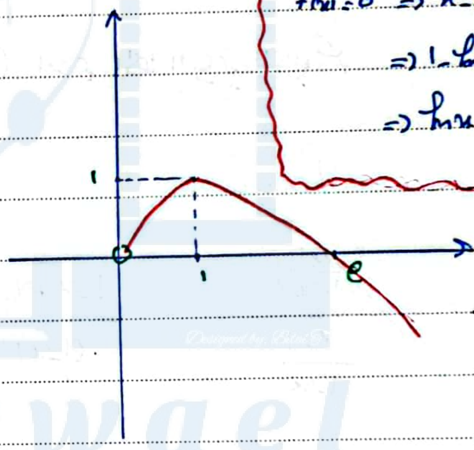
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

نقاط تقاطع C مع $x'x$

$f(x)=0 \Rightarrow x-x\ln x=0$

$\Rightarrow 1-\ln x=0$

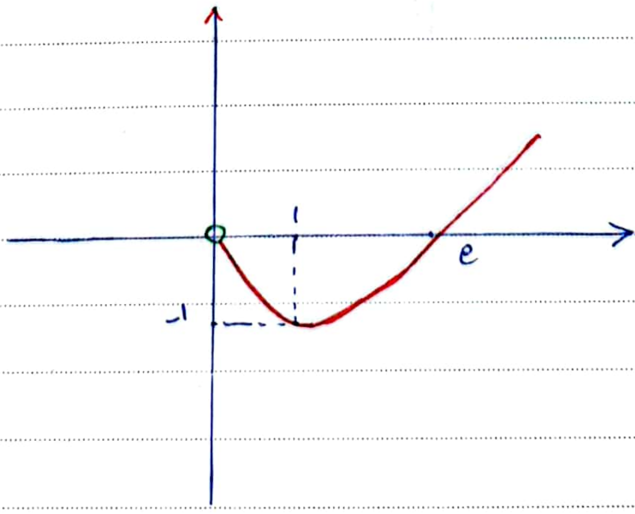
$\Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$



② $g(x)=-x+x\ln x$

$g(x)=-(x-x\ln x) \Rightarrow g(x)=-f(x)$

C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $x'x$



تمرين: ليكن (C) الخط البياني للتابع f المعرف على $]0,+\infty[$ وفق

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$$

① ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها ارسم (C)

② استنتج رسم الخط البياني للتابع $g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

③ استنتج رسم الخط البياني للتابع $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1$

① f معرف واشتقاقي ومستمر على $]0,+\infty[$

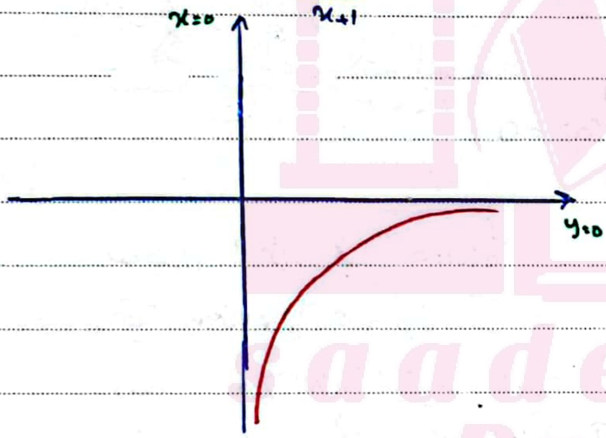
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ln 1 = 0$$

$y=0$ مقارب أفقي لـ (C)

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{x}{x+1}\right)'}{\frac{x}{x+1}} = \frac{1}{(x+1)^2} \cdot \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x(x+1)} > 0$$



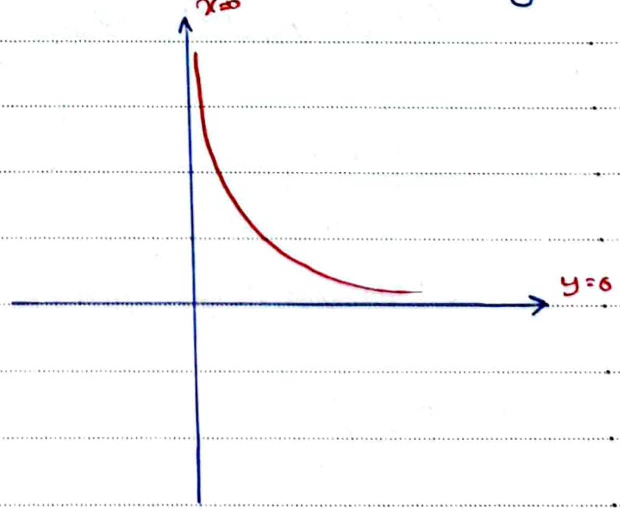
x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0

