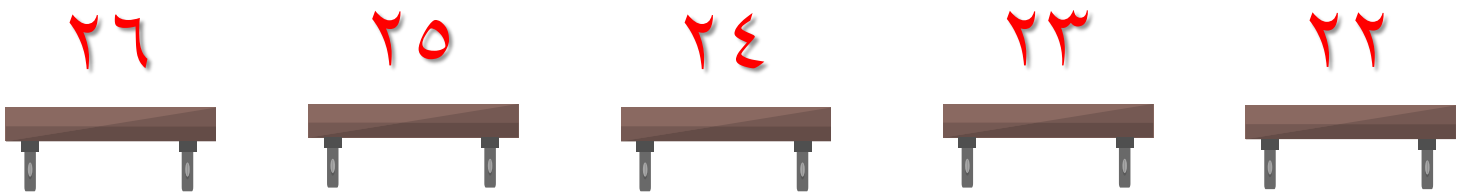
# الفصل ٤

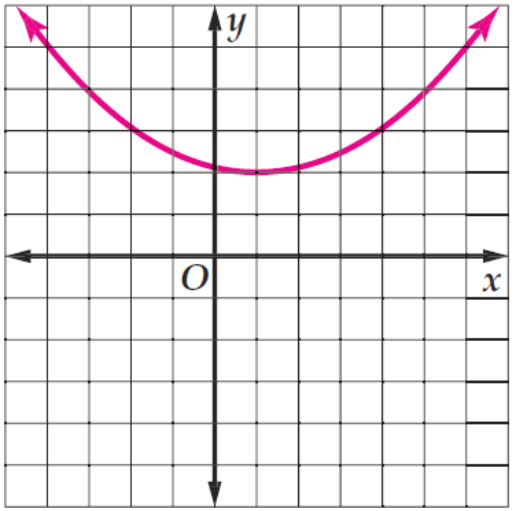
# القطوع المخروطية و المعادلات الوسيطية

# المحتوي



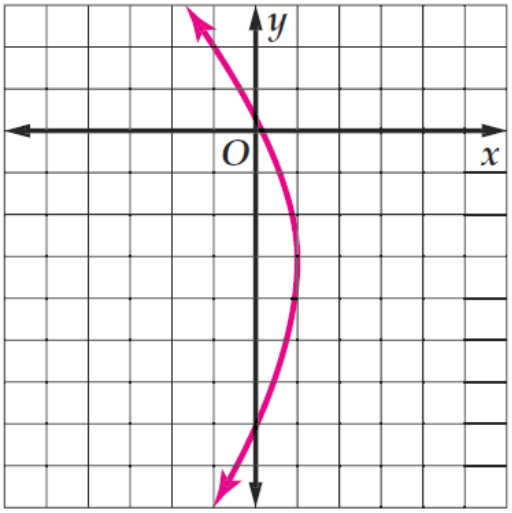
حدِّد خصائص القطع المكافئ المعطاة معادلته في كلٍّ مما يأتي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

**1)** $(x-1)^2 = 8(y-2)$




الرأس $(1, 2)$ ؛ البؤرة $(1, 4)$ ؛
معادلة محور التماثل $x = 1$ ؛
الدليل: $y = 0$

**2)** $y^2 + 6y + 9 = 12 - 12x$

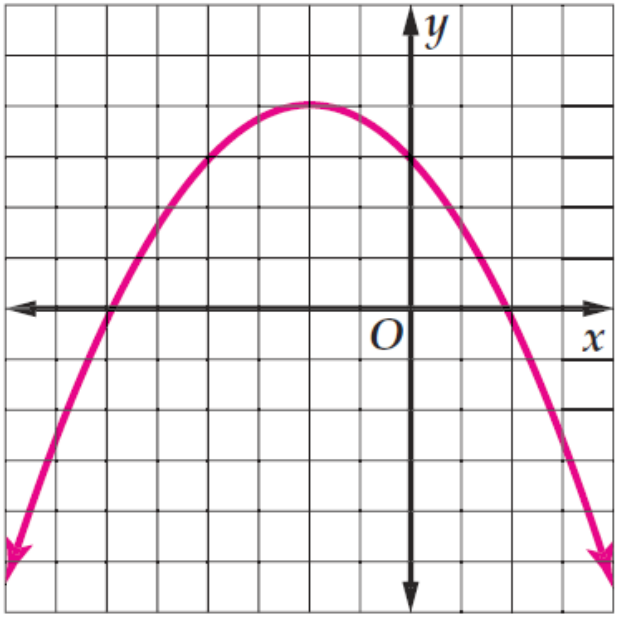



الرأس $(1, -3)$ ؛ البؤرة $(-2, -3)$ ؛
معادلة محور التماثل $y = -3$ ؛
معادلة الدليل $x = 4$

اكتب معادلة القطع المكافئ الذي يحقق الخصائص المعطاة في السؤالين 3, 4 ، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا.

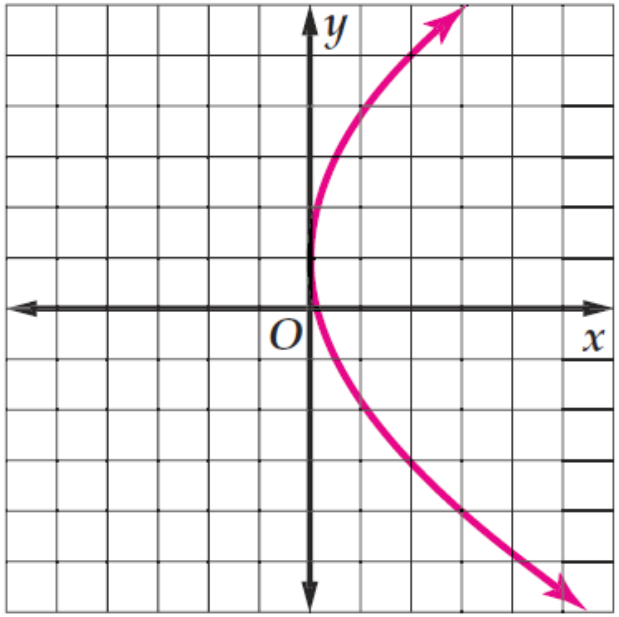
**3)** الرأس $(-2, 4)$ ، والبؤرة $(-2, 3)$

$$(x + 2)^2 = -4(y - 4)$$




**4)** الرأس $(0, 1)$ ؛ مفتوح أفقيًّا إلى اليمين، ويمر بالنقطة $(8, -7)$ .

$$(y - 1)^2 = 8x$$



5) اكتب المعادلة $x^2 + 8x = -4y - 8$ على الصورة القياسية للقطع المكافئ، ثم حدِّد خصائصه.

$$(x+4)^2 = -4(y-2);\ (-4, 2);\ (-4, 1);\ x = -4;\ y = 3$$

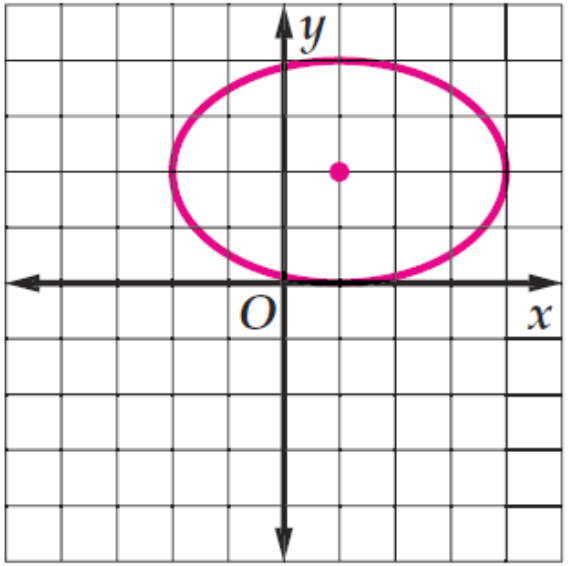
6) **قمر اصطناعي:** افترض أن طبقًا هوائيًّا على شكل قطع مكافئ، بحيث يبعد المستقبل 2 ft عن الرأس، ويقع في البؤرة. وافترض أن الرأس عند نقطة الأصل، وأن الطبق موجّه إلى أعلى. أوجد معادلةً تمثِّل مقطعًا عرضيًّا للطبق.

$$x^2 = 8y$$

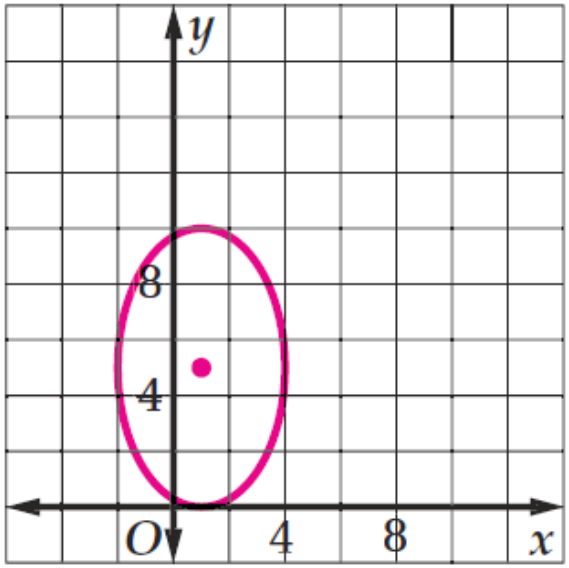
## 4-2 القطوع الناقصة والدوائر

حدِّد خصائص القطع الناقص المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

**1)** $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$




**2)** $25x^2 + 9y^2 - 50x - 90y + 25 = 0$



اكتب معادلة القطع الناقص الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

**3)** الرأسان $(4,6)$ , $(-12,6)$ ، و البؤرتان $(2,6)$ , $(-10,6)$

$$\frac{(x+4)^2}{64}+\frac{(y-6)^2}{28}=1$$

**4)** البؤرتان $(-2,7)$ , $(-2,1)$ ، وطول المحور الأكبر 10 وحدات.

$$\frac{(y-4)^2}{25}+\frac{(x+2)^2}{16}=1$$

حدّد الاختلاف المركزي للقطع الناقص المعطاة معادلته في السؤالين الآتيين:

**5)** $\dfrac{(x+1)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$

$\dfrac{3}{5}$

**6)** $\dfrac{(y+2)^2}{64}+\dfrac{(x+1)^2}{9}=1$

$\dfrac{\sqrt{55}}{8}$

اكتب معادلة الدائرة التي تحقق الخصائص المعطاة في كل مما يأتي:

**7)** المركز $(-6, 1)$، والقطر 8 . $(x+6)^2+(y-1)^2=64$

**8)** المركز هو نقطة الأصل، ونصف القطر 3 . $x^2+y^2=9$

**9)** النقطتان $(-4, 1)$, $(2, 3)$ طرفا قطر فيها. $(x+1)^2+(y-2)^2=40$

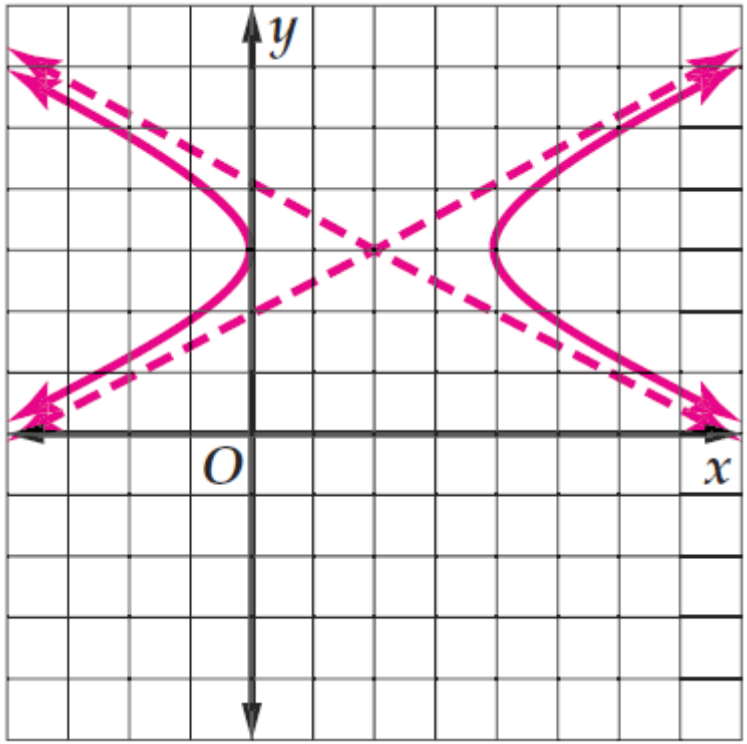
**10) نجارة:** يُستعمل قوس على شكل نصف قطع ناقص لتصميم لوحة رأسية لإطار سرير، ويساوي ارتفاع اللوحة الرأسية عند المركز 2 ft ، وعرضها 5 ft عند القاعدة. فأين يجب أن يضع النجار البؤرتين لتصميم اللوحة؟

1.5 ft على جانبي المركز

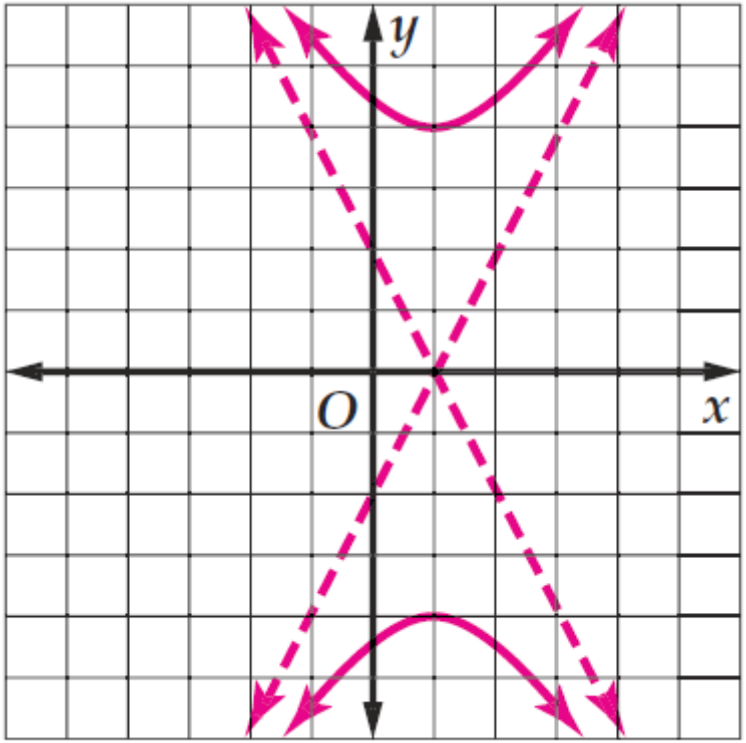
## 4-3 القطوع الزائدة

حدِّد خصائص القطع الزائد المعطاة معادلته في كلٍّ مما يلي، ثم مثِّل منحناه بيانيًّا:

**1)** $x^2 - 4y^2 - 4x + 24y - 36 = 0$



$$\frac{y^2}{16} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1 \quad \textbf{(2}$$



اكتب معادلة القطع الزائد الذي يحقق الخصائص المعطاة في كلٍّ مما يأتي:

**3)** الرأسان $(4, 6), (-10, 6)$، والبؤرتان $(6, 6), (-12, 6)$

$$\frac{(x+3)^2}{49} - \frac{(y-6)^2}{32} = 1$$

**4)** البؤرتان $(0, -4), (0, 6)$، وطول المحور القاطع 8 وحدات.

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$$

**5)** حدّد الاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x-7)^2}{36} - \frac{(y+10)^2}{121} = 1$

$$\frac{\sqrt{157}}{6}$$

6) **صوت:** المسافة بين بيتي صديقين ميلٌ واحدٌ، وقد سمعا صوت طائرة في أثناء حديثهما معًا على الهاتف، وقد سمع أحدهما الصوت قبل الآخر بثانيتين. إذا كانت سرعة الصوت 1100 ft/s ، فاكتب معادلة القطع الزائد الذي يحدِّد موقع الطائرة.

$$\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$$

## 4-4 تحديد أنواع القطوع المخروطية ودورانها

حدِّد نوع القطع المخروطي الذي تمثِّله كل معادلة مما يأتي دون كتابتها على الصورة القياسية:

**1)** $5x^2 + xy + 2y^2 - 5x + 8y + 9 = 0$

قطع ناقص

**2)** $16x^2 - 4y^2 - 8x - 8y + 1 = 0$

قطع زائد

**3)** $4x^2 + 8xy + 4y^2 + x + 11y + 10 = 0$

قطع مكافئ

**4)** $2x^2 + 4y^2 - 3x - 6y + 2 = 0$

قطع ناقص

استعمل قيمة $\theta$ المعطاة لكتابة الصورة القياسية لكل معادلة مما يأتي في المستوى $x'y'$ ، ثم حدّد نوع القطع المخروطي الذي تمثّله:

**(5** $xy = 1;\ \theta = \frac{\pi}{4}$

$\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(y')^2 - 1 = 0$

قطع زائد

**(6** $x^2 + 5xy - y^2 - 5 = 0;\ \theta = 90°$

$\frac{(y')^2}{5} - x'y' - \frac{(x')^2}{5} = 1$

قطع زائد

اكتب معادلة القطع المخروطي لكلٍّ مما يأتي في المستوى $xy$ بناءً على معادلته المعطاة في المستوى $x'y'$ والزاوية $\theta$ .

7) $(x')^2 = 16(y'); \theta = 45°$

8) $\frac{(x')^2}{25} - \frac{(y')^2}{4} = 1; \theta = \frac{\pi}{3}$

$x^2 + 16\sqrt{2}x + 2xy - 16\sqrt{2}y + y^2 = 0$

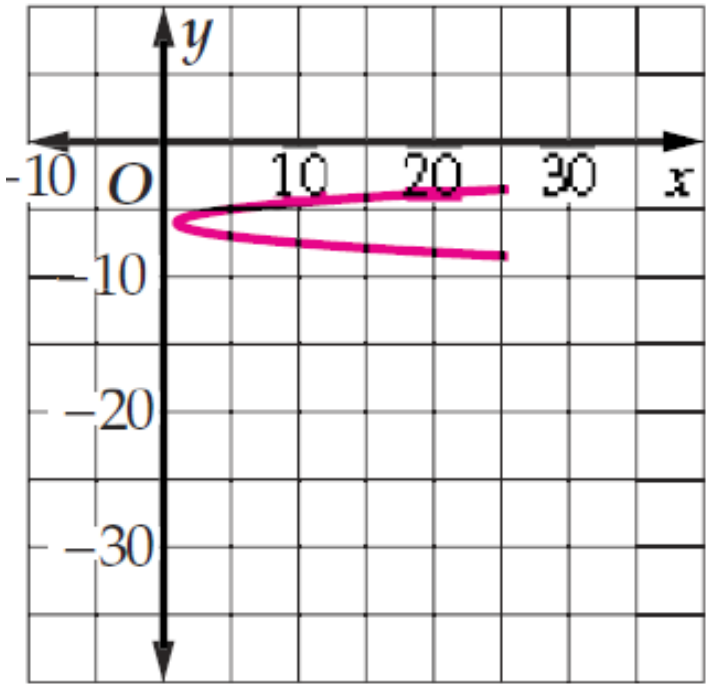
$-71y^2 + 58\sqrt{3}xy - 13x^2 = 400$

9) **اتصالات:** إذا كانت معادلة مقطع طبق قمر اصطناعي متحكّم في موجات مذياع بدوران $45°$ في المستوى $x'y'$ هي $5x'^2 + 3y'^2 - 2y' = 0$ ، فاكتب معادلة هذا القطع في المستوى $xy$ .

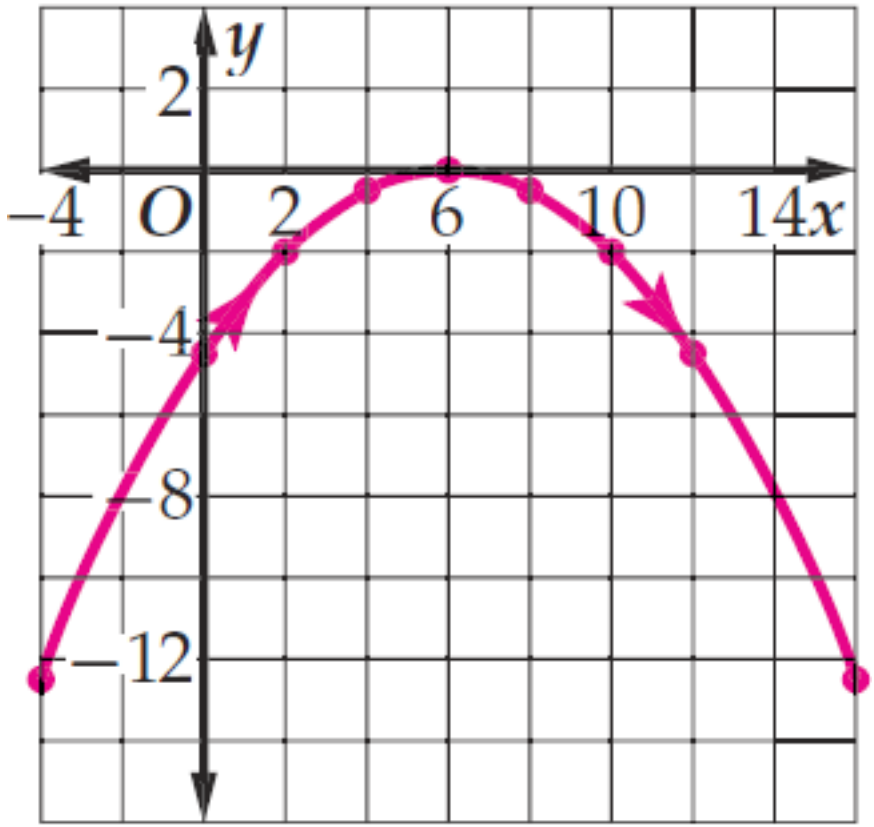
$4x^2 + 2xy + 4y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$

مثِّل بيانيًّا المنحنى المُعطى بالمعادلتين الوسيطيتين على الفترة المعطاة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

**1)** $x = t^2 + 1\ , y = \frac{t}{2} - 6\ ; -5 \le t \le 5$



$x = 2t + 6$ , $y = -\frac{t^2}{2}$; $-5 \leq t \leq 5$ **(2**



اكتب كل معادلتين وسيطيتين فيما يأتي بالصورة الديكارتية:

**(3** $x = 2t + 3, y = t - 4$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{11}{2}$$

**(4** $x = t + 5, y = -3t^2$

$$y = -3(x - 5)^2$$

**(5** $x = 3 \sin \theta, y = 2 \cos \theta$

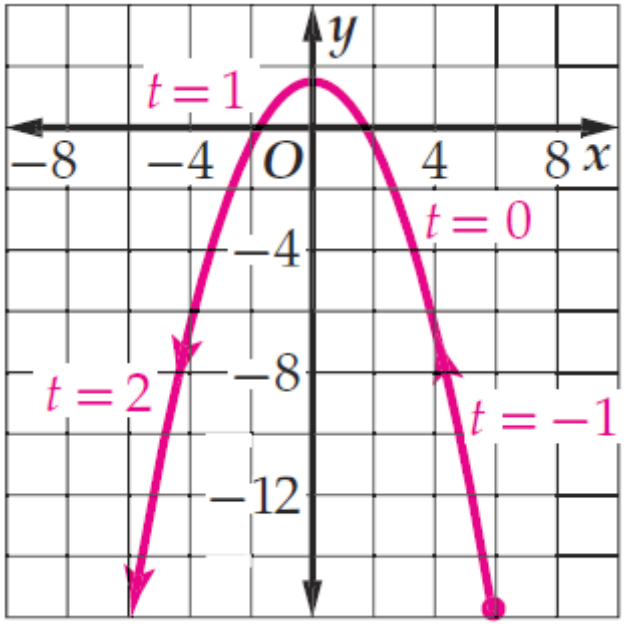
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

**(6** $y = 4 \sin \theta, x = 5 \cos \theta$

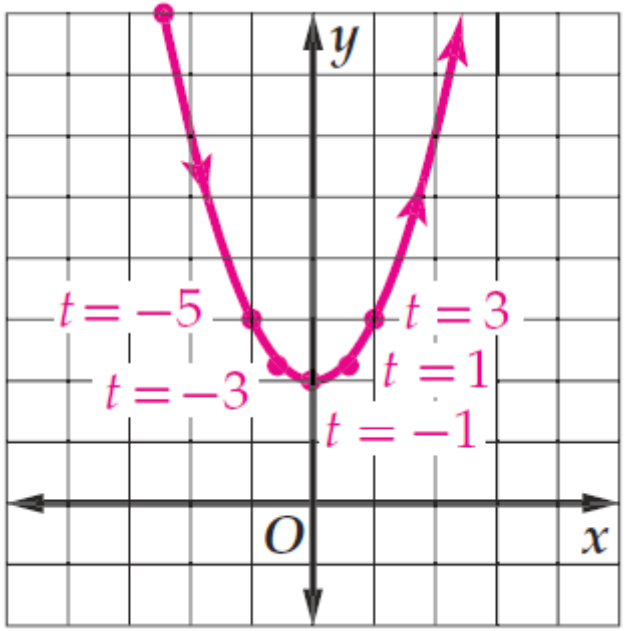
$$\frac{y^2}{16} + \frac{x^2}{25} = 1$$

استعمل المتغير الوسيط في كلٍّ مما يأتي لكتابة المعادلتين الوسيطيتين اللتين تمثلان المعادلة الديكارتية المعطاة، ثم مثِّل المنحنى بيانيًّا موضحًا السرعة والاتجاه.

**7** $t = \frac{2 - x}{3}, y = \frac{3 - x^2}{2}$




**8** $t = 4x - 1, y = x^2 + 2$



9) **مقذوفات:** يطلق محمود لعبةً صاروخيةً من مستوى الأرض بسرعة ابتدائية مقدارها 80 ft/s، وبزاوية 80° مع الأفق.

a) اكتب معادلتين وسيطيتين لتمثيل مسار الصاروخ.

$$x = 80\,t\cos 80°;\ y = 80\,t\sin 80° - 16\,t^2$$

b) ما الزمن اللازم للصاروخ لقطع مسافة أفقية مقدارها 10 feet من نقطة البداية؟ وما المسافة الرأسية عند هذه النقطة؟

**0.72 s ; 48.43 ft**