الموضوع: نهايات (1) التاريخ: 1/10/2020

ليكن التابع f المعرف وفق: $f(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-|x|}$

① جد D_f مجموعة تعريف التابع f.

② جد نهايات التابع f عند أطراف مجالات D_f.

③ ارسم الخط البياني C للتابع f في معلم متجانس.

④ جد معادلة للمماس T_1 للخط C في نقطة منه فاصلتها $\frac{1}{2}$
ثم جد معادلة للمماس T_2 للخط C والعمودي على المماس T_1

⑤ ليكن التابع g المعرف وفق: $g = E\circ f$
حيث E هو تابع الجزء الصحيح.

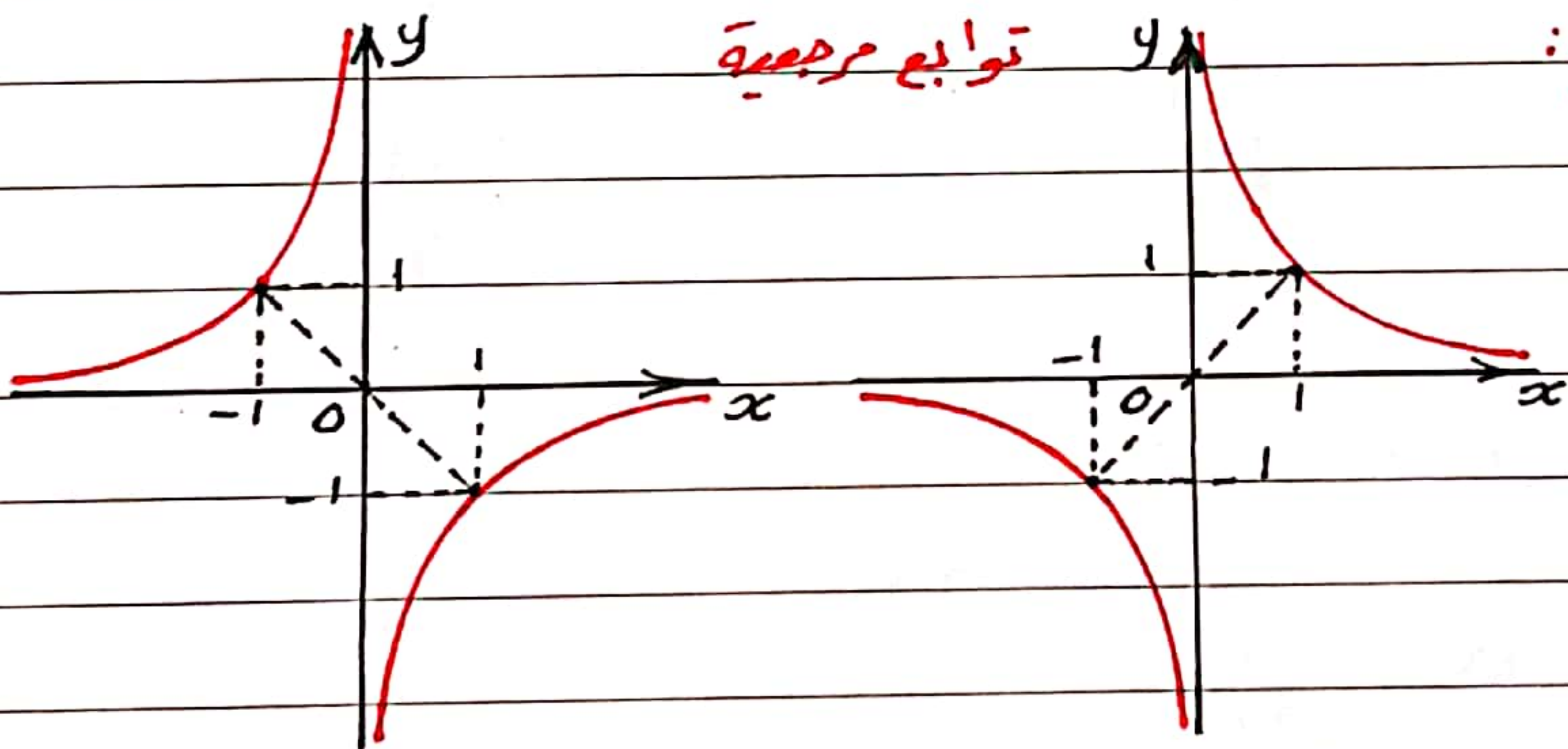
ⓐ جد صورة كل من المجالين $]1,+\infty[$ و $]0,1[$ وفق g.

ⓑ جد كلاً من:

$\lim\limits_{x\to 0}\left[(1-\cos 2x)\cdot g(x^2)\right]$ و $\lim\limits_{x\to 0}\left(|x|\cdot g(x)\right)$

تذكرة:

توابع مرجعية



$x \mapsto -\frac{1}{x}$ $x \mapsto \frac{1}{x}$

تذكرة: $x\in\mathbb{R}:\ |x^2| = |x|^2 = x^2$

تذكرة: $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

الحل:

1 المعادلة $x^2 - |x| = 0$ تكافئ $|x|^2 - |x| = 0$
تكافئ $|x|(|x|-1) = 0$

ومنه: إما $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$

أو $|x| = 1 \Rightarrow x\in\{1,-1\}$

إذاً: مجموعة تعريف التابع هي: $D_f = \mathbb{R}\setminus\{0,-1,1\}$

$f(x) = \dfrac{|x|-1}{|x|(|x|-1)} = \dfrac{1}{|x|}\ :\ x\in D_f$

AL MAAREFA

2

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|x|} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

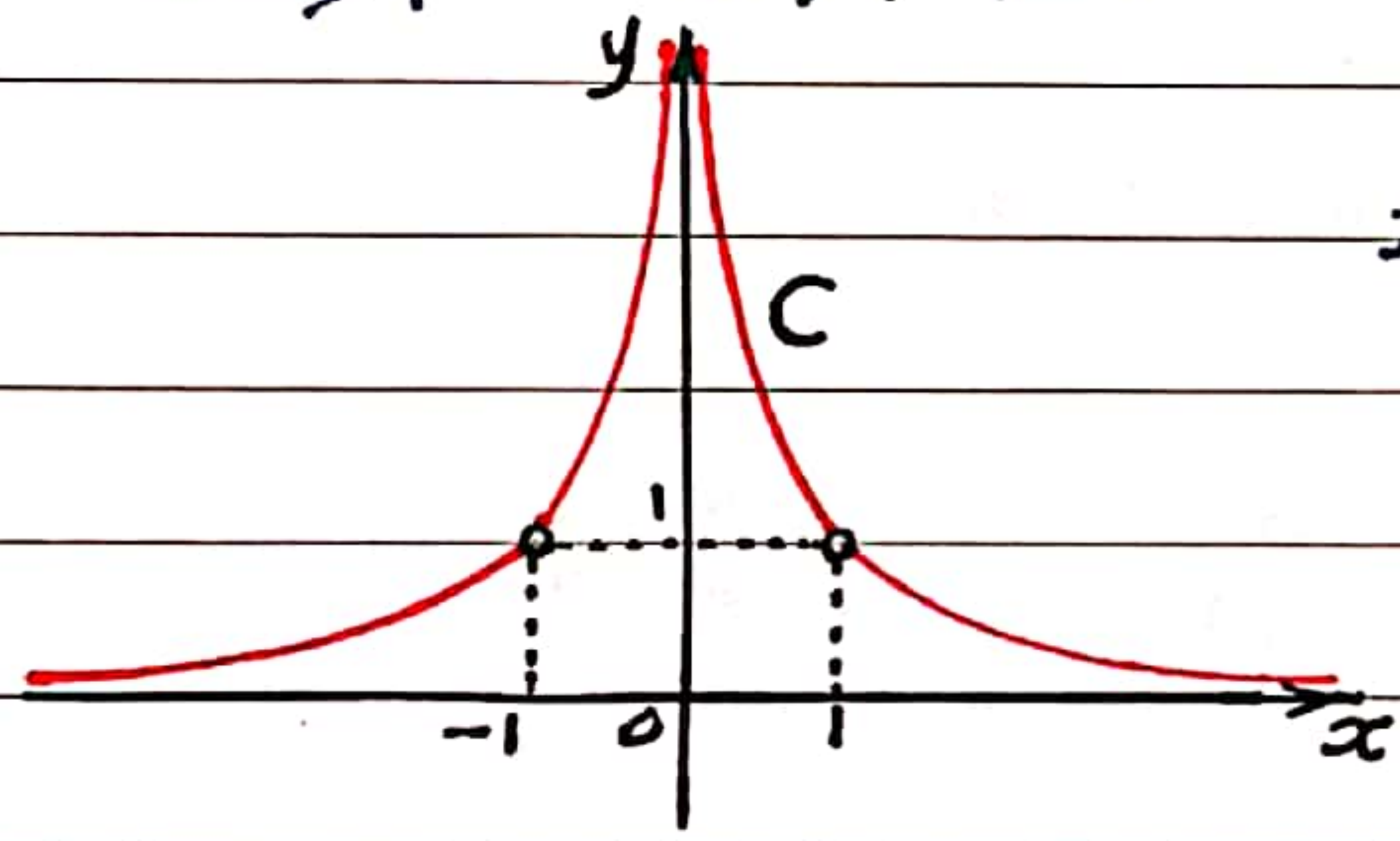
نستنتج أن المستقيم Δ_1 الذي معادلته $y=0$ مقارب أفقي للمخطط C والتقارب في جوار $-\infty$ وفي جوار $+\infty$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

نستنتج أن المستقيم Δ_2 الذي معادلته $x=0$ مقارب شاقولي للمخطط C .

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{|x|} = 1 \\ \\ \lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{|x|} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} (-1,1) \notin C \\ \\ (1,1) \notin C \end{array}$$

3



$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & : x>0, x \neq 1 \\ -\frac{1}{x} & : x<0, x \neq -1 \end{cases}$$

4

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} & : x>0, x \neq 1 \\ \frac{1}{x^2} & : x<0, x \neq -1 \end{cases}$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \ , \ f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$$

معادلة المماس: $T_1 : \ y = f'\left(\tfrac{1}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + f\left(\tfrac{1}{2}\right)$

$$y = -4\left(x - \tfrac{1}{2}\right) + 2$$

$$y = -4x + 4$$

بما أن المماسين T_1 و T_2 متعامدان فإن: $m_{T_1} \times m_{T_2} = -1$

$$m_{T_2} = -\frac{1}{m_{T_1}} = \frac{1}{4}$$

نبحث عن حلول المعادلة: $f'(x) = \frac{1}{4}$ في D_f

والتي تطابق: $\frac{1}{x^2} = \frac{1}{4} ; x<0, x \neq -1$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = -2 \ , \ f(-2) = \frac{1}{2}$$

معادلة المماس: $T_2 : \ y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$$y = \frac{1}{4}(x+2) + \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + 1$$

AL MAAREFA

5

$$g(x) = E(f(x)) = E\left(\frac{1}{|x|}\right) : x \in D_f$$

ⓐ من الرسم نجد أن:

$f(]1,+\infty[) =]0,1[$

$E(]0,1[) = 0 \Rightarrow g(]1,+\infty[) = 0$

$f(]0,1[) =]1,+\infty[$

$E(]1,+\infty[) = N^* \Rightarrow g(]0,1[) = N^*$

ⓑ أولاً: حساب $\lim\limits_{x \to 0} (|x| \cdot g(x))$

$$\frac{1}{|x|} - 1 < E\left(\frac{1}{|x|}\right) \leq \frac{1}{|x|} \quad : x \in D_f$$

نضرب بـ $|x|$ الموجبة تماماً:

$$1 - |x| < |x| \cdot g(x) \leq 1$$

لاحظت: $\lim\limits_{x \to 0} (1 - |x|) = 1 = \lim\limits_{x \to 0} (1)$

فحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن:

$$\lim_{x \to 0} (|x| \cdot g(x)) = 1$$

ثانياً: حساب $\lim\limits_{x \to 0} ((1 - \cos 2x) \cdot g(x^2))$

$$g(x^2) = E\left(\frac{1}{|x^2|}\right) = E\left(\frac{1}{x^2}\right) : x \in D_f$$

$$\frac{1}{x^2} - 1 < E\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq \frac{1}{x^2} \quad ; x \in D_f$$

لدينا $1 - \cos 2x = 2\sin^2 x$

ومنه: $2 \times \frac{\sin^2 x}{x^2} - 2\sin^2 x < (1 - \cos 2x) E\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 2 \times \frac{\sin^2 x}{x^2}$

$$2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 2\sin^2 x < (1 - \cos 2x)\, g(x^2) \leq 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

ولاحظت $\lim\limits_{x \to 0} 2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 2(1)^2 = 2$

$$\lim_{x \to 0} \left[2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 - 2\sin^2 x\right] = 2(1)^2 - 0 = 2$$

فحسب مبرهنة الإحاطة نجد أن:

$$\lim_{x \to 0} [(1 - \cos 2x)\, g(x^2)] = 2$$

AL MAAREFA