كلية العلوم

قسم الرياضيات

السنة الثالثة

جبر خطي (2)

عز الدين قطماوي

عقدي (2) .

د. محمد فرهود / ١

سلسلة لوران والنقاط الشاذة للتوابع وحيدة القيمة أو ذات الطابع الواحد

أصفار تابع:

تعريف: نقول أن النقطة a صفر للتابع $f(z)$ ، إذا كان $f(z)$ نظامياً فيها وكان:

$$f(a) = 0$$

• بما أن $f(z)$ نظامي في a فهو ينشر بسلسلة تايلور حول a بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

حيث:

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad , \quad |z-a| < R$$

بعد مركز السلسلة عن أقرب نقطة شاذة

وبما أن $f(a) = 0$ فإن: $c_0 = 0$

• درجة الصفر: هي مرتبة أول مشتق غير معدوم في النقطة a

أي أنه إذا كان a صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ فإن:

$$c_0 = c_1 = c_2 = \dots = c_{m-1} = 0$$

$$c_m = \frac{f^{(m)}(a)}{m!} \neq 0$$

مثال: أوجد أصفار التابع الآتي:

$$f(z) = \sin z$$

الحل: أصفار التابع $f(z)$ هي جذور المعادلة:

$$f(z) = 0$$

$$\Rightarrow \sin z = 0$$

$$z_k = \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهي أصفار بسيطة من الدرجة الأولى.

مبرهنة:

تكون النقطة $z = a$ $(a \neq \infty)$ صفراً من الدرجة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كان $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = (z-a)^m \, h(z)$$

حيث $h(z)$ هو تابع نظامي وغير معدوم عند $z = a$.

البرهان:

لزوم الشرط:

نفرض أن $z = a$ صفر من الدرجة m ولنبرهن أن التابع يكتب بالشكل:

$$f(z) = (z-a)^m \, h(z)$$

بما أن $z = a$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ نقطة عادية لـ $f(z)$ وبالتالي فهو ينشر بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

(لأن $c_m \neq 0$ و $c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$)

$$f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1} (z-a)^{m+1} + \dots$$

$$= (z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots \right]$$

إن السلسلة:

$$c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots$$

سلسلة حدها الأول c_m وبالتالي مجموعها موجود ولنرمز له بـ $h(z)$ وهو تابع نظامي في a وغير معدوم.

$$\Rightarrow f(z) = (z-a)^m \, h(z)$$

كفاية الشرط:

لنفرض أن $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = (z-a)^m \, h(z)$$

ولنبرهن أن $z=a$ صفر من الدرجة m

بما أن $h(z)$ نظامي وغير معدوم في a فإنه ينشر بالشكل:

$$h(z) = c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots \quad ; \; c_m \neq 0$$

(لأن $h(a) \neq 0$)

وبالتالي فإن:

$$f(z) = (z-a)^m \left[c_m + c_{m+1}(z-a) + \dots \right]$$

$$\Rightarrow f(z) = c_m (z-a)^m + c_{m+1}(z-a)^{m+1} + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

وهذا يعني أن $z=a$ صفر من الدرجة m

مبرهنة:

تكون النقطة $z=\infty$ صفراً من الدرجة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كان $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z) = z^{-m} \, h(z)$$

حيث $h(z)$ تابع نظامي وغير معدوم عند $z=\infty$

البرهان:

لزوم الشرط:

نفرض أن $z=\infty$ صفر من الدرجة m ولنبرهن أن

$$f(z) = z^{-m} \, h(z)$$

بما أن $z=\infty$ صفر للتابع فهي عادية وبالتالي التابع ينشر بالشكل:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

وبما أن $z=\infty$ صفر من الدرجة m فإن:

$$c_0 = c_1 = \dots = c_{m-1} = 0$$

و $c_m \neq 0$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

$$= \frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots$$

$$= \frac{1}{z^m} \left[c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \dots \right]$$

سلسلة متقاربة ولها مجموع وليكن $h(z)$

$$\Rightarrow f(z) = z^{-m} \, h(z)$$

كفاية الشرط:

لنفرض أن التابع يكتب بالشكل:

$$f(z) = z^{-m} \, h(z)$$

ولنبرهن أن $z=\infty$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$

بما أن $h(z)$ نظامي ولا ينعدم عند نقطة ∞ فإنه يكتب بالشكل:

$$h(z) = c_m + \frac{c_{m+1}}{z} + \frac{c_{m+2}}{z^2} + \dots$$

وبالتالي:

$$f(z) = \frac{c_m}{z^m} + \frac{c_{m+1}}{z^{m+1}} + \dots$$

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

وهذا يعني أن $z=\infty$ صفراً من الدرجة m للتابع $f(z)$.

سلوك تابع:

إذا كان:

$$\lim_{z\to a}\frac{f(z)}{g(z)}=1$$ فنقول إن

للتابعين $f(z)$ و $g(z)$ نفس السلوك قرب a ونرمز لذلك

$$f(z)\underset{z\to a}{\sim}g(z)$$

مثال:

$$\cos z\underset{z\to 0}{\sim}1$$

لأن:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\cos z}{1}=1$$

مثال:

$$e^{1/z}\underset{z\to\infty}{\sim}1$$

لأن:

$$\lim_{z\to\infty}\frac{e^{1/z}}{1}=1$$

ملاحظة:

إذا كان:

$$f(z)\underset{z\to a}{\sim}f_1(z)$$

$$g(z)\underset{z\to a}{\sim}g_1(z)$$

فإن:

$$f(z)\cdot g(z)\sim f_1(z)\cdot g_1(z)$$

$$\frac{f(z)}{g(z)}\sim\frac{f_1(z)}{g_1(z)}$$

ولكن:

$$f(z)\mp g(z)\nsim f_1(z)\mp g_1(z)$$

تمرين:

حدد الأصفار ودرجة كل صفر للتابع التالي في المستوي الموسع:

$$f(z)=\frac{(z^2-1)^4}{(z^2+1)^6}\cos\frac{1}{z}\,e^{1/z}$$

الحل: أصفار $f(z)$ هي جذور المعادلة:

$$f(z)=0$$

$$(z^2-1)^4\cos\frac{1}{z}\,e^{1/z}=0$$

إما:

$$(z^2-1)^4=0$$

$$z^2=1\Rightarrow z=\mp1$$

وهي أصفار من الدرجة الرابعة.

أو:

$$\cos\frac{1}{z}=0$$

$$\frac{1}{z}=\frac{\pi}{2}+\pi k$$

$$z_k=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k}\quad;\ k\in\mathbb{Z}$$

وهي أصفار بسيطة لأنها غير مكررة

$e^{\frac{1}{z}} \neq 0$

$$z^2-1 \underset{z\to\infty}{\sim} z^2$$

$$(z^2-1)^4 \underset{z\to\infty}{\sim} z^8$$

$$(z^2+1)^6 \underset{z\to\infty}{\sim} z^{12}$$

$$\cos\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} 1$$

$$e^{\frac{1}{z}} \underset{z\to\infty}{\sim} 1$$

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{z^8}{z^{12}} \cdot 1 \cdot 1$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^4}$$

إذاً $z=\infty$ صفر من الدرجة الرابعة

نتائج:

1- تكون $z=a\neq\infty$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كان:

$$f(z) \underset{z\to a}{\sim} c_m (z-a)^m$$

حيث $c_m \neq 0$

2- تكون النقطة $z=\infty$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كان:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{c_m}{z^m} \quad ; \quad c_m \neq 0$$

3- إذا كانت $z=a$ صفراً من الدرجة m للتابع $f(z)$ فإنها تكون صفراً من الدرجة $m.p$ للتابع $[f(z)]^p$

تمرين:

أوجد أصفار التابع:

$$f(z) = z(e^z-1)^5$$

وبين درجة كل صفر في المستوي $\mathbb{C}$

الحل:

أصفار تابع هي حلول المعادلة:

$$f(z)=0$$

$$z(e^z-1)^5=0$$

إما: $z=0$

أو: $(e^z-1)^5=0 \Rightarrow e^z=1$

$$\Rightarrow z = \ln 1 = \ln|1| + i(0+2\pi k)$$

$$z_k = 2\pi k i \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z_k = 2\pi k i \quad ; \quad k\in\mathbb{Z}^*$$

أصفار من الدرجة الخامسة للتابع $f(z)$.

بينما $z=0$ صفر من الدرجة السادسة للتابع $f(z)$.

تمرين :

أوجد أصفار التابع الآتي وعيّن درجة كل صفر في المستوي الموسع :

$$f(z) = \frac{\sin\frac{1}{z}}{z^3+1}$$

الحل :

الأصفار هي حلول المعادلة $f(z) = 0$

$$\Rightarrow \sin\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{z_k} = \pi k$$

$$\Rightarrow z_k = \frac{1}{\pi k} \;;\; k \in \mathbb{Z}^*$$

وهي أصفار بسيطة (من الدرجة الأولى للتابع $f(z)$)

ولتحديد نوع $z = \infty$ حسب طريقة السلوك :

$$\sin\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$$z^3+1 \underset{z\to\infty}{\sim} z^3$$

إذاً :

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{z}}{z^3}$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^4}$$

وبالتالي $z=\infty$ صفر من الدرجة الرابعة حسب النتيجة (2) .

الجداء شاذة

$f.g$ شاذة عادية

تمرين :

أوجد أصفار التابع الآتي في المستوي الموسع :

$$f(z) = \frac{z}{z^2+1} \cdot \cos\frac{1}{z}$$

الحل :

أصفار التابع هي حلول المعادلة :

$$f(z) = 0$$

$$\Rightarrow z \cos\frac{1}{z} = 0$$

إمّا $\cos\frac{1}{z} = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\Rightarrow z_k = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi k} \;;\; k \in \mathbb{Z}$$

وهي أصفار بسيطة أو من الدرجة الأولى للتابع $f(z)$

أو $z = 0$

وهي نقطة شاذة للتابع $\cos\frac{1}{z}$ فهي شاذة للتابع $f(z)$

(كما سنرى لاحقاً)

لتحديد نوع $z = \infty$ حسب طريقة السلوك :

$$z \underset{z\to\infty}{\sim} z$$

$$z^2+1 \underset{z\to\infty}{\sim} z^2$$

$$\cos\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} 1$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{z}{z^2} \cdot 1$$

$$f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z}$$

وبالتالي $Z=\infty$ صفر بسيط للتابع $f(Z)$.

