بنك أسئلة الأشعة

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة الأشعة

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

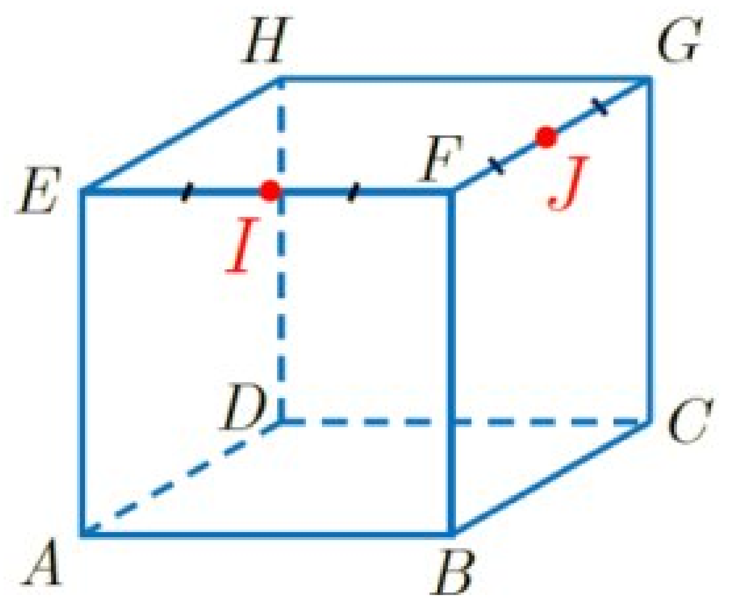
م . مروان بجور حمص 0930170828

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 :



$ABCDEFGH$ مكعّب I منتصف $[EF]$، J منتصف $[FG]$.

❶ بيّن إذا كانت النقطة M المُعرّفة بالمساواة الشعاعيّة المفروضة تنطبق أو لا تنطبق على أحد رؤوس المكعّب.

$$1.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\quad,\quad 2.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}$$

❷ حدّدْ موقع النقطة N المحققة للمساواة الشعاعية المفروضة :

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}$$

❸ عبّرْ عن المجموع الشعاعي التالي بشعاعٍ واحد : $\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}$

❹ أثبت صحة المساواة الشعاعية : $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$

الحل :

❶

$$1.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}$$

M تنطبق على $G \Leftarrow$

$$2.\ \overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BF}\Rightarrow\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AG'}$$

G' نظيرة C بالنسبة إلى G وهي ليست نقطة من المكعّب وبالتالي M ليست نقطة من المكعّب

❷

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{EI}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EI}=\overrightarrow{AI}\Rightarrow$$ N تنطبق على I

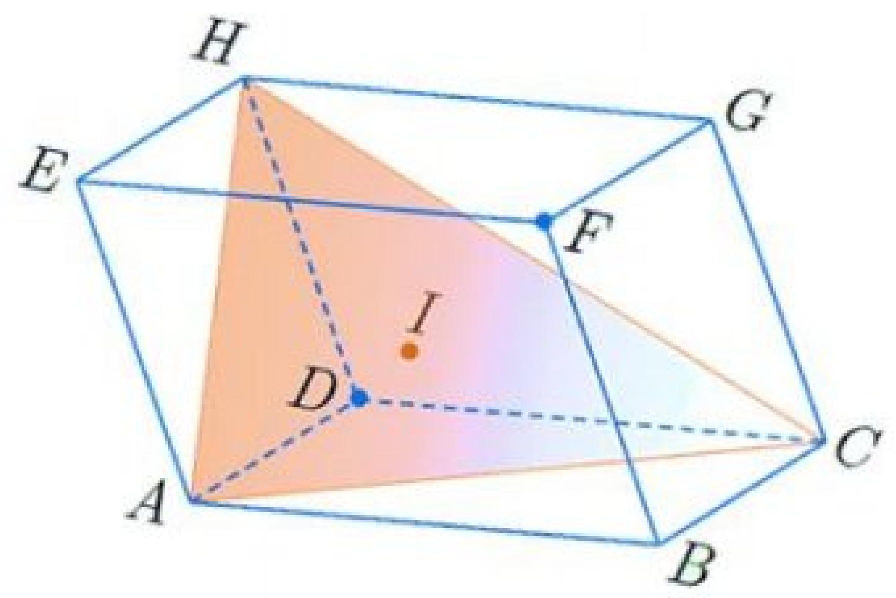
❸

$$\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BJ}$$

❹

$$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$$

التمرين 2 :



ليكن $ABCDEFGH$ متوازي سطوح، وليكن I مركز ثقل المثلّث AHC. أثبت أنّ النقاط D و I و F تقع على استقامة واحدة. وعيّن موقع I على $[DF]$.

الحل :

النقطة I هي مركز ثقل المثلّث AHC وبالتالي

$$\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DH}=3\overrightarrow{DI}\Rightarrow\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BF}=3\overrightarrow{DI}\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{DI}\Rightarrow\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$$

فالشعاعين $\overrightarrow{DI}$ و $\overrightarrow{DF}$ مرتبطين خطيا و النقاط D و F و I تقع على استقامة واحدة و I نقطة من القطعة المستقيمة $[DF]$ تحقّق $\overrightarrow{DI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093683426 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 3 : النموذج الوزاري الثاني 2020

ليكن $ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه 4. فيه I منتصف $[CD]$.

❶ وضع النقطة M المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}$

❷ احسب العدد $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

الحل :

❶

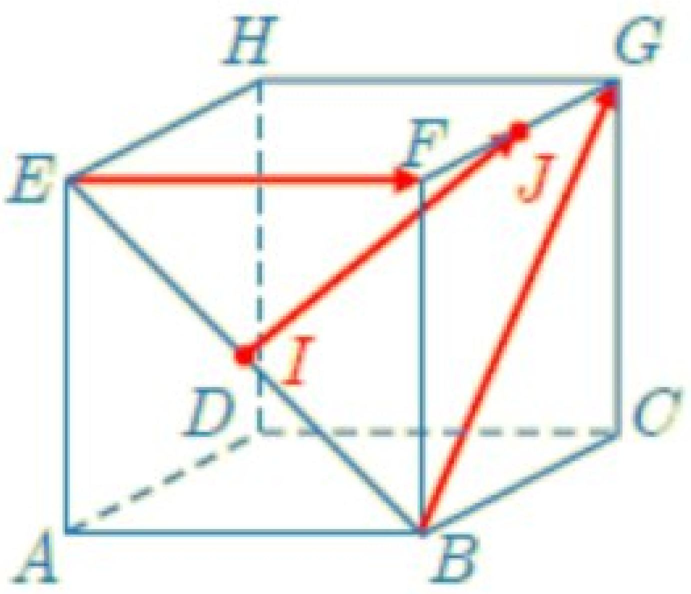
$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}\right)-\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AI}\right)-\overrightarrow{BI}$$

$$=\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{AB}\Longrightarrow\quad B \text{ تنطبق على } M$$

❷

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\left(\overrightarrow{AB},.\overrightarrow{AC}\right)=4.4.\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=4.4.\frac{1}{2}=8$$

التمرين 4 :



$ABCDEFGH$ مكعب . النقطة I منتصف $[BE]$ و J منتصف $[FG]$

❶ أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EF}$ و $\overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا

الحل :

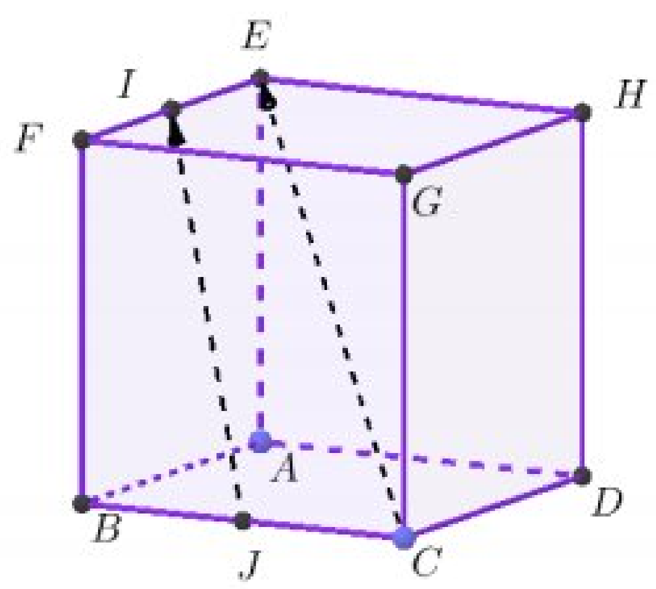
$$\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GJ}\ \ldots(2)\qquad \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FJ}\ \ldots(1)$$

بجمع العلاقتين (1) و(2) طرفا الى طرف نجد :

$$2\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IB}\right)+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BG}+\left(\overrightarrow{FJ}+\overrightarrow{GJ}\right)\Longrightarrow$$

$$2\overrightarrow{IJ}=\vec{0}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BG}+\vec{0}\Longrightarrow\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

التمرين 5 : النموذج الوزاري الأول



في الشكل المجاور مكعّب. I و J منتصفات $[EF]$ و $[BC]$.

❶ أثبت أنّ $2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$.

❷ أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطّيّاً

الحل:

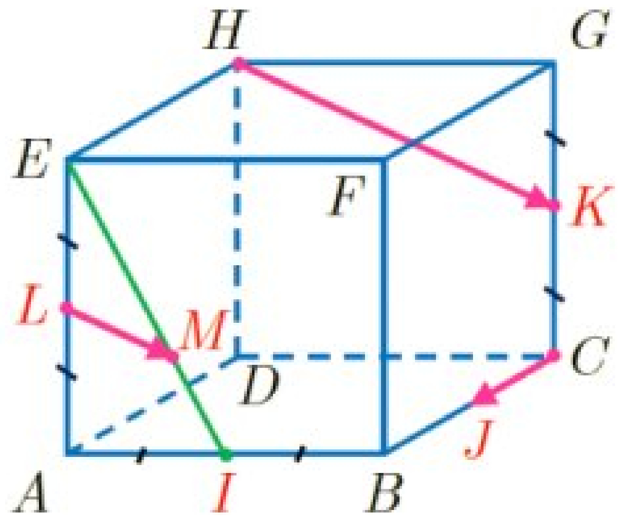
$$❶\ 2\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)=2\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{FE}$$

$$=\overrightarrow{GF}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}$$

$$❷\ \overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CJ}=\left(\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{IE}\right)+\overrightarrow{EC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CE}-\overrightarrow{CG}\right)-\overrightarrow{CE}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CG}$$

والأشعّة $\overrightarrow{CE}$ و $\overrightarrow{CG}$ و $\overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطّيّاً.

التمرين 6 :



$ABCDEFGH$ مكعّب. I و J و K و L هي بالترتيب منتصفات $[AB]$ و $[BC]$ و $[CG]$ و $[AE]$

ولتكن M النقطة المُحقّقة للعلاقة $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

❶ أثبت أن M هي مركز ثقل المثلّث AEB ؟

❷ أثبت أن الأشعّة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيّاً ؟

الحل :

❶ $3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI} \Rightarrow \overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$

وبالتالي M تقسم هذا المتوسّط بنسبة $2 : 1$

إذاً M هي نقطة تلاقي متوسطات المثلث EAB ، أي مركز ثقله

❷ $[BL]$ متوسّط آخر في المثلّث EAB إذاً :

$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}\right) = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{GK} + \overrightarrow{HG}\right) \Rightarrow$$

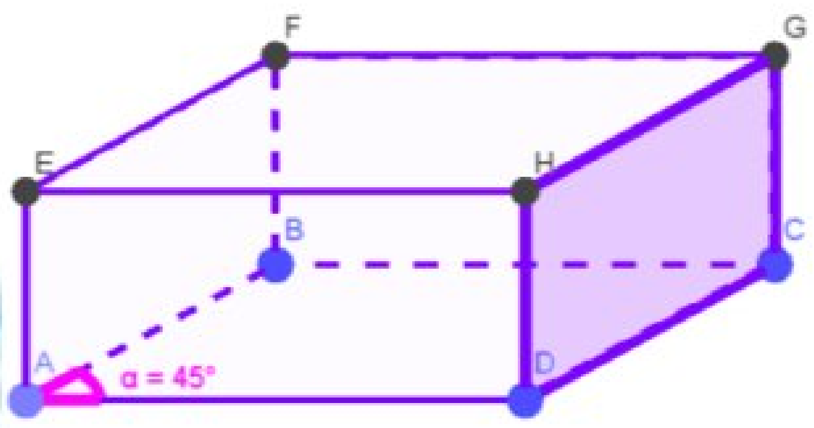
$$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} \Rightarrow \overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HK} + 0\overrightarrow{CJ}$$

فالأشعّة $\overrightarrow{LM}$ و $\overrightarrow{CJ}$ و $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيّاً

التمرين 7 : دورة 2018 الثانية

$ABCDEFGH$ متوازي سطوح فيه $AB = 2$ و $BC = GC = 1$ وقياس الزاوية $\widehat{DAB}$

تساوي $45°$ والنقطة I منتصف $[EF]$



❶ أحسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

❷ عين موضع النقطة M التي تحقق $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{FB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH}$

الحل :

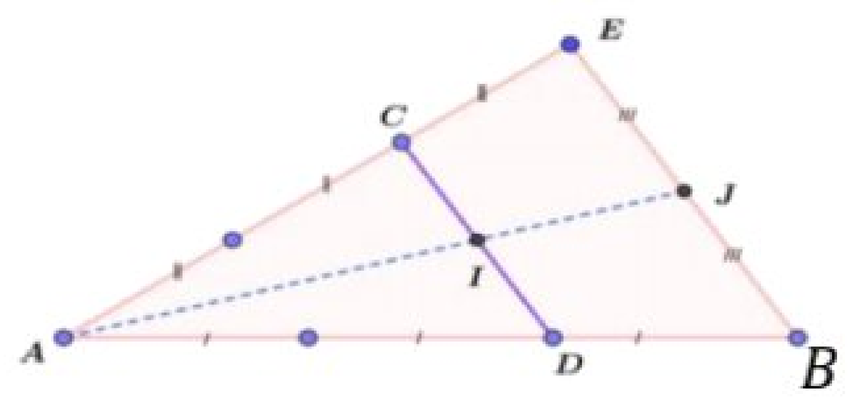
❶ لدينا $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos\widehat{DAB} = 2 \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

❷ لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{AF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FI} = \overrightarrow{AI}$$

ومنه M منطبقة على I

التمرين 8 :



لتكن لدينا ثلاث نقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة من الفراغ والنقطتين E, D تحققان : $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$ و I منتصف CD و J منتصف EB

❶ أثبت أن النقاط A, B, C, D, E تقع في مستو واحد

❷ أثبت أن النقاط I, J, A تقع على استقامة واحدة

الحل :

❶ لدينا $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE}$

وبالتالي الشعاعين $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{AE}$ مرتبطين خطيا والنقاط A, C, E تقع على استقامة واحدة

وبالتالي النقطة E تقع على المستقيم (AC) المحتوى في المستوي (ABC)

و لدينا $3\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

أي الشعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ مرتبطين خطيا أي النقاط A, B, D تقع على استقامة واحدة

ومنه النقطة D تقع على المستقيم (AB) المحتوى في المستوي (ABC)

وبالتالي النقاط A, B, C, D, E تقع في مستو واحد

❷ $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CE} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AE} \Rightarrow 3\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}\right) = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow$$

$$\frac{2}{3}\left(2\overrightarrow{AJ}\right) = 2\overrightarrow{AI} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AJ} \Rightarrow$$

الشعاعين مرتبطين خطيا النقاط A, J, I تقع على استقامة واحدة

التمرين 9 :

في مَعلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ للفراغ

نتأمّل النقاط $A(3,5,2)$ و $B(2,-1,3)$ و $C(0,-2,2)$ و $D(-2,5,1)$

❶ جد إحداثيات I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ و G مركز ثقل ABC

❷ جد إحداثيّات النقطة J نظيرة I بالنسبة إلى C

❸ جد احداثيّات النقطة M التي تُحقّق العلاقة $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$

❹ جد احداثيّات النقطة N بحيث يكون الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع .

❺ جد احداثيّات النقطة K بحيث يكون المثلث ABK قائم في B

❻ أيمكن تعيين a و b لتقع النقاط A و B و $F(a,b,4)$ على استقامة واحدة

❼ جد مركبات الأشعّة $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ ثم اوجد نسبة مثلثية للزاوية بينهما

❽ عين a ليكون الشعاعان $\vec{u}(2,a,-8)$ و $\vec{v}(1,-2,a)$

❶ مرتبطين خطّيّاً , ❷ متعامدين

الحل :

❶ $I\left(\frac{3+2}{2},\frac{5-1}{2},\frac{2+3}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},2,\frac{5}{2}\right)$ و $G\left(\frac{3+2+0}{3},\frac{5-1-2}{3},\frac{2+3+2}{3}\right)=\left(\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$

❷ $\overrightarrow{IC}=\overrightarrow{CJ}\Rightarrow\left(\frac{-5}{2},-4,\frac{-1}{2}\right)=(x-0,y+2,z-2)\Rightarrow J\left(\frac{-5}{2},-6,\frac{3}{2}\right)$

❸ $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow(x_M-2,y_M+1,z_M-3)=(-1,-6,1)+3(-3,-7,0)$

$\Rightarrow(x_M-2,y_M+1,z_M-3)=(-10,-27,1)\Rightarrow M(-8,-28,4)$

❹ يكون الرباعي $ABCN$ متوازي أضلاع اذا كان

$$\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{BA}\Rightarrow(x_N-0,y_N+2,z_N-2)=(1,6,-1)\Rightarrow N(1,4,1)$$

❺ يكون المثلث ABK قائم في B اذا كان :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BK}=0\Rightarrow(-1,-6,1).(x_K-2,y_K+1,z_K-3)=0$

$-x+2-6y-6+z-3=0\Rightarrow x+6y-z+7=0\Rightarrow K(x,y,x+6y+7)$

❻ لتقع النقاط A و B و $F(a,b,4)$ على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AB}\Rightarrow(a-3,b-5,4-2)=(-k,-6k,k)\Rightarrow$

$a=3-k,b=5-6k,k=2\Rightarrow F(1,-7,4)$

❼ $\overrightarrow{AB}(-1,-6,1)\,,\overrightarrow{AC}(-3,-7,0)\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=3+42+2=45$

$\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{1+36+1}=\sqrt{38}\,,\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\|=\sqrt{9+49+0}=\sqrt{58}$

$$COS\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{45}{\sqrt{38}\times\sqrt{58}}$$

❽ ❶ يكون الشعاعين مرتبطين خطيا اذا كانت مركباتهما متناسبة وبالتالي :

$\vec{u}=k\vec{v}\Rightarrow(2,a,-8)=k(1,-2,a)\Rightarrow(2,a,-8)=(k,-2k,ak)\Rightarrow$

$k=2$ ① , $a=-2k$ ② , $ak=-8$ ③ من المعادلتين ① و ② نجد $k=2\,,a=-4$

نعوض في ③ نجد $-4=-4\Rightarrow-2\times2=-4$ محققة وبالتالي $a=-4$

طريقة ثانية :

يكون الشعاعين مرتبطين خطيا اذا كانت مركباتهما متناسبة وبالتالي : $\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} = \frac{-8}{a}$

من النسبة الاولى والثانية نجد : $a = -2 \times 2 = -4$

من النسبة الاولى والثالثة نجد : $a = \frac{-8}{2} = -4$

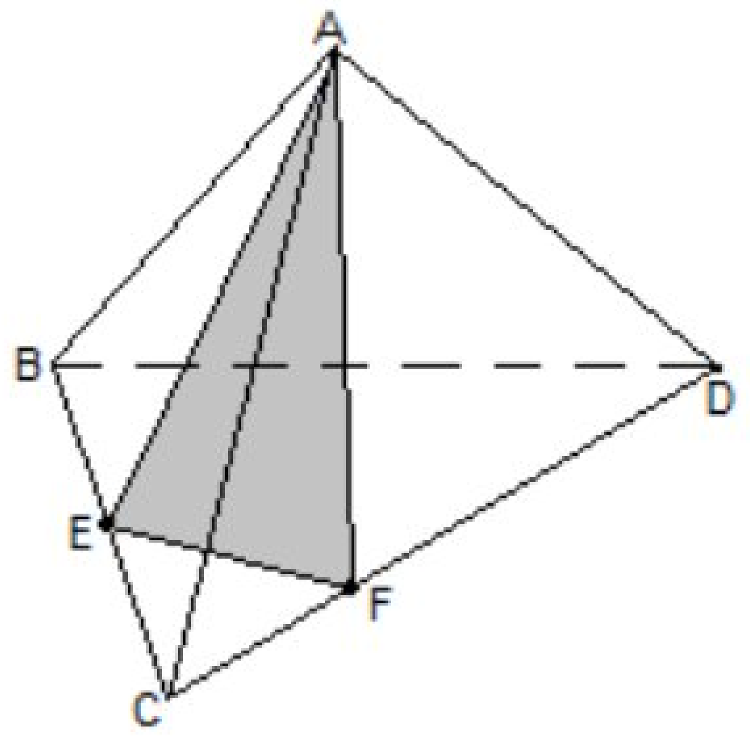
من النسبة الثانية والثالثة نجد : $a^2 = -2 \times -8 \Longrightarrow a^2 = 16 \Longrightarrow a = \pm 4$

وبالتالي قيمة a **التي تجعل التناسب محقق هي** $a = -4$

❷ **يكون الشعاعين متعامدين اذا كان :**

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \Longrightarrow (2, a, -8).(1, -2, a) = 0 \Longrightarrow 2 - 2a - 8a = 0 \Longrightarrow a = \frac{1}{5}$$

التمرين 10 :



$ABCD$ **رباعي وجوه فيه : النقطة** E **منتصف** $[BC]$.

و النقطة F **تحقق :** $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$. **و النقطة** H **مركز ثقل المثلث** (ABD)

و النقطة G **مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة :**

$(A, 1)$, $(B, 1)$, $(C, 3)$, $(D, 1)$. **و المطلوب :**

❶ **أثبت أن النقاط :** C , G , H **على استقامة واحدة . ثم وضَع** G .

❷ **أثبت أن النقاط :** A , E , F , G **تقع في مستوٍ واحد .**

و استنتج أن النقطة G **تقع داخل المثلث** (AEF) .

الحل :

❶ **بما أن** H **مركز ثقل المثلث** ABD **فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة** $(A, 1)$ $(B, 1)$ $(D, 1)$ **ومنه حسب الخاصة التجميعية فأن النقطة** G **هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة** $(C, 3)$ $(H, 3)$ $\Leftarrow$ C, H, G **على استقامة واحدة و** G **هي منتصف** $[CH]$.

❷ **بما أن** E **منتصف** $[BC]$ **فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة** $(B, 1)$ $(C, 1)$

ومن العلاقة $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ **نجد أن النقطة** F **هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين** $(D, 1)$ $(C, 2)$

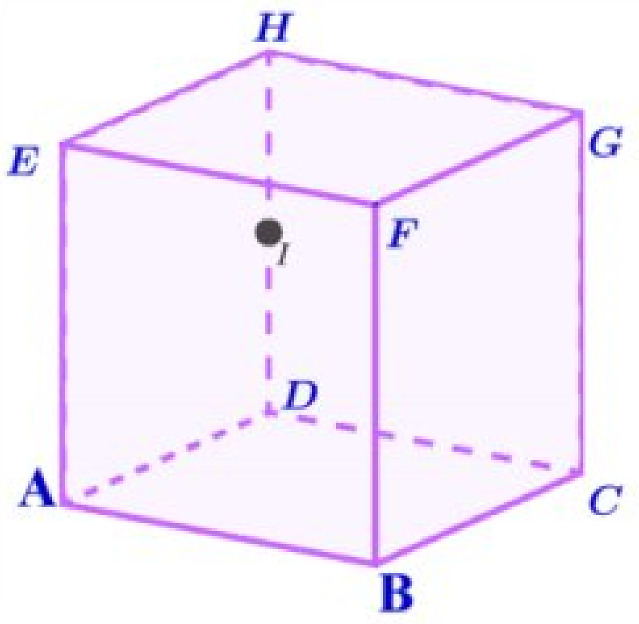
وبما أن النقطة G**هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $(D, 1)$ $(B, 1)$ $(A, 1)$ $(C, 3)$

فأن G**هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $(D, 1)$ $(B, 1)$ $(A, 1)$ $(C, 2)$ $(C, 1)$

ومنه حسب الخاصة التجميعية فأن G**هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $(A, 1)$ $(E, 2)$ $(F, 3)$

$\Leftarrow$ F, E, A, G **في مستوي واحد**

ولأن التثقيلات موجبة تماماً فإن النقطة G **تقع داخل المثلث** (AEF).



التمرين 11 : النموذج الوزاري الثاني

نجد جانباً مكعّباً طول ضلعه 1. مزوّداً بمعلم متجانس $(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})$:

حيث I هي منتصف $[DH]$.

❶ اعط إحداثيّات النقاط $A\ ,\ E\ ,I$.

❷ جد إحداثيّات O مركز ثقل المثلّث AEI.

❸ أين تقع النقطة M التي تحقّق $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}$ ؟ احسب $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\quad ,\quad E(0,1,0)\quad ,\quad I\left(0\,,\frac{1}{2}\,,1\right)$.

❷ $\left(0\,,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{0+0+0}{3}\,,\frac{0+1+\frac{1}{2}}{3},\frac{0+0+1}{3}\right)=G\left(\frac{x_A+x_E+x_I}{3}\,,\frac{y_A+y_E+y_I}{3},\frac{z_A+z_E+z_I}{3}\right)$.

❸ $3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{EO}\Rightarrow 3\overrightarrow{FM}=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{FO}\quad\Rightarrow\overrightarrow{FM}=$
$\frac{1}{3}\overrightarrow{FO}$

طريقة 1 : $\overrightarrow{IA}\left(0\ ,-\frac{1}{2}\,,-1\right)\,,\overrightarrow{IE}\left(0\,,\frac{1}{2}\,,-1\right)\Rightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=0-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$

طريقة 2 : $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IE}=(\overrightarrow{ID}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{HE})=\ \overrightarrow{ID}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{IH}+\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{HE}$
$=-\frac{1}{2}.\frac{1}{2}+0+0+1=\frac{3}{4}$

التمرين 12 : النموذج الوزاري الثالث

$ABCDEFGH$ مكعّب. I و J و K هي بالترتيب منتصفات $[AD]$ و $[BC]$ و $[FG]$

❶ باختيار معلم متجانس $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ احسب مركّبات كل من الأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$

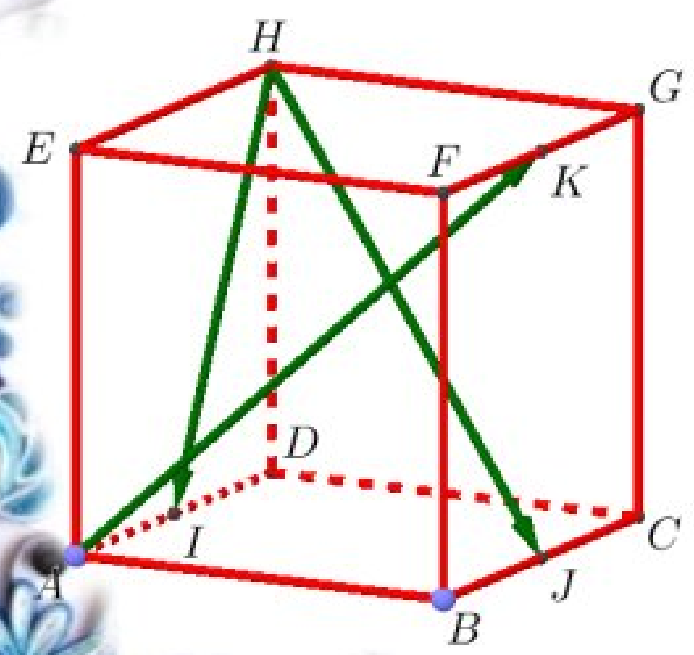
❷ أوجد عددين حقيقيين a و b يحقّقان المساواة : $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$

ثمّ استنتج أنّ الأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً

الحل:

❶ $D(0,0,0)$ و $A(1,0,0)$ و $C(0,1,0)$ و $H(0,0,1)$ و $I\left(\frac{1}{2},0,0\right)$ و $J\left(\frac{1}{2},1,0\right)$ و $K\left(\frac{1}{2},1,1\right)$

$\overrightarrow{HJ}\left(\frac{1}{2},1,-1\right)\quad ,\quad \overrightarrow{HI}\left(\frac{1}{2},0,-1\right)\quad ,\quad \overrightarrow{AK}\left(-\frac{1}{2},1,1\right)$



❷ $\overrightarrow{AK}=a\overrightarrow{HI}+b\overrightarrow{HJ}$

$$\left(-\frac{1}{2},1,1\right)=\left(\frac{a}{2},0,-a\right)+\left(\frac{b}{2},b,-b\right)=\left(\frac{a+b}{2},b,-a-b\right)$$

$a+b=-1\quad\&\quad b=1\quad ,\quad -a-b=1$

ينتج أنّ $b=1$ و $a=-2$

$\overrightarrow{AK}=-2\overrightarrow{HI}+1\overrightarrow{HJ}$

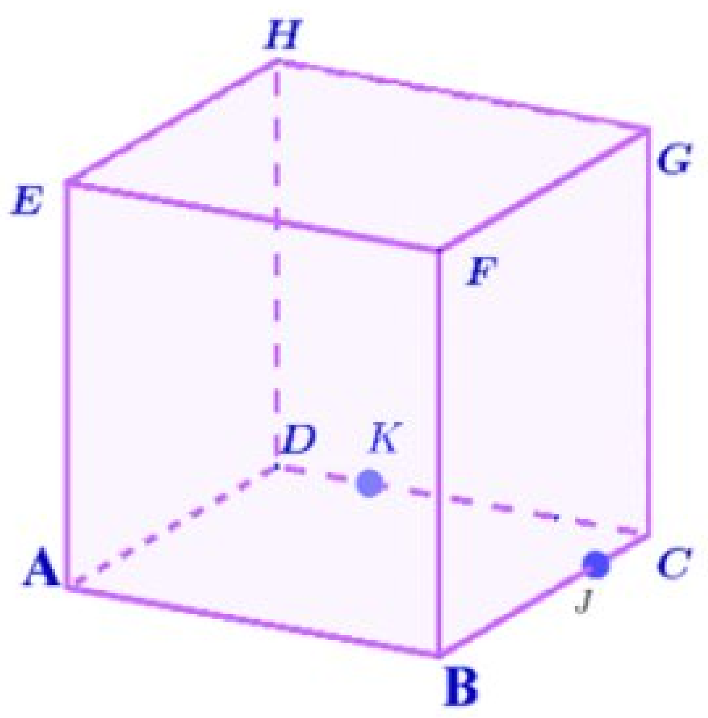
وبما أنّ $\overrightarrow{HJ}$ و $\overrightarrow{HI}$ مستقلّة خطيّاً فالأشعّة $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{HI}$ و $\overrightarrow{HJ}$ مرتبطة خطيّاً.

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 13 : النموذج الوزاري الرابع

$ABCDEFGH$ مكعّب حيث K نقطة من CD تحقّق : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

والنقطة $J \in BC$ بحيث $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ والمطلوب :



❶ جد احداثيّات النقط H , E , J , K , G في المعلم $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$.

❷ أثبت أنّ الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيّاً.

❸ أثبت أنّ الأشعّة $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HK}$ مرتبطة خطيّاً.

❹ أثبت أنّ المستقيم HK يوازي (EGJ)

الحل :

❶. $H(0,1,1)$ & $E(0,1,0)$ & $J\left(1,0,\frac{3}{4}\right)$ & $K\left(\frac{1}{4},0,1\right)$ & $G(1,1,1)$

❷. $\overrightarrow{EG}(1,0,1)$ & $\overrightarrow{EJ}\left(1,-1,\frac{3}{4}\right)$ & $\overrightarrow{HK}\left(\frac{1}{4},-1,0\right)$

الشعاعين $\overrightarrow{EJ}$, $\overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيّاً لأن مركباتهما غير متناسبة

❸ . $\overrightarrow{HK} = a\overrightarrow{EJ} + b\overrightarrow{EG} \implies \left(\frac{1}{4},-1,0\right) = a\left(1,-1,\frac{3}{4}\right) + b(1,0,1) \implies$

$\left(\frac{1}{4},-1,0\right) = \left(a+b,-a,\frac{3}{4}a+b\right) \implies a+b = \frac{1}{4}$ ① $a = 1$ ② $\frac{3}{4}a + b = 0$ ③

بحل المعادلات الثلاثة نجد $a = 1$, $b = -\frac{3}{4}$

بالتالي $\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{EJ} - \frac{3}{4}\overrightarrow{EG}$ و الأشعّة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً

❹ الأشعّة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيّاً فهي تقع في مستو واحد

بالتالي المستقيم HK يوازي (EGJ)

التمرين 14 : الاختبار 2

نتأمّل في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$، النقاط

$A(1,5,4)$ و $B(10,4,3)$ و $C(4,3,5)$ و $D(0,4,5)$.

❶ **بيّن أنّ النقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة.**

❷ **بيّن أنّ النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.**

❸ **استنتج أنّ النقطة D هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة (A,α) و (B,β) و (C,γ) حيث α و β و γ أعداداً حقيقيّة يُطلب تعيينها.**

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)\ \ \&\ \ \overrightarrow{AC}(3,-2,1)$ **والاشعة غير مرتبطة خطيا لأن مركباتها غير متناسبة فالنقاط A و B و C ليست على استقامة واحدة**

❷ $\overrightarrow{AB}(9,-1,-1)\ \ \&\ \ \overrightarrow{AC}(3,-2,1)\ ,\overrightarrow{AD}(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AC}\ \Rightarrow(-1,-1,1)=a(9,-1,-1)+b(3,-2,1)$$

$$(-1,-1,1)=(9a+3b,-a-2b,-a+b)$$

$$\begin{cases}9a+3b=-1\\-a-2b=-1\\-a+b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}9a+3b=-1 & ①\\-a-2b=-1 & ②\\a-b=-1 & ③\end{cases}$$

بجمع المعادلتين ② و ③ نجد $-3\beta=-2\Rightarrow b=\frac{2}{3}$

نعوض في الثانية نجد $a-\frac{2}{3}=-1\Rightarrow a=\frac{-1}{3}$

نعوض في المعادلة الاولى نجد : محققة $9\left(\frac{-1}{3}\right)+3\left(\frac{2}{3}\right)=-1\Rightarrow-1=-1$ **وبالتالي:**

$\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ **فالأشعة تقع في مستو واحد و النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد**

❸ $\overrightarrow{AD}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}\Rightarrow3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}=\vec{0}\Rightarrow$

$$3\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{AD}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow$$

$$-2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{DB}-2\overrightarrow{DC}=\vec{0}\Rightarrow2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,2)$

طريقة ثانية لحل الطلب الثاني والثالث : بعد ملاحظة أنه في الطلب الثالث طلب منا اثبات D مركز ابعاد لذلك نشكل من النقاط الاربعة ثلاثة أشعة تبدأ بالنقطة D

❷ $\overrightarrow{DA}(1,1,-1)\ \ \&\ \ \overrightarrow{DB}(10,0,-2)\ \ \&\ \ \overrightarrow{DC}(4,-1,0)$

$$\overrightarrow{DA}=\alpha\overrightarrow{DB}+\beta\overrightarrow{DC}\ \Rightarrow(1,1,-1)=\alpha(10,0,-2)+\beta(4,-1,0)$$

$$(1,1,-1)=(10\alpha+4\beta,-\beta,-2\alpha)\Rightarrow\quad 10\alpha+4\beta=1①\quad-\beta=1②\quad-2\alpha=-1③$$

من ② و ③ نجد $\alpha=\frac{1}{2}$ و $\beta=-1$ و نعوض في ① محققة وبالتالي النقاط A و B و C و D تقع في مستوٍ واحد.

❸ $\overrightarrow{DA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DC}\ \Rightarrow2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$

إذاً D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقّلة: $(A,2)$ و $(B,-1)$ و $(C,+2)$.

التمرين 15 : دورة 2020 الأولى

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ لتكن النقاط: $A(1,0,0), B(4,3,-3), C(-1,1,2), D(0,0,1)$.

المطلوب:

❶ أثبت أن $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ غير مرتبطين خطياً.

❷ أثبت أن الأشعة: $\overrightarrow{AD}$ و$\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً.

❸ استنتج أن النقطة D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$

حيث أن α وβ وγ أعداد حقيقية يطلب تعيينها.

الحل :

❶ $\frac{3}{-2} \neq \frac{3}{1}$ $\quad \begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3,3,-3) \\ \overrightarrow{AC} = (-2,1,2) \end{cases}$

المركبات غير متناسبة إذاً الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطان خطياً

❷ ليكن $a\,,b \in \mathbb{R}$ بحيث

$$\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a-2b \\ 3a+b \\ -3a+2b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} ❶\quad 3a-2b=-1 \\ ❷\quad 3a+b=0 \\ ❸\ -3a+2b=1 \end{cases}$$

نلاحظ أن ❶ و❸ متكافئتان

من ❷ نجد أن $b=-3a$ نعوض في ❸ $-3a-6a=1 \Rightarrow a=\frac{-1}{9}$

اذاً $b=-3\left(\frac{-1}{9}\right)=\frac{1}{3}$ نعوض في ❶ نجد $-1=-1$ محققة

$$\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

أي $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}$ مرتبطة خطياً

❸

$$\overrightarrow{AD} = \frac{-1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{9}\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 9\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \Longrightarrow -9\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{DC}$$

$$-9\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow -9\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DA} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow$$

$$-7\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} - 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Longrightarrow 7\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

أي D مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(C,3)$ و $(B,-1)$ و $(A,7)$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 16 :

نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$, I هي منتصف $[AC]$

و G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ و $(B,4)$ و $(C,1)$ و $(D,3)$.

أثبت تلاقي المستقيمين (IG) و (BD) وعين نقطة تقاطعهما

الحل :

لتكن النقطة F مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(D,3)$ $(B,4)$ فهي نقطة من $[BD]$

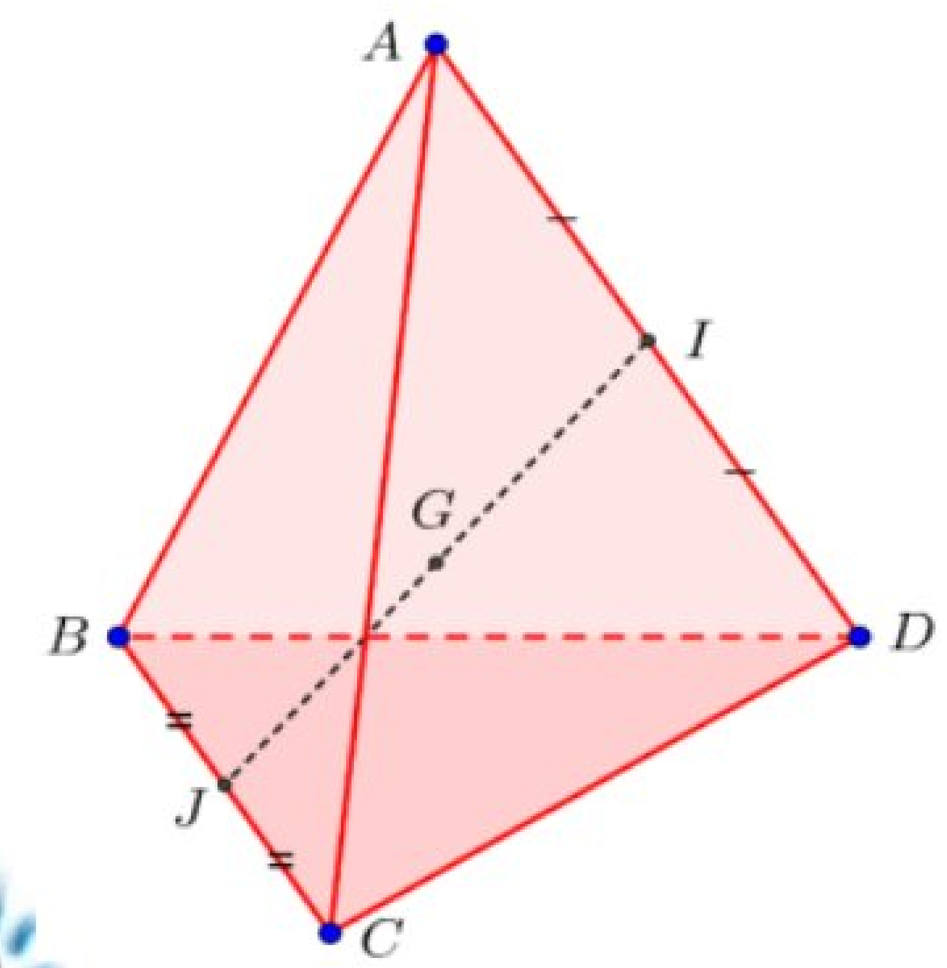
وبما أن النقطة I هي منتصف $[AC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ $(C,1)$

وبما أن النقطة Gهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,1)$ $(C,1)$ $(B,4)$ $(D,3)$

عندئذ حسب الخاصة التجميعية فأن G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,2)$ $(F,7)$

F,I,G تقع على استقامة واحدة أي أن F نقطة مشتركة بين المستقيمين (IG) (BD)

وتحقق $\overrightarrow{BF}=\frac{3}{7}\overrightarrow{BD}$



التمرين 17 : الاختبار 1

$ABCD$ رباعي وجوه، مركز ثقله G، I منتصف $[AD]$،

J منتصف $[BC]$. أثبت أنّ النقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة

الحل :

لمّا كان G مركز ثقل $ABCD$ فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

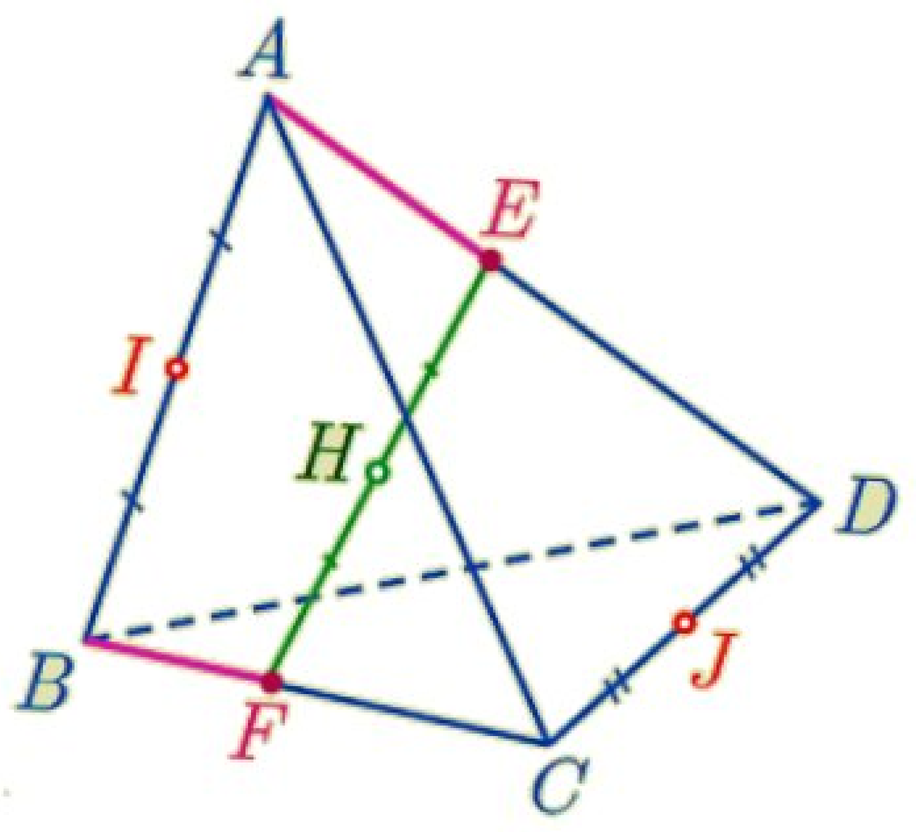
$(A,1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$.

ولكن I منتصف $[AD]$، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,1)$ و $(D,1)$

و J منتصف $[BC]$، هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$.

واستناداً إلى الخاصّة التجميعيّة، النقطة G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,2)$ و $(J,2)$
فالنقاط I و G و J تقع على استقامة واحدة وتكون G تقع في منتصف $[IG]$.

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828



التمرين 18 : دورة 2017 الثانية

$ABCD$ رباعي وجوه و a عدد حقيقي

J, I هما بالترتيب منتصفا $[CD], [AB]$

F, E نقطتان تحققان العلاقتين :

$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$ و H منتصف $[EF]$.

النقطة M تحقق العلاقة $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA}$

أثبت أن النقاط I و J و H تقع على استقامة واحدة

أثبت أن النقاط M, B, C, D تقع في مستوٍ واحد ثم وضّع النقطة M

الحل :

$\overrightarrow{BF} = \alpha\overrightarrow{BC} \quad \Leftarrow \quad F$ مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(C, \alpha), (B, 1-\alpha)$

$\overrightarrow{AE} = \alpha\overrightarrow{AD} \quad \Leftarrow \quad E$ مركز الأبعاد المتناسبة لـ$(A, 1-\alpha), (D, \alpha)$

H منتصف $[EF]$ وبالتالي H مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(E, 1)$ و $(F, 1)$

فحسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة لـ

$(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)$

J منتصف $[CD]$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسبة لـ (C, α) و (D, α)

I منتصف $[AB]$ وبالتالي I مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A, 1-\alpha)$ و $(B, 1-\alpha)$

وبالتالي حسب الخاصة التجميعية تكون H مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط

$(A, 1-\alpha), (B, 1-\alpha), (C, \alpha), (D, \alpha)$

هي نفسها مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(I, 2-2\alpha)$ و $(J, 2\alpha)$

وهذا يعني أن النقاط I, J, H تقع على استقامة واحدة

② $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DA} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{DM} + \overrightarrow{MA} \Rightarrow$

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{DM} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \vec{0}$

أي أن M هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(B, 1), (C, 1), (D, 1)$

فالنقاط الأربع تقع في مستوٍ واحد حيث M هي مركز ثقل المثلث DBC

التمرين 19 : النموذج الوزاري الأول 2020

$ABCD$ رباعي وجوه , مركز ثقله G, فيه K مركز ثقل الوجه BCD

اثبت أن النقاط K, A, G تقع على استقامة واحدة وعين موضع G على القطعة المستقيمة $[AK]$.

الحل :

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة:

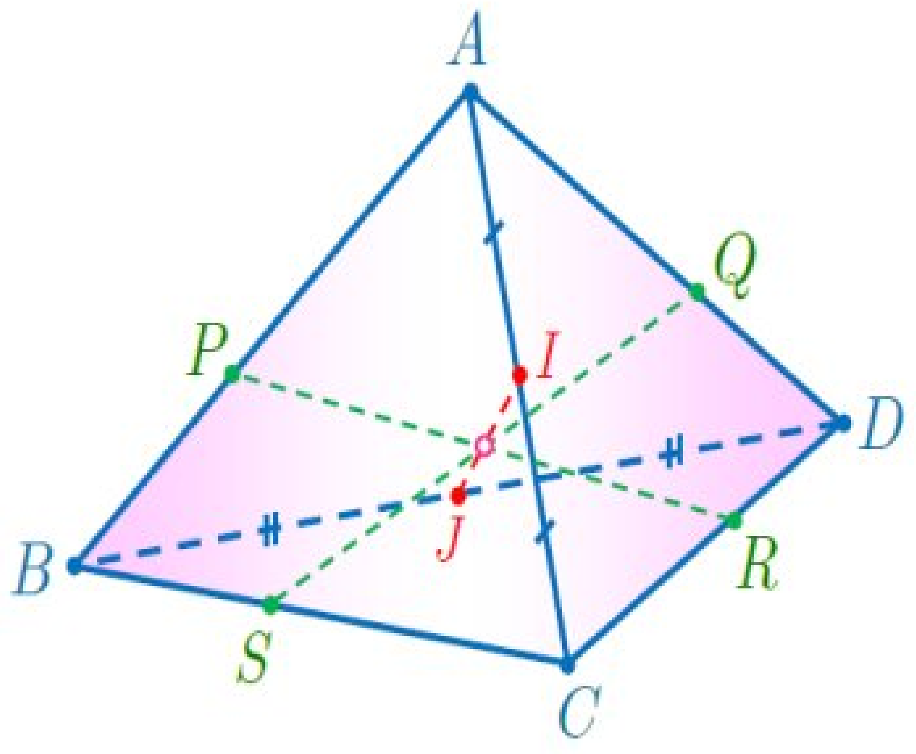
$(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)$

وبما أن K مركز ثقل الوجه BCD فهو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(B,1),(C,1),(D,1)$

حسب الخاصية التجميعية تكون G النقطة مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A,1),(K,3)$

إذاً النقاط K, G, A على استقامة واحدة

التمرين 20 :



نتأمّل رباعي وجوه $ABCD$. لتكن x من $]0,1[$

ولتكن P و Q و R و S النقاط التي تحقّق

$\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CS} = x\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CR} = x\overrightarrow{CD}$

النقطتان I و J هما منتصفا الحرفين $[AC]$ و $[BD]$.

أثبت تلاقي المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة.

الحل :

$$\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PA} + x(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}) = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PA} + x\,\overrightarrow{AP} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{PA} - x\,\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Rightarrow (1-x)\,\overrightarrow{PA} + x\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

إذاً P مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A, 1-x)$ و (B, x)

ونجد بالمثل أنّ R هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D, x) و $(R, 1-x)$

وكذلك Q هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (D, x) و $(A, 1-x)$

وأخيراً S هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, x) و $(C, 1-x)$

باعتبار G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A, 1-x)$ و (B, x) و $(C, 1-x)$ و (D, x)

استناداً إلى الخاصة التجميعيّة :

G هي مركز الأبعاد المتناسبة لكل من $(P, 1)$ و $(R, 1)$ ، أي هي منتصف $[PR]$

ومن جهة أخرى

G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(Q, 1)$ و $(S, 1)$ فهي أيضاً تقع في منتصف $[SQ]$

وأخيراً لأنّ I هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A.1-x)$ و $(C, 1-x)$

وكذلك J هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين (B, x) و (D, x)

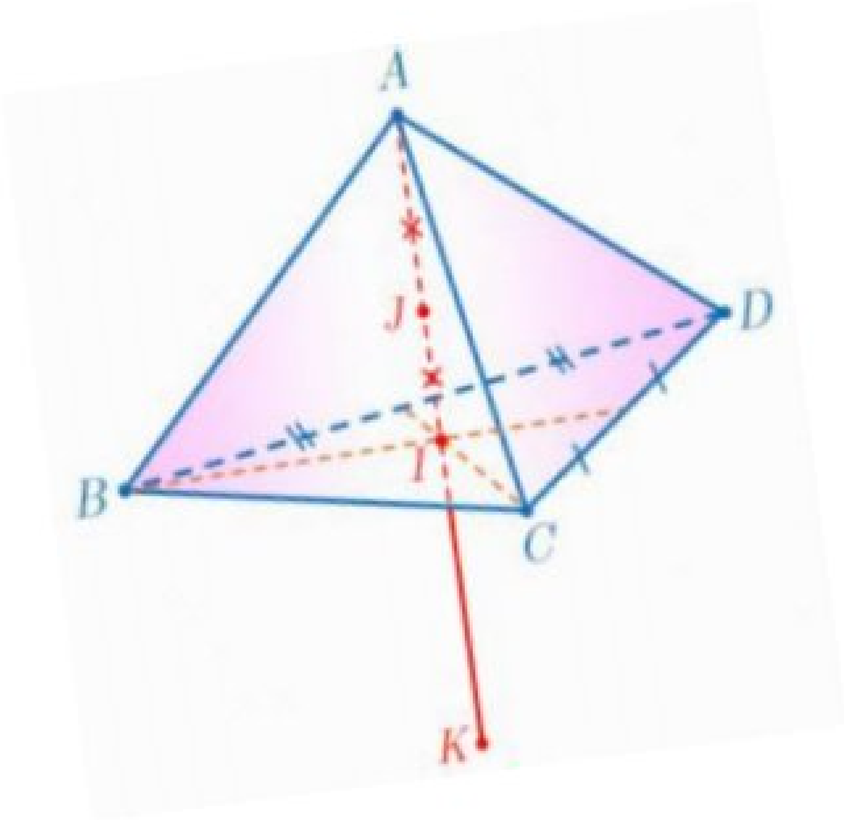
استنتجنا أنّ G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I, 2-2x)$ و $(J, 2x)$

فالنقطة G تنتمي أيضاً إلى القطعة المستقيمة $[IJ]$

وبالتالي تتلاقى المستقيمات (IJ) و (PR) و (QS) في نقطة واحدة G

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 21 :



ليكن $ABCD$ رباعي الوجوه. وليكن I مركز ثقل المثلث BCD

و J منتصف $[AI]$ و K نظيرة A بالنسبة إلى I .

عبّر عن J و K بصفتهما مراكز الأبعاد المتناسبة

للنقاط A و B و C و D بعد تزويدها بأمثال مناسبة.

الحل:

بما أن I مركز ثقل المثلث BCD فإن :

$$\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{JI}\Longrightarrow \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=3\overrightarrow{AJ}\Longrightarrow 3\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{JB}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD}=\overrightarrow{0}$$

إذاً J هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,3)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$ و $(D,1)$

وكذلك لدينا : $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\overrightarrow{KI}\Longrightarrow \overrightarrow{KB}+\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KD}=3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{KA}\right)\Longrightarrow$

$$-3\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}+2\overrightarrow{KD}=\overrightarrow{0}$$

إذاً K هي مراكز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(B,2)$ و $(C,2)$ و $(D,2)$.

التمرين 22 :

ليكن المثلث ABC .

❶ جِدْ عددين x و y بحيث: $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$

حيث M مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-1)$ و $(B,1)$ و $(C,1)$.

❷ جِدْ الأعداد α و β و γ لتكون N مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (B,β) و (C,γ)

حيث N المحققة للعلاقة $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

الحل:

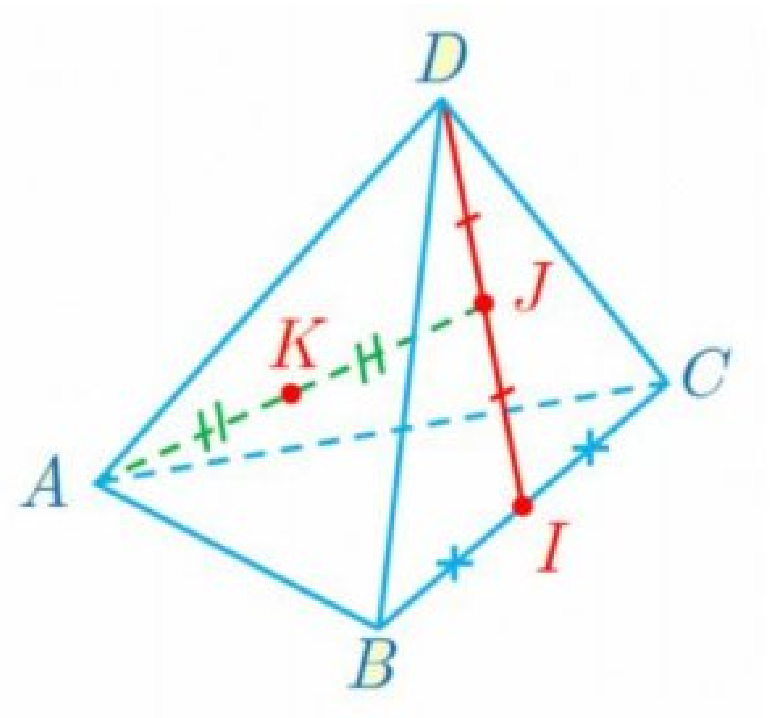
❶ $-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}\Longrightarrow -\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{0}\Longrightarrow$

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\quad\Longrightarrow\quad x=1\ ,\ y=1$

❷ $\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Longrightarrow \overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{NC}$

$0\overrightarrow{NA}+2\overrightarrow{NB}-\overrightarrow{NC}=\overrightarrow{0}\quad\Longrightarrow \alpha=0\ ,\quad \beta=2\ ,\quad \gamma=-1$

التمرين 23 :



انطلاقاً من الشكل المجاور . جِدْ الأمثال α و β و γ و γ

لتكون K مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α)و(B,β)و(C,γ)و(D,δ)

الحل :

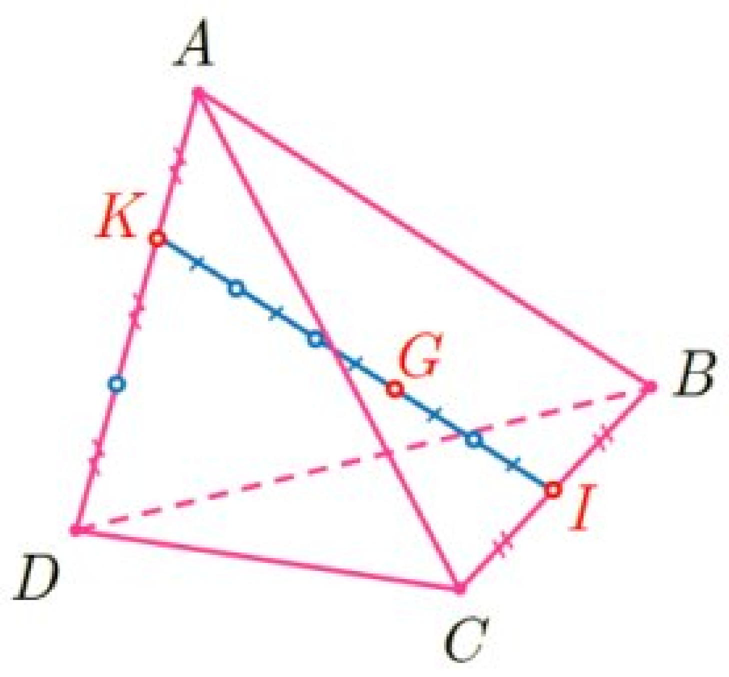
بما أنّ I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسب للنقاط $(B,1)$ و $(C,1)$

وبما أنّ J منتصف $[ID]$ يكون $(D,2)$ وبالتالي J مركز الأبعاد المتناسب للنقاط $(I,2)$ و $(D,2)$

و بما أنّ K منتصف $[AJ]$ و$(J,4)$ فهي مركز الأبعاد المتناسب للنقاط $(J,4)$ و $(A,4)$ ويكون :

$$\alpha = 4 \quad , \quad \beta = 1 \quad , \quad \gamma = 1 \quad , \quad \delta = 2$$

التمرين 24 :



بالاستفادة من المعلومات المبينة في الشكل المجاور

❶ عبر عن k كمركز أبعاد متناسبة للنقطتين (A,a) و (D,d)

❷ عبر عن I كمركز أبعاد متناسبة للنقطتين (B,b) و (C,c)

❸ عبر عن G كمركز أبعاد متناسبة للنقاط (A,a) و (B,b) و(C,c) و (D,d)

❹ باعتبار المثلث(ABC) متساوي الساقين و $BC = 4$ احسب : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

الحل :

من الرسم نجد أن :

❶ $\overrightarrow{KD} + 2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{0}$ إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,2)$ و$(D,1)$

وبالتالي : $a = 2d \neq 0$

❷ I منتصف $[BC]$ فهي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,1)$ و $(C,1)$

وبالتالي : $b = c \neq 0$

❸ $2\overrightarrow{GK} + 3\overrightarrow{GI} = \overrightarrow{0}$ وبالتالي G هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(I,3)$ و $(K,2)$

$$2i = 3k \implies 2(b+c) = 3(a+d)$$

$$\implies 2(b+b) = 3(2d+d) \implies 4b = 9d \implies b = \frac{9}{4}d$$

حتى لا نحصل على أوزان كسرية نختار $d = 4$ وبالتالي $a = 8 \quad , \quad c = 9 \quad , \quad b = 9$

❹ $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BC} = \|\overrightarrow{BI}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BC}) = 2 \times 4 \times 1 = 8$

التمرين 25 : النموذج الوزاري الثاني 2020

لتكن النقاط $A(1,-1,2)$, $B(2,1,0)$, $C(2,3,-1)$, $D(0,0,2)$ والمطلوب :

❶ عين إحداثيات G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1)$و$(B,2)$و$(C,2)$و$(D,1)$

❷ حدد S مجموعة النقاط M التي تحقق: $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6$

❸ جد معادلة للمجموعة S

الحل :

$$A(1,-1,2)\quad,\quad B(2,1,0)\quad,\quad C(2,3,-1)\quad,\quad D(0,0,2)$$

❶ G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(A,1),(B,2),(C,2),(D,1)$

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(1)+2(2)+2(2)+1(0)}{1+2+2+1}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(-1)+2(1)+2(3)+1(0)}{6}=\frac{7}{6}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta}=\frac{1(2)+2(0)+2(-1)+1(2)}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

$$G\left(\frac{3}{2},\frac{7}{6},\frac{1}{3}\right)$$

❷

$$\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=6\Rightarrow\|6\overrightarrow{MG}\|=6\Rightarrow 6MG=6\Rightarrow MG=1$$

S مجموعة النقاط M تمثل معادلة كرة مركزها نصف قطرها $r=1$

❸ $$S:\left(x-\tfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\tfrac{7}{6}\right)^2+\left(z-\tfrac{1}{3}\right)^2=1$$

التمرين 26 : النموذج الوزاري السادس

ABCD رباعي وجوه G مركز ثقل المثلّث DBC. جد مجموعة نقاط الفراغ التي تحقّق:

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}\|$$

الحل :

بما أنّ G مركز ثقل المثلّث DBC فإنّ: $\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$

$$3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MA}-\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MC}\right)=3\left(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}\right)=3\overrightarrow{GA}$$

بالتالي المساواة المفروضة تكافئ: $\|3\overrightarrow{GM}\|=\|\overrightarrow{3GA}\|\Rightarrow\|\overrightarrow{GM}\|=\|\overrightarrow{GA}\|$

و مجموعة النقاط M في الفراغ تمثّل سطح كرة مركزها G ونصف قطرها GA.

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 27 : النموذج الوزاري الثالث 2020

ادرس وضع المستقيمين d, d' المعرفين كما يأتي :

$$d:\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} ;t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} ;s \in \mathbb{R}$$

الحل :

$$d:\begin{cases} x = 2t - 5 \\ y = t - 2 \\ z = -\frac{1}{2}t + 3 \end{cases} : t \in \mathbb{R}$$ شعاع توجيه $\vec{u}\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$

$$d':\begin{cases} x = s + 5 \\ y = 2 \\ z = 2s + 5 \end{cases} : s \in \mathbb{R}$$ شعاع توجيه $\overrightarrow{u'}(1,0,2)$

$\vec{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d, d' غير متوازيين , نبحث عن التقاطع

$$❶\ s + 5 = 2t - 5 \quad ,❷\ 2 = t - 2 \quad , \quad ❸\ 2s + 5 = -\frac{1}{2}t + 3$$

من❷ نجد: $t = 4$ نعوض في ❸: $2s + 5 = -\frac{1}{2}(4) + 3 \Longrightarrow s = -2$

نعوض في ❶: $-2 + 5 = 2(4) - 5 \Longrightarrow 3 = 3$ محققة إذاً d, d' متقاطعان

ويقعان في مستوي واحد و لإيجاد نقطة التقاطع : نعوض $t = 4$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم d

$$\begin{cases} x = 2(4) - 5 = 3 \\ y = 4 - 2 = 2 \\ z = -\frac{1}{2}(4) + 3 = 1 \end{cases} \Longrightarrow (3,2,1)$$ نقطة التقاطع هي

التمرين 28 : دورة 2017 الثانية

اكتب شعاعي التوجيه للمستقيمين d', d :

$$d:\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -3t + 2 \\ z = -3t + 3 \end{cases} : t \in \mathbb{R} \quad \text{و} \quad d':\begin{cases} x = s \\ y = -3s + 3 \\ z = -s + 1 \end{cases} : s \in \mathbb{R}$$

و هل المستقيمين d', d يقعان في مستوٍ واحد ؟ علل إجابتك

الحل :

$\vec{u} = (1,-3,-3)$ شعاع توجيه d و$\vec{v} = (1,-3,-1)$ شعاع شعاع توجيه d' غير مرتبطان خطياً

لأن مركباتهما غير متناسبة وبالتالي d, d' غير متوازيين فهما إما متقاطعين أو متخالفين

نحل جملة المعادلتين

$$\begin{matrix}(1)\\(2)\\(3)\end{matrix} \quad \begin{cases} t - s = -1 \\ t - s = \frac{5}{3} \\ 3t - s = 2 \end{cases} \sim \begin{cases} t + 1 = s \\ -3t + 2 = -3s - 3 \\ -3t + 3 = -s + 1 \end{cases}$$

نلاحظ التناقض بين المعادلة (1) والمعادلة (2) فجملة المعادلات متناقضة وليس لها حلول

بالتالي المستقيمان d, d' متخالفان ولا يقعان في مستو واحد.

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 29 : دورة 2019 الأولى

في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ النقطتان $A(1,0,1)$ و $B(0,1,1)$ والمطلوب :

❶ أكتب تمثيلا وسيطياً للمستقيم d المار من A ويقبل شعاع توجيه $\vec{u}(2,2,1)$

❷ أثبت أن المستقيمين (AB) و d متعامدان

الحل :

❶ $$\begin{cases} x = at + x_0 \\ y = bt + y_0 \\ z = ct + z_0 \end{cases} ,t \in R \Rightarrow \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 2t \\ z = t + z_0 \end{cases} ,t \in R$$

❷ شرط التعامد $\vec{u}.\overrightarrow{AB} = 0$

(AB) و d متعامدين $\overrightarrow{AB}(-1,1,0) ,\vec{u}(2,2,1) \Rightarrow \vec{u}.\overrightarrow{AB} = -2 + 2 + 0 = 0 \Rightarrow$

التمرين 30 : (متميزين)

أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d المار من النقطة $A(2,1,3)$

و الموازي للمستوي : $P : x + y + z + 1 = 0$

إذا علمت أن d يقطع المستوي (YOZ) في نقطة B ترتيبها (-1)

الحل :

بما أن B نقطة من (yoz) فأن فاصلتها $x_B = 0$ وترتيبها فرضاً هو $y_B = -1$

فالنقطة B من الشكل: $B(0\,,-1\,,z)$ و الشعاع $\vec{n}(1\,,1\,,1)$ هو ناظم المستوي P

بما أن المستقيم d يوازي المستوي P فإن $\overrightarrow{AB}.\vec{n} = 0$ حيث $\overrightarrow{AB}(-2,-2,z-3)$

$$\Rightarrow -2 - 2 + z - 3 = 0 \Rightarrow z = 7$$

ومنه شعاع توجيه d هو $\overrightarrow{AB}(-2,-2,4)$ وهو يمر من $A(2,1,3)$ فتمثيله الوسيطي :

$$d\begin{cases} x = -2t + 2 \\ y = -2t + 1 \\ z = 4t + 3 \end{cases} ;\ t \in R$$

اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 31 : الاختبار 4

المستقيمان L و L' معرّفان وسيطيّاً وفق :

$$L:\begin{cases}x=-1\\y=1-t\\z=1-2t\end{cases}\ :t\in\mathbb{R}\quad \text{و}\quad L':\begin{cases}x=4-5s\\y=3-2s\\z=-1+2s\end{cases}\ :s\in\mathbb{R}$$

❶ أثبت أنّ L و L' متقاطعان في نقطة يُطلب تعيين إحداثيّاتها.

❷ جد معادلة للمستوي المحدّد بالمستقيمين L و L'

الحل:

❶ $\overrightarrow{u}(0,-1,-2)\qquad \&\qquad \overrightarrow{u'}(-5,-2,2)$

ولأنّ مركّبتي شعاعي التوجيه $\overrightarrow{u}$ و $\overrightarrow{u'}$ غير متناسبة فهما غير مرتبطان خطيّاً فالمستقيمان غير متوازيان فهما إمّا متقاطعان أو غير واقعين في مستوٍ واحد.

$$x=-1=4-5s\ \Rightarrow s=1$$
$$y=1-t=3-2s\ \Rightarrow t=0$$
$$z=1-2t=-1+2s$$

محقّقة وبالتالي المستقيمان متقاطعان بنقطة إحداثيّاتها $A(-1,1,1)$

❷ $M(x,y,z)\in\mathcal{P}\quad\Rightarrow\quad \overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{u}+\beta\overrightarrow{u'}$

$(x+1,y-1,z-1)=(0,-\alpha,-2\alpha)+(-5\beta,-2\beta,2\beta)$

$(x+1,y-1,z-1)=(-5\beta,-\alpha-2\beta,-2\alpha+2\beta)$

$x+1=-5\beta$

$y-1=-\alpha-2\beta$

$z-1=-2\alpha+2\beta$

بالحل المشترك للمعادلات الثلاثة نجد: $\beta=\frac{-x-1}{5}\quad\Rightarrow\quad \alpha=-y+1+\frac{2x+2}{5}=\frac{2x-5y+7}{5}$

نعوّض بالثالثة نجد: $z-1=\frac{-4x+10y-14}{5}+\frac{-2x-2}{5}=\frac{-6x+10y-16}{5}$

$$\mathcal{P}: 6x-10y+5z+11=0$$

التمرين 32 :

أوجد مسقط النقطة $A(3,-1,2)$ على المستقيم :

$$d:\begin{cases}x=-t+3\\y=-t+2\\z=t\end{cases}\quad t\in\mathbb{R}$$

ثم أوجد بعد A عن المستقيم d

الحل :

نفرض A' المسقط القائم للنقطة A على d فهي نقطة من d وبالتالي $A'(-t+3,-t+2,t)$

$\overrightarrow{AA'}(-t,-t+3,t-2)\quad ,\quad \vec{u}(-1,-1,1)\Rightarrow$

$\overrightarrow{AA'}.\vec{u}=0\Rightarrow t+t-3+t-2=0\Rightarrow t=\frac{5}{3}$

وبالتالي : $A'\left(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3}\right)\ \Rightarrow \overrightarrow{AA'}\left(\frac{-5}{3},\frac{4}{3},\frac{-1}{3}\right)\Rightarrow \left\|\overrightarrow{AA'}\right\|=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 33 : دورة 2020 الثانية

نتأمل في معلم متجانس $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ المستوي $P: 2x+y-3z+2=0$

والنقطة $A(1,1,-2)$ والمطلوب:

❶ أثبت أن النقطة A لا تنتمي إلى المستوي P.

❷ اكتب معادلة للمستوي Q المار من A والموازي للمستوي P.

الحل

❶ نعوض إحداثيات A في معادلة المستوي فنجد : $2+1+6+2\neq 0$ غير محققة إذاً $A\notin P$

❷بما أن P,Q متوازيين فإن$\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{n_P}(2\,,1\,,-3)$ و المستوي مار من $A(1,1,-2)$

$$2(x-1)+1(y-1)-3(z+2)=0 \Longrightarrow Q: 2x+y-3z-9=0$$

التمرين 34 : النموذج الوزاري الثالث

اكتب معادلة للمستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ حيث $A(2,-1,3)$ و $B(4,3,-1)$

الحل:

بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من المحور فهي متساوية البعد عن A و B بالتالي $[AM]^2=[BM]^2$

$$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=(x-4)^2+(y-3)^2+(z+1)^2$$
$$-4x+2y-6z+14=-8x-6y+2z+26$$
$$4x+8y-8z-12=0 \quad \Longrightarrow x+2y-4z-3=0$$

التمرين 35 :

في معلمٍ متجانس $\left(o;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ ، ليكن المستويين $Q\,,P$

$$Q: x+y+z+1=0 \text{ و } P: x-2y+3z-5=0$$

❶ أثبت أنّ المستويين $Q\,,P$ متقاطعين وفق فصل مشترك d

❷ أعط تمثيلا وسيطيا للمستقيمّ d

❸ اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ العمودي على كل من $Q\,,P$ و يمر بالنقطة $A(2,5,-2)$

الحل :

❶ $\vec{n}_Q(1,1,1)$ و $\vec{n}_p(1,-2,3)$ غير مرتبطان خطيا لأن مركباتها غير متناسبة فالمستويين $Q\,,P$ متقاطعين

❷ لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من d (الفصل المشترك للمستويين $Q\,,P$)عندئذٍ M تحقق معادلتي المستويين

$$\begin{cases} x-2y+3z-5=0 \\ x\ \ +y\ +\ z+1=0 \end{cases} \Longrightarrow -3y+2z-6=0 \Longrightarrow y=\ \frac{2}{3}z-2$$

نفرض $z=3t$ وبالتالي بالحل : $x=-5t+1$ و $y=\ 2t-2$ و $t\in\mathbb{R}$
$$d: \begin{cases} x=-5t+1 \\ y=2t-2 \\ z=3t \end{cases}$$

❸ المستوي $\mathcal{R}$ عمودي على كل من $Q\,,P$ فهو عمودي على فصلهما المشترك d و يقبل $\vec{u}$ ناظما له

و بالتالي معادلة المستوي $\mathcal{R}$ المار بالنقطة $A(2,5,-2)$ وناظمه $\vec{u}$ هي :

$$-5(x-2)+2(y-5)+3(z+2)=0 \Longrightarrow -5x+2y+3z+6=0$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093683426 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 36 :

نتأمل في معلم متجانس $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ لدينا النقطة $A(2,2,-1)$ والمستويين :

$$\mathcal{P}: x+y-2z-1=0\ \ ,\ \ \mathcal{Q}: x+y+z=0$$

❶ **أثبت أن المستويين $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ متعامدين**

❷ **احسب بُعد A عن كل من المستويين .**

❸ **استنتج ُبعد A عن الفصل المشترك للمستويين .**

الحل :

❶ $\vec{n}_{\mathcal{P}}(1,1,-2)\ ,\ \vec{n}_{\mathcal{Q}}(1,1,1) \Longrightarrow \vec{n}_{\mathcal{P}}.\vec{n}_{\mathcal{Q}} = 1+1-2=0$

الناظمين متعامدين فالمستويين متعامدين

❷ $d_1 = dis(A,\mathcal{P}) = \frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|2+2+2-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{5}{\sqrt{6}}\ , d_2 = dis(A,\mathcal{Q}) = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}}$

❸ **بفرض $A_{\mathcal{P}}$ مسقط A على $\mathcal{P}$ و $A_{\mathcal{Q}}$ مسقط A على $\mathcal{Q}$ و A' مسقط $A_{\mathcal{P}}$ على d الفصل المشترك لهما**

و بما أن المستويين متعامدان فحسب الاعمدة الثلاث تكون A' مسقط A على d

وبالتالي $AA_{\mathcal{P}}A'$ مثلث قائم في $A_{\mathcal{P}}$ وحسب فيثاغورث يكون :

$$d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2} = \sqrt{\frac{25}{6}+\frac{9}{3}} = \sqrt{\frac{43}{6}}$$

التمرين 37 : النموذج الوزاري الثاني

في معلم متجانس $(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$، لدينا نقطتين $A(2,-1,0)$ و $B(-1,3,5)$.

والمستوي $\mathcal{P}$ الذي يقبل معادلة $2x-3y+z-5=0$.

❶ **أثبت أنّ المستقيم (AB)يقطع المستوي $\mathcal{P}$ في نقطة C يُطلب تعيين إحداثيّاتها.**

❷ **اكتب معادلة للمستوي $\mathcal{Q}$ العمودي على $\mathcal{P}$ ويمر بالنقطتين A و B.**

الحل:

❶

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = (-3,4,5)$$

وهو شعاع توجيه للمستقيم، والشعاع $\overrightarrow{n}\ (2,-3,1)$ هو ناظم على المستوي $\mathcal{P}$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{v} = -6-12+5=-13$$

ليسا متعامدين فالمستقيم لا يوازي المستوي فهو قاطع له بنقطة.

نكتب التمثيل الوسيطيّ للمستقيم:

$$d: \begin{cases} x=-3t+2 \\ y=4t-1 \\ z=5t \end{cases}$$

نقاطع مع المستوي:

$$-6t+4-12t+3+5t-5=0 \quad \Longrightarrow t=\frac{2}{13}$$

وتكون احداثيّات نقطة التقاطع: $C\left(\frac{20}{13}, -\frac{5}{13}, \frac{10}{13}\right)$

❷إنّ كل من الشعاعين $\overrightarrow{v}$ و $\overrightarrow{n}$ يوازي الناظم للمستوي وليكن $\overrightarrow{n'}(a\,,b\,,c\,)$ بالتالي:

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{n'}=0 \implies 2a-3b+\ c=0 \implies 6a-9b+3\,c=0$$
$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{n'}=0 \implies -3a+4b+5c=0 \implies -6a+8b+10c=0$$

بالحل المشترك (بالجمع) نجد : $-b+13c=0 \implies b=13c$

$$2a-39c+c=0 \implies a=19c$$

بإعطاء قيمة ما $c=1$ **يكون** $\overrightarrow{n'}(19\,,13\,,1\,)$ **وتكون معادلة المستوي:** $19x+13y+z+d=0$

وبما أنّ $A(2,-1,0)$ **نقطة من المستوي فهي تحقّق معادلته:**

$$38-13+d=0 \implies d=-25$$
$$d':19x+13y+z-25=0$$

طريقة ثانية: بفرض $M(x,y,z)\in d'$ **وكون** $\overrightarrow{n}$ **و** $\overrightarrow{v}$ **غير مرتبطان خطيّاً:**

$$\overrightarrow{AM}=\alpha\overrightarrow{n}+\beta\overrightarrow{v} \implies (x-2,y+1,z)=(2\alpha-3\beta,-3\alpha+4\beta,\alpha+5\beta)$$

$$x-2=2\alpha-3\beta$$
$$y+1=-3\alpha+4\beta$$
$$z=\ \alpha+5\beta$$

من الأولى والثانية نجد أنّ : $3x+2y-4=-\beta \quad \& \quad 4x+3y-5=-\alpha$

$$z=-4x-3y+5-15x-10y+20 \implies 19x+13y+z-25=0$$

التمرين 38 :

برهن أن المستويين متوازيين ثم أوجد البعد بينهما

$$\mathcal{P}:\quad x-2y+3z-1=0$$
$$Q:\quad 2x-4y+6z+3=0$$

الحل :

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=(1,-2,3)\quad,\quad \overrightarrow{n_Q}=(2,-4,6) \implies \overrightarrow{n_Q}=2\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}$$

الشعاعين مرتبطان خطيا فالمستويين متوازيين

نفرض $y=0\ ,\ z=0$ **وبالتالي** $x=1$ **ومنه** $H(1,0,0)\in\mathcal{P}$ **وبالتالي :**

$$dist(H,Q)=\frac{|2(1)-4(0)+6(0)+3|}{\sqrt{4+16+36}}=\frac{5}{\sqrt{56}}$$

التمرين 39 :

نُعطي معلماً متجانساً $\left(O;\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k}\right)$ **ومعادلات ثلاثة مستويات**

$$\mathcal{P}_1: x-2y-3z=3$$
$$\mathcal{P}_2: 2x-y-4z=7$$
$$\mathcal{P}_3: 3x-3y-5z=8$$

أثبت أن المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة يطلب تعيينها

الحل :

$$\begin{cases}\mathcal{P}_1: x-2y-3z=3\\ \mathcal{P}_2: 2x-y-4z=7\\ \mathcal{P}_3: 3x-3y-5z=8\end{cases} \sim \begin{matrix}x-2y-3z=3\\ 0+3y+2z=1\\ 0+3y+4z=-1\end{matrix} \sim \begin{matrix}x-2y-3z=3\\ 0+3y+2z=1\\ 0+0-2z=2\end{matrix}$$

للجملة حل وحيد والمستويات تتقاطع في نقطة $z=-1 \implies y=1 \implies x=2 \implies (2,1,-1)$

التمرين 40 :

نتأمّل في معلم متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، النقاط :

$$A(2,1,3) \quad \& \quad B(1,0,-1) \quad \& \quad C(4,0,0) \quad \& \quad D(0,4,0) \quad \& \quad E(1,-1,1)$$

❶ أثبت أنّ النقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

❷ أثبت أنّ المستقيم (AB) عمودي على المستوي (CDE) .

❸ عيّن احداثيّات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE).

❹ عند أي قيمة للوسيط m تنتمي النقطة $M\ (\ m\ ,1\ ,0\ )$ للمستوي (CDE)

الحل :

❶نلاحظ أنّ الشعاعين $\overrightarrow{CD}=(-4,4,0)$ و $\overrightarrow{CE}=(-3,-1,1)$ غير مرتبطين خطياً

لان مركّباتهما غير متناسبة ، والنقاط C و D و E ليست واقعة على استقامة واحدة.

❷ $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)\ \ ,\ \overrightarrow{CD}=(-4,4,0)\ ,\ \overrightarrow{CE}=(-3,-1,1) \Longrightarrow$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=(-1,-1,-4).(\,-4,4,0\,)=4-4=0$ متعامدان

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CE}=(-1,-1,-4).(-3,-1,1)=3+1-4=0$ متعامدان

والمستقيم عمودي على مستقيمين متقاطعين في المستوي فهو عمودي على المستوي (CDE)

❸المستقيم (AB) مار من $A(2,1,3)$ وشعاع توجيهه $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$ وبالتالي :

$$(AB):\begin{cases} x=-t+2 \\ y=-t+1 \quad t\in\mathbb{R} \\ z=-4t+3 \end{cases}$$

المستوي (CDE) مار من $C(4,0,0)$ ويقبل $\overrightarrow{AB}=(-1,-1,-4)$ ناظما له وبالتالي معادلته :

$$-1(x-4)-1(y-0)-4(z-0)=0 \Longrightarrow x+y+4z-4=0$$

لتعيين احداثيّات N نقطة تقاطع المستقيم (AB) مع المستوي (CDE)

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة المستوي (CDE) فنجد :

$$-t+2-t+1-16t+12-4=0 \Longrightarrow t=\frac{11}{18}$$

نعوض $t=\frac{11}{18}$ في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) نجد $N(\frac{25}{18},\frac{7}{18},-1)$

❹ نعوض إحداثيات النقطة $M(m,1,0)$ في معادلة المستوي (ABC)

$$x+y+4z-4=0 \Longrightarrow m+1+0-4=0 \Longrightarrow m=3 \Longrightarrow M(3,1,0)$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 41 :

نتأمل المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ النقطتين $A(1,0,1), B(2,-2,3)$

❶ **أوجد نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن النقطتين $A\,,B$**

❷ **اكتب معادلة للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$**

❸ **اكتب معادلة للكرة التي يكون $[AB]$ قطرا فيها**

الحل:

❶ **بفرض $M(x,0,0)$ نقطة تنتمي لمحور الفواصل متساوية البعد عن النقطتين $A(1,0,1), B(2,-2,3)$ وبالتالي:**

$$\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \Rightarrow (x-1)^2+0+1=(x-2)^2+4+9 \Rightarrow$$

$$x^2-2x+1+1=x^2-4x+4+13 \Rightarrow 2x=15 \Rightarrow x=\frac{15}{2} \Rightarrow M(\frac{15}{2},0,0)$$

❷ **معادلة المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ مار من $M(\frac{15}{2},0,0)$ وناظمه $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(1,-2,2)$ معادلته :**

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \Rightarrow 1\left(x-\frac{15}{2}\right)-2(y-0)+2(z-0)=0 \Rightarrow$$

$$x-\frac{15}{2}-2y+2z=0 \Rightarrow 2x-4y+4z-15=0$$

❸ **بما أن $[AB]$ قطر في الدائرة فإن I منتصف $[AB]$ هو مركزها**

$$x_I=\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{3}{2}\ ,y_I=\frac{y_A+y_B}{2}=-1, z_I=\frac{z_A+z_B}{2}=2$$

$$\overrightarrow{AB}(1,-2,2) \quad , \quad \|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{1+4+4}=3 \Rightarrow R=\frac{3}{2}$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y+1)^2+(z-2)^2=\frac{9}{4}$$

التمرين 42 : (للمتميزين) معدل

نتأمل في معلم متجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\,)$

النقاط $B(\,-2\,,0\,,5\,)$ و $C(-\,2\,,4\,,3\,)$ و $D(\,-2\,,0\,,3\,)$ و الشعاع $\overrightarrow{AB}(2\,,0\,,4)$ والمطلوب

❶ جد تمثيلا وسيطياً لكل من : (AB) و $[AB)$ و $[AB]$

❷ جد معادلة $\mathcal{P}$ المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$

❸ جد معادلة الكرة التي تمر من النقطة A وتمس المستوي $\mathcal{P}$

❹ جد معادلة الكرة المارة برباعي الوجوه $ABCD$

الحل :

❶ نفرض $A(x,y,z)$ و لدينا $B(-2{,}0{,}5)$ ومنه $\overrightarrow{AB}(-2-x,-y,5-z)=(2\,,0\,,4)$

بمطابقة المركبات مع الشعاع $\overrightarrow{AB}$ نجد أن :

$$-2-x=2 \Rightarrow x=-4\ ,-y=0 \Rightarrow\ y=0\ ,5-z=4 \Rightarrow\ z=1$$

$A(-4\,,0\,,1)$ و $\overrightarrow{AB}(2\,,0\,,4)$ بالتالي : $(AB)\begin{cases}x=2t-4\\y=0\\z=4t+1\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$

$$[AB]\begin{cases}x=2t-4\\y=0\\z=4t+1\end{cases}\ ;t\in[0{,}1]\qquad [AB)\begin{cases}x=2t-4\\y=0\\z=4t+1\end{cases}\ ;t\in[0,+\infty[\,,$$

❷ المستوي $\mathcal{P}$ مار من $I(-3\,,0\,,3)$ منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}=\overrightarrow{AB}(2\,,0\,,4)$ بالتالي :

$$2(x+3)+0(y-0)+4(z-3)=0 \Rightarrow 2x+4z-6=0 \Rightarrow \mathcal{P}: x+2z-3=0$$

❸ بما أن الكرة تمر من النقطة A وتمس المستوي $\mathcal{P}$ فإن $[IA]$ قطر في هذه الكرة

مركزها Ω هو منتصف $[IA]$ وبالتالي $\Omega\left(\frac{-7}{2},0{,}2\right)$ و نصف قطرها هو $\sqrt{\frac{5}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}+0+1}=[\Omega A]$

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2+y^2+(z-2)^2=\frac{5}{4}$$

$$x^2+y^2+z^2+7x-4z+\frac{49}{4}+4-\frac{5}{4}=0 \Rightarrow x^2+y^2+z^2+7x-4z+15=0$$

طريقة ثانية : الكرة هي مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{IM}=0$

$\overrightarrow{AM}(x+4\,,y\,,z-1)$ ، $\overrightarrow{IM}(x+3\,,y\,,z-3)$

$$(x+4)(x+3)+(y)(y)+(z-1)(z-3)=0 \Rightarrow$$
$$x^2+3x+4x+12+y^2+z^2-3z-z+3=0 \Rightarrow$$
$$x^2+y^2+z^2+7x-4z+15=0$$

❹ $B(\,-2\,,0\,,3\,)$ و $C(-\,2\,,4\,,3\,)$ و $D(\,-2\,,0\,,3\,)$ و $A(-4\,,0\,,1)$

نوجد المستوي المحوري لكل من القطع المستقيمة $[AB]$ و $[AC]$ و $[AD]$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$ هو $\mathcal{P}: x+2z-3=0$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AC]$

المستوي $\mathcal{Q}$ مار من $J(-3\,,2\,,2)$ منتصف $[AC]$ و شعاع الناظم عليه هو $\vec{n}=\overrightarrow{AC}(2\,,4\,,2)$

بالتالي : $2(x+3)+4(y-2)+2(z-2)=0 \Rightarrow 2x+4y+2z-6=0 \Rightarrow$

$$Q: x + 2y + z - 3 = 0$$

المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AD]$

المستوي $\mathcal{R}$ **مار من** $K(-3\,,0\,,2)$ **منتصف** $[AD]$ **و شعاع الناظم عليه هو** $\vec{n} = \overrightarrow{AD}(2\,,0\,,2)$

بالتالي : $2(x+3) + 0(y-0) + 2(z-2) = 0 \Rightarrow 2x + 2z + 2 = 0 \Rightarrow$

$$\mathcal{R}: x + z + 1 = 0$$

$$\begin{cases} \mathcal{P}: x + 2z = 3 & ① \\ \mathcal{R}: x + z = -1 & ② \\ Q: x + 2y + z = 3 & ③ \end{cases}$$

بطرح المعادلة ② **من** ① **نجد** $z = 4$ **نعوض في** ② **نجد** $x = -5$ **نعوض في** ③ **نجد** $y = 2$

تتقاطع المستويات في النقطة $G(-5\,,2\,,4)$ **وهي مركز الكرة المارة برباعي الوجوه** $ABCD$

ونصف قطرها $[GB] = \sqrt{(3)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$

بالتالي معادلة الكرة $(x+5)^2 + (y-2)^2 + (z-4)^2 = 14$

التمرين 43 :

أوجد معادلة للمستوي المماس للكرة $(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 53$

في النقطة $B(3,4,-2)$

الحل :

مركز الكرة $A(2,-2,2)$ **وبالتالي** $\overrightarrow{AB}(1,6,-4)$

المستوي المطلوب مار من $B(3,4,-2)$ **وناظمه** $\overrightarrow{AB}(1,6,-4)$ **معادلته :**

$$1(x-3) + 6(y-4) - 4(z+2) = 0 \Rightarrow$$

$$x + 6y - 4z - 3 - 24 - 8 = 0 \Rightarrow x + 6y - 4z - 35 = 0$$

التمرين 44 : دورة 2017 الأولى

❶ **اكتب معادلة للكرة** $\mathcal{S}$ **التي مركزها** O **مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها** $R = \sqrt{3}$.

❷ **تحقق أن المستوي** $\mathcal{P}$ **الذي معادلته** $\mathcal{P}: x - y + z + 3 = 0$ **يمس الكرة** $\mathcal{S}$

الحل ❶ **معادلة الكرة بالشكل العام مركزها** $M(x,y,z)$ **ونصف قطرها** R.

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = R^2$$

تصبح معادلة الكرة التي مركزها $O(0,0,0)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 3$

❷ $dist(o,p) = \frac{|ax+by+cz+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|0-0+0+3|}{\sqrt{1+1+1}} = \sqrt{3} = R$ **فالمستوي مماس للكرة**

التمرين 45 :

لتكن لدينا النقاط $O(0,0,0), A(0,0,6), B(4,0,0)$

❶ اكتب معادلة للأسطوانة التي محورها $(O,\vec{k})$ و مركزي قاعدتيها A و O ونصف قطر قاعدتها $\sqrt{6}$.

❷ اكتب معادلة للمخروط الذي محوره $(O,\vec{\imath})$ و رأسه O وقاعدته الدائرة التي مركزها B ونصف قطرها $\sqrt{6}$

❸ أي من النقطتين $C(10,0,0), D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ تنتمي للمخروط واي منها لا تنتمي مع التعليل

الحل :

❶
$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_1 \le z \le z_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=6 \\ 0 \le z \le 6 \end{cases}$$

❷
$$\begin{cases} y^2+z^2-\frac{r^2}{a^2}x^2=0 \\ 0 \le x \le a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2-\frac{6}{16}x^2=0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2-\frac{3}{8}x^2=0 \\ 0 \le x \le 4 \end{cases}$$

❸ من أجل النقطة $D\left(2,1,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ نلاحظ : $0 \le x_D = 2 \le 4$ و

$$(y_D)^2+(z_D)^2-\frac{3}{8}(x_D)^2 = 1+\frac{1}{2}-\frac{3}{8}(4) = \frac{3}{2}-\frac{3}{2} = 0$$

وبالتالي النقطة D تنتمي للمخروط

من أجل النقطة $C(10,0,0)$ نلاحظ : $0 \le x_D = 10 \nleq 4$ و بالتالي النقطة C لا تنتمي للمخروط

التمرين 46 :

في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ ، عيّن طبيعة مجموعة النقاط $M(x,y,z)$ في كل من الحالات التالية :

❶ $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$, ❷ $y^2+z^2-\frac{2}{9}=0 \;\; ; 0 \le x \le 1$

الحل :

❶ نقوم برد المعادلة $x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$ بالإتمام إلى مربّع كامل إلى الصيغة القانونيّة :

$$x^2-2x+1+y^2+6y+9+z^2 = 1+9+2 \Rightarrow (x-1)^2+(y+3)^2+z^2=12$$

مجموعة النقاط من الشكل $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ تمثل كرة :

$$\Omega(1,-3,0) \;\; \& \;\; r=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

❷
$$y^2+z^2-\frac{2}{9}=0 \Rightarrow y^2+z^2=\frac{2}{9}= \;\; ; 0 \le x \le 1$$

من الشكل $y^2+z^2=r^2 \;\; ; \; x_1 \le x \le x_2$ وهي تمثل معادلة اسطوانة محورها منطبق على ox

و قاعدتيها هما دائرتان طبوقتان نصف قطرهما $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ومركزيهما $O(0,0,0), A(1,0,0)$

التمرين 47 : الاختبار 3

في الفضاء المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ لدينا النقاط

$A(1,0,-1)$ و $B(2,2,3)$ و $C(3,1,-2)$ و $D(-4,2,1)$.

❶ أثبت أنّ المثلّث ABC قائم واحسب مساحه.

❷ أثبت أنّ الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) واستنتج معادلة للمستوي (ABC).

❸ احسب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) ثمّ احسب حجم رباعي الوجوه $DABC$

الحل:

❶ $\overrightarrow{AB}(1,2,4)$ و $\overrightarrow{AC}(2,1,-1)$ بالتالي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=2+2-4=0$ والمثلّث ABC في A

$$AB=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}, AC=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}, S(ABC)=\frac{1}{2}\sqrt{21\times 6}=\frac{1}{2}\sqrt{126}=\sqrt{\frac{63}{2}}$$

❷ يكون الشعاع $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) إذا كان عمود على مستقيمين فيه:

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB}(2,-3,1).(1,2,4)=2-6+4=0 \qquad \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC}(2,-3,1).(2,1,-1)=4-3-1=0 \qquad \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$$

إذاً $\vec{n}(2,-3,1)$ ناظم على المستوي (ABC) ويمر من $A(1,0,-1)$

$$2(x-1)-3(y-0)+1(z+1)=0 \Longrightarrow 2x-3y+z-1=0$$

❸ حساب بعد النقطة D عن المستوي (ABC) و حجم رباعي الوجوه $DABC$.

$$dist(A,\mathcal{P})=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-8-6+1-1|}{\sqrt{4+9+1}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}$$

التمرين 48 : الاختبار 4

في معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(3,-2,2)$ و $B(6,1,5)$ و $C(6,-2,-1)$ و $D(0,4,-1)$

بيّن مع التعليل صحّة أو خطأ كل من المقولات الآتية:

❶ المثلّث ABC قائم.

❷ المستقيم (AD) عمودي على المستوي (ABC).

❸ حجم رباعي الوجوه $DABC$ يساوي $V=81$.

الحل:

$$\overrightarrow{AB}=(3,3,3) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AC}(3,0,-3) \qquad \& \qquad \overrightarrow{AD}(-3,6,-3)$$

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=9+0-9=0$ صحيحة

❷ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=-9+18-9=0 \qquad \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

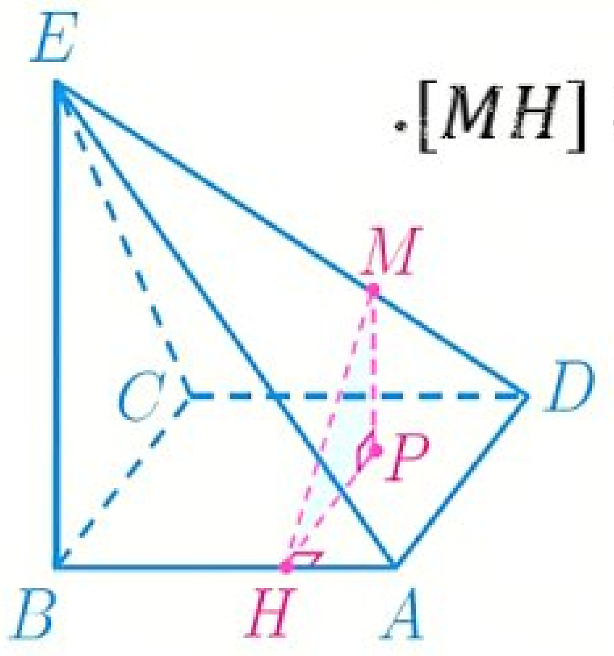
$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=-9+0-9=0 \qquad \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{AD}$

وبما أنّ $\overrightarrow{AD}$ عمود على كل من $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ فهو عمود على المستوي (ABC) صحيحة

❸ $V=\frac{1}{3}S(ABC).h=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{27}.\sqrt{18}\right)\sqrt{54}=\frac{1}{6}3\sqrt{3}.3\sqrt{2}.3\sqrt{6}=27$ والقضيّة خاطئة

التمرين 49 :

$ABCDE$ هرم رأسه E وقاعدته مربّع $[BE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$
و $EB = 4\sqrt{2}$ و $AB = 4$ و M نقطة من القطعة $[ED]$ تُحقّق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$
لتكن P المسقط القائم للنقطة M على المستوي $(ABCD)$
و H المسقط القائم للنقطة P على المستقيم (AB) . احسب طول القطعة المستقيمة $[MH]$.



الحل : لدينا المعلم المتجانس $\left(B;\frac{1}{4}\overrightarrow{BA},\frac{1}{4}\overrightarrow{BC},\frac{1}{4\sqrt{2}}\overrightarrow{BE}\right)$ عندئذٍ تكون :

$B(0,0,0)\,,A(4,0,0)\,,C(0,4,0)\,,E(0,0,4\sqrt{2})\,,D(4,4,0)$

نفترض النقطة $M(x,y,z)$ من ED تُحقّق $3\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DE}$ ومنه :

$$3(x-4,y-4,z-0) = (-4,-4,4\sqrt{2}) \Rightarrow M\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$$

P هي المسقط القائم للنقطة M على $(ABCD)$ إذاً $P\left(\frac{8}{3},\frac{8}{3},0\right)$ فيكون $H\left(\frac{8}{3},0,0\right)$

$$MP = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(0-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

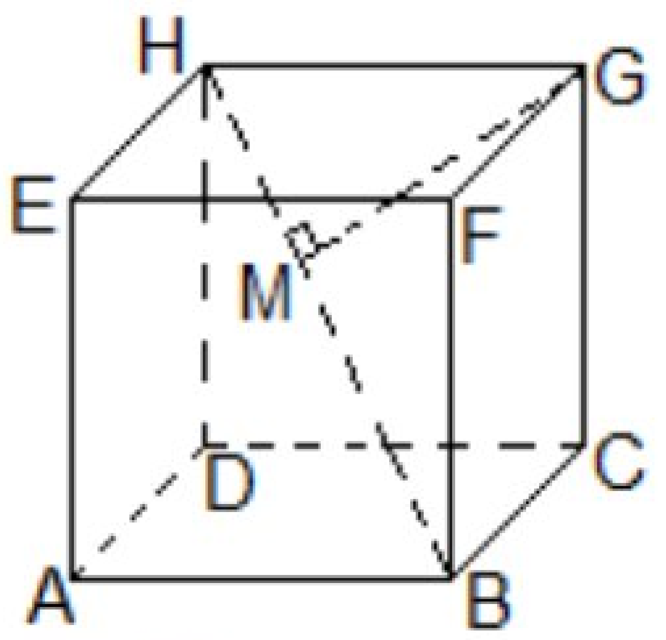
$$PH = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2+\left(0-\frac{8}{3}\right)^2+(0-0)^2} = \frac{8}{3}$$

حسب فيثاغورث في المثلث MPH القائم في P نجد : $MH = \sqrt{\frac{64}{9}+\frac{32}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

التمرين 50 :

$ABCDEFGH$ مكعب طول حرفه 1. و ليكن $(D;\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH})$ معلماً متجانساً .
النقطة M هي مسقط النقطة G على (BH) . المطلوب :

❶ أوجد إحداثيات كل من النقاط : $H\,,B\,,G\,,E$.
❷ أوجد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (BH) .
❸ استنتج إحداثيات النقطة M .
❹ أثبت أن النقطة M هي مسقط النقطة E على (BH) .



الحل : ❶ $H(0,0,1)\,,B(1,1,0)\,,G(0,1,1)\,,E(1,0,1)$

❷ $$\overrightarrow{BH}(-1\,,-1\,,1) \Rightarrow (BH)\begin{cases}x=-t\\y=-t\\z=1+t\end{cases}$$

❸ بما أن M مسقط G على (BH) فإن

$M \in (BH) \Rightarrow M(-t\,,-t\,,1+t)$ و منه $\overrightarrow{GM}(-t\,,-t-1\,,t)$

$$\overrightarrow{GM}.\overrightarrow{BH} = 0 \Rightarrow t+t+1+t = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{3} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

❹ $\overrightarrow{EM}\left(\frac{-2}{3},\frac{1}{3},\frac{-1}{3}\right)$ و $\overrightarrow{BH}(-1\,,-1\,,1)$ ومنه $\overrightarrow{EM}.\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = 0$
بالتالي (EM) و (BH) متعامدان و $M \in (BH)$ فإن M مسقط E على (BH)

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 51 : (للمتميزين)

نتأمل في معلم متجانس $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ ليكن لدينا المستوي $P : x + y + z - 6 = 0$

و المستقيم d الذي يقبل تمثيلاً وسيطيّاً: $: t \in \mathbb{R}$ $d: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t \\ z = t + 1 \end{cases}$

❶ أثبت أن المستقيم d عمودي على المستوي P

❷ جد معادلة للمستوي Q المار من النقط $A(-1,-1{,}2)$ والموازي للمستوي P

❸ جد معادلة الكرة التي مركزها يقع على المستقيم d وتمس كل من المستويين P و Q

الحل :

❶ ناظم المستوي P وشعاع توجيه المستقيم d هما $\vec{u}(1\,,1\,,1)$, $\overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,1)$

و منه $\overrightarrow{n_P} = \vec{u}$ فالشعاعين مرتبطين خطيا وبالتالي المستقيم d عمودي على المستوي P

❷ المستوي Q مار من النقط $A(-1,-1{,}2)$ ويوازي المستوي P بالتالي $\overrightarrow{n_Q} = \overrightarrow{n_P}(1\,,1\,,1)$

$$1(x+1) + 1(y+1) + 1(z-2) = 0 \Longrightarrow Q: x + y + z = 0$$

❸ بما أن الكرة تمس كل من المستويين P و Q

و المستقيم d يمر من مركز الدائرة وعمودي على المستويين P و Q

فإن نقطتي تقاطع المستقيم d مع كل من المستويين P و Q تشكلان قطر في الدائرة

لتكن B نقطة تقاطع d مع P :

$$(t-1) + (t) + (t+1) - 6 = 0 \Longrightarrow 3t = 6 \Longrightarrow t = 2 \Longrightarrow B(1\,,2\,,3)$$

لتكن C نقطة تقاطع d مع Q :

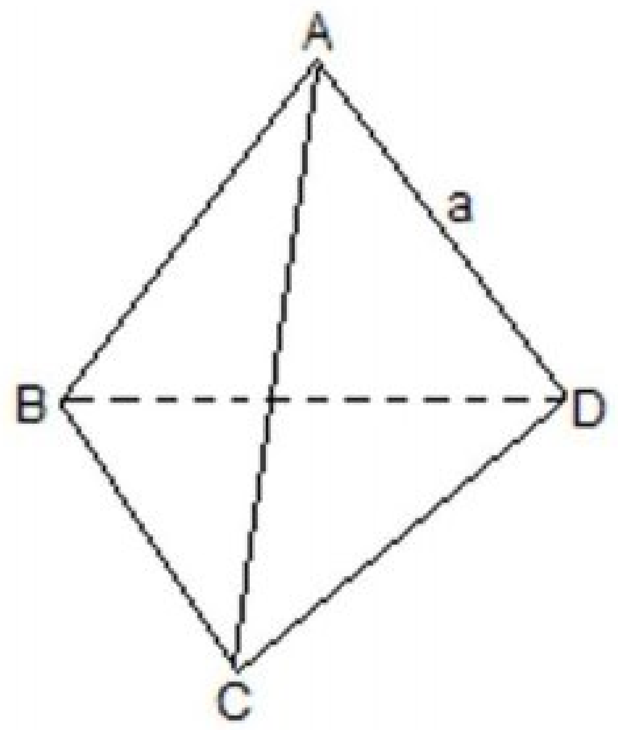
$$(t-1) + (t) + (t+1) = 0 \Longrightarrow 3t = 0 \Longrightarrow t = 0 \Longrightarrow C(-1\,,0\,,1)$$

بالتالي مركز الكرة هو $D\left(\frac{-1+1}{2}\,,\frac{0+2}{2}\,,\frac{1+3}{2}\right) \Longrightarrow D(0\,,1\,,2)$

ونصف قطرها $R = CD = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ ومنه معادلة الكرة

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = R^2 \Longrightarrow x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 3$$

التمرين 52 :



$ABCD$ رباعي وجوه منتظم طول حرفه a

❶ احسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}$ و احسب : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$

❷ أثبت أن المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = -a.a.cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-a^2}{2}$

وبما أن $ABCD$ رباعي الوجوه منتظم فإن $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$ و $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) = a.a.cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{a^2}{2}$$

❷ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = \frac{-a^2}{2}+\frac{a^2}{2} = 0$

وبالتالي فإن $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ متعامدين ومنه المستقيمين (AB) و (CD) متعامدين

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093683426 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 1 :

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$ لتكن النقاط :

$$A(2,4,3) \quad , \quad B(4,-2,3) \quad , \quad C(1,-1,1) \quad , \quad D(3,3,-3)$$
$$E(0,2,1) \quad , \quad N(2,2,-2) \quad , \quad F(1,2,3) \quad , \quad H(-2,-2,2)$$

والمستوي $Q : 3x - 3y + 2z + 4 = 0$

❶ أثبت أن النقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة ثم أكتب معادلة للمستوي (ABC)

❷ أكتب معادلة للمستوي P المار من D, N و العمودي على المستوي (ABC)

❸ أحسب بعد النقطة F عن Δ الفصل المشترك للمستويين P و (ABC)

❹ جد تمثيلا وسيطيا للمستقيم المار من D وعمودي على المستوي (ABC)

❺ جد D' مسقط D على المستوي (ABC)

❻ أثبت أن المستويات (ABC) و P و Q تتقاطع في النقطة E

❼ أثبت أن المستوي (ABC) يقطع الكرة التي مركزها D و تمر من H

ثم جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن التقاطع

❽ أعط معادلة للمجموعة ε المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 3$ وما طبيعة المجموعة ε

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(2,-6,0)\ ,\ \overrightarrow{AC}(-1,-5,-2)$ الشعاعين غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

فالنقاط A, B, C ليست على استقامة واحدة .

لنوجد معادلة المستوي (ABC) ، بفرض $\vec{n}_{ABC}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC)

$$\begin{cases} \vec{n}_{ABC}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow 2a - 6b = 0 & (1) \\ \vec{n}_{ABC}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow -a - 5b - 2c = 0 & (2) \end{cases}$$

من (1) $a = 3b$ ولأجل $b = 1$ يكون $a = 3$ وبالتعويض في (2) نجد $c = -4$

$\vec{n}_{ABC}(3,1,-4)$

المستوي (ABC) مار من $C(1,-1,1)$ وناظمه $\vec{n}(3,1,-4)$:

$$3(x-1) + (y+1) - 4(z-1) = 0 \Rightarrow (ABC): 3x + y - 4z + 2 = 0$$

❷ $\vec{n}_{ABC}(3,1,-4)\ ,\ \overrightarrow{DN}(-1,-1,1)$ وبفرض $\vec{n}_P(a,b,c)$

$$\begin{cases} \vec{n}_P.\overrightarrow{DN} = 0 \Rightarrow -a - b + c = 0 & (1) \\ \vec{n}_P.\vec{n}_{ABC} = 0 \Rightarrow 3a + b - 4c = 0 & (2) \end{cases}$$

بالجمع نجد : $2a - 3c = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{2}c$

وبفرض $c = 2$ نجد $a = 3$ نعوض في (1) لنجد أن $b = -1$

$$\vec{n}_P(3,-1,2) \ , N(2,2,-2) \quad , \quad a(x - x_N) + b(y - y_N) + c(z - z_N) = 0 \Rightarrow$$
$$3(x-2) - (y-2) + 2(z+2) = 0 \Rightarrow P :\ 3x - y + 2z = 0$$

❸ أحسب بعد النقطة F عن الفصل المشترك للمستويين P و (ABC)

$$(ABC): 3x+y-4z+2=0 \quad , \quad P:\ 3x-y+2z=0$$

$$d_1 = dis(F,ABC) = \frac{|3x_F+y_F-4z_F+2|}{\sqrt{(3)^2+(1)^2+(-4)^2}} = \frac{|9+2-12+2|}{\sqrt{9+1+16}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$d_2 = dis(F,P) = \frac{|3x_F-y_F+2z_F|}{\sqrt{(3)^2+(-1)^2+(2)^2}} = \frac{|3-2+6|}{\sqrt{9+1+4}} = \frac{8}{\sqrt{14}}$$

$$dis(F,\Delta) = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{26}}\right)^2+\left(\frac{8}{\sqrt{14}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{26}+\frac{64}{14}} = \sqrt{\frac{1678}{364}}$$

❹ $$\vec{u} = \vec{n}_{ABC} = (3,1,-4)\ ,\ D(3,3,-3) \Rightarrow (DD'):\begin{cases} x=3t+3 \\ y=t+3 \\ z=-4t-3 \end{cases} \quad t\in R$$

❺ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (DD') في معادلة المستوي (ABC) :

$$9t+9+t+3+16t+12+2=0 \Rightarrow 26t+26=0 \Rightarrow t=-1$$

نعوض في التمثيلات الوسيطية لـ (DD') فنحصل على $D'(0,2,1)$

❻

$$(ABC): 3x+y-4z+2=0\ ,\ P:\ 3x-y+2z=0\ ,\ Q:\ 3x-3y+2z+4=0$$

$$\begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 3x-y+2z=0 \\ 3x-3y+2z=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 4y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 4y-6z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 3x+y-4z=-2 \\ 2y-6z=-2 \\ 6z=6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$6z=6 \Rightarrow z=1 \Rightarrow 2y-6=-2 \Rightarrow y=2 \Rightarrow 3x+2-4=-2 \Rightarrow x=0$$

بالتالي المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة وهي النقطة $E(0,2,1)$

❼ نصف قطر الكرة التي مركزها $D(3,3,-3)$ وتمر من $H(-2,-2,2)$ هو :

$$R = DH = \sqrt{(-2-3)^2+(-2-3)^2+(2+3)^2} = \sqrt{25+25+25} = \sqrt{75}$$

بعد مركز الكرة D عن المستوي (ABC) هو $\sqrt{26}$

وبالتالي نصف قطر دائرة المقطع هو : $r^2 = 75-26 = 49 \Rightarrow r=7$

❽ بفرض $M(x,y,z)$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BM} = 3 \Rightarrow (x-2, y-4, z-3).(x-4, y+2, z-3) = 3$$

$$x^2-6x+8+y^2-2y-8+(z-3)^2 = 3 \Rightarrow$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2-2y+1)+(z-3)^2 = 3+9+1 \Rightarrow$$

$$(x-3)^2+(y-1)^2+(z-3)^2 = 13$$

مجموعة النقاط ε هي كرة مركزها $\Omega(3,1,3)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{13}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 2 : (للمتميزين)

في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس لدينا, $A(-2,-2,3)$, $B(1,2,5)$
$C(-1,2,1), D(2,-1,1)$

بفرض النقطة J منتصف $[BD]$,و النقطة I محققة للعلاقة $\overrightarrow{4AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

والنقطة H هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة : $(A,2),(B,3),(C,1),(D,2)$

❶ أثبت أن $I\,,J,H$ تقع على استقامة واحدة .

❷ أوجد مجموعة النقاط M المحققة للعلاقة :

① $P:\ \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\|$

② $S:\ \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MJ}\|$

❸ بين أن تقاطع مجموعة النقاط P ومجموعة النقاط S هي دائرة جد مركزها ونصف قطرها

الحل :

❶ $\overrightarrow{4AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC} \Longrightarrow \overrightarrow{2AI} = \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} \Rightarrow \overrightarrow{2IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

I مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)\ (B,1)\ (C,1)$

و J مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,2)\ (D,2)$

حسب الخاصة التجميعية فإن مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(I,4)$و$(J,4)$

هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,2)\ (B,1)(B,2)\ (C,1)\ (D,2)$

أي هو النقطة H التي تمثل مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة :

$(A,2),(B,3),(C,1),(D,2)$ وهذا يعني أن النقاط I,J,H على استقامة واحدة .

بالتالي H تقع في منتصف القطعة المستقيمة $[IJ]$

❷ ① $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MD}\| \Longrightarrow \|\overrightarrow{4MI}\| = \|\overrightarrow{4MJ}\| \Longrightarrow$

$\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\|$وهي تمثل معادلة المستوي المحوري للقطعة $[IJ]$

② $\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}-4\overrightarrow{MJ}\| \Longrightarrow$

$\|\overrightarrow{4MI}\| = \|4\overrightarrow{MI}-4\overrightarrow{MJ}\| = \|4(\overrightarrow{JM}+\overrightarrow{MI})\| = \|4\overrightarrow{JI}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{JI}\|$

وهي تمثل كرة مركزها I ونصف قطرها IJ

❸ $\overrightarrow{4AI} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} \Longrightarrow 4(x+2\,,y+2\,,z-3) = (3\,,4\,,2)+(1\,,4\,,-2) \Longrightarrow$

$(4x+8\,,4y+8\,,4z-12) = (4\,,8\,,0) \Longrightarrow I(-1,0,3)\quad,\ J\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},3\right) \Longrightarrow \overrightarrow{IJ}(\frac{5}{2},\frac{1}{2},0)$

من العلاقة (1) بحل المعادلة والاختصار نجد $\|\overrightarrow{MI}\| = \|\overrightarrow{MJ}\| \Longrightarrow \|\overrightarrow{MI}\|^2 = \|\overrightarrow{MJ}\|^2$

$(x+1)^2+(y)^2+(z-3)^2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+(z-3)^2 \Longrightarrow P\ :\ 10x+2y-3=0$

من العلاقة (2) بحل المعادلة والاختصار نجد: $(x+1)^2+(y)^2+(z-3)^2 = \frac{26}{4}$

بعد I عن المستوي P هو $IH = \frac{1}{2}IJ = \frac{\sqrt{26}}{4}$

المستوي يقطع الكرة بدائرة مركزها هو مسقط I على المستوي P أي H

ونصف قطرها $r = \sqrt{R^2-IH^2} = \sqrt{\frac{26}{4}-\frac{26}{16}} = \frac{\sqrt{78}}{4}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 3 : النموذج الوزاري السادس

نتأمّل النقطتين $A(1,1,1)$ و $B(3,2,0)$ في الفراغ المنسوب إلى معلم متجانس $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$
ليكن $\mathcal{P}$ المستوي المار بالنقطة B ويقبل $\overrightarrow{AB}$ شعاعاً ناظماً،
وليكن Q المستوي الذي معادلته $x-y+2z+4=0$
وأخيراً لتكن الكرة S التي مركزها A ونصف قطرها AB.

❶ أثبت أنّ $2x+y-z-8=0$ هي معادلة للمستوي $\mathcal{P}$.

❷ جد معادلة الكرة S.

❸ أثبت أنّ المستوي Q مستوي مماس للكرة S.

❹ أثبت أنّ النقطة $C(0,2,-1)$ هي مسقط النقطة A على المستوي Q.

❺ ليكن d المستقيم الذي يقبل تمثيلاً وسيطيّاً: $d:\begin{cases}x=t\\ y=12-5t \quad t\in\mathbb{R}\\ z=4-3t\end{cases}$

a : أثبت أنّ المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q.

b : أثبت أنّ المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$

الحل:

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$$

❶ المستوي $\mathcal{P}$ مار من النقطة $B(3,2,0)$ و $\vec{n}=\overrightarrow{AB}(2,1,-1)$ بالتالي

$$2(x-3)+1(y-2)-1(z+0)=0 \Rightarrow P:\ 2x+y-z-8=0$$

❷ الكرة S التي مركزها $A(1,1,1)$ ونصف قطرها $R=AB=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$

$$S:(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=R^2 \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=6$$

❸ $$dist(A,Q)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|1-1+2+4|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{6}{\sqrt{6}}=\sqrt{6}=R$$

إذا المستويَ Q مماس للكرة Q

❹ $\overrightarrow{CA}=(1,-1,2)$ و $\overrightarrow{AC}$ هو ناظم المستوي Q ولنتحقّق أنّ $C\in Q$

$0-2-2+4=0$ محقّقة، وبالتالي النقطة C هي مسقط النقطة A على المستوي Q

❺ a : يكون d هو الفصل المشترك للمستويين إذا حقّق معادلتيهما :

$\mathcal{P}: 2t+12-5t-4+3t-8=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة

$Q: t-12+5t+8-6t+4=0 \Rightarrow 0=0$ محقّقة

إذاً المستقيم d هو الفصل المشترك للمستويين $\mathcal{P}$ و Q.

b : لتكن H منتصف $[BC]$ فيكون $H\left(\frac{3}{2},2,\frac{-1}{2}\right)$ و $\overrightarrow{BC}=(-3,0,-1)$ فيكون :

$$-3\left(x-\frac{3}{2}\right)+0(y-2)-1\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Rightarrow 3x+z-4=0$$

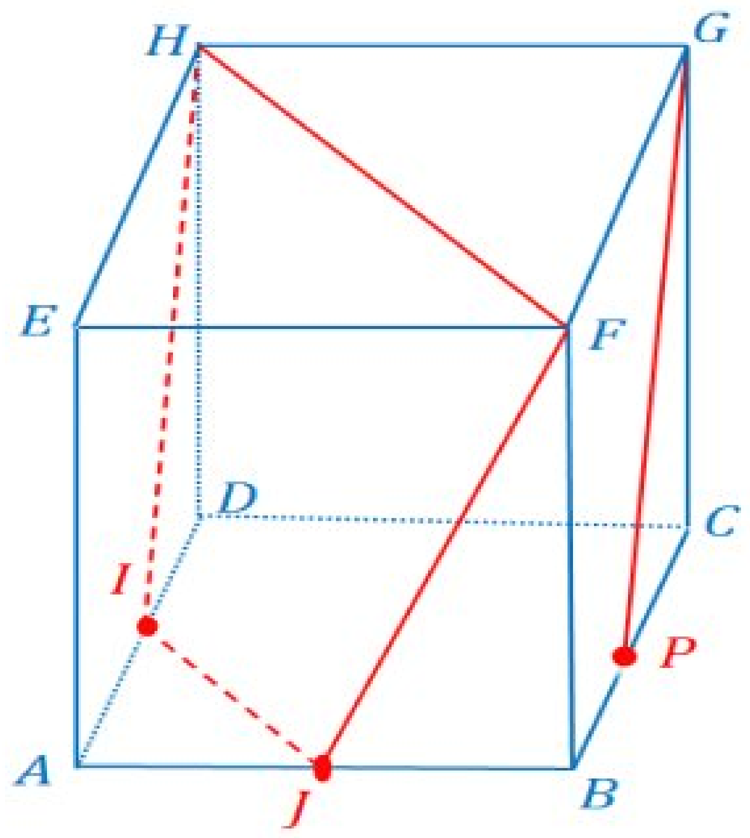
نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي نجد

محقّقة $6t+8-6t=8 \Rightarrow 8=8$

إذاً المستقيم d محتوى في المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[BC]$.

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

المسألة 4 :



ليكن $ABCDFEGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = AD = 2$ و $GC = 3$

النقاط I وJ و P هي منتصفات $[AD]$ و $[AB]$ و $[BC]$ على الترتيب

نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$.

❶ أثبت أنّ المستقيم (GP) يوازي المستوي $(HFJI)$

❷ جد معادلة الكرة التي يكون $[EC]$ قطراً فيها

❸ جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع الكرة مع المستوي (HFJI)

❹ جد معادلة المخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ من المثلث AEH حول (AE)

❺ احسب بعد النقطة E على المستقيم (JF)

❻ احسب بعد النقطة E على المستوي $(HFJI)$

❼ هل ينتمي مسقط النقطة E على المستوي $(HFJI)$ الى المستقيم (JF)

❽ هل ينتمي مسقط النقطة E على المستقيم (JF) الى المستوي (HFJI)

❾ احسب $\cos\widehat{EJF}$

❿ أحسب حجم الهرم EHFJI

الحل:

$A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $C(2,2,0)$ & $D(0,2,0)$

$E(0,0,3)$ & $F(2,0,3)$ & $G(2,2,3)$ & $H(0,2,3)$

$I(0,1,0)$ منتصف$[AD]$ و $J(1,0,0)$ منتصف$[AB]$ و $P(2,1,0)$ منتصف$[BC]$

❶ نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HFJ) و $\overrightarrow{HF}(2,-2,0)$, $\overrightarrow{FJ}(-1,0,-3)$

$$\vec{n}.\overrightarrow{HF} = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0 \Rightarrow a = b$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{FJ} = 0 \Rightarrow -a - 3c = 0 \Rightarrow a = -3c$$

بفرض $c = 1$ وبالتالي $a = -3$ ومنه $b = -3$ وبالتالي $\vec{n}(-3,-3,1)$

و المستوي (HFJ) مار من $J(1,0,0)$ اذن معادلة المستوي (HFJ) هي :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow$$
$$-3(x-1) - 3(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow x + y - 4z - 1 = 0$$

نعوض احداثيات النقطة I في معادلة المستوي(HFJ) فنجد $0 + 1 + 0 - 1 = 0 \Rightarrow 0 = 0$

فالنقطة I تنتمي للمستوي (HFJ) وبالتالي معادلة المستوي $(HFJI)$ هي $x + y - 4z - 1 = 0$

$\overrightarrow{GP}(0,-1,-3) \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{GP} = 0 + 3 - 3 = 0$ فالمستقيم (GP) يوازي المستوي $(HFJI)$

طريقة ثانية لحل الطلب الأول :

$\overrightarrow{GP}(0,-1,-3)$, $\overrightarrow{HI}(0,-1,-3) \Rightarrow \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{HI}$ فالشعاعين $\overrightarrow{GP}$ و $\overrightarrow{HI}$ مرتبطين خطيا

المستقيم(GP) يوازي المستقيم(HI) المحتوى في المستوي$(HFJI)$

بالتالي المستقيم(GP) يوازي المستوي$(HFJI)$

❷ جد معادلة الكرة التي يكون $[EC]$ قطراً فيها

مركز الكرة وليكن Ω هو منتصف $[EC]$ وبالتالي $\Omega\left(1,1,\frac{3}{2}\right)$

ونصف قطرها $R = \frac{EC}{2} = \frac{\sqrt{(2-0)^2+(2-0)^2+(0-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4+4+9}}{2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$ و بالتالي معادلة الكرة :

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2 \Longrightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

❸ جد نصف قطر الدائرة الناتجة عن تقاطع الكرة مع المستوي $(HFJI)$

نصف قطر دائرة التقاطع : $r = \sqrt{R^2-d^2}$

$$dist(\Omega\,,(HFJI)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|(1)+(1)-4\left(\frac{3}{2}\right)-1\right|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{5}{\sqrt{18}}$$

$$r = \sqrt{\frac{17}{4}-\frac{5}{18}} = \sqrt{\frac{153}{36}-\frac{10}{36}} = \frac{\sqrt{143}}{6}$$

❹ جد معادلة المخروط الناتج عن دوران الضلع $[AH]$ من المثلث AEH حول (AE)

رأس المخروط هو النقطة A ومركز قاعدته هو النقطة $E(0,0,3)$

و نصف قطر قاعدته هو $r = EH = 2$

معادلته : $\begin{cases} x^2+y^2-\frac{4}{9}z^2 = 0 \\ 0 \le z \le 3 \end{cases} \Longleftarrow \begin{cases} x^2+y^2-\frac{r^2}{a^2}z^2 = 0 \\ 0 \le z \le a \end{cases}$

❺ احسب بعد النقطة E على المستقيم (JF)

المستقيم (JF) مار من النقطة $J(1,0,0)$ و $\overrightarrow{JF}(1,0,3)$ وبالتالي : $t \in \mathbb{R}$: $(JF): \begin{cases} x = t+1 \\ y = 0 \\ z = 3t \end{cases}$

$E'(t+1,0,3t)$ مسقط النقطة $E(0,0,3)$ على المستقيم (JF) وبالتالي $\overrightarrow{EE'}(t+1,0,3t-3)$

$$\overrightarrow{JF}\,.\overrightarrow{EE'} = 0 \Longrightarrow t+1+9t-9 = 0 \Longrightarrow 10t-8 = 0 \Longrightarrow t = \frac{8}{10} \Longrightarrow t = \frac{4}{5}$$

$$E'\left(\frac{9}{5},0,\frac{12}{5}\right),\overrightarrow{EE'}\left(\frac{9}{5},0,\frac{-3}{5}\right) \Longrightarrow dist(E,(JF)) = \left\|\overrightarrow{EE'}\right\| = \sqrt{\frac{81}{25}+0+\frac{9}{25}} = \frac{3\sqrt{10}}{5}$$

❻ احسب بعد النقطة E على المستوي $(HFJI)$

لدينا $E(0,0,3)$ ومعادلة المستوي $(HFJI)$ هي $x+y-4z-1 = 0$ وبالتالي :

$$dist(E\,,(HFJI)) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|(0)+(0)-4(3)-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{13}{\sqrt{18}} = \frac{13}{3\sqrt{2}}$$

❼ هل ينتمي مسقط النقطة E على المستوي $(HFJI)$ الى المستقيم (JF)

اذن $dist(E,(JF)) \neq dist(E\,,(HFJI))$:

المسقط القائم للنقطة E على المستوي $(HFJI)$ لا ينتمي الى المستقيم (JF)

❽ **هل ينتمي مسقط النقطة E على المستقيم (JF) الى المستوي (HFJI)**

بما أن المستقيم (JF) **محتوى في المستوي** $(HFJI)$ **فإن :**

مسقط النقطة E **على المستقيم** (JF) **ينتمي الى المستوي** $(HFJI)$

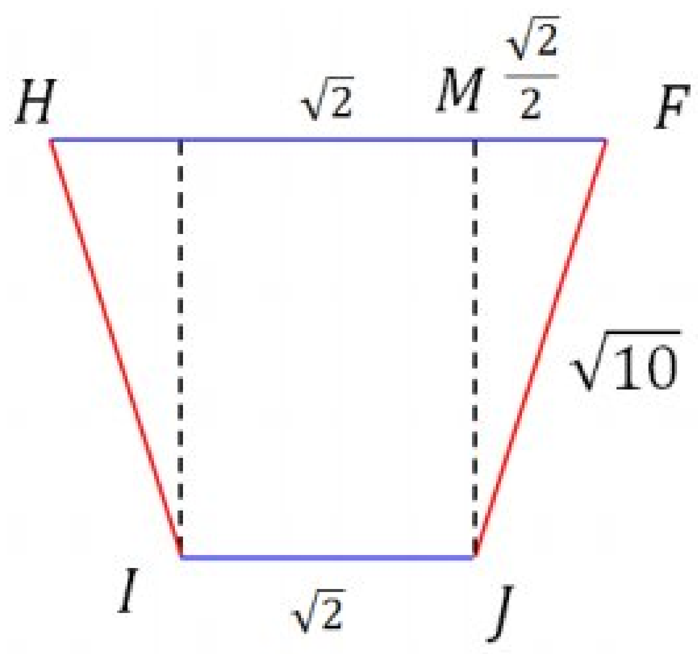
❾ **احسب** $\cos\widehat{EJF}$

لدينا $\overrightarrow{JE}(-1,0,3)$ **و** $\overrightarrow{JF}(1,0,3)$ **و** $\overrightarrow{JE}\cdot\overrightarrow{JF} = -1+0+9 = 8$

و $\|\overrightarrow{JE}\| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$ **و** $\|\overrightarrow{JF}\| = \sqrt{1+0+9} = \sqrt{10}$

$$\cos\widehat{EJF} = \frac{\overrightarrow{JE}\cdot\overrightarrow{JF}}{\|\overrightarrow{JE}\|\times\|\overrightarrow{JF}\|} = \frac{8}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

❿ **أحسب حجم الهرم EHFJI**



ارتفاع الهرم هو : $dist(E,(HFJI)) = \frac{13}{3\sqrt{2}}$

القاعدة هي شبه منحرف متساوي الساقين

قاعدته الكبرى : $HF = \|\overrightarrow{HF}\| = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}$

قاعدته الصغرى : $HF = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ارتفاعه : $h = MJ = \sqrt{\left(\sqrt{10}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$

$$= \sqrt{10-\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{40}{4}-\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{38}{4}} = \sqrt{\frac{19}{2}} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}}$$

مساحته : $S_{(HFJI)} = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{19}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{19}}{2}$

$$v_{(HFJI)} = \frac{1}{3}S_{(HFJI)}.h = \frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{19}}{2}\times\frac{13}{3\sqrt{2}} = \frac{13\sqrt{19}}{6\sqrt{2}}$$

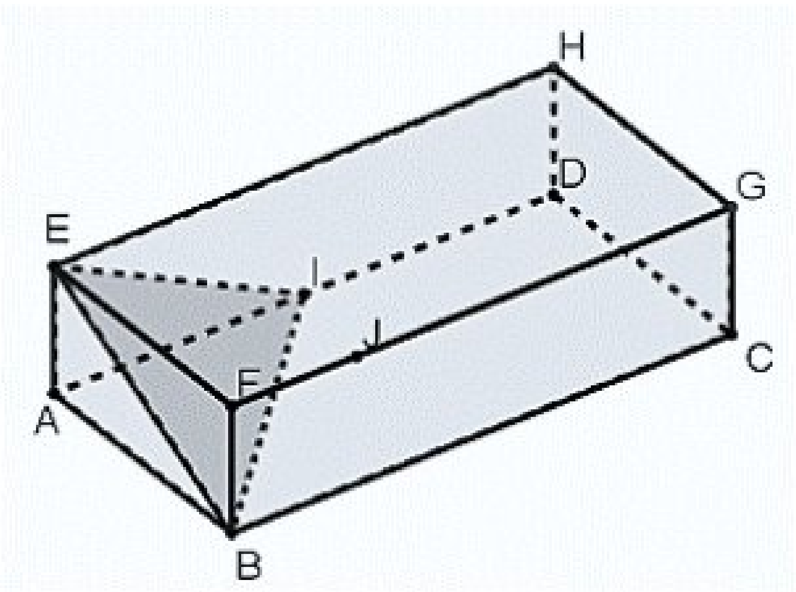
وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

المسألة 5 : النموذج الوزاري الأول 2020

ليكن $ABCDEFGH$ متوازي مستطيلات فيه $AE = 1\ ,\ AD = 4\ ,\ AB = 2$

ولتكن I منتصف $[AD]$ والنقطة J تحقق $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$, والمطلوب :



❶ جد احداثيات رؤوس متوازي المستطيلات واحداثيات كل من J, I.

❷ أثبت أن معادلة المستوي (EIB) هي $x + y + 2z - 2 = 0$.

❸ بين نوع المثلث EIB, ثم احسب مساحته.

❹ احسب بعد G عن المستوي (EIB), واستنتج حجم رباعي الوجوه $G - EIB$.

❺ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من J وعمودياً على المستوي (EIB).

❻ استنتج أن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

الحل :

❶ $A(0,0,0)\ , B(2,0,0)\ , D(0,4,0)\ , E(0,0,1), C(2,4,0)\ , F(2,0,1)\ , H(0,4,1)\ , G(2,4,1)$

I منتصف $[AB]$ و $\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$ بالتالي $I(0,2,0)\ \ J(2,1,1)$

❷ بما أن Bعلى محور الفواصل Iعلى محور التراتيب E على محور الرواقم (بالاعتماد على النشاط صفحة 93)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1 \Rightarrow x + y + 2z - 2 = 0$$

❸ $(EI)^2 = (0-0)^2 + (2-0)^2 + (0-1)^2 = 5$

$(EB)^2 = (2-0)^2 + (0-0)^2 + (1-0)^2 = 5$

$(BI)^2 = (0-2)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2 = 8$

نلاحظ أن المثلث متساوي الساقين قاعدته $BI = 2\sqrt{2}$ وبفرض E' منتصف القاعدة

$$EE' = \sqrt{5-2} = \sqrt{3} \Rightarrow S_{EIB} = \frac{EE'.BI}{2} = \frac{\sqrt{3}\times 2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{6}$$

❹ $dist(G, EIB) = \frac{|1(2)+1(4)+2(1)-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \Rightarrow V_{GEIB} = \frac{1}{3}h.S = \frac{1}{3}\sqrt{6}.\sqrt{6} = 2$

❺ d يمر بالنقطة $J(2,1,1)$ و عمودي على EIB إذاً $\vec{u}_d = \vec{n}_{EIB} = (1,1,2)$

$$d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

❻ إن المسقط القائم للنقطة J على المستوي (EIB) هو :

نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EIB) لأن المستقيم d مار من J و عمودي على EIB

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم في معادلة المستوي (EIB)

$$(t+2) + (t+1) + 2(2t+1) - 2 = 0 \Rightarrow 6t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{-1}{2}$$

نعوض في التمثيل الوسيطي للمستقيم d

$$x = \frac{-1}{2} + 2 = \frac{3}{2}\ , y = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}\ , z = 2\frac{-1}{2} + 1 = 0 \Rightarrow J'\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

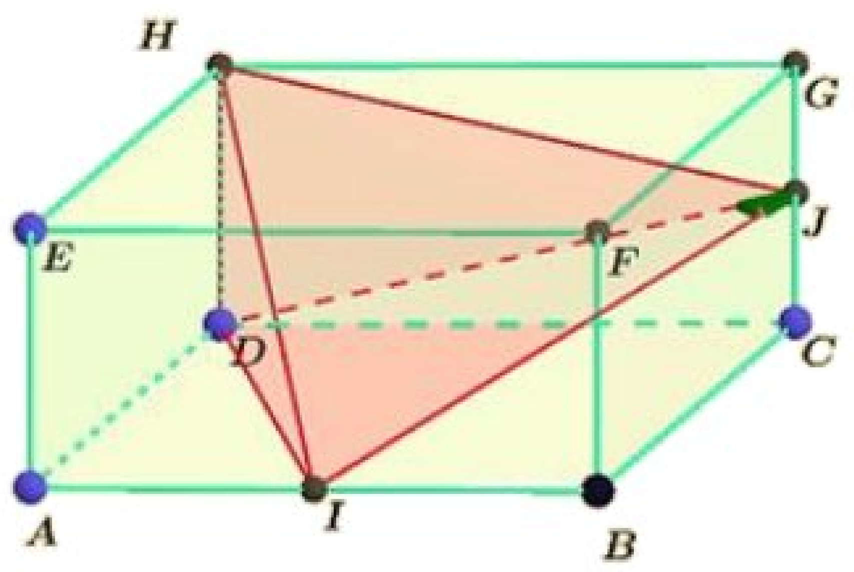
$$\overrightarrow{BJ'}\left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)\ , \overrightarrow{BI}(-2,2,0) \Rightarrow \overrightarrow{BI} = 4\overrightarrow{BJ'}$$

إذاً النقاط J', I, B تقع على استقامة واحدة إذاً J' تقع على القطعة المستقيمة $[BI]$

المسألة 6 :

ليكن $ABCDFEGH$ متوازي مستطيلات فيه $AB = 2$ و $BC = Gc = 1$.

النقطة I هي منتصف $[AB]$ و J هي منتصف $[CG]$. نتأمّل المعلم المتجانس $\left(A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$



❶ أثبت أنّ المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان , واحسب $cos\widehat{IJD}$.

❷ أعط معادلة للمستوي (DIJ) .

❸ احسب بعد H عن المستوي (DIJ) .

❹ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$

الحل :

$A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $C(2,1,0)$ & $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ & $F(2,0,1)$ & $G(2,1,1)$ & $H(0,1,1)$

I منتصف $[AB]$ وبالتالي $I(1,0,0)$ و J منتصف $[CG]$ وبالتالي $J\left(2,1,\frac{1}{2}\right)$

❶ $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} = 1 - 1 + 0 = 0$

وبالتالي المستقيمين (DI) و (IJ) متعامدان فالمثلث DIJ قائم في I و $\overrightarrow{DJ}\left(2,0,\frac{1}{2}\right)$

$$cos\widehat{IJD} = \frac{DI}{DJ} = \frac{\|\overrightarrow{DI}\|}{\|\overrightarrow{DJ}\|} = \frac{\sqrt{1+1+0}}{\sqrt{4+0+\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{34}}{17}$$

❷ نفرض $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (DIJ) و $\overrightarrow{DI}(1,-1,0)$, $\overrightarrow{IJ}\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{IJ} = 0 \Rightarrow a + b + \frac{1}{2}c = 0 \Rightarrow 2a + 2b + c = 0$$

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$$

بفرض $b = 1 \Rightarrow a = 1$ ومنه $c = -4$

وبالتالي المستوي (DIJ) مار من $D(0,1,0)$ و ناطمه $\overrightarrow{n}(1,1,-4)$

اذن معادلة المستوي (DIJ) هي :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \Rightarrow x + (y - 1) - 4z = 0 \Rightarrow x + y - 4z - 1 = 0$$

❸ إحداثيّات H هي $(0,1,1)$ وبالتالي :

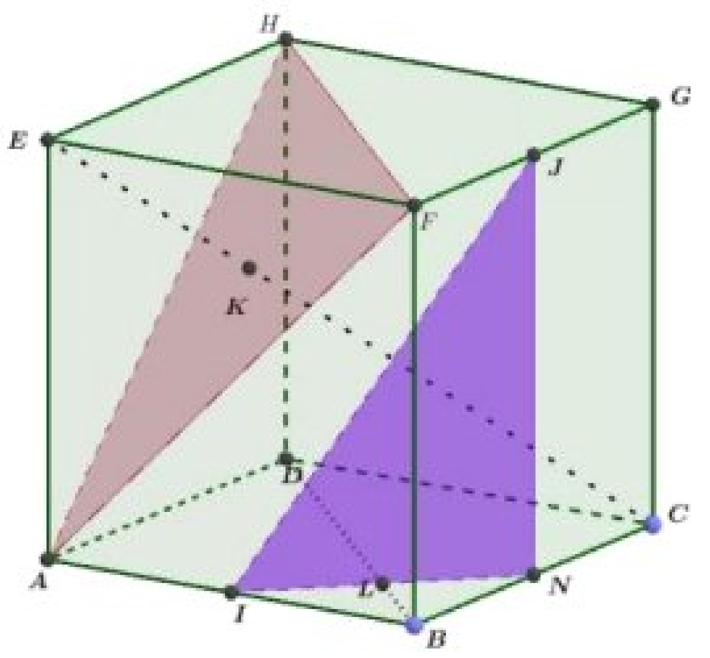
$$dist(H.(DIJ)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|0 + 1 - 4 \times 1 - 1|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

❹ $\|\overrightarrow{DI}\| = \sqrt{2}$, $\|\overrightarrow{IJ}\| = \sqrt{1 + 1 + \frac{1}{4}} = \frac{3}{2}$

$$v(HDIJ) = \frac{1}{3}S_{(DIJ)}.h = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \frac{3}{2}\right) \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

المسألة 7 :

ليكن $ABCDFEGH$ مكعب طول حرفه a(عدد حقيقي موجب) فيه النقطة I هي منتصف $[AB]$ و N هي منتصف $[BC]$ و J هي منتصف $[FG]$ و L هي منتصف $[IN]$ و K هي مركز ثقل المثلث AFH ولنعتبر المعلم المتجانس $\left(A;\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$



أولا :

❶ جد $\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{KC}$

❷ جد $cos\widehat{FAC}$

ثانيا : من أجل طول حرف المكعب $a = 2$

❶ جد احداثيات رؤوس المكعب واحداثيات النقاط I , N , J , K

❷ أثبت أن المستويين (AFH) , (INJ) متعامدين

❸ أثبت أن L منتصف $[IN]$ هي مسقط D على المستوي (JNI)

❹ جد حجم رباعي الوجوه $(DINJ)$

❺ أعط معادلة للمستوي $\mathcal{R}$ المار من D ويعامد كل من المستويين (AFH) , (JNI)

الحل :

❶

$A(0,0,0)$ & $B(a,0,0)$ & $D(0,a,0)$ & $E(0,0,a)$

$C(a,a,0)$ & $F(a,0,a)$ & $H(0,a,a)$ & $G(a,a,a)$, $K\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{2a}{3}\right)$

$\overrightarrow{EH}(0,a,0)$, $\overrightarrow{AC}(a,a,0)$, $\overrightarrow{AF}(a,0,a)$, $\overrightarrow{AC}(a,a,0)$, $\overrightarrow{EK}\left(\frac{a}{3},\frac{a}{3},\frac{-a}{3}\right)$, $\overrightarrow{KC}\left(\frac{-2a}{3},\frac{-2a}{3},\frac{2a}{3}\right)$

$\overrightarrow{EH}.\overrightarrow{AC} = 0 + a^2 + 0 = a^2$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC} = a^2 + 0 + 0 = a^2$

$$\overrightarrow{EK}.\overrightarrow{KC} = \frac{-2a^2}{9} - \frac{2a^2}{9} - \frac{2a^2}{9} = \frac{-6a^2}{9} = \frac{-2a^2}{3}$$

❷

$$cos\widehat{FAC} = \frac{\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AF}\| \times \|\overrightarrow{AC}\|} = \frac{a^2}{\sqrt{2}a \times \sqrt{2}a} = \frac{1}{2}$$

ثانيا : من أجل طول حرف المكعب $a = 2$

❶ $A(0,0,0)$ & $B(2,0,0)$ & $D(0,2,0)$ & $E(0,0,2)$

$C(2,2,0)$ & $F(2,0,2)$ & $H(0,2,2)$ & $G(2,2,2)$

$I(1,0,0)$, $N(2,1,0)$, $J(2,1,2)$, $K\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$

❷ $\overrightarrow{NI}(-1,-1,0)\,,\overrightarrow{NJ}(0,0,2)$ و لنفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (INJ) و بالتالي

$$\vec{n}.\overrightarrow{NI}=0\Rightarrow -a-b=0\Rightarrow a=-b \quad , \quad \vec{n}.\overrightarrow{NJ}=0\Rightarrow 2c=0$$

بفرض $b=1$ ومنه $a=-1$ وبالتالي $\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$

$\overrightarrow{AF}(2,0,2)\,,\overrightarrow{AH}(0,2,2)$ و لنفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (AFH) و بالتالي

$$\vec{n}.\overrightarrow{AF}=0\Rightarrow 2a+2c=0\Rightarrow a=-c\ ,\vec{n}.\overrightarrow{AH}=0\Rightarrow 2b+2c=0\Rightarrow b=-c$$

بفرض $c=1$ ومنه $a=-1$ و $b=-1$ وبالتالي $\overrightarrow{n_{AFH}}(-1,-1,1)$

$$\overrightarrow{n_{INJ}}.\overrightarrow{n_{AFH}}=(-1,1,0).(-1,-1,1)=1-1+0=0$$

فالناظمين متعامدين وبالتالي فالمستويين $(\mathrm{AFH})\,,\,(\mathrm{INJ})$ متعامدين

❸ نوجد معادلة المستوي (JNI) المار من $I(1,0,0)$ وناظمه $\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$ وبالتالي المعادلة :

$$-1(x-1)+1(y-0)+0(z-0)=0\Rightarrow x-y-1=0$$

احداثيات L منتصف $[IN]$ هي $L\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},0\right)$ و $\overrightarrow{NL}\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right)$

نعوض احداثيات L في معادلة المستوي (JNI) نجد : $\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-1=0\Rightarrow 0=0\Rightarrow L\in(JNI)$

كما أن $\overrightarrow{NL}.\overrightarrow{n_{INJ}}=\left(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},0\right).(-1,1,0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+0=0$

وبالتالي L مسقط D على المستوي (JNI)

❹ $v(DINJ)=\frac{1}{3}S_{(INJ)}.h$

المثلث JNI قائم في N لأن $\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{NJ}=(-1,-1,0).(0,0,2)=0+0+0=0$

وبالتالي $S_{(INJ)}=\frac{1}{2}\times\|\overrightarrow{NI}\|\times\|\overrightarrow{NJ}\|=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times 2=\sqrt{2}$

$$h=dist\big(D.(JNI)\big)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|-x_0-y_0-1|}{\sqrt{1+1+0}}=\frac{|0-2-1|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$$

وبالتالي $v(DINJ)=\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{2}\right)\times\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)=1$

❺ $\overrightarrow{n_{AFH}}(-1,-1,1)\,,\overrightarrow{n_{INJ}}(-1,1,0)$ و لنفرض $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(a,b,c)$ ناظم المستوي $\mathcal{R}$ و بالتالي

$$\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{INJ}}=0\Rightarrow -a+b=0\Rightarrow a=b \quad , \quad \overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}.\overrightarrow{n_{AFH}}=0\Rightarrow -a-b+c=0$$

بفرض $b=1$ ومنه $a=1$ و $c=2$

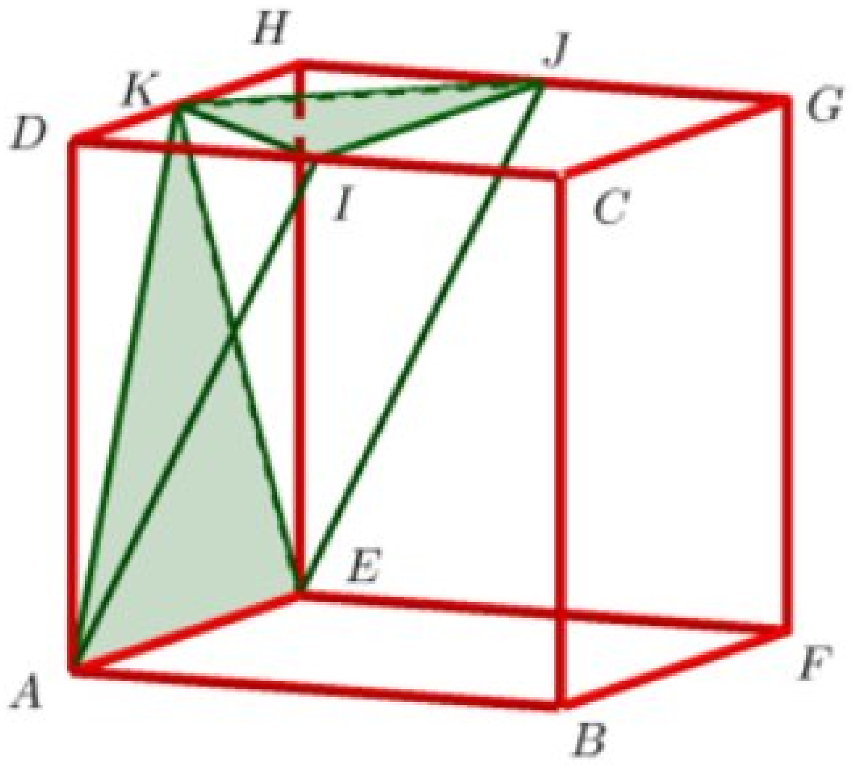
وبالتالي $\overrightarrow{n_{\mathcal{R}}}(1,1,2)$ والمستوي $\mathcal{R}$ مارمن $D(0,2,0)$ فمعادلته :

$$1(x-0)+1(y-2)+2(z-0)=0\Rightarrow x+y+2z-2=0$$

المسألة 8 : النموذج الوزاري الأول

نتأمّل مكعّباً $ABCDEFGH$. لتكن I و J و K منتصفات أضلاعه $[DC]$ و $[HG]$ و $[HD]$ بالترتيب.

نتّخذ $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ معلماً متجانساً في الفراغ.



❶ أوجد احداثيّات النقاط $A\ ,\ I\ ,E$. ❷ اكتب معادلة للمستوي $(AIJE)$.

❸ احسب بعد K عن المستوي $(AIJE)$ وحجم الهرم $KAIJE$.

❹ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم d

العمودي على المستوي $(AIJE)$ والمار بالنقطة K.

❺ احسب احداثيّات N نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي $(AIJE)$.

❻ أثبت أنّ N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط (A,α) و (I,β) و (E,γ)

حيث α و β و γ هي أثقال يُطلب تعيينها

الحل : ❶ $B(1,0,0)\quad \&\quad E(0,1,0)\quad \&\quad I\left(\frac{1}{2},0,1\right)\quad \&\quad A(0,0,0)$

❷ $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$

$A\in\mathcal{P}\Rightarrow\ d=0\ ,\ I\in\mathcal{P}\Rightarrow\frac{1}{2}a+c=0\ \Rightarrow a+2c=0\ ,\ E\in\mathcal{P}\Rightarrow b=0$

$-2cx+cz=0\ \Rightarrow\ \mathcal{P}:2x-z=0$

❸ $K\left(0,\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow dist(K,\mathcal{P})=\frac{|0+0-1+0|}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$

❹ $\vec{v}=\vec{n}=(2,0,-1)\ \Rightarrow\ d:\begin{cases}x=at+x_0=2t\\ y=bt+y_0=\frac{1}{2}\\ z=ct+z_0=-t+1\end{cases}\ ;t\in\mathbb{R}$

❺ نعوّض في معادلة المستوي : $N\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)\quad t=\frac{1}{5}\ \Leftarrow\ 4t+t-1=0$

❻ $\overrightarrow{AN}=\alpha\overrightarrow{AI}+\beta\overrightarrow{AE}\Rightarrow\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{4}{5}\right)=\alpha\left(\frac{1}{2},0,1\right)+\beta(0,1,0)=\left(\frac{1}{2}\alpha,\beta,\alpha\right)\Rightarrow\alpha=\frac{4}{5},\beta=\frac{1}{2}$

$\overrightarrow{AN}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AI}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}=\frac{4}{5}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NI}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NE}\right)$

$10\overrightarrow{AN}=8\overrightarrow{AN}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{AN}+5\overrightarrow{NE}\Rightarrow-3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$

ومنه N هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,-3)$ و $(I,8)$ و $(E,5)$

طريقة ثانية : $\alpha\overrightarrow{NA}+\beta\overrightarrow{NI}+\gamma\overrightarrow{NE}=\vec{0}\Rightarrow$

$\alpha\left(\frac{-2}{5},\frac{-1}{2},\frac{-4}{5}\right)+\beta\left(\frac{1}{10},\frac{-1}{2},\frac{1}{5}\right)+\gamma\left(\frac{-2}{5},\frac{1}{2},\frac{-4}{5}\right)=(0,0,0)\Rightarrow$

$\left(\frac{-2}{5}\alpha+\frac{1}{10}\beta-\frac{2}{5}\gamma,\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma,\frac{-4}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta-\frac{4}{5}\gamma\right)=(0,0,0)\Rightarrow$

$\frac{-2}{5}\alpha+\frac{1}{10}\beta-\frac{2}{5}\gamma=0\Rightarrow-4\alpha+\beta-4\gamma=0\quad ①$

$\frac{-1}{2}\alpha-\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2}\gamma=0\Rightarrow\alpha+\beta-\gamma=0\quad ②\ ,\ \frac{-4}{5}\alpha+\frac{1}{5}\beta-\frac{4}{5}\gamma\Rightarrow-4\alpha+\beta-4\gamma=0\quad ③$

بطرح ③ **من** ② **نجد :** $5\alpha+3\gamma=0\Rightarrow\alpha=\frac{-3}{5}\gamma$ **نعوض في** ② **نجد** $\beta=\frac{-8}{5}\gamma\ \Leftarrow\ \frac{-3}{5}\gamma+\beta-\gamma=0$

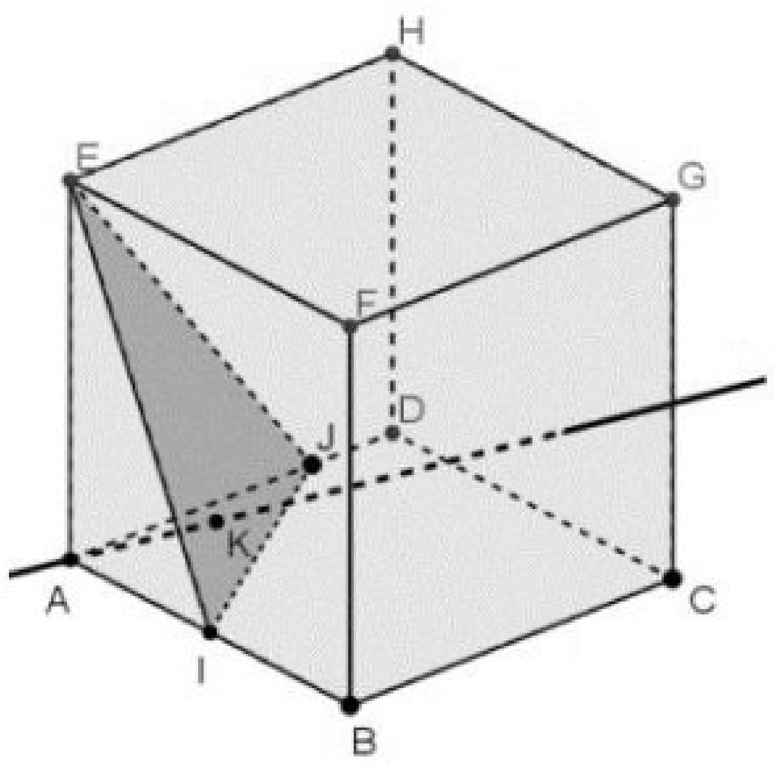
بفرض $\gamma=5$ **نجد** $\alpha=-3$ **و** $\beta=5$ **بالتالي** $-3\overrightarrow{NA}+8\overrightarrow{NI}+5\overrightarrow{NE}=\vec{0}$

ومنه N **هي مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $(A,-3)$ **و** $(I,8)$ **و** $(E,5)$

مروان بجور	أحمد الشيخ عيسى	زياد داوود	وسيم فاطمة
حمص 0930170828	الرقة 0988024183	سلمية 0936834268	اللاذقية 0936497038

المسألة 9 : النموذج الوزاري الثالث 2020

ليكن $ABCDEFGH$ مكعباً طول حرفه يساوي 4, ولتكن النقطة I منتصف $[AB]$ والنقطة J تحقق $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AD}$. نتأمل المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\ \overrightarrow{AE}\right)$, والمطلوب:



❶ جد احداثيات رؤوس المكعب والنقطتين I, J.

❷ أثبت أن معادلة المستوي (EIJ) هي $6x + 4y + 3z - 12 = 0$.

❸ اكتب التمثيل الوسيطي للمستقيم d المار من A وعمودياً على المستوي (EIJ), ثم جد إحداثيات النقطة K نقطة تقاطع d مع (EIJ).

❹ احسب مساحة المثلث AEJ ثم استنتج حجم رباعي الوجوه $I - AEJ$.

❺ احسب بعد Aعن المستوي (EIJ) واستنتج مساحة المثلث EIJ.

الحل

❶ $A(0,0,0)\ , B(4,0,0)\ , D(0,4,0)\ , E(0,0,4), C(4,4,0)\ , F(4,0,4)\ , H(0,4,4)\ , G(4,4,4)$

$I(2,0,0) \quad , \quad J(0,3,0)$ بالتالي $4\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

❷ الشعاعين $\overrightarrow{EI}(2,0,-4)\ , \overrightarrow{EJ}(0,3,-4)$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة فالنقاط E, I, J ليست على استقامة واحدة .

لنوجد معادلة المستوي (EIJ) , بفرض $\vec{n}_{EIJ}(a,b,c)$ ناظم المستوي (EIJ)

$$\begin{cases} \vec{n}_{EIJ}.\overrightarrow{EI} = 0 \Rightarrow 2a - 4c = 0 \Rightarrow a = 2c & (1) \\ \vec{n}_{EIJ}.\overrightarrow{EJ} = 0 \Rightarrow 3b - 4c = 0 \Rightarrow b = \dfrac{4}{3}c & (2) \end{cases}$$

بفرض $c = 3$ نجد $b = 4$ يكون $a = 6$ وبالتالي $\vec{n}_{EIJ}(6\ , 4\ , 3)$ و المستوي مار من $E(0,0,4)$

$$6(x-0) + 4(y-0) + 3(z-4) = 0 \Rightarrow (EIJ): 6x + 4y + 3z - 12 = 0$$

❸ المستقيم d عمودي على المستوي EIJ إذاً $\vec{u} = \vec{n}(6,4,3)$ وهو ويمر بالنقطة $A(0,0,0)$

$$d: \begin{cases} x = 6t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases} \quad : t \in \mathbb{R}$$

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم d في معادلة المستوي

$$6(6t) + 4(4t) + 3(3t) - 12 = 0 \Rightarrow t = \frac{12}{16} \Rightarrow k\left(\frac{72}{16}, \frac{48}{16}, \frac{36}{16}\right)$$

❹ إن المثلث AEJ قائم في A بالتالي $S_{AEJ} = \frac{AE.AJ}{2} = \frac{4\times 3}{2} = 6$

لأن AI عمودي على المستوي AEJ بالتالي $h = AI = 2$ ومنه $V = \frac{1}{3}h.S = \frac{1}{3}(6)(2) = 4$

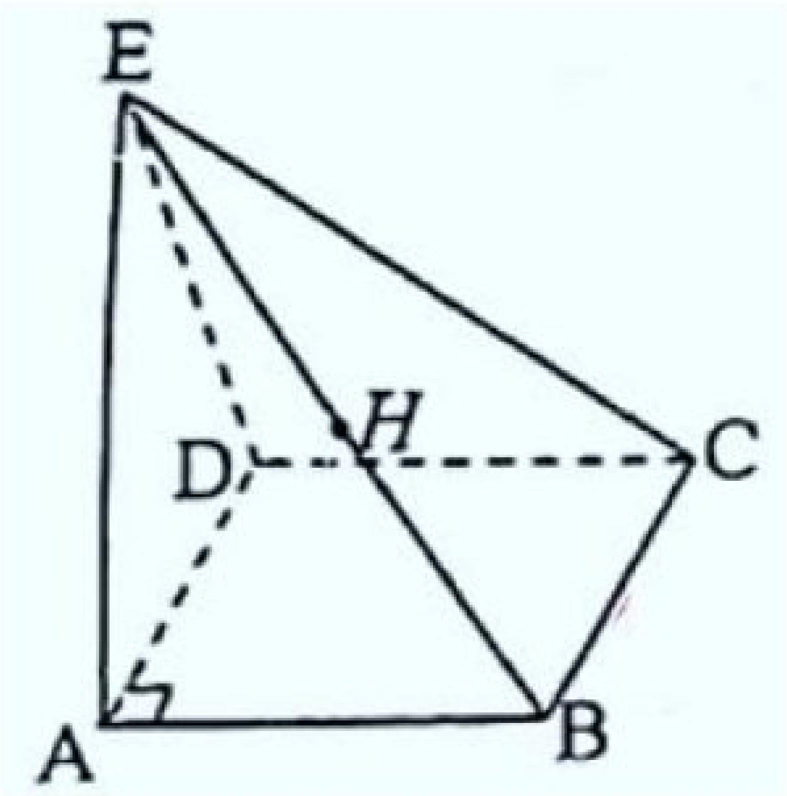
❺ $dist(A, EIJ) = \frac{|6(0)+4(0)+3(0)-12|}{\sqrt{6^2+4^2+3^2}} = \frac{12}{\sqrt{61}}$

لدينا حجم رباعي الوجوه $A - EIJ$ و باعتبار أن القاعدة EIJ والارتفاع هو بعد A عن المستوي EIJ

$$V = \frac{1}{3}h.S \Rightarrow 4 = \frac{1}{3}.\frac{12}{\sqrt{61}}S \Rightarrow\Rightarrow S_{EIJ} = \sqrt{61}$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 093683426 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

المسألة 10 : دورة 2020 الأولى



$(EABCD)$ هرم رباعي رأسه E، قاعدته مربع طول ضلعه 3

$[AE]$ عمودي على المستوي $(ABCD)$ و $EA = 3$.

نختار المعلم المتجانس $\left(A, \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{3}\overrightarrow{AE}\right)$ والمطلوب:

❶ عين إحداثيات A, B, C, D, E

❷ جد معادلة للمستوي (EBC).

❸ اكتب تمثيلاً وسيطياً للمستقيم المار من A ويعامد المستوي (EBC).

❹ استنتج أن H منتصف $[EB]$ هي المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC).

❺ احسب حجم رباعي الوجوه $(AEBC)$.

الحل

❶ $A(0,0,0)\ ,\ B(3,0,0)\ ,\ C(3,3,0)\ ,\ D(0,3,0)\ ,\ E(0,0,3)$

❷ $\overrightarrow{EB}(3,0,-3)\ ,\overrightarrow{EC}(3,3,-3)$ غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظما على المستوي (EBC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{EB} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{EC} = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3a - 3c = 0 \\ 3a + 3b - 3c = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a = c \\ a + b - c = 0\end{cases}$$

بفرض $c = 1$ بالتالي $a = 1$ و $b = 0$ ومنه $\vec{n}(1,0,1)$ والمستوي مار من $E(0,0,3)$

$$(x-0) + 0(y-0) + 1(z-3) = 0 \Rightarrow (EBC): x + z - 3 = 0$$

❸ المستقيم d يعامد المستوي بالتالي $\vec{u} = \vec{n}(1,0,1)$ ويمر من $A(0,0,0)$

إذا يقبل $\vec{n}(1,0,1)$ شعاع توجيه ويمر من $A(0,0,0)$

$$d: \begin{cases}x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A\end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \Rightarrow d: \begin{cases}x = t \\ y = 0 \\ z = t\end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

❹ $E(0,0,3)\ , B(3,0,0) \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right)$

بما أن المستقيم d يعامد المستوي (EBC) فان المسقط القائم للنقطة A على المستوي (EBC) هو نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (EBC) بالتالي نعوض معادلة المستقيم في المستوي

$$t + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow A'\left(\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow A' = H$$

❺ المثلث EBC قائم في B و $BC = 3$ و $EB = \left|\overrightarrow{EB}\right| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$

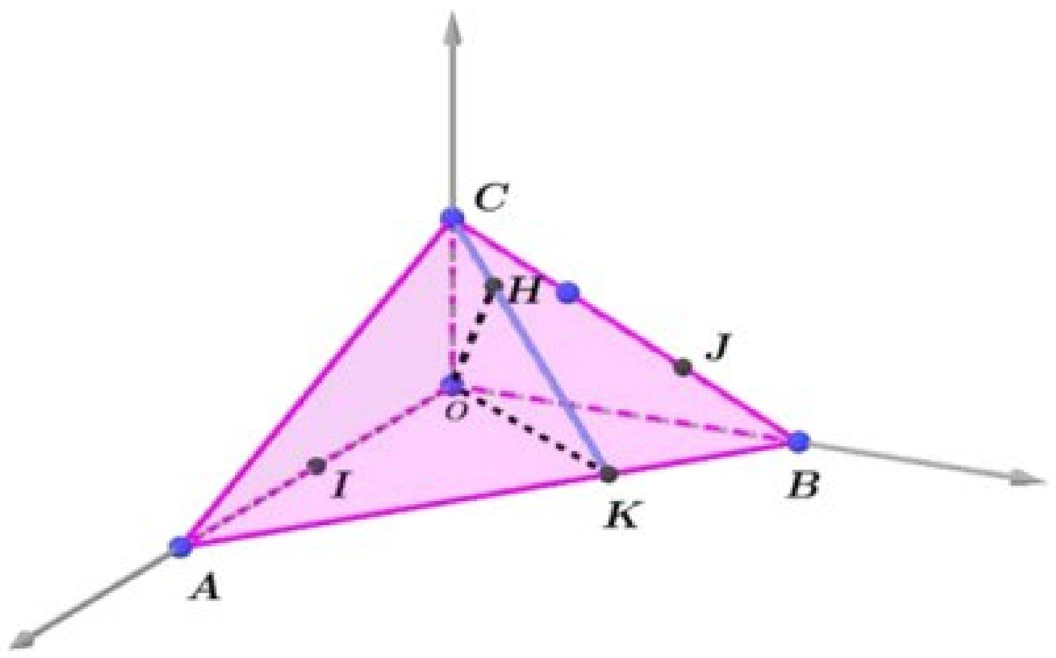
بالتالي $S_{EBC} = \frac{EB \times BC}{2} = \frac{3\sqrt{2} \times 3}{2} = \frac{9\sqrt{2}}{2}$ و $AH = \left|\overrightarrow{AH}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{3}{\sqrt{2}}$

$$V = \frac{1}{3} S_{EBC} \times AH = \frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{2} \times 3}{2} \times \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{9}{2}$$

طريقة ثانية : $V = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} S_{ABCD} \times EA\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} \times 3 \times 3 \times 3\right) = \frac{9}{2}$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 093683426
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

المسألة 11 :



ليكن رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O ولنأخذ المعلم المتجانس $\left(O;\frac{1}{3}\overrightarrow{OA},\frac{1}{2}\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ و لتكن I منتصف $[OA]$ و J نقطة تحقق $3\overrightarrow{CJ}=2\overrightarrow{CB}$

❶ جد احداثيات كلا من A,B,C

❷ أثبت أنّ معادلة المستو (ABC) لها الشكل $2x+3y+6z=6$

❸ استنتج تمثيلاً وسيطياً للمستقيم Δ المار بالنقطة O عمودياً على المستوي (ABC) .

❹ جد احداثيات H نقطة تقاطع المستقيم Δ مع المستوي (ABC) ثم تحقق أنها نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

❺ أثبت أنّ المسقط القائم لكل من النقطتين C و O على المستقيم (AB) هو النقطة K ذاتها واحسب إحداثيّاتها

❻ احسب مساحة المثلث ABC وأوجد حجم رباعي الوجوه $OABC$

الحل :

❶ $C(0,0,1)$ & $B(0,2,0)$ & $A(3,0,0)$ & $O(0,0,0)$

❷ $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)\,,\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$ و لنفرض $\overrightarrow{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (ABC) و بالتالي

$$\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB}=0\Longrightarrow -3a+2b=0\Longrightarrow a=\frac{2}{3}b\ ,\ \overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC}=0\Longrightarrow -3a+c=0\Longrightarrow c=3a$$

بفرض $b=3$ ومنه $a=2$ و $c=6$ بالتالي $\overrightarrow{n}(2,3,6)$ والمستوي مار بالنقطة $A(3,0,0)$ فمعادلته

$$2(x-3)+3(y-0)+6(z-0)=0\Longrightarrow 2x+3y+6z-6=0$$

❸ المستقيم Δ مار بالنقطة O وعمودي على المستوي (ABC) فإن $\vec{u}=\overrightarrow{n}(2,3,6)$ وبالتالي

$$\Delta:\begin{cases}x=2t\\ y=3t\\ z=6t\end{cases}\quad : t\in\mathbb{R}$$

❹ نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي (ABC)

$$2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0\Longrightarrow 49t=6\Longrightarrow t=\frac{6}{49}\Longrightarrow H\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)\,,\overrightarrow{AC}(-3,0,1),\overrightarrow{BC}(0,-2,1)$$

$$\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{-13}{49}\right)\,,\overrightarrow{BH}\left(\frac{12}{49},\frac{-70}{49},\frac{36}{49}\right),\overrightarrow{AH}\left(\frac{-135}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CH}=0\quad ,\quad \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BH}=0\quad ,\quad \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AH}=0$$

فالنقطة H هي نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث ABC

❺

$$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)\quad,\quad \overrightarrow{OC}(0,0,1)\ ,\quad \overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC}=0\quad,\quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OH}=0$$

فالمستقيم (AB) **عمودي على المستوي** (OCH) **ولتكن** K **نقطة تقاطعهما وبالتالي تكون** K **هي المسقط القائم لأي نقطة من نقاط المستوي** (OCH) **على المستقيم** (AB)

وبالتالي تكون K **هي المسقط القائم لكل من النقطتين** C **و** O **على** (AB)

$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ **والمستقيم** (AB) **مار من** $A(3,0,0)$ **و بالتالي** $t\in\mathbb{R}$: $(AB):\begin{cases}x=-3t+3\\ y=2t\\ z=0\end{cases}$

النقطة K **تنتمي للمستقيم** (AB) **وبالتالي** $K(-3t+3,2t,0)$ **ومنه** $\overrightarrow{OK}(-3t+3,2t,0)$

و النقطة K **هي مسقط** O **على** (AB) **ومنه**

$$\overrightarrow{OK}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow 9t-9+4t+0=0\Rightarrow t=\frac{9}{13}$$

نعوض في التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) **نجد** $K\left(\frac{12}{13},\frac{18}{13},0\right)$

❻

$$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)\Rightarrow \|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{9+4+0}=\sqrt{13}\ ,\ \|\overrightarrow{CK}\|=\frac{7}{\sqrt{13}}\Rightarrow S_{ABC}=\frac{\sqrt{13}\times\frac{7}{\sqrt{13}}}{2}=\frac{7}{2}$$

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right),\overrightarrow{AB}(-3,2,0),\overrightarrow{AC}(-3,0,1)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0\,,\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow \overrightarrow{OH}\perp(ABC)\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{OH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)\Rightarrow \|\overrightarrow{OH}\|=\sqrt{\left(\frac{12}{49}\right)^2+\left(\frac{18}{49}\right)^2+\left(\frac{36}{49}\right)^2}=\frac{42}{49}=\frac{6}{7}$$

$$v(ABC)=\frac{1}{3}S_{ABC}.h=\frac{1}{3}S_{ABC}\times OH=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{2}\right)\times\left(\frac{6}{7}\right)=1$$

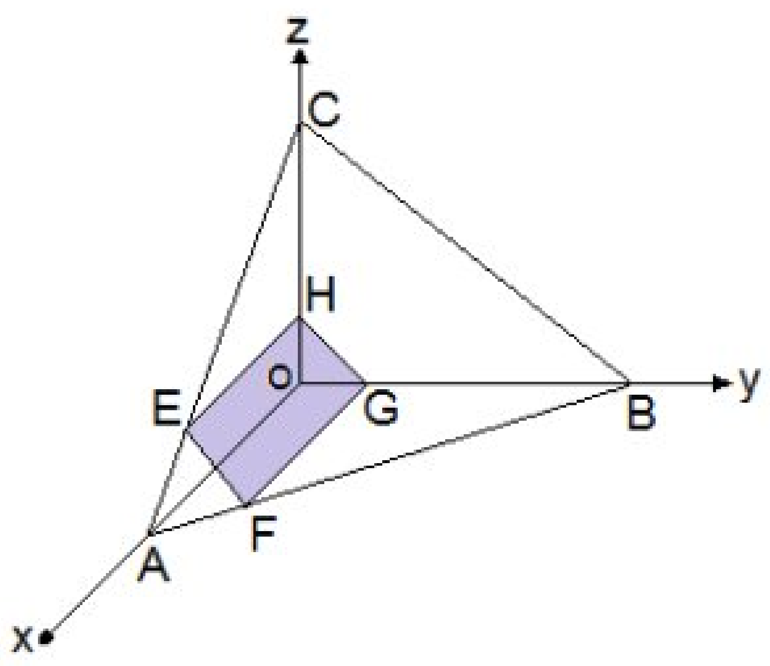
المسألة 12 :

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لتكن النقاط : $A(1,0,0)\,,B(0,1,0)\,,C(0,0,1)$

و المستوي : $\quad 0<t<1 \quad ; \quad P;\ y+z=t$.

يقطع المستوي P المستقيمات $(AC)\,,(AB)\,,(OB)\,,(OC)$

في النقاط $E\,,F\,,G\,,H$ بالترتيب . المطلوب :



❶ أوجد إحداثيات النقطتين $G\,,H$.

❷ أعطِ تمثيلاً وسيطياً لكل من المستقيمين $(AC)\,,(AB)$

و استنتج إحداثيات النقطتين $E\,,F$.

❸ أثبت أن الرباعي $E\,F\,G\,H$ مستطيل , و احسب مساحته $A(t)$ بدلالة t .

❹ ادرس تغيرات $A(t)$ على المجال $]0,1[$ و استنتج قيمة t التي تجعل المساحة أعظمية .

ملاحظة :

انتبه عزيزي الطالب عند حساب EH إلى أنه بوجه عام : $\sqrt{x^2}=|x|$.

فقد يكتب الطالب : $EH=\sqrt{(1-t)^2+0+0}=1-t$ (الكتابة صحيحة ربما بالصدفة) .

في حين ربما يكتب زميله : $\quad EH=\sqrt{(t-1)^2+0+0}=t-1$

(و هي كتابة خاطئة .. لا تنسى أن $0<t<1$)

الحل :

❶ H نقطة تقاطع المستوي P مع المحور (oz) نعوض $y=x=0$ في P

$$z=t \Longrightarrow H(0,0,t)$$

ولأن G نقطة تقاطع المستوي P مع المحور (oy) نعوض $x=z=0$ في P

$$y=t \Longrightarrow G(0,t,0)$$

❷ $\overrightarrow{AB}(-1,1,0)$ بالتالي $\quad (AB)\begin{cases}x=-s+1\\ y=s\\ z=0\end{cases} : s\in R$

$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$ بالتالي $\quad (AC)\begin{cases}x=1-\lambda\\ y=0\\ z=\lambda\end{cases} : \lambda\in R$

E نقطة تقاطع (AC) مع P وبالتالي نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AC) في معادلة P

$$0+\lambda=t \Longrightarrow \lambda=t \Longrightarrow E(1-t\,,0\,,t)$$

F نقطة تقاطع (AB) مع P وبالتالي نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (AB) في معادلة P

$$s=t \Longrightarrow F(1-t\,,t\,,0)$$

❸ $\overrightarrow{EF}(o,t,-t)\ ,\ \overrightarrow{HG}(o,t,-t) \Longrightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ **فالرباعي** $EFGH$ **متوازي أضلاع**

$$\overrightarrow{EH}(t-1,0,0)\ ,\overrightarrow{EF}(o,t,-t) \Longrightarrow \overrightarrow{EH}.\overrightarrow{EF} = 0+0+0=0 \Longrightarrow (EF)\perp(EH)$$

الرباعي $EFGH$ **متوازي أضلاع فيه زاوية قائمة فهو مستطيل.**

$$EH = \sqrt{(t-1)^2+0} = |t-1| = 1-t\ ,\ \ EF = \sqrt{0+t^2+t^2} = \sqrt{2}t$$

$$A(t) = EF.EH \Longrightarrow A(t) = \sqrt{2}t(1-t) = -\sqrt{2}t^2+\sqrt{2}t$$

❹ $A(t) = -\sqrt{2}t^2+\sqrt{2}t$

$$\lim_{t\to 1} A(t) = 0 \qquad\qquad \lim_{t\to 0} A(t) = 0$$

$$A'(t) = -2\sqrt{2}t+\sqrt{2}\ ,A'(t)=0 \Longrightarrow -2\sqrt{2}t+\sqrt{2}=0 \Longrightarrow t=\frac{1}{2} \Longrightarrow A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$A(t)$	‖		0		‖
$A'(t)$	‖ 0	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	0 ‖

نلاحظ أن $t=\frac{1}{2}$ **توافق أعظم مساحة ممكنة للمستطيل.**

المسألة 13 :

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ لدينا النقاط :

$A(0,0,2)\ ,\ B(1,4,7)\ ,C(1,1,1)\ ,\ E(4,-1,2)$ و المستوي P : $P:\ 3x-2y+z-2=0$

و المستقيم Δ المعطى بالتمثيل الوسيطي : $\Delta:\begin{cases} x=3t+1 \\ y=-2t+\frac{5}{2} \\ z=t+4 \end{cases}\ ;t\in R$.

❶ أثبت أن النقاط $A\ ,B\ ,C$ تعين مستوياً هو المستوي P.

❷ أثبت أن المستقيم Δ يعامد المستوي P في النقطة F منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$.

❸ علل لماذا تكون جميع نقاط المستقيم Δ متساوية البعد عن النقطتين B و C .

❹ أثبت أنه أياً كانت النقطة M من المستقيم Δ فإن : $MA=MC$. و من ثم $MA=MC=MB$.

❺ أوجد معادلة Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CE]$.

❻ علل لماذا إذا تقاطع المستوي Q مع المستقيم Δ في نقطة Ω كانت Ω مركز الكرة التي تمر بالنقاط $A\ ,B\ ,C\ ,E$.

❼ أثبت تقاطع المستوي Q مع المستقيم Δ في نقطة Ω و عين Ω.

الحل :

❶ $\overrightarrow{AB}(1,4,5)\ ,\overrightarrow{AC}(1,1,-1)$

غير مرتبطان خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة بالتالي النقاط $A\ ,B\ ,C$ تعين مستوياً

ليكن $\vec{n}(a,b,c)$ شعاعاً ناظما على المستوي (ABC)

$$\begin{cases}\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a+4b+5c=0 & ①\\ a+b-c=0 & ②\end{cases}$$

بطرح ② من ① نجد $3b+6c=0\Rightarrow 3b=-6c\Rightarrow b=-2c$

نعوض في② نجد $a-2c-c=0\Rightarrow a=3c$

بفرض $c=1$ بالتالي $a=3$ و $b=-2$ ومنه $\vec{n}(3\ ,-2\ ,1)$ والمستوي مار من $A(0,0,2)$

$$3(x-0)-2(y-0)+1(z-2)=0\Rightarrow P:\ 3x-2y+z-2=0$$

فالنقاط $A\ ,B\ ,C$ تعين مستوياً هو المستوي P

طريقة ثانية :

نعوض احداثيات النقاط في معادلة P فنجدها محققة وبالتالي

النقاط $A\ ,B\ ,C$ تعين مستوياً هو المستوي P

2. منتصف القطعة المستقيمة $[BC]$ هي النقطة $F\left(1,\frac{5}{2},4\right)$

$\vec{u}(3,-2,1)$, $\vec{n}(3,-2,1)$ بالتالي $\vec{u}=\vec{n}$ فالشعاعين مرتبطين خطيا ومنه Δ يعامد P

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي P

$$3(3t+1)-2\left(-2t+\frac{5}{2}\right)+(t+4)-2=0 \Rightarrow 9t+3+4t-5+t+4-2=0$$

$$14t=0 \Rightarrow t=0$$

نعوض في التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ فنجد نقطة التقاطع $\left(1,\frac{5}{2},4\right)$

بالتالي المستقيم Δ يعامد المستوي P في النقطة F

طريقة ثانية :

بعد اثبات التعامد نعوض احداثيات النقطة F في معادلتي Δ و P فنجدهما محققات وبالتالي

بالتالي المستقيم Δ يعامد المستوي P في النقطة F

3. بما أن المستقيم Δ يعامد المستوي P فإنه يعامد القطعة المستقيمة $[BC]$ في منتصفها

فهو محور ها بالتالي جميع نقاط المستقيم Δ متساوية البعد عن النقطتين B و C

4. بما أن النقطة M من المستقيم Δ فإن $M\left(3t+1,-2t+\frac{5}{2},t+4\right)$

$$MA=\sqrt{(3t+1)^2+\left(-2t+\frac{5}{2}\right)^2+(t+2)^2}=\sqrt{14t^2+\frac{45}{4}}$$

$$MC=\sqrt{(3t)^2+\left(-2t+\frac{3}{2}\right)^2+(t+3)^2}=\sqrt{14t^2+\frac{45}{4}}$$

نلاحظ أن $MA=MC$ مهما كانت M من Δ

وبالاستفادة من الطلب السابق نجد $MA=MC=MB$ مهما كانت M من Δ

5. $C(1,1,1)$, $E(4,-1,2)$

منتصف القطعة المستقيمة $[CE]$ هي النقطة $\left(\frac{5}{2},0,\frac{3}{2}\right)$ و $\overrightarrow{n_Q}=\overrightarrow{CE}(3,-2,1)$

$$3\left(x-\frac{5}{2}\right)-2(y-0)+1\left(z-\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow P:\ 3x-2y+z-9=0$$

6. بما أن Q المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[CE]$

فإن أي نقطة منه بالتالي Ω ستكون متساوية البعد عن C,E

ومن الطلب الرابع وجدنا أن أي نقطة من المستقيم Δ وبالتالي Ω ستكون متساوية البعد عن A,B,C

وبالتالي Ω ستكون متساوية البعد عن A,B,C,E فهي مركز الكرة المارة بالنقاط A,B,C,E

7.

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ في معادلة المستوي Q

$$3(3t+1)-2\left(-2t+\frac{5}{2}\right)+(t+4)-9=0 \Rightarrow 9t+3+4t-5+t+4-9=0$$

$$14t=7 \Rightarrow t=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

نعوض في التمثيل الوسيطي للمستقيم Δ فنجد نقطة التقاطع $\Omega\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

المسألة 14 : النموذج الوزاري الثاني 2020

ليكن لدينا المكعب $ABCDEFGH$ طول حرفه 1.

وT نقطة من $[AB]$ تحقق $\overrightarrow{AT}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ ، و N نقطة من $[AD]$ تحقق $\overrightarrow{AN}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$.

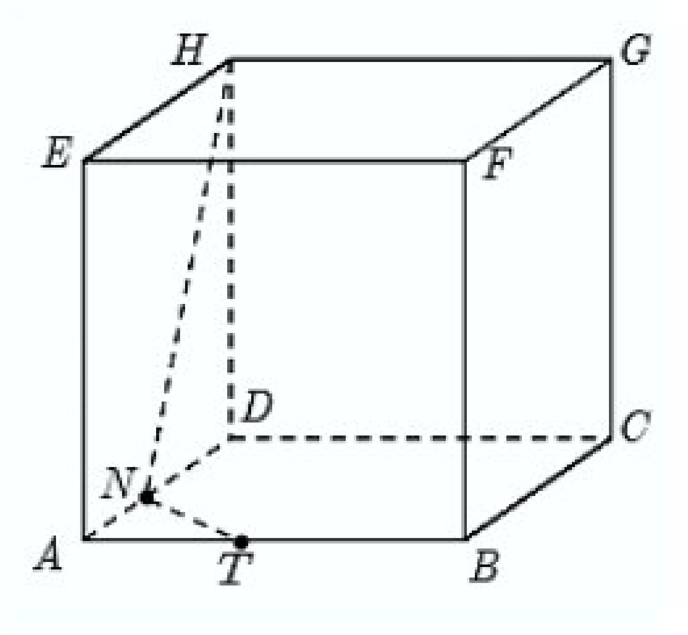
❶ في المعلم المتجانس $\left(A:\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ جد إحداثيات النقاط H,F,N,T.

❷ جد الشعاعين $\overrightarrow{NT},\overrightarrow{NH}$ ثم جد معادلة للمستوي (HNT).

❸ جد تمثيلاً وسيطياً للمستقيم (EF).

❹ استنتج نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (HNT).

❺ اذكر مقطع المكعب بالمستوي (HNT). ما طبيعته



الحل :

❶ $A(0,0,0)\,,B(1,0,0)\,,D(0,1,0)\,,E(0,0,1)\,,C(1,1,0)\,,F(1,0,1)\,,H(0,1,1)\,,G(1,1,1)$

$$T\left(\frac{2}{5},0,0\right)\quad N\left(0,\frac{2}{5},0\right)$$

❷ $\overrightarrow{NH}\left(0,\frac{3}{5},1\right)$ ، $\overrightarrow{NT}\left(\frac{2}{5},-\frac{2}{5},0\right)$ و بفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي (HNT) بالتالي

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{NT}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{NT}=0\Longrightarrow\frac{2}{5}a-\frac{2}{5}b=0\Longrightarrow\ a=b\quad(1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{NH}\Rightarrow\vec{n}.\overrightarrow{NH}=0\Longrightarrow\frac{3}{5}b+c=0\quad(2)$$

بفرض $b=5$ بالتالي $a=5$ و $c=-3$ ومنه $\vec{n}(5\,,5\,,-3)$ والمستوي يمر من $H(0,1,1)$

$$5(x-0)+5(y-1)-3(z-1)=0\Longrightarrow(HNT):5x+5y-3z-2=0$$

❸ المستقيم (EF) مار من $E(0,0,1)$ و شعاع توجيهه هو $\overrightarrow{EF}(1,0,0)$ بالتالي

$$(EF):\begin{cases}x=t\\y=0\\z=1\end{cases}\quad;t\in R$$

❹ $\vec{n}(5,5,-3)\,,\vec{u}(1,0,0)\Longrightarrow\vec{n}.\vec{u}=5\neq0$ ومنه (EF)قاطع للمستوي

لإيجاد نقطة التقاطع نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) في معادلة المستوي (HNT)

$$5(t)+5(0)-3(1)-2=0\Longrightarrow5t-5=0\Longrightarrow t=1$$

نعوض التمثيل الوسيطي للمستقيم (EF) نجد نقطة التقاطع هي $(1,0,1)$ وهي نفسها النقطة F

❺ F نقطة تقاطع المستقيم (EF) مع المستوي (TNH) وبالتالي المستوي القاطع هو $(HNTF)$

بما أن المستويان $(ABCD)$ و $(EFGH)$ متوازيان و المستوي (TNH) قاطع لهما

بالتالي الفصلين المشتركين (NT) و (HF) متوازيين والمقطع شبه منحرف و

$$HN=\sqrt{0+\frac{9}{25}+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}\quad,\quad FT=\sqrt{\frac{9}{25}+0+1}=\frac{\sqrt{34}}{5}$$

بالتالي $HN=FT$ فالمقطع شبه منحرف متساوي الساقين