المدرّس: محمد رسول صباغ
0934131159

رقم 2

# مذاكرة التابع اللوغارتمي

## السؤال الأول

ليكن $C$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف بالعلاقة : $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)$

1- تحقق أن $D_f$ مجموعة تعريف التابع $f$ هي $]2,4[$

2- برهن أن منحني التابع $C$ متناظر بالنسبة للنقطة $(3,0)$

3- أوجد نهاية التابع $f$ عند كل طرف من أطراف مجموعة تعريفه

4- ارسم الخط البياني $C$ للتابع $f$

5- استنتج الخط البياني للتابع $f_1(x) = |f(x)|$

## السؤال الثاني

ليكن $g$ التابع المعرف على $I = ]-1, +\infty[$ وفق العلاقة : $g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$ .

احسب كلاً من $g(1)$ , $g'(1)$ , $g'(x)$ ثم استنتج $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(\sqrt{x+1}) - \ln 2}{x-1}$

## السؤال الثالث

ليكن $c$ الخط البياني للتابع $f$ المعرف على $]-\infty, -2[ \cup ]0, +\infty[$ بالعلاقة :

$$f(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

1- احسب نهاية $f$ عند أطراف مجموعة تعريفه

2- أوجد $f'(x)$ ثم ادرس تغيرات $f$ ونظم جدولاً بها

3- ارسم $c$

4- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق : $u_n = f(n)$ وليكن :

$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ ، أثبت أن : $S_n = \ln\frac{(n+2)(n+1)}{2}$

## السؤال الرابع

أثبت أنه $\forall x \in ]-1, +\infty[$ كان $\frac{x}{x+1} \leq \ln(x+1)$

RASOUL
International Education

# ... حل مذاكرة رقم (٢) لوغاريتم ...

$g(x) = \ln(\sqrt{x+1})$

$g(1) = \ln\sqrt{2}$

$$g' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2(x+1)}$$

$g'(1) = \frac{1}{4}$

نعلم أن $\lim_{x \to x_0} t(x) = g'(x_0)$

$$\lim_{x \to 1} \frac{g(x) - g(1)}{x-1} = g'(1)$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln\sqrt{x+1} - \ln\sqrt{2}}{x-1} = \frac{1}{4}$$

السؤال الثاني:

السؤال الأول: معرف عندما $\frac{x-2}{4-x} > 0$ واضح أنه

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 4 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | | $-$ | 0 | $+$ | ⋮ | $+$ | |
| $4-x$ | | $+$ | ⋮ | $+$ | 0 | $-$ | |
| الكسر | | $-$ | 0 | $+$ | ‖ | $-$ | |
| المراجح | | ///// | | ✓ | | ///// | |

$D_f = ]2,4[$

$\boxed{2}$ $x_0 = 3$ $\quad 2x_0 - x = 6 - x$

$y_0 = 0$

$\forall x \in ]2,4[ \Rightarrow -x \in ]-4,-2[$

$6 - x \in ]2,4[$ الشرط الأول محقق.

$f(2x_0 - x) \overset{?}{=} 2y_0 - f(x)$

$* \; f(2x_0 - x) = f(6-x)$

$$\ell_1 = \ln\left(\frac{6-x-2}{4-6+x}\right) = \ln\left(\frac{4-x}{-2+x}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{4-x}{x-2}\right) = \ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right)^{-1}$$

$$= -\ln\left(\frac{x-2}{4-x}\right) = -f(x) = 2y_0 - f(x)$$

$= \ell_2$

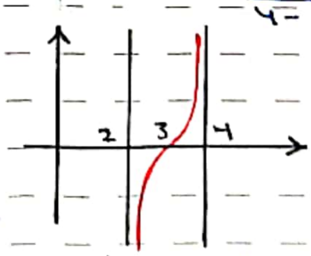
الشرط الثاني محقق إذن $A(3,0)$ مركز تناظر.

$\boxed{3}$ $\lim_{x \to 2} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 4} f(x) = +\infty$

$\boxed{4}$ $f$ معرف ومستمر واشتقاقي على $]2,4[$

$$f'(x) = \frac{\frac{4-x+x-2}{(4-x)^2}}{\frac{x-2}{4-x}} = \frac{2}{(4-x)(x-2)} > 0$$




| $x$ | 2 | | 4 |
|---|---|---|---|
| $f'$ | | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

السؤال الثالث:

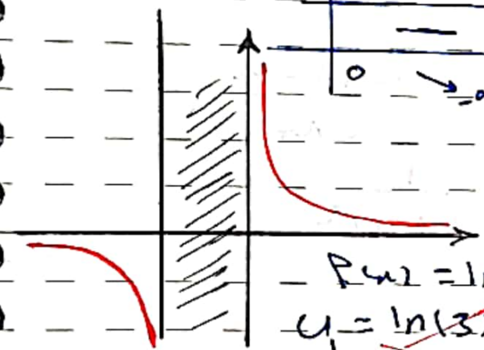
$\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = \ln(1) = 0$

$\lim_{x \to -2} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{\frac{x - x - 2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = \frac{-2}{x(x+2)} < 0$$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | ////// | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | | ////// | | $-$ | |
| $f$ | 0 | ↘ | $-\infty$ | ////// | $+\infty$ | ↘ | 0 |



$f(x) = \ln(x+2) - \ln(x)$

$u_1 = \ln(3) - \ln(1)$

$u_2 = \ln(4) - \ln(2)$

$u_3 = \ln(5) - \cancel{\ln(3)}$

$u_4 = \ln(6) - \cancel{\ln(4)}$

⋮

$u_{n-1} = \ln(n+1) - \cancel{\ln(n-1)}$

$u_n = \ln(n+2) - \cancel{\ln(n)}$ $\quad +$

$S_n = -\ln 2 + \ln(n+1) + \ln(n+2)$ بجمع المتراجحات (المتتاليات) جمعاً

$= \ln((n+1)(n+2)) - \ln 2$

المدرس :
محمد رسول صباغ

$S_n = \ln((n+2)(n+1)) - \ln 2$

$S_n = \ln \frac{(n+2)(n+1)}{2}$

السؤال الرابع :

$\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$

$f(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$ على $]-1, \infty[$

$\lim_{x \to -1} f(x) = -\infty + \infty$ عدم تعيين

$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x+1}\left((x+1)\ln(x+1) - x\right) = +\infty(0+1) = +\infty$

بفرض $x+1 = X$

$x \to -1 \Rightarrow X \to 0$

$\lim_{X \to 0} X \ln X = 0$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$

$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}$

$= \frac{x}{(x+1)^2}$

$f' = 0 \Rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

واضح من جدول التغيرات ان

$f(x) \geq 0$

أي $\ln(x+1) - \frac{x}{x+1} \geq 0$

$\ln(x+1) \geq \frac{x}{x+1}$ محقق.

يمكن الاكتفاء بالاطراد دون التغيرات