②

$$g(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-1}$$

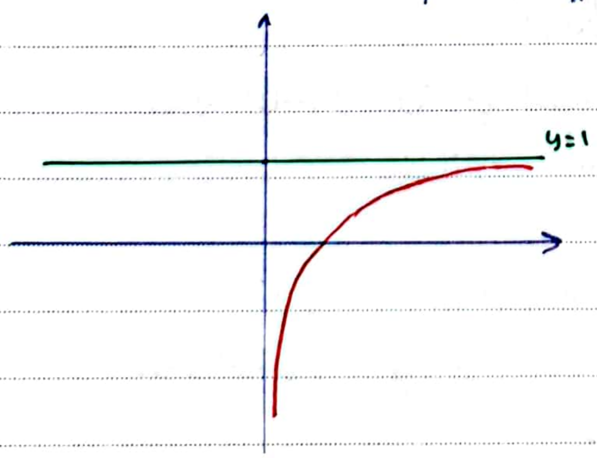
$$g(x) = -\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = -f(x)$$

C_g نظير C_f بالنسبة للمحور $x'x$



③ $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + 1 = f(x) + 1$

C_h ينتج عن C_f بانسحاب شعاعه $\vec{u} = 1\vec{j}$



/ /

$\left(\frac{20}{176}\right.$ ليكن C_f ، C_g هما على التوالي الخطان البيانيان للتابعين f و g المعرفين على المجال $I=]-1,+\infty[$ وفق $f(x)=\ln(x+1)$ ، $g(x)=\frac{x}{x+1}$

① أثبت أنّ $g(x)\leq f(x)$ أياً يكن $x\in I$

② أثبت أنّ C_g ، C_f يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة التي فاصلتها $x=0$

① $g(x)\leq f(x) \iff \frac{x}{x+1}\leq \ln(x+1)$

$$\iff \ln(x+1)-\frac{x}{x+1}\geq 0$$

$$\iff h(x)\geq 0$$

حيث $h(x)=\ln(x+1)-\frac{x}{x+1}$ تابع معرف على المجال $]-1,+\infty[$

ندرس اطراد التابع h : h اشتقاقي على $]-1,+\infty[$

$$h'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$h'(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow h(0)=0$$

x	-1		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

من جدول الاطراد نجد $h(0)=0$ قيمة صغرى محلية على المجال I

ومنه $h(x)\geq 0$ أياً يكن $x\in I$ $\Rightarrow$

أي $\frac{x}{x+1}\leq \ln(x+1)$ أياً يكن $x\in I$

أي $g(x)\leq f(x)$ أياً يكن $x\in I$

② نقطة التماس $(0,0)$ $\Rightarrow$ $f(0)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x+1}$ ، (f اشتقاقي على I)

$f'(0)=1$

معادلة المماس لـ C_f في النقطة $(0,0)$ $\boxed{y=x}$

نقطة التماس $(0,0)$ $\Rightarrow$ $g(0)=0$

$g'(x)=\frac{1}{(x+1)^2}$ ، (g اشتقاقي على I)

$g'(0)=1$

معادلة المماس لـ C_g في النقطة $(0,0)$ $\boxed{y=x}$

إذاً C_g و C_f يقبلان مماساً مشتركاً في النقطة $(0,0)$ ومعادلته $\boxed{y=x}$

30) 17 مسألة دورة:
ليكن f التابع المعرف على $\mathbb{R}_+^*$ ومن $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$

1) ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها
2) لتكن A نقطة من الخط (C) تقاطع (1). أوجد معادلة المماس T للخط (C) في A
3) ارسم في معلم واحد المماس T ومقاربات (C) ثم ارسم (C)

① f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)،

عندما $x\to+\infty$ نكتب:

$f(x)=\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln x}{x}$

لكن: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ فإن: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

ومنه $y=0$ مقارب أفقي لـ (C) بجوار $+\infty$

$f'(x)=\frac{x-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$

$f'(x)=0 \Rightarrow 1-2\ln x=0 \Rightarrow \ln x=\frac{1}{2} \Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

$f(\sqrt{e})=\frac{1}{2e}$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{2e}$	$\searrow$	0