مبرهنة:

إذا كان $f(Z)$ نظامي في a وكان $f(a)=0$ ($Z=a$ صفر للتابع $f(Z)$) فإنه:

1. إما $f(Z)\equiv 0$ حول a
2. أو يوجد جوار لـ a لا يحتوي أصفار لـ $f(Z)$ سوى a

البرهان:

بما أن a عادية للتابع $f(Z)$ فإنه ينشر بالشكل:

$$f(Z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (Z-a)^n \quad ; Z\in K : |Z-a|<R$$

وبما أن $f(a)=0$ فإن:

$$f(Z)=\sum_{n=1}^{\infty} c_n(Z-a)^n \quad ; Z\in K: |Z-a|<R$$

وهنا لدينا حالتين:

1. إما يكون جميع $c_n=0$ لكل n وبالتالي $f(Z)\equiv 0$ حول a
2. أو

$$c_1=c_2=\dots=c_{m-1}=0$$

و $c_m\neq 0$

(a صفر من الدرجة m)

عندئذ:

$$f(Z)=\sum_{n=m}^{\infty} c_n(Z-a)^n$$

$$=c_m(Z-a)^m+c_{m+1}(Z-a)^{m+1}+\dots\dots$$

$$; Z\in K: |Z-a|<R$$

وهذا يعني أن $f(Z)$ لا ينعدم في أي نقطة من K باستثناء $Z=a$

نتيجة:

أصفار تابع نظامي نقاط معزولة هي دوماً نقاط معزولة.
(لا يوجد صفر في تابع نظامي وبنفس الوقت هو نقطة تراكم لأصفار التابع)

النقاط الشاذة ذات الطبيعة الواحدة:

تعريف:

نقول عن النقطة Z_0 من المستوي المركب أنها نقطة شاذة للتابع $f(Z)$ إذا كان التابع غير نظامي في هذه النقطة

مثال:

النقطة $Z=0$ هي نقطة شاذة للتوابع:

$$\frac{1}{Z^3} \;،\; \sin\frac{1}{Z} \;،\; \frac{\sin Z}{Z}$$

تعريف:

نقول عن النقطة الشاذة Z_0 للتابع $f(Z)$ إنها نقطة شاذة معزولة إذا كان يوجد جوار لهذه النقطة لا يحتوي على أي نقطة شاذة أخرى لـ $f(Z)$ (تكون Z_0 نقطة شاذة معزولة إذا استطعنا تحويطها بدائرة بحيث لا يوجد في هذه الدائرة نقطة شاذة سواها).
وإذا كان من غير الممكن إيجاد مثل هذا الجوار نقول أن النقطة الشاذة غير معزولة

مثال:

$Z=1$ هي نقطة شاذة معزولة للتوابع:

$$\frac{1}{(Z-1)^2} \;،\; \frac{e^Z+1}{Z-1} \;،\; \cos\left(\frac{1}{Z-1}\right)$$

مثال :

أوجد النقاط الشاذة للتابع :

$$f(Z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{Z}}$$

الحل :

النقاط الشاذة هي جذور المقام وهي جذور المعادلة :

$$\sin \frac{1}{Z} = 0$$

$$\frac{1}{Z} = \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_k = \frac{1}{\pi k} \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

وهي نقاط شاذة معزولة للتابع $f(Z)$

$Z = 0$ نقطة شاذة غير معزولة لأنّ :

$$\lim_{k \to \infty} Z_k = 0$$

ملاحظة (1) :

نفكر في أن النقطة الشاذة غير معزولة إذا كان عدد النقاط الشاذة غير منتهٍ أي يوجد متتالية من النقاط الشاذة نهاية هذه المتتالية هي نقطة شاذة غير معزولة ، أما إذا كان عدد النقاط الشاذة منتهٍ فإن جميع هذه النقاط شاذة معزولة .

ملاحظة (2) :

إذا كانت النقطة الشاذة غير معزولة فلا يوجد أي دراسة عندها نكتفي بذكر أنها غير معزولة فقط .

أنواع النقاط الشاذة المعزولة :

1- النقاط الشاذة القابلة للإصلاح :

تعريف :

نقول عن النقطة الشاذة $Z = a$ أنها نقطة شاذة قابلة للإصلاح أو الحذف أو الإزالة إذا كانت :

$$\lim_{Z \to a} f(Z)$$

معينة (موجودة ومحدودة)

ويعتبر هذا النوع من النقاط الشاذة لبعضاً نقاط عادية (أي يمكن إزالتها).

مثال :

النقطة $Z = 0$ هي نقطة شاذة قابلة للإصلاح للتابع :

$$f(Z) = \frac{e^Z - 1}{Z}$$

لأنّ :

$$\lim_{Z \to 0} \frac{e^Z - 1}{Z} = \frac{0}{0}$$

(نطبق أوبيتال)

$$= \lim_{Z \to 0} \frac{e^Z}{1} = 1$$

إذاً النهاية موجودة ومحدودة .

2- الأقطاب : (مفهوم معاكس للإصلاح)

تعريف :

نقول عن النقطة الشاذة $Z = a$ أنها قطب للتابع $f(Z)$ إذا كانت

$$\lim_{Z \to a} f(Z) = \infty$$

موجودة وغير محدودة .

تعريف :

نقول عن النقطة الشاذة $Z = a$ أنها قطب من الدرجة n للتابع $f(Z)$ إذا كانت :

$$\lim_{Z \to a} (Z-a)^n f(Z) = A \neq 0, \infty$$

عندما تساوي n الواحد نسمي هذا القطب قطب بسيط..

3. النقاط الشاذة الأساسية:

نقول عن النقطة الشاذة $Z=a$ أنها نقطة شاذة أساسية للتابع $f(Z)$ إذا كانت:

$$\lim_{Z \to a} f(Z)$$

غير موجودة

مثال:

$Z=0$ نقطة شاذة أساسية للتابع:

$$f(Z)=e^{1/Z}$$

لأن:

$$\lim_{Z \to 0} e^{1/Z}$$ غير موجودة

ولنبين ذلك:

إذا كانت Z تسعى نحو الصفر على المحور ox الموجب أي:

$$Z=x>0$$

$$\lim_{Z \to 0} e^{1/Z} = \lim_{x \to 0} e^{\frac{1}{x}} = e^{+\infty} = \infty$$

إذا كانت Z تسعى نحو الصفر على المحور ox السالب أي:

$$Z=x<0$$

$$\lim_{Z \to 0} e^{1/Z} = \lim_{x \to 0} e^{-\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

وهذا مايؤدي أن النهاية غير موجودة..

مثال:

ماهو نوع $Z=\infty$ للتابع $f(Z)=e^{Z}$ ؟

الحل:

$Z=\infty$ نقطة شاذة أساسية للتابع e^{Z} لأنه:

$$\lim_{Z \to \infty} e^{Z}$$

غير موجودة

ملاحظة:

لإيجاد نوع $Z=\infty$ للتابع $f(Z)$ نجري التحويل $Z=\frac{1}{t}$ فيكون نوع $Z=\infty$ للتابع $f(Z)$ هو نفسه نوع $t=0$ للتابع $f\left(\frac{1}{t}\right)$.

ملاحظات ونتائج:

1. إذا كان لدينا التابع: $F(Z)=\frac{f(Z)}{g(Z)}$ تابع كسري ما

وكانت a نقطة عادية للتابعين $f(Z)$ و $g(Z)$.

لتحديد نوع $Z=a$ للتابع $F(Z)$ نميز الحالات الآتية:

نوع النقطة $Z=a$

إذا كان $g(a)\neq 0$
(a ليست صفر لـ g)
عندئذ a عادية
للتابع $F(Z)$

إذا كان $g(a)=0$
(a صفر للتابع $g(Z)$ من
الدرجة m)

إذا كان $f(a)\neq 0$
(a ليست صفر لـ f)
$Z=a$ قطب من الدرجة
m للتابع $F(Z)$

$f(a)=0$ (a صفر من الدرجة
n للتابع $f(Z)$)

$n>m$
a عادية للتابع
$F(Z)$

$n=m$
a قابلة
للإصلاح

$n<m$
a قطب
من الدرجة
$m-n$
للتابع $F(Z)$

2- أقطاب التابع $f(Z)$ هي نقاط شاذة أساسية للتوابع
$e^{f(Z)}$ و $\cos(f(Z))$ و $\sin(f(Z))$ و $sh(f(Z))$ و $ch(f(Z))$

3- إذا كان لدينا التابع $F(Z)=\dfrac{1}{f(Z)}$ وكانت a شاذة أساسية

للتابع $f(Z)$ هنا نميز حالتين:

$f(Z)$ حول a
$f(Z)$ ليس له أصفار
حول a
$\Downarrow$
$Z=a$ شاذة أساسية
للتابع $F(Z)$

$f(Z_k)=0$
في جوار ما لـ a
$\Downarrow$
Z_k أقطاب لـ F
و
$Z=a$ نقطة شاذة غير
معزولة لأنها نقطة تراكم
أو تجمع الأقطاب Z_k

مثال:
ما هو نوع $Z=0$ للتابع:

$$f(Z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{Z}}}$$

الحل:
$Z=0$ شاذة أساسية للتابع $e^{\frac{1}{Z}}$ ولدينا:
$e^{\frac{1}{Z}}\neq 0$
ومنه $Z=0$ شاذة أساسية للتابع

$$f(Z)=\frac{1}{e^{\frac{1}{Z}}}$$

مثال:
ما هو نوع $Z=1$ للتابع:

$$f=\frac{1}{\sin\frac{1}{Z-1}}$$

الحل:

$$\sin\frac{1}{Z-1}=0$$

$$\frac{1}{Z-1}=\pi k \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow Z_k = 1+\frac{1}{\pi k} \quad ; k\in\mathbb{Z}^*$$

أقطاب بسيطة

وبما أنّ

$$\lim_{k\to\infty} Z_k = 1$$

فإنّ: $Z=1$ شاذة غير معزولة..

تمرين (دورة):

أوجد النقاط الشاذة في المستوي $\bar{\mathbb{C}}$ للتابع:

$$f(Z)=\frac{Z^3}{\cos^2\left(\frac{1}{Z-2}\right)}$$

الحل:

النقاط الشاذة هي أصفار المقام:

$$\cos^2\left(\frac{1}{Z-2}\right)=0$$

$$\cos\left(\frac{1}{Z-2}\right)=0 \Rightarrow \frac{1}{Z-2}=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad , k\in\mathbb{Z}$$

$$Z_k = 2+\frac{1}{\frac{\pi}{2}+\pi k} \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

أقطاب من الدرجة الثانية للتابع $f(Z)$ لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط ومكررة مرتين

وبما أنّ:

$$\lim_{k\to\infty} Z_k = 2$$

إذاً $Z=2$ شاذة غير معزولة

لتحديد نوع $Z=\infty$ نطبق طريقة السلوك:

$$Z^3 \underset{Z\to\infty}{\sim} Z^3$$

$$\cos^2\frac{1}{Z-2} \underset{Z\to\infty}{\sim} 1$$

$$f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} Z^3$$

وبالتالي $Z=\infty$ قطب من الدرجة 3

تمرين (وظيفة):

أوجد النقاط الشاذة للتابع:

$$f(Z)=\frac{Z^3}{\sin^2\frac{1}{Z+1}}$$

في $\bar{\mathbb{C}}$ وبين نوعها

تمرين (دورة):

أوجد النقاط الشاذة في المستوي الموسع للتابع:

$$f(Z)=\frac{(Z+1)\,e^{Z}}{Z^4-2Z^3-3Z^2}$$

الحل:

النقاط الشاذة هي أصفار المقام:

$$Z^4-2Z^3-3Z^2=0$$
$$Z^2(Z^2-2Z-3)=0$$
$$Z^2(Z+1)(Z-3)=0$$

$Z=0$ قطب من الدرجة الثانية لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط ومكررة مرتين

أي قطب من الدرجة الثانية لأن:

$$\lim Z^2\,\frac{(Z+1)\,e^{Z}}{Z^2(Z+1)(Z-3)}=-\frac{1}{3}$$

$Z=-1$ قابلة للإصلاح لأنها تعدم المقام وتعدم البسط ومن نفس الدرجة

أي لأن:

$$\lim \frac{(Z+1)\,e^{Z}}{Z^2(Z+1)(Z-3)}=\frac{e^{-1}}{-4}$$

موجودة ومحدودة.

$Z=3$ قطب بسيط لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط وهي صفر بسيط للمقام

أي لأن:

$$\lim_{Z\to 3}(Z-3)\,\frac{(Z+1)\,e^{Z}}{Z^2(Z+1)(Z-3)}=\frac{e^{3}}{9}$$

$Z=\infty$ شاذة أساسية للتابع $f(Z)$

تمرين:

أوجد النقاط الشاذة في المستوي الموسع للتابع:

$$f(Z)=\sin\left(\frac{1}{\sin\frac{1}{Z}}\right)$$

الحل:

إن هذا التابع من الشكل:

$$f(Z)=\sin g(Z)$$

حيث:

$$g(Z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{Z}}$$

أقطاب التابع $g(Z)$ هي نقاط شاذة أساسية (حسب النتيجة)

أقطاب $g(Z)$ هي حلول المعادلة:

$$\sin\frac{1}{Z}=0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z}=\pi k \quad ; k\in \mathbb{Z}$$

$$Z=\frac{1}{\pi k} \quad ; k\in \mathbb{Z}^*$$

وهي أقطاب بسيطة لـ $g(Z)$ فهي نقاط شاذة أساسية للتابع $f(Z)$

بما أن:

$$\lim_{k\to\infty} Z_k=0$$

فإن $Z=0$ نقطة شاذة غير معزولة.

$$g(Z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{Z}} \underset{Z\to\infty}{\sim} Z$$

$$f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} \sin Z$$

إذاً $Z=\infty$ نقطة شاذة أساسية للتابع $f(Z)$

.:. سلسلة لوران .:.

تعريف:

سلسلة لوران هي سلسلة تابعية من الشكل:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(Z-a)^n$$

واضح أن هذه السلسلة مجموع سلسلتين الأولى:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(Z-a)^n$$ (سلسلة [illegible]

والثانية:

$$\sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n(Z-a)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{(Z-a)^n}$$

مبرهنة:

ساحة تقارب سلسلة لوران هي حلقة دائرية

البرهان:

إن السلسلة الأولى هي سلسلة تايلور حول a وبالتالي فهي متقاربة في القرص الدائري:

$$D_1: |Z-a|<R$$

في السلسلة الثانية

لنضع: $\frac{1}{Z-a}=t$

عندها تأخذ السلسلة الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n t^n$$

وهي سلسلة قوى متقاربة في القرص

$$|t|<\alpha$$

$$\left|\frac{1}{Z-a}\right|<\alpha$$

$$\Rightarrow |Z-a|>\frac{1}{\alpha}$$

لنضع $r=\frac{1}{\alpha}$

إذاً ساحة تقارب السلسلة الثانية هي:

$$D_2: |Z-a|>r$$

فإذا كانت $r<R$ فإن سلسلة لوران متقاربة في: $D_1\cap D_2$

أي في الحلقة:

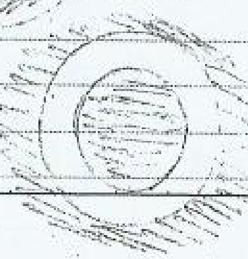
$$r<|Z-a|<R$$

* إذا كان $r>R$

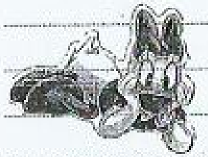
لا يوجد ساحة مشتركة

$$D_1\cap D_2=\phi$$

والسلسلة متباعدة..



وهذا ما يؤكد أن ساحة تقارب سلسلة لوران حلقة دائرية ......



حالات خاصة لساحة تقارب سلسلة لوران :

1- إذا كان $r=0$ فإن ساحة التقارب هي :

$$0<|Z-a|<R$$

أي قرص مجوف في مركزه...

2- إذا كان $R=+\infty$ فإن ساحة التقارب هي :

$$r<|Z-a|<\infty$$

أي خارج قرص دائري مركزه a ونصف قطره r

3- إذا كانت a نقطة عادية فإن ساحة التقارب هي :

$|Z-a|<R$ « أي تصبح السلسلة سلسلة تايلور »

ملاحظة :

تتطابق سلسلة لوران مع سلسلة تايلور إذا كان :

1- a نقطة عادية لـ $f(Z)$.

2- المنشر يتم في جوار لـ a.

مبرهنة لوران :

إذا كان $f(Z)$ تابعاً نظامياً (وحيد القيمة وتحليلي) في الحلقة الدائرية :

$$D:\ r<|Z-a|<R$$

فإنه ينشر (يمثل) بسلسلة لوران داخل الحلقة بالشكل :

$$f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n (Z-a)^n$$

حيث :

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\,d\xi \qquad n=0,\pm1,\dots$$

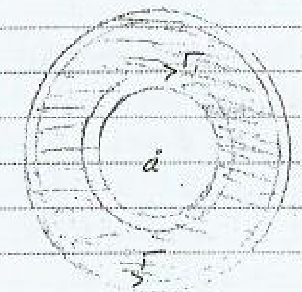
مع ← (منحني مغلق يحوي داخله a)

البرهان :

ليكن $D_1:\ r<r_1<|Z-a|<R_1<R$

حلقة حدودها الداخلية Γ_1 وحدودها الخارجية Γ

حسب نتيجة :



$$f(Z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(\xi)}{\xi-Z}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1}\frac{f(\xi)}{\xi-Z}\,d\xi$$

حيث :

$$\Gamma:\ |\xi-a|=R_1$$
$$\Gamma_1:\ |\xi-a|=r_1$$

لنشكل التابع $\frac{1}{\xi-Z}$ في التابع المستكمل الأول $(\xi\in\Gamma)$

مجموع لسلسلة هندسية :

$$\frac{1}{\xi-Z}=\frac{1}{\xi-a-Z+a}=\frac{1}{(\xi-a)-(Z-a)}=\frac{1}{(\xi-a)}\cdot\frac{1}{1-\frac{Z-a}{\xi-a}}$$

$$=\frac{1}{\xi-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{Z-a}{\xi-a}\right)^n \quad ; \left|\frac{Z-a}{\xi-a}\right|<1$$

$$\Longrightarrow \frac{1}{\xi - Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi-a)^{n+1}} (Z-a)^n \quad ; |Z-a| < \underbrace{|\xi - a|}_{R_1}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(\xi)}{\xi - Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} (Z-a)^n \quad ; |Z-a| < R_1$$

بمكاملة الطرفين حداً حداً على طول Γ

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} (Z-a)^n$$

$$; |Z-a| < R_1$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (Z-a)^n \quad ; |Z-a| < R_1$$

حيث :

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad ; n = 0, 1, 2, \ldots$$

لنشر التابع $\frac{1}{\xi - Z}$ على شكل سلسلة لنسبية عندما $\xi \in \Gamma_1$

$$\frac{-1}{\xi - Z} = \frac{1}{Z - \xi} = \frac{1}{(Z-a) - (\xi - a)}$$

$$= \frac{1}{Z-a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\xi - a}{Z - a}}$$

$$= \frac{1}{Z-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - a}{Z - a}\right)^n \quad ; \left|\frac{\xi - a}{Z - a}\right| < 1$$

$$\frac{-1}{\xi - Z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi - a)^n \frac{1}{(Z-a)^{n+1}}$$

$$; |\xi - a| < |Z-a|$$

$$\Longrightarrow |Z-a| > r_1$$

نضرب الطرفين ب $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ ونكامل حداً حداً على طول Γ_1

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{-n}} (Z-a)^{-n-1}$$

$$; |Z-a| > r_1$$

نبدل في السلسلة في الطرف الأيمن

$$n = -n-1 \Longleftarrow -n = n+1$$

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - Z} d\xi = \sum_{n=-\infty}^{n=-1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \, (Z-a)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{n=-1} c_n (Z-a)^n \quad ; |Z-a| < r_1$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \quad ; n = -1, -2, \ldots$$

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (Z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (Z-a)^n$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (Z-a)^n$$

حيث :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi$$

حيث أخذنا r و R قريبان من γ_ρ .

ملاحظة :

إن حساب الأمثال في سلسلة لوران عن طريق التكاملات أمر صعب ولا نحتاجه في حل التمارين وإنما نستفيد من معلوماتنا عن نشر ماك- لوران للتوابع الأولية وسنوضح ذلك من خلال الأمثلة.

تعريف :

إذا كانت $a \neq \infty$ وكانت سلسلة لوران حول a للتابع $f(z)$ في $r < |z-a| < R$

هي :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

وكانت a نقطة شاذة معزولة.

نسمي السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

بالقسم العادي (التحليلي) من سلسلة لوران للتابع $f(z)$ حول النقطة $z=a$

كما نسمي السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$$

بالقسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(z)$ حول النقطة $z=a$.

* ويمكن تعريف القسم الرئيسي أنه القسم من سلسلة لوران الذي يسعى إلى اللانهاية عندما z تسعى إلى a .

سلسلة لوران حول $z=\infty$:

تعريف :

لنفرض أن $z=\infty$ نقطة عادية أو شاذة معزولة للتابع $f(z)$ وهذا يعني أن هنالك دائرة (جوار) مركزها المبدأ ونصف قطرها R (كبير بقدر كاف) بحيث يكون $f(z)$ نظامياً خارج هذه الدائرة باستثناء $z=\infty$ وبالتالي سلسلة لوران حول $z=\infty$ تعطى بالشكل :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n z^n$$

نسمي السلسلة :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{-n}}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{n=0} c_n z^n$$

بالقسم العادي من سلسلة لوران حول $z=\infty$.

ونسمي السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

بالقسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(z)$ حول $z=\infty$.

مثال :

أوجد سلسلة لوران للتابع :

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

حول $z=0$ ثم حول $z=\infty$ وبين القسم الرئيسي في كل حالة.

الحل:

ب) ننشر حول $z=0$

$$\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad ; \quad |z|<1 \quad \text{(نشر ماك لوران)}$$

الاشتقاق حداً حداً داخل ساحة التقارب

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad ; \quad |z|<1$$

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} \quad ; \quad |z|<1$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي معدوم ، وهنا تتطابق سلسلة ماك لوران مع سلسلة لوران لأن $z=0$ نقطة عادية و النشر يتم حول 0 مباشرة

ب) ننشر حول $z=\infty$

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}$$

$$=\frac{-1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n \quad ; \quad \left|\frac{1}{z}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{z^{n+1}} \quad ; \quad |z|>1$$

جوار لـ $z=\infty$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} -z^{-n-1} \quad ; \quad |z|>1$$

نشتق حداً حداً ضمن ساحة التقارب فنجد:

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=0}^{\infty} -(-n-1)\, z^{-n-2} \quad ; \quad |z|>1$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{z^{n+2}} \quad ; \quad |z|>1$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=\infty$ معدوم ($z=\infty$ صفر من الدرجة الثانية للتابع $f(z)$).

تمرين:

أوجد سلسلة لوران للتابع:

$$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$$

في الساحات:

1) $|z|<1$

2) $1<|z|<2$

3) $2<|z|<\infty$ (أو في جوار $z=\infty$)

الحل:

التابع $f(z)$ يكتب بالشكل:

$$f(z)=\frac{2z+1}{(z+2)(z-1)}$$

$$f(z)=\frac{1}{z+2}+\frac{1}{z-1}$$

1) $|z|<1$

$$f(z)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{z}{2}}-\frac{1}{1-z}$$

$$f(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z}{2}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

$$\left|\frac{z}{2}\right|<1 \quad \& \quad |z|<1$$

$$\Rightarrow |z|<2 \quad \& \quad |z|<1$$

$$\Rightarrow \quad |Z| < 1$$

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{2^{n+1}} - 1 \right] Z^n \quad ; \ |Z| < 1$$

2) $1 < |Z| < 2$

*) $|Z| < 2$

$$\frac{1}{Z+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{Z}{2}}$$

$$\frac{1}{Z+2} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{Z}{2}\right)^n$$

$$\frac{1}{Z+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} Z^n \quad ; \ |Z| < 2$$

*) $|Z| > 1$

$$\frac{1}{Z-1} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{Z}}$$

$$\frac{1}{Z-1} = \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Z^n} \quad ; \ \left|\frac{1}{Z}\right| < 1$$

$$\frac{1}{Z-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Z^{n+1}} \quad ; \ |Z| > 1$$

وبالتالي :

$$f(Z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{Z^{n+1}}}_{\text{قسم رئيسي}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} Z^n \quad ; \ 1 < |Z| < 2$$

3) $2 < |Z| < \infty$ (جوار ∞)

$$f(Z) = \frac{1}{Z+2} + \frac{1}{Z-1}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2}{Z}} + \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{Z}}$$

$$= \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{Z}\right)^n + \frac{1}{Z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{Z}\right)^n$$

$$\left|\frac{2}{Z}\right| < 1 \quad \& \quad \left|\frac{1}{Z}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \quad |Z| > 2 \quad \& \quad |Z| > 1$$

$$\Downarrow$$

$$\infty > |Z| > 2$$

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-2)^n + 1 \right] \frac{1}{Z^{n+1}} \quad ; \ 2 < |Z| < \infty$$

تمرين :

أوجد القسم الرئيسي والقسم العادي من سلسلة لوران :

$$f(Z) = Z^3 e^{\frac{1}{Z}}$$

حول $Z = 0$ وحول $Z = \infty$

الحل :

$$f(Z) = Z^3 \left[1 + \frac{1}{1!} \cdot \frac{1}{Z} + \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{Z^3} + \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{Z^4} + \cdots \right]$$

one for all and all for one

N

$$f(Z) = Z^3 + Z^2 + \frac{Z}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{Z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{Z^3} + \cdots \quad ; \; 0 < |Z| < \infty$$

حول $Z = 0$:

القسم العادي هو:

$$\frac{1}{3!} + \frac{Z}{2} + Z^2 + Z^3$$

والقسم الرئيسي هو:

$$\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{Z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{Z^3} + \cdots$$

حول $Z = \infty$:

القسم العادي هو:

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{Z} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{Z^2} + \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{Z^3} + \cdots$$

القسم الرئيسي هو:

$$\frac{Z}{2} + Z^2 + Z^3$$

تمرين:

أوجد سلسلة لوران التابع:

$$f(Z) = \cos\frac{Z}{Z+1}$$

حول $Z = -1$ وبين القسم الرئيسي..

الحل:

$$f(Z) = \cos\left(\frac{Z+1-1}{Z+1}\right)$$

$$f(Z) = \cos\left(1 - \frac{1}{Z+1}\right)$$

$$= \cos 1 \cdot \cos\left(\frac{1}{Z+1}\right) + \sin 1 \cdot \sin\left(\frac{1}{Z+1}\right)$$

$$= \cos 1\left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^4} - \frac{1}{6!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^6} + \cdots\right)$$

$$+ \sin 1\left(\frac{1}{Z+1} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^3} + \frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^5} + \cdots\right)$$

$$f(Z) = \underbrace{\cos 1}_{\text{قسم عادي}} + \underbrace{\sin 1\,\frac{1}{Z+1} - \frac{\cos 1}{2!(Z+1)^2} - \frac{\sin 1}{3!}\cdot\frac{1}{(Z+1)^3} + \cdots}_{\text{قسم رئيسي}}$$

$; \; 0 < |Z+1| < \infty$

أو $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$

تمرين (وظيفة):

أوجد النقاط الشاذة في $\mathbb{C}$ للتابع الآتي وبين نوعها:

$$\frac{\sin^2 Z}{\cos Z - 1}$$

تمرين (دورة):

أوجد سلسلة لوران للتابع:

$$f(Z) = Z^2 \sin\frac{1}{Z-1}$$

حول $Z = 1$

خاصة :

نشر التابع $f(Z)$ في سلسلة لوران وحيد.

البرهان :

نفرض العكس: أي أنه للتابع $f(Z)$ نشران في جوار النقطة $Z=a$

أي :

$$f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (Z-a)^n$$

$$D:\ r<|Z-a|<R$$

$$f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{c}_n (Z-a)^n$$

ومنه :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (Z-a)^n=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{c}_n (Z-a)^n$$

نضرب طرفي العلاقة بـ $(Z-a)^{-m-1}$

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (Z-a)^{n-m-1}=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{c}_n (Z-a)^{n-m-1}$$

بالمكاملة حداً حداً على طول المنحني : $\Gamma_{R_0}:\ |Z-a|=R_0$

حيث : $r<R_0<R$

نجد :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n \int_{\Gamma_{R_0}} (Z-a)^{n-m-1}\,dZ=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \tilde{c}_n \int_{\Gamma_{R_0}} (Z-a)^{n-m-1}\,dZ$$

لدينا :

$$\int_{\Gamma_{R_0}} \frac{dZ}{(Z-a)^{-n+m+1}}=\begin{cases} 2\pi i & ;\ n=m \\ 0 & ;\ n\neq m \end{cases}$$

وذلك حسب تمرين نموذجي من التكامل العقدي 1 .

$$I=\int_{\gamma} \frac{dZ}{(Z-a)^n}=\begin{cases} 0 & ;\ n\neq 1 \\ 2\pi i & ;\ n=1 \end{cases}$$

ومنه :

$$2\pi i\, c_m=2\pi i\, \tilde{c}_m \Rightarrow c_m=\tilde{c}_m$$

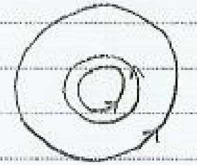
وبتكرار هذه العملية نجد أنه :

$$c_n=\tilde{c}_n$$

وهو المطلوب أي أن النشر وحيد...

(دورة) (٢٠١٠)

العلاقة بين سلسلة لوران وسلسلة فورييه المركبة :



ليكن لدينا $f(Z)$ تابعاً نظامياً في الحلقة :

$$D:\ \delta_1<|Z|<1+\delta_2$$

$$0<\delta_1<1$$

والتي تحتوي على الدائرة :

$|Z|=1$ (دائرة الوحدة)

عندئذ يقبل هذا التابع النشر في سلسلة لوران بالشكل :

$$f(Z)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n Z^n \quad ;\ \forall Z\in D$$

إذا وضعنا $Z=e^{i\varphi}$ حيث $0<\varphi<2\pi$

في النشر حصلنا على :

$$f(e^{i\varphi})=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\varphi}$$

$$F(\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n e^{in\varphi}$$

$$F(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

وهي سلسلة فورييه المركبة للتابع $F(\varphi)$

والعكس صحيح: أي أن سلسلة فورييه المركبة للتابع $F(\varphi)$

هي سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ عندما:

$Z = e^{i\varphi}$ (Z تقع على دائرة الواحدة)

<u>مبرهنة</u> متراجحات كوشي من أجل أمثال سلسلة لوران:

إذا كان $f(Z)$ تابعاً تحليلياً في الحلقة:

$$D: r_0 < |Z-a| < R_0$$

وكان هذا التابع محدوداً على الدائرة:

$$\gamma_R = |\xi - a| = R \quad (r_0 < R < R_0)$$

عندئذ فإن:

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \quad ; \; n \in \mathbb{Z}$$

$$M = \max_{\gamma_R} |f(Z)|$$

و c_n أمثال نشر $f(Z)$ في سلسلة لوران...

البرهان:

بما أن $f(Z)$ تحليلي في الحلقة D فهو ينشر بسلسلة لوران الشكل.

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (Z-a)^n \quad : \; Z \in D$$

حيث:

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

$$|c_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\gamma_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^{n+1}}\, d\xi\right|$$

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} \frac{|f(\xi)|}{|Z - a|^{n+1}}\, |d\xi|$$

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma_R} \frac{M}{R^{n+1}}\, |d\xi|$$

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{M}{R^{n+1}} \int_{\gamma_R} |d\xi|$$

طول المنحني γ_R

$$|c_n| \leqslant \frac{1}{2\pi}\,\frac{M}{R^{n+1}}\cdot 2\pi R$$

$$|c_n| \leqslant \frac{M}{R^n} \quad ; \; n \in \mathbb{Z}$$

وهو المطلوب

العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة :

أولاً : النقطة الشاذة القابلة للإصلاح :

مبرهنة :

لتكن a نقطة شاذة معزولة للتابع $f(Z)$

تكون النقطة a نقطة شاذة قابلة للإصلاح للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا كان القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ حول a معدوم .

البرهان :

أولاً : لزوم الشرط :

لنفرض أن النقطة $Z = a$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح للتابع $f(Z)$ ولنبرهن أن القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ حول a معدوم

- بما أن $Z = a$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح فإن :

$$\lim_{Z \to a} f(Z) = A \neq \infty$$

وبالتالي فإن التابع $f(Z)$ محدود في جوار a أي

$$|f(Z)| \leq M \quad (\text{في جوار } a)$$

وبالتالي من أجل التابع $f(Z)$ تصح متراجحات كوشي :

$$|C_n| \leq \frac{M}{\rho^n} \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

فإذا كان $n < 0$ فإن الطرف الأيمن يتوق إلى الصفر عندما $\rho \to 0$

وبالتالي

$$|C_n| \leq 0 \quad ; n < 0$$

$$\Rightarrow C_n = 0 \quad ; n < 0$$

ومنه

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (Z-a)^n$$

والقسم الرئيسي معدوم .

ثانياً : كفاية الشرط :

نفرض أن القسم الرئيسي للتابع $f(Z)$ حول $Z = a$ معدوم ولنبرهن أن a قابلة للإصلاح

- بما أن القسم الرئيسي للتابع $f(Z)$ معدوم فإن :

$$f(Z) = C_0 + C_1(Z-a) + C_2(Z-a)^2 + \dots$$

$$\lim_{Z \to a} f(Z) = C_0$$

موجودة ومحدودة

أي $Z = a$ شاذة قابلة للإصلاح ..

نتيجة :

تكون النقطة $Z = a$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا كان التابع $f(Z)$ محدود في جوار مثقوب للنقطة a .

ثانياً : النقاط الشاذة الأقطاب :

مبرهنة :

لتكن a نقطة شاذة معزولة للتابع $f(Z)$ حيث $a \neq \infty$

تكون $Z = a$ نقطة شاذة قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا امكن تمثيله بالشكل :

$$f(Z) = (Z-a)^{-m} \cdot \varphi(Z)$$

حيث m عدد صحيح موجب .

البرهان :

$Z=a$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$

$$\Updownarrow$$

$Z=a$ صفر من الدرجة m للتابع $\frac{1}{f(Z)}$

$$\Updownarrow \text{(مبرهنة)}$$

$$\frac{1}{f(Z)} = (Z-a)^{m} \cdot \varphi_1(Z)$$

حيث $\varphi_1(Z)$ تابع نظامي ولا ينعدم في a

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = (Z-a)^{-m} \cdot \frac{1}{\varphi_1(Z)}$$

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = (Z-a)^{-m} \cdot \varphi(Z)$$

حيث $\varphi(Z)$ تابع نظامي ولا ينعدم في a (لأنّ $\varphi(Z) = \frac{1}{\varphi_1(Z)}$ ولأنّ مقلوب تابع نظامي لا ينعدم هو تابع نظامي لا ينعدم)

مبرهنة : هامة

تكون $Z=\infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا

$$f(Z) = Z^{m} \cdot h(Z)$$

حيث $h(Z)$ نظامي وغير معدوم عند $Z=\infty$.

البرهان :

$Z=\infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$

$$\Updownarrow$$

$Z=\infty$ صفر من الدرجة m للتابع $\frac{1}{f(Z)}$

$$\Updownarrow \text{(حسب مبرهنة)}$$

$$\frac{1}{f(Z)} = Z^{-m} \, h_1(Z)$$

حيث $h_1(Z)$ نظامي ولا ينعدم عند ∞ $Z=\infty$

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = Z^{m} \cdot \frac{1}{h_1(Z)}$$

$\Updownarrow$ لأنّ مقلوب تابع نظامي لا ينعدم عند ∞ هو تابع نظامي لا ينعدم عند ∞

$$f(Z) = Z^{m} \cdot h(Z)$$

نتائج :

1) تكون $Z=a\neq\infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا كان :

$$f(Z) \underset{Z\to a}{\sim} A(Z-a)^{-m} \quad ; \quad A \neq 0$$

(ملاحظة : إذا ورد برهان هذه النتيجة في الامتحان نبرهن المبرهنة قبل السابقة ثم نضع $\Updownarrow \; f(Z) \sim A(Z-a)^{-m}$)

2009-2010 دورة

2) تكون $Z = \infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا كان :

$$f(Z) \underset{Z \to \infty}{\sim} B Z^m \quad ; \quad B \neq 0$$

مبرهنة (العلاقة بين سلسلة لوران والنقاط الشاذة) :

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة فإنه تكون النقطة $Z = a$ قطباً للتابع $f(Z)$ إذا وفقط إذا كان القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ حول $Z = a$ يتألف من عدد منتهٍ من الحدود ..

البرهان :

1 - $Z = a \neq \infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$

$$\Updownarrow \text{ حسب مبرهنة}$$

$$f(Z) = (Z-a)^{-m} \cdot \varphi(Z)$$

حيث $\varphi(Z)$ نظامي وغير معدوم عند $Z = a$

وبالتالي سلسلة لوران للتابع $\varphi(Z)$ حول a هي نفسها سلسلة تايلور .

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = (Z-a)^{-m}\left[c_0 + c_1(Z-a) + c_2(Z-a)^2 + \cdots\right]$$

$$f(Z) = \frac{c_0}{(Z-a)^m} + \frac{c_1}{(Z-a)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{m-1}}{(Z-a)} + c_m + c_{m+1}(Z-a) + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

القسم الرئيسي يتألف من عدد منتهٍ من الحدود (أعلى أس سالب هو m درجة القطب)

2 - $a = \infty$ قطب من الدرجة m للتابع $f(Z)$

$$\Updownarrow \text{ حسب مبرهنة}$$

$$f(Z) = Z^m \cdot h(Z) \quad ; \quad h(\infty) \neq 0$$

$$h(\infty) \neq \infty$$

و m عدد صحيح موجب

وحيث $h(Z)$ تابع نظامي ولا ينعدم عند ∞

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = Z^m\left[c_0 + \frac{c_1}{Z} + \frac{c_2}{Z^2} + \cdots\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$f(Z) = \underbrace{c_0 Z^m + c_1 Z^{m-1} + \cdots + c_{m-1} Z}_{\text{القسم الرئيسي}} + c_m + \frac{c_{m+1}}{Z} + \cdots$$

$$\Updownarrow$$

إذاً القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $Z = \infty$ يتألف من عدد منتهٍ من الحدود وأعلى أس موجب هو m درجة القطب ..

ثالثاً: النقاط الشاذة الأساسية:

مبرهنة:

إذا كانت a نقطة شاذة معزولة فإنه: تكون النقطة $z=a$ نقطة شاذة أساسية للتابع $f(z)$ إذا وفقط إذا كان القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=a$ يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود...

البرهان:

ينتج البرهان من كون أن a ليست قابلة للإصلاح وليست قطب وبالتالي القسم الرئيسي لسلسلة لوران يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود عندما تكون النقطة شاذة أساسية

تمرين:

من خلال سلسلة لوران حدد النقاط الشاذة وبيّن نوعها لكل من التوابع:

1)
$$f(z)=\frac{\sin z^2}{z^5}$$

الحل:

النقاط الشاذة هي: $z=0$، $z=\infty$

$$f(z)=\frac{1}{z^5}\left[z^2-\frac{(z^2)^3}{3!}+\frac{(z^2)^5}{5!}-\frac{(z^2)^7}{7!}+\dots\right]$$

$$=\frac{1}{z^3}-\frac{1}{3!}z+\frac{1}{5!}z^5-\frac{1}{7!}z^9+\dots$$

$0<|z|<\infty$:

القسم الرئيسي من النشر حول $z=0$ هو:

$$\frac{1}{z^3}$$

إذاً $z=0$ قطب من الدرجة الثالثة...

القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=\infty$ هو:

$$-\frac{z}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^9}{7!}+\dots$$

يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود إذن $z=\infty$ نقطة شاذة أساسية.

2)
$$f(z)=z\left(1-e^{\frac{1}{z}}\right)$$

الحل:

$$f(z)=z\left[1-1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^3}-\frac{1}{4!}\frac{1}{z^4}-\dots\right]$$

$$f(z)=-1-\frac{1}{2!}\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}-\frac{1}{4!}\frac{1}{z^3}-\dots$$

القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=0$ هو:

$$-\frac{1}{2!}\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\frac{1}{z^2}-\dots$$

يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود إذن $z=0$ شاذة أساسية

القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=\infty$ معدوم إذن $z=\infty$ شاذة قابلة للإصلاح

وما الدهر إلا من رواة قصائدي
إذا قلت شعراً أصبح الدهر منشدا

مبرهنة سوخوتسكي:

إذا كانت a نقطة شاذة أساسية للتابع $f(Z)$ فإنه من أجل كل متتالية $\{Z_n\}$ متقاربة من a أي:

$$\lim_{n\to\infty} Z_n = a$$

يكون:

$$\lim_{n\to\infty} f(Z_n) = A$$

أي يوجد أي متتالية متقاربة من نقطة شاذة أساسية لتابع وفق هذا التابع هو متتالية متقاربة.

مبرهنة بيكار «من أجل النقاط الشاذة الأساسية»:

في أي جوار للنقطة الشاذة الأساسية يأخذ التابع $f(Z)$ كل قيمة A عدداً لا نهائياً من المرات باستثناء قيمة واحدة على الأكثر «تسمى قيمة بيكار الاستثنائية»

معنى مبرهنة بيكار:

إذا كان للتابع $f(Z)$ نقطة شاذة أساسية فقط فإنه يوجد للمعادلة:

$$f(Z) = A$$

حل في جوار هذه النقطة باستثناء قيمة واحدة لـ A على الأكثر أي يمكن أن تكون هذه المعادلة غير قابلة للحل من أجل قيمة واحدة لـ A.

مثال:

نعلم أن $Z = \infty$ نقطة شاذة أساسية للتابع

$$f(Z) = e^Z$$

المعادلة:

$$f(Z) = A$$

تقبل الحل من أجل جميع قيم A ماعدا $A = 0$ أي تكون المعادلة:

$$e^Z = 0$$

مستحيلة الحل و القيمة الاستثنائية لبيكار $A = 0$ نقطة تفرع للتابع اللوغاريتمي

وحلول هذه المعادلة تعطى بـ:

$$Z = \ln A \quad ; \quad A \neq 0$$

$$\Rightarrow Z_k = \ln|A| + i(\operatorname{Arg}(A) + 2\pi k) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

__مثال:__

ابحث في القيم الاستثنائية لبيكار في التابع:

$$f(Z) = \sin Z$$ (انتبه مبرهنة بيكار على التابع)

الحل:

إن $Z = \infty$ نقطة شاذة أساسية التابع:

$$f = \sin Z$$

(لأن النشر حول $Z = \infty$ للتابع f و القسم الرئيسي يتألف من عدد غير منتهٍ من الحدود)

و المعادلة $\sin Z = A$

تقبل الحل من أجل جميع قيم A وبالتالي لا يوجد قيمة استثنائية لبيكار في التابع $f(Z)$.

مبرهنة ليوفيل و التوابع الميرومورفية في حالة بسيطة:

التابع الصحيح:

هو التابع التحليلي في كل $\mathbb{C}$ أو التابع الذي يمكن أن يكتب على شكل سلسلة قوى متقاربة في $\mathbb{C}$.

* إذا كان $f(Z)$ تابعاً صحيحاً فإنه ينشر في سلسلة تايلور من الشكل:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n \quad \text{---} \quad (1)$$

إنّ هذه السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم Z ، إنّ النشر في الملاحظة (1) يمثل أيضاً نشر لوران للتابع $f(Z)$ في جوار $Z=\infty$

ويمكن تصنيف التوابع الصحيحة في ثلاثة أصناف :

(1) صنف التوابع الصحيحة التي تكون فيها $Z=\infty$ قطب من الدرجة n.

وهي كثيرات الحدود .

مثال :

$$f(Z) = Z^5 + 4Z^3 + 2$$

تابع صحيح و $Z=\infty$ قطب من الدرجة الخامسة .

(2) صنف التوابع الصحيحة التي تكون فيها $Z=\infty$ نقطة شاذة أساسية.

مثال :

التوابع المتسامية وهي :

e^Z

$\sin Z$

$\cos Z$

$\operatorname{ch} Z$

$\operatorname{sh} Z$

$Z=\infty$ شاذة أساسية .

(3) صنف التوابع التي تكون فيها $Z=\infty$ نقطة عادية وهو صنف التوابع الثابتة .

$$f(Z) = \text{Const}$$

ملاحظة :

إنّ التابع الثابت هو التابع الوحيد الذي لا يملك أي نقطة شاذة في المستوي الموسع ، وإنّ أي تابع غير التابع الثابت يملك نقطة شاذة واحدة على الأقل في المستوي الموسع ...

دورة

مبرهنة ليوفيل :

إذا كان $f(Z)$ تابعاً صحيحاً وكان من أجل $|Z| > R_1$

$$|f(Z)| \leqslant M.|Z|^n \quad ; \quad n \geqslant 0$$

عندئذ فإنّ :

$f(Z)$ كثير حدود درجته ليست أكبر من n.

البرهان :

بما أنّ $f(Z)$ تابع صحيح فهو ينشر في جوار $Z=\infty$ بالشكل :

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Z^k \quad ; \quad |Z| < R_1$$

واستناداً إلى متراجحة كوشي من أجل

$$R > R_1$$

نحصل على :

$$|C_k| \leqslant \frac{\max_{|Z|=R} |f(Z)|}{R^k}$$

لدينا من الفرض :

$$|f(Z)| \leqslant M|Z|^n$$

$$\Rightarrow \max_{|Z|=R} |f(Z)| \leqslant M.R^n$$

$$|C_k| \leqslant \frac{MR^n}{R^k} \quad ; \quad n \geqslant 0$$

$$|C_k| \leqslant MR^{n-k}$$

عندما $k > n$ و $R \to \infty$ (R كبير بقدر كافٍ)
فإن الطرف الأيمن من الملاحظة الأخيرة ينتهي إلى الصفر وبالتالي:

$$|C_k| \leq 0$$

$$|C_k| = 0 \implies C_k = 0 \; ; \; k > n$$

$$\implies C_{n+1} = C_{n+2} = \dots = 0$$

$$\implies f(Z) = \sum_{k=0}^{n} C_k Z^k$$

$$f(Z) = C_0 + C_1 Z + \dots + C_n Z^n$$

وهو كثير حدود من الدرجة n على الأكثر.

حالة خاصة من مبرهنة ليوفيل « نتيجة » (مبرهنة ليوفيل البسيطة):
إذا كان $f(Z)$ تابعاً صحيحاً ومحدوداً في $\mathbb{C}$ فإن $f(Z)$ هو التابع الثابت ... ($n = 0$ في نص مبرهنة ليوفيل)

البرهان:
بما أن $f(Z)$ تابع صحيح فهو ينشر بالشكل:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n Z^n \; ; \; |Z| > R_1$$

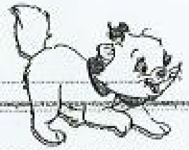
وحسب متراجحات كوشي:

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}$$

وبجعل $R \to \infty$ نجد:

$$|c_n| = 0$$

$$\implies f(Z) = Const$$



تمرين (دورة 2007-2008):
بفرض أن:

$$f(Z) = Z^3 . \sin \frac{1}{Z-1}$$

والمطلوب: 1. إيجاد أصفار التابع $f(Z)$ وتعيين درجة كل صفر.
2. تحديد النقاط الشاذة في $\overline{\mathbb{C}}$.
3. استنتج القسم العادي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ حول $Z = 1$.

الحل:
1. أصفار التابع هي حلول المعادلة:

$$f(Z) = 0$$

$$Z^3 . \sin \frac{1}{Z-1} = 0$$

إمّا:

$$Z^3 = 0 \implies Z = 0$$

صفر من الدرجة الثالثة للتابع $f(Z)$

أو:

$$\sin \frac{1}{Z-1} = 0$$

$$\frac{1}{Z-1} = \pi k \; ; \; k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_k = 1 + \frac{1}{\pi k} \; ; \; k \in \mathbb{Z}^*$$

وهي أصفار بسيطة للتابع $f(Z)$.
2. $Z = 1$ نقطة شاذة أساسية.
لنحدد نوع $Z = \infty$ حسب طريقة السلوك:

$$Z^3 \underset{Z \to \infty}{\sim} Z^3$$

كتطبيق لبرهنة ليوفيل سنبرهن النظرية الأساسية في الجبر :

حالة النظرية الأساسية في الجبر :

لكل كثيرة حدود مركبة من الشكل :

$$P_n(Z) = c_0 + c_1 Z + \cdots + c_n Z^n \quad ; \quad c_n \neq 0, \quad n \geq 1$$

من الدرجة n

جذر واحد على الأقل ... " n جذر مع مراعاة التكرار "

البرهان :

نفرض العكس : أي نفرض أن كثيرة الحدود $P_n(Z)$ لا تملك أي جذر في $\bar{\mathbb{C}}$ عندئذٍ فإن التابع :

$$g(Z) = \frac{1}{P_n(Z)}$$

تحليلي في كل $\mathbb{C}$ وبما أن

$$P_n(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} c_n Z^n$$

فإن :

$$\lim_{Z\to\infty} g(Z) = \lim_{Z\to\infty} \frac{1}{P_n(Z)} = 0$$

وبالتالي فإن $g(Z)$ محدود في $\bar{\mathbb{C}}$

إذن أصبح $g(Z)$ تحليلي ومحدود في $\bar{\mathbb{C}}$ أي

$$g(Z) = \text{Const}$$

ومنه $P_n(Z) = c_1$ وهذا تناقض مع تعريف كثيرة الحدود من الدرجة n

أي لكل كثيرة حدود $P_n(Z)$ على الأقل جذراً واحداً ...

وهو المطلوب

$$\sin\frac{1}{Z-1} \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z-1}$$

$$\frac{1}{Z-1} \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z}$$

$$\Rightarrow \sin\frac{1}{Z-1} \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z}$$

$$f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} Z^3 \cdot \frac{1}{Z}$$

$$f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} Z^2$$

إذاً $Z = \infty$ قطب من الدرجة الثانية.

3.

$$f = Z^3 \cdot \sin\frac{1}{Z-1}$$

$$f = (Z-1+1)^3 \cdot \sin\frac{1}{Z-1}$$

$$f(Z) = \left[(Z-1)^3 + 3(Z-1)^2 + 3(Z-1) + 1\right] \cdot \left[\frac{1}{Z-1} - \frac{1}{3!}\frac{1}{(Z-1)^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{(Z-1)^5} - \frac{1}{7!}\frac{1}{(Z-1)^7} + \cdots\right]$$

$$f(Z) = (Z-1)^2 - \frac{1}{3!} + 3(Z-1) + 3 + \left(-\frac{3}{3!} + 1\right)\frac{1}{Z-1} + \left(\frac{1}{5!} - \frac{3}{3!}\right)\frac{1}{(Z-1)^2} + \cdots$$

$$f(Z) = \underbrace{(Z-1)^2 + 3(Z-1) + \frac{17}{6}}_{\text{القسم العادي}} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{Z-1} + \left(-\frac{59}{120}\right)\frac{1}{(Z-1)^2} + \cdots}_{\text{القسم الرئيسي}}$$

التوابع الميرومورفية :

تعريف :

(أي مساحة محدودة)

يسمى التابع $f(Z)$ تابعاً ميرومورفياً إذا كان نظامياً في أي جزء محدود من المستوي $\mathbb{C}$ باستثناء عدد منته من الأقطاب على الأكثر.

- نلاحظ أنه قد يكون للتابع الميرومورفي في $\mathbb{C}$ عدد غير منته (قابل للعد) من الأقطاب.

على سبيل المثال:

$$\frac{1}{e^{Z}-1} ,\ \frac{1}{\sin Z} ,\ \cot g Z ,\ tg Z$$

توابع ميرومورفية لها عدد غير منته من الأقطاب في $\mathbb{C}$.

* التابع الكسري :

$$f(Z)=\frac{P_n(Z)}{q_n(Z)}$$

هو التابع الميرومورفي الذي يملك في $\mathbb{C}$ فقط عدد منته من الأقطاب والعكس صحيح أيضاً ونوضح ذلك من خلال المبرهنة الآتية :

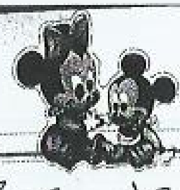
مبرهنة «نشر تابع ميرومورفي له عدد منته من الأقطاب في كسور بسيطة».

إذا كان $f(Z)$ تابعاً ميرومورفياً ويملك في $\mathbb{C}$ عدداً منتهياً من الأقطاب ولتكن a_k ($k=\overline{1,s}$) «يمكن أن يكون $Z=\infty$ أحد الأقطاب a_k»

عندئذ فإن $f(Z)$ تابع كسري عادي ينشر بالشكل :

$$f(Z)=A+f_0(Z)+\sum_{k=1}^{s} f_k(Z)$$

حيث $f_0(Z)$ القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ في جوار $Z=\infty$



$f_k(Z)$ القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ في جوار $Z=a_k$

$$A=\lim_{Z\to\infty}\left(f(Z)-f_0(Z)\right)$$

البرهان :

ليكن

$$f_0(Z)=A_1Z+A_2Z^2+\dots+A_mZ^m$$

$$f_k(Z)=\sum_{j=1}^{m_k}\frac{A_{jk}}{(Z-a_k)^j}$$

هما القسمان الرئيسيان للتابع $f(Z)$ في جوار $Z=\infty$ والنقاط $Z=a_k$; $k=\overline{1,s}$ على الترتيب

حيث a_1 قطب من الدرجة m_1

و a_2 " " " m_2 وهكذا...!

عندئذ فإن التابع :

$$g(Z)=f(Z)-f_0(Z)-\sum_{k=1}^{s} f_k(Z)$$

القسم العادي $f(Z)$

هو تابع نظامي في $\mathbb{C}$.

وبالتالي فهو يطابق التابع الثابت أي

$$g(Z)=A$$

وبما أن

$$\lim_{Z\to\infty} f_k(Z)=0$$

فإن :

$$A=\lim_{Z\to\infty} g(Z)=\lim_{Z\to\infty}\left(f(Z)-f_0(Z)\right)$$

وبالتالي :

$$A = g(Z) = f(Z) - f_0(Z) - \sum_{k=1}^{s} f_k(Z)$$

$$\Rightarrow f(Z) = A + f_0(Z) + \sum_{k=1}^{s} f_k(Z)$$

م م

مبرهنة بيكار «لاحيائيات التوابع الميرومورفية»

إذا كان $f(Z)$ تابعاً ميرومورفياً يختلف عن التابع الثابت فإنه يمكن أن يأخذ جميع القيم المركبة بإستثناء قيمتين على الأكثر، نسمي هاتين القيمتين إن وجدتا بقيم بيكار الاستثنائية...

مثال:

التابع $f(Z) = tg\, Z$ هو تابع ميرومورفي لأن نقاطه الشاذة هي أقطاب بسيطة وهي جذور المعادلة:

$$\cos Z = 0$$

$$Z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

إن هذا التابع يملك قيمتين استثنائيتين هما $\mp i$ أي أن المعادلة:

$$tg\, Z = A$$

محققة من أجل جميع قيم A ماعدا

$$A = \mp i$$

ولنبين ذلك:

$$tg\, Z = i$$

$$\frac{e^{iZ} - e^{-iZ}}{i(e^{iZ} + e^{-iZ})} = i$$

$$\frac{e^{2iZ} - 1}{i(e^{2iZ} + 1)} = i$$

$$e^{2iZ} - 1 = -e^{2iZ} - 1$$

$$2e^{2iZ} = 0 \quad \Rightarrow \quad e^{2iZ} \neq 0$$

ملاحظة:

إن كل تابع ميرومورفي يكتب على شكل نسبة تابعين صحيحين...

مجموعة التمارين المحلولة

سلسلة لوران و النقاط الشاذة

تمرين «1»:

أوجد سلسلة لوران للتابع:

$$f(Z) = \frac{5}{Z^2 - Z - 6}$$

في الحلقة:

$$2 < |Z - 1| < 3$$

وافصل المقام ذو الأسس السالبة عن المقام ذو الأسس الموجبة...

الحل:

$$f(Z) = \frac{5}{(Z-3)(Z+2)}$$

$$f(Z) = \frac{1}{Z-3} + \frac{-1}{Z+2}$$

$$f(Z) = \frac{1}{(Z-1)-2} - \frac{1}{(Z-1)+3}$$

* نأخذ $|z-1|<3$

$$\frac{-1}{(z-1)+3}=\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-1}{3}}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-1}{3}\right)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}(z-1)^n \quad ; \left|\frac{z-1}{3}\right|<1$$

$$\frac{-1}{(z-1)+3}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}(z-1)^n \quad ; |z-1|<3$$

* نأخذ $|z-1|>2$

$$\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z-1}}$$

$$=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z-1}\right)^n \quad ; \left|\frac{2}{z-1}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}} \quad ; |z-1|>2$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n+1}(z-1)^n+\sum_{n=0}^{\infty}2^n\frac{1}{(z-1)^{n+1}}$$

$; 2<|z-1|<3$

تمرين 2.2 :

أوجد سلسلة لوران لكل من التوابع الآتية في جوار النقطة المبينة جانب كل تابع واستنتج نوع تلك النقطة:

a) $f(z)=\cos\frac{z}{z+1} \quad ; \quad z=-1$

(محلول سابقاً)

b) $f(z)=\frac{1}{8+z^3} \quad ; \quad z=\infty$

الحل:

$$f(z)=\frac{1}{z^3\left(1+\frac{8}{z^3}\right)}$$

$$=\frac{1}{z^3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{8}{z^3}\right)^n \quad ; \left|\frac{8}{z^3}\right|<1$$

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-8)^n\frac{1}{z^{3n}} \quad ; |z|>2$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي معدوم و $z=\infty$ صفر من الدرجة 3 للتابع $f(z)$.

c) $f(z)=z^2\cdot\sin\frac{1}{z-1} \quad ; \quad z=1$

الحل:

$$f(z)=(z-1+1)^2\cdot\sin\frac{1}{z-1}$$

$$f(z)=\left[(z-1)^2+2(z-1)+1\right]\left[\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{7!}\cdot\frac{1}{(z-1)^7}+\cdots\right]$$

$$f(z)=(z-1)-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+2-\frac{2}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{2}{5!}\cdot\frac{1}{(z-1)^4}+\cdots+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{(z-1)^5}+\cdots$$

$$f(z)=\underbrace{2+(z-1)}_{\text{قسم عادي}}+\underbrace{\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{z-1}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\cdots}_{\text{قسم رئيسي}}$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي من نشر التابع $f(Z)$ حول $Z=1$ يتألف من عدد غير منته من الحدود وهذا ما يؤكد أن $Z=1$ نقطة شاذة أساسية

تمرين 3 :

أوجد القسم العادي من سلسلة لوران للتابع :

$$f(Z)=Z^2\cdot\cos\frac{Z}{Z+1}$$

حول $Z=-1$

الحل :

$$f(Z)=(Z+1-1)^2\cdot\cos\left(\frac{Z+1-1}{Z+1}\right)$$

$$=[(Z+1)^2-2(Z+1)+1]\cos\left(1-\frac{1}{Z+1}\right)$$

$$f(Z)=[(Z+1)^2-2(Z+1)+1]\left[\cos1\cdot\cos\frac{1}{Z+1}+\sin1\cdot\sin\frac{1}{Z+1}\right]$$

$$=[(Z+1)^2-2(Z+1)+1]\left[\cos1\left(1-\frac{1}{2!}\frac{1}{(Z+1)^2}+\frac{1}{4!}\frac{1}{(Z+1)^4}+\dots\right)\right.$$

$$\left.+\sin1\left(\frac{1}{Z+1}-\frac{1}{3!}\frac{1}{(Z+1)^3}+\frac{1}{5!}\frac{1}{(Z+1)^5}+\dots\right)\right]$$

$$f(Z)=[(Z+1)^2-2(Z+1)+1]\left[\cos1+\frac{\sin1}{Z+1}-\frac{\cos1}{2!}\frac{1}{(Z+1)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\sin1}{3!}\frac{1}{(Z+1)^3}+\frac{\cos1}{4!}\frac{1}{(Z+1)^4}+\dots\right]$$

$$f(Z)=\cos1(Z+1)^2+\sin1(Z+1)-\frac{\cos1}{2!}-\frac{\sin1}{3!}\frac{1}{Z+1}+$$

$$+\frac{\cos1}{4!}\frac{1}{(Z+1)^2}+\dots$$

$$-2\cos1(Z+1)-2\sin1+\cos1\cdot\frac{1}{Z+1}+\frac{\sin1}{3}\frac{1}{(Z+1)^2}$$

$$+\dots+\cos1+\frac{\sin1}{Z+1}-\frac{\cos1}{2!}\frac{1}{(Z+1)^2}+\dots$$

$$f(Z)=\left(\frac12\cos1-2\sin1\right)+(\sin1-2\cos1)(Z+1)+\cos1(Z+1)^2$$

$$+\left(\frac56\sin1+\cos1\right)\frac{1}{Z+1}+\left(\frac{-11}{24}\cos1+\frac13\sin1\right)\frac{1}{(Z+1)^2}$$

$$+\dots$$

نلاحظ أن القسم الرئيسي يتألف من عدد غير منته من الحدود وهذا ما يؤكد أن $Z=-1$ شاذة أساسية.

تمرين 4 :

أوجد القسم الرئيسي من سلسلة لوران للتابع :

$$f(Z)=\frac{1}{Z^2+1}$$

حول $Z=i$

الحل :

$$f(Z)=\frac{1}{(Z-i+i)^2+1}=\frac{1}{(Z-i)^2+2i(Z-i)\cancel{-1}\cancel{+1}}$$

$$=\frac{1}{2i(Z-i)}\cdot\frac{1}{1+\frac{Z-i}{2i}}$$

$$f(Z)=\frac{1}{2i(Z-i)}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{Z-i}{2i}\right)^n \quad ; \left|\frac{Z-i}{2i}\right|<1$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(Z-i)^{n-1} \quad ; |Z-i|<2$$

$$f(Z)=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{Z-i}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}}(Z-i)^{n-1} \quad : |Z-i|<2$$

والقسم الرئيسي هو:

$$\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{Z-i}$$

وهذا ما يؤكد على أن $Z=i$ قطب بسيط..

تمرين 5:

a) حدد نوع النقطة $Z=0$ بالنسبة للتابع

$$f(Z)=\frac{(e^Z-1)^2}{1-\cos Z}$$

الحل: طريقة أولى:

$$\lim_{Z\to 0} f(Z)=\frac{0}{0}$$

عدم تعيين نطبق اوبيتال لإزالة عدم التعيين

$$\lim_{Z\to 0} f(Z)=\lim_{Z\to 0}\frac{2e^Z(e^Z-1)}{\sin Z}=\frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال

$$=\lim_{Z\to 0}\frac{2e^Z(e^Z-1)+2e^{2Z}}{\cos Z}$$

$$=2$$

موجودة ومحدودة إذن $Z=0$ شاذة قابلة للإصلاح..

طريقة ثانية:

طريقة السلوك:

$$(e^Z-1)^2 \underset{Z\to 0}{\sim} Z^2$$

$$1-\cos Z \underset{Z\to 0}{\sim} \frac{Z^2}{2}$$

$$f(Z) \underset{Z\to 0}{\sim} \frac{Z^2}{\frac{Z^2}{2}}$$

$$\Rightarrow f(Z) \underset{Z\to 0}{\sim} 2$$

إذن $Z=0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح (تعتبر عادية)..

b) حدد نوع $Z=0$ للتابع:

$$f(Z)=\cot g Z-\frac{1}{Z}$$ مثبت..

الحل:

$$f(Z)=\frac{Z\cos Z-\sin Z}{Z\sin Z}$$

$$\lim_{Z\to 0} f(Z)=\frac{0}{0}$$

نطبق اوبيتال

$$=\lim_{Z\to 0}\frac{\cancel{\cos Z}-Z\sin Z-\cancel{\cos Z}}{\sin Z+Z\cos Z}$$

$$=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{Z\to 0}\frac{-\sin Z-Z\cos Z}{\cos Z+\cos Z-Z\sin Z}$$

$$=\frac{0}{2}=0$$

موجودة ومحدودة

إذن $Z=0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح ويمكن اعتبارها عادية.

تمرين 06:

أوجد النقاط الشاذة في $\mathbb{C}$ للتوابع:

a) $f = \dfrac{1}{\sin\frac{1}{z}}$

الحل:

النقاط الشاذة هي جذور المقام

$$\sin\frac{1}{z} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \pi k \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

$$z_k = \frac{1}{\pi k} \quad ; k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi k} = 0$$

إذن $z=0$ نقطة شاذة غير معزولة (نقطة تجمع الأقطاب) لـ f.

$$z_k = \frac{1}{\pi k} \quad ; k\in \mathbb{Z}^*$$

أقطاب بسيطة لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط وغير مكررة....

لنحدد نوع $z=\infty$ حسب طريقة السلوك:

$$\sin\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{1}{z}}$$

$$f(z)\underset{z\to\infty}{\sim} z$$

وبالتالي $z=\infty$ قطب بسيط للتابع $f(z)$.

b) $f(z)=\dfrac{1-\cos z}{(e^z-1)^3}$

الحل: النقاط الشاذة هي أصفار المقام

$$e^z-1=0 \Rightarrow e^z=1$$

$$z=\ln 1$$

$$=\ln|1| + i(0+2\pi k) \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

$$z_k = 2\pi k i \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

وهي أصفار من الدرجة الثالثة للمقام

$$z_k = 2\pi k i \quad ; k\in \mathbb{Z}^*$$

أصفار من الدرجة الثالثة للمقام وليست أصفار للبسط (ولا تعدم البسط)
فهي أقطاب من الدرجة الثالثة للتابع $f(z)$.

لنحدد نوع $z=0$ حسب طريقة السلوك:

$$\left.\begin{array}{l} 1-\cos z \underset{z\to 0}{\sim} \dfrac{z^2}{2} \\ (e^z-1)^3 \underset{z\to 0}{\sim} z^3 \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) \sim \frac{\frac{z^2}{2}}{z^3}$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to 0}{\sim} \frac{1}{2z}$$

وبالتالي $z=0$ قطب بسيط.

$z=\infty$

نقطة شاذة غير معزولة لأنّ:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$$

تاريخي مالي تاريخ أخي لسيان النسيان ، أخي رسالة
لا ترسو جرح بجلاء إنسان....

/ /

تمرين «7» :

أوجد النقاط الشاذة لكل من التوابع الآتية في $\mathbb{C}$ بالطريقة التي تراها مناسبة :

a) $f(z) = \dfrac{1}{z(z^2+4)^2}$

الحل : النقاط الشاذة هي جذور المقام :

$$z(z^2+4)^2 = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط و $z = \mp 2i$ أقطاب درجة ثانية..

$z = \infty$ صفر من الدرجة الخامسة لذلك :

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^5}$$

b) $f(z) = \dfrac{e^z}{1+z^2}$

الحل :

$z = \mp i$ أقطاب بسيطة

$z = \infty$ شاذة أساسية

c) $f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$

الحل :

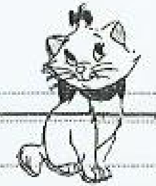
$$f(z) = e^z e^{\frac{1}{z}}$$

$z = 0$ ، $z = \infty$ نقاط شاذة أساسية

d) $f(z) = \dfrac{1}{e^z-1} - \dfrac{1}{z}$

الحل :

$$f(z) = \frac{z - e^z + 1}{z(e^z - 1)}$$



/ /

النقاط الشاذة هي جذور المقام

$$z(e^z-1) = 0$$

$z = 0$ تعدم المقام وتعدم البسط..

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \frac{0}{0}$$

نطبق أوبيتال فنجد :

$$= \lim_{z\to 0} \frac{1-e^z}{e^z-1+ze^z} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{-e^z}{e^z+e^z+ze^z}$$

$$= -\frac{1}{2}$$

موجودة ومحدودة إذن $z = 0$ قابلة للإصلاح.

ب) $e^z = 1$

$$z_k = 2\pi k i \quad ; k \in \mathbb{Z}^*$$

أقطاب بسيطة لأنها تعدم المقام ولا تعدم البسط وغير مكررة.

$z = \infty$ شاذة غير منعزلة لأنه :

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \infty$$

e) $f(z) = \cotg \dfrac{1}{z}$

الحل :

$$f(z) = \frac{\cos\frac{1}{z}}{\sin\frac{1}{z}}$$

النقاط الشاذة هي جذور المقام..

$$\sin\frac{1}{z} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{z} = \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow Z_k = \frac{1}{\pi k} \quad ; \; k \in \mathbb{Z}^*$$

أقطاب بسيطة

$Z=0$ شاذة غير معزولة لأنّ :

$$\lim_{k \to \infty} Z_k = 0$$

* لنحدد نوع $Z=\infty$ حسب طريقة السلوك :

$$\sin\frac{1}{Z} \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z}$$

$$\cos\frac{1}{Z} \underset{Z\to\infty}{\sim} 1$$

$$\Rightarrow f(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} Z$$

إذن $Z=\infty$ قطب بسيط

f) $$f(Z) = \frac{\sin^2 Z}{\cos Z - 1}$$

وظيفة...

المجموعة المنتهية ليس لها نقطة تراكم

المبحث الثاني :

التوابع التحليلية المتعددة القيم والتمديد التحليلي

نظرية الوحدانية في التوابع النظامية :

النