التابع

التابع : هو علاقة تربط بين مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر من المجموعة الأولى (المنطلق D_f) مع عنصر وحيد من المجموعة الثانية (المستقر E_f)

$$f : x \longmapsto f(x) \quad ; \quad D_f \longmapsto E_f$$

مثال ليكن التابع f المعرف على R وفق العلاقة

$$f(x) = 2x + 3$$

$$f(0) = 2(0) + 3 = 0 + 3 = 3$$

$$f(1) = 2(1) + 3 = 2 + 3 = 5$$

$$f(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9$$

$$f(6) = 2(6) + 3 = 12 + 3 = 15$$

لاحظ أن كل عدد نعوضه في التابع f يعطينا نتيجة وحيدة

مجموعة تعريف تابع :

هي مجموعة القيم التي يمكن تعويضها في التابع ولنقسم التوابع للأنواع

1 التابع الصحيح : معرف دوماً على مجموعة الأعداد الحقيقية R

تابع صحيح أي لايوجد x تحت جذر ولا يوجد x بالمقام

أمثلة

① $f(x) = x^2 + 2x + 3$

التابع معرف على R

② $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{x}{5} + \frac{1}{3}$

التابع معرف على R

③ $f(x) = \frac{2x - 1}{5}$

التابع معرف على R

④ $f(x) = \sqrt{2}\, x^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} x$

التابع معرف على R

2 التابع الكسري الحدودي (البسط والمقام كثيري حدود)

معرف على $R\backslash\{$ القيم التي تعدم المقام $\}$

أمثلة

① $f(x) = \frac{3}{x^2}$

$$x^2 = 0 \implies x = 0$$

$$D_f = R\backslash\{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

تذكّر حل المعادلة من الشكل $x^2 =$ عدد

$x^2 =$ عدد موجب $\implies x = \pm\sqrt{\text{عدد موجب}}$

$x^2 = 0 \implies x = 0$

$x^2 =$ عدد سالب $\implies$ المعادلة مستحيلة الحل

② $f(x) = \frac{x + 1}{x(x - 1)}$

$$x(x - 1) = 0$$

إما $x = 0$ أو $x - 1 = 0 \implies x = 1$

$$D_f = R\backslash\{0,1\} =]-\infty, 0[\cup]0,1[\cup]1, +\infty[$$

③ $f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$

$x^2 + 1 = 0 \implies x^2 = -1$ (مستحيلة الحل)

$$D_f = R$$

④ $f(x) = \frac{x + 5}{x^2 + x}$

$$x^2 + x = 0 \implies x(x + 1) = 0$$

إما $x = 0$ أو $x + 1 = 0 \implies x = -1$

$$D_f = R\backslash\{-1,0\} =]-\infty, -1[\cup]-1,0[\cup]0, +\infty[$$

⑤ $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 - 4}$

$$x^2 - 4 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

$$D_f = R\backslash\{-2,2\} =]-\infty, -2[\cup]-2,2[\cup]2, +\infty[$$

⑥ $f(x) = \frac{x - 1}{x^2 + 3}$

$x^2 + 3 = 0 \implies x^2 = -3$ مستحيلة الحل

$$\implies D_f = R$$

⑦ $f(x) = \frac{x + 2}{(x - 2)^2}$

$$(x - 2)^2 = 0 \implies x - 2 = 0 \implies x = 2$$

$$D_f = R\backslash\{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

3 التابع الجذري من الشكل $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ ونميز حالتين :

① n عدد زوجي عندها التابع f معرف عندما $g(x) \geq 0$

ملاحظة في حالة

$f(x) = \sqrt{g(x)} \implies n = 2$

التابع f معرف عندما $g(x) \geq 0$

أمثلة

$\boxed{① \ f(x)=\sqrt{x+2}}$

التابع f معرف عندما $x+2\ge 0$

$\Rightarrow x\ge -2 \quad \Rightarrow \quad D_f=[-2,+\infty[$

$\boxed{② \ f(x)=\sqrt{3-x}}$

التابع f معرف عندما $3-x\ge 0$

$\Rightarrow -x\ge -3 \xRightarrow{\times(-1)} x\le 3 \Rightarrow D_f=]-\infty,3]$

$\boxed{③ \ f(x)=\sqrt{x^2-1}}$

التابع f معرف عندما $x^2-1\ge 0$

متراجحة من الدرجة الثانية لندرس إشارة المقدار x^2-1

$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	
حل المتراجحة		محققة		غير محققة		محققة	

$D_f=]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

$\boxed{④ \ f(x)=\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}}$

التابع f معرف عندما $\frac{x+2}{x-2}\ge 0$

متراجحة كسرية لندرس إشارة الكسر

$x+2=0 \Rightarrow x=-2$

$x-2=0 \Rightarrow x=2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+2}{x-2}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	
حل المتراجحة		محققة		غير محققة	‖	محققة	

$D_f=]-\infty,-2]\cup]2,+\infty[$

المجال مفتوح عند القيمة 2 لأن التابع غير معرف عند ال 2

ملاحظة هامة لحل متراجحة كسرية أو متراجحة من الدرجة الثانية

ندرس إشارة المقدار

② n عدد فردي التابع f معرف على مجموعة تعريف التابع g نفسها

مثال :

$f(x)=\sqrt[3]{x^2-1} \qquad n=3$(فردي)

$D_f=R$

4 التابع الكسري والجذري : كسري بسطه أو مقامه يحوي جذر

- نكتب شرط تعريف الجذر ما تحت الجذر ≥ 0
- وشرط تعريف الكسر المقام $\ne 0$
- ثم نقاطع الشرطين لنحصل على مجموعة تعريف التابع f

أمثلة

$\boxed{① \ f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}}$

شرط الكسر: $\sqrt{x}\ne 0 \Rightarrow x\ne 0$

شرط الجذر: $x\ge 0$

$D_f=[0,+\infty[\setminus\{0\}=]0,+\infty[$

$\boxed{② \ f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x-1}}$

شرط الكسر: $x-1\ne 0 \Rightarrow x\ne 1$

شرط الجذر: $x\ge 0$

$D_f=[0,1[\cup]1,+\infty[$

$\boxed{③ \ f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x}-1}}$

شرط الكسر: $\sqrt{x}-1\ne 0$

$\Rightarrow \sqrt{x}\ne 1 \xRightarrow{\text{بالتربيع}} x\ne 1$

شرط الجذر: $x\ge 0$

$D_f=[0,+\infty[\setminus\{1\}=[0.1[\cup]1.+\infty[$

$\boxed{④ \ f(x)=\frac{x+\sqrt{x}}{x+1}}$

شرط الكسر: $x+1\ne 0 \Rightarrow x\ne -1$

شرط الجذر: $x\ge 0$

$D_f=[0,+\infty[\setminus\{-1\}=[0,+\infty[$

$\boxed{⑤ \ f(x)=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$

شرط الجذر الثاني: $x\ge 0$

شرط الجذر الأول: $x-1\ge 0 \Rightarrow x\ge 1$

$D_f=[1,+\infty[$