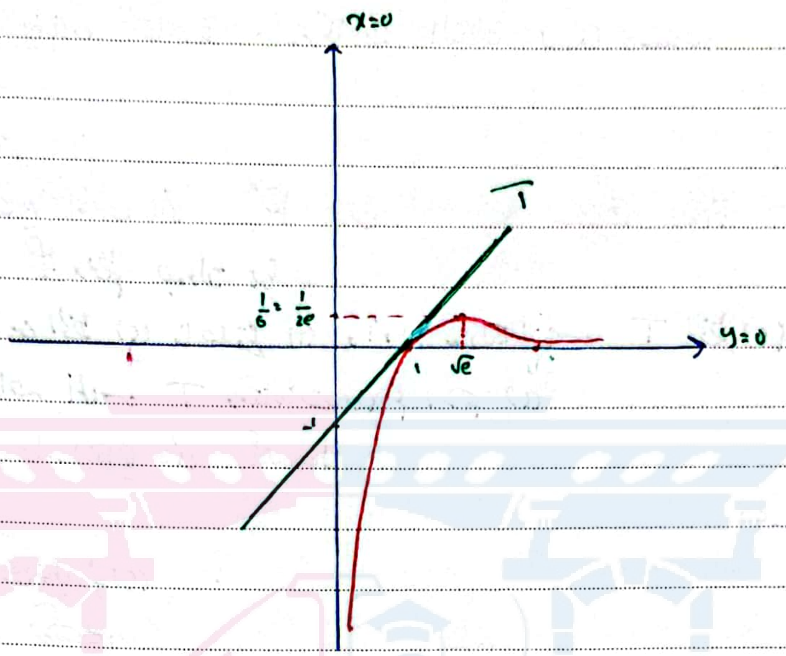
② $f(1)=0 \Leftarrow$ نقطة التقاطع $A(1,0)$

$f'(1)=1$ الميل

ومنه معادلة المماس في النقطة $A(1,0)$

$T: y=1(x-1) \Rightarrow \boxed{T: y=x-1}$

علماً $e \simeq 3$, $\sqrt{e} \simeq 1.7$



$\left(\frac{29}{178}\right.$ في كل من الحالتين الآتيتين ادرس تغيرات التابع f على $I = \mathbb{R}_+^*$ وارسم خطه البياني (c)

1) $f(x) = (x+1) \cdot \ln x$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$x=0$ مقارب شاقولي لـ (c)

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$ (لا نستطيع حله ولا الحكم على إشارته)

نفرض:

$g(x) = f'(x) = \ln x + \frac{x+1}{x}$

ندرس إطراد التابع g :

g اشتقاقي على $]0, +\infty[$

$g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$

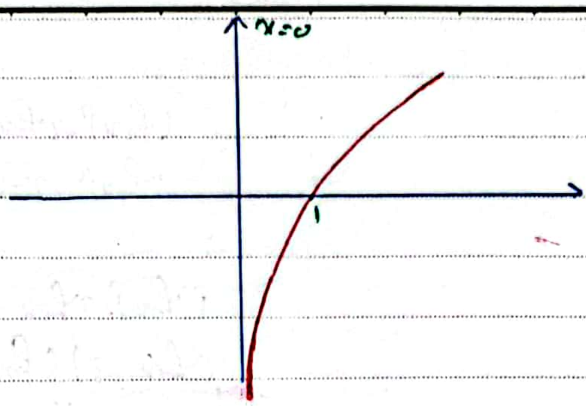
$g'(x) = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1$, $g(1) = 2$

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$f'(x) = g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

من جدول الإطراد نجد أن القيمة $g(1) = 2$ قيمة صغرى محلية $\Rightarrow f'(x) \geq 2 > 0$ أياً يكن $x \in I$

لا ينعدم السطر الأخير من إشارة واحدة (٢) مثال ①
نضع الإشارة حسب طول الصفحة الحدية في السطر الثاني من جدول تغيرات f

ينعدم السطر الأخير بإشارتين مختلفتين) مثال ② نبرهن أنه $f'(x)=0$ له حل وحيد
⇐ توجد الحل تجريبياً " غالباً ما يمكن إيجاده ذهنياً "
ونعوض هذا الحل في التابع f



جدول تغيرات التابع f:

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

$2)\ f(x) = \frac{1}{x} + x\ln x$

f معرف ومستمر واشتقاقي على $]0,+\infty[$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ ($\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x = 0^-$ لأن)

ومنه $x=0$ مقارب شاقولي لـ (C)

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{-1}{x^2} + \ln x + 1$ (نلاحظ وجود حل $x=1$ يعدم المشتق ولكن قد يكون هناك قيمة أخرى)

$f'(x)=0$ ← فنقوم بإثبات أن $x=1$ حل وحيد لـ

نعرف: $g(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \ln x + 1$

g اشتقاقي على $]0,+\infty[$

$g'(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x} = \frac{2+x^2}{x^3} > 0 \Rightarrow$

x	0	تجريبياً ← ①	$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)=f'(x)$	‖ $-\infty$	↗ 0 ↗	$+\infty$

من جدول التغيرات نجد

g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0,+\infty[$

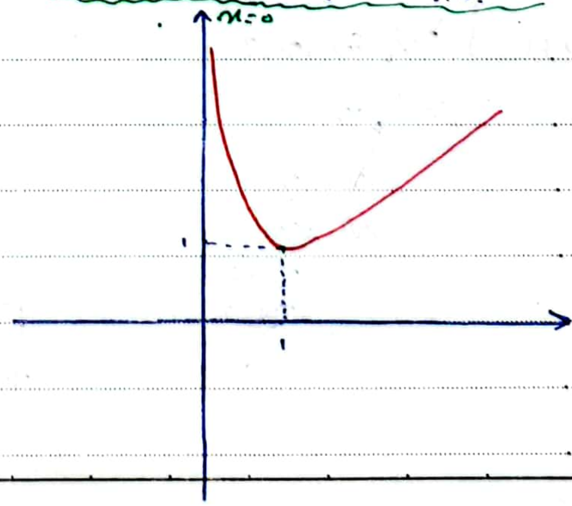
$0 \in g(]0,+\infty[) =]-\infty,+\infty[$

ومنه $f'(x) = g(x) = 0$ له حل وحيد هو $x=1$

$f(1) = 1$ تجريبياً

توجيه النهايات (يجب أن يكون الإشارتين متعاكستين لوجود حل !

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



للتدريب 16، 17 ص 176

16 ص 176 :

حل كل من المعادلة $(\ln x)^2-2\ln x-3=0$

و المتراجحة $(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$

شرط الحل $x>0$

$$(\ln x)^2-2\ln x-3=0$$
$$(\ln x-3)(\ln x+1)=0$$

$\ln x=3$

$\ln x=\ln e^3 \Rightarrow \boxed{x=e^3}$

$\ln x=-1$

$\ln x=\ln e^{-1} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{e}}$

حل المتراجحة $(\ln x)^2-2\ln x-3\geq 0$ بالاستفادة من حل المعادلة

x	0		$\frac{1}{e}$		e^3		$+\infty$
$(\ln x)^2-2\ln x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		مقبول		مرفوض		مقبول	

حلول المتراجحة $S=]0,\frac{1}{e}]\cup[e^3,+\infty[$

17 ص 176 : ليكن $P(x)=2x^3+5x^2+x-2$

a) تحقق أنّ $P(-1)=0$

$P(-1)=-2+5-1-2=0$

b) استنتج أنّ $P(x)$ يكتب $P(x)=(x+1).Q(x)$ حيث $Q(x)$ درجة ثانية

$x=-1$ حل للمعادلة $P(x)=0$ ومنه $(x+1)$ هو أحد العوامل

نجد بالقسمة الإقليدية أنّ $Q(x)=2x^2+3x-2$

كثير حدود درجة ثانية نجعل $P(x)$ بالشكل

$$P(x)=(x+1)(2x^2+3x-2)$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^3+5x^2+x-2 & x+1 \\ \hline -2x^3-2x^2 & 2x^2+3x-2 \\ 3x^2+x & \\ -3x^2-3x & \\ -2x-2 & \\ +2x+2 & \\ 0 \quad 0 & \end{array}$$

c) حل المتراجحة $P(x)\leq 0$

ندرس إشارة $P(x)$.

$P(x)=0 \Rightarrow (x+1)(2x^2+3x-2)=0$

إما $(2x^2+3x-2)=0$ أو $x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$\Delta=9+16=25$

$x_2 = \frac{-3-5}{4} = -2$ و $x_1 = \frac{-3+5}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)\leq 0$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
المتراجحة		محققة		//////		محققة		////	

حلول المتراجحة $P(x)\leq 0$: $]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$

2. استعمل المعلومات السابقة لحل المتراجحة $2\ln x+\ln(2x+5)\leq \ln(2-x)$

$$\underbrace{2\ln x+\ln(2x+5)\leq \ln(2-x)}$$

$x>0$ $\quad 2x+5>0 \quad 2-x>0$

$]0,+\infty[\quad]-\frac{5}{2},+\infty[\quad]-\infty,2[$

ومنه مجموعة تعريف المتراجحة: $D=]0,2[$ ①

$2\ln x+\ln(2x+5)\leq \ln(2-x)$

$\ln x^2+\ln(2x+5)\leq \ln(2-x) \Rightarrow \ln(x^2(2x+5))\leq \ln(2-x)$

$\Rightarrow \ln(2x^3+5x^2)\leq \ln(2-x) \Rightarrow 2x^3+5x^2\leq 2-x$

$2x^3+5x^2+x-2\leq 0 \Rightarrow P(x)\leq 0$

من الطلب السابق نجد مجموعة حلول المتراجحة $P(x)$: $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,\frac{1}{2}]$ ②

وبما أن D (①∩②)

ومنه مجموعة حلول المتراجحة $S=]0,\frac{1}{2}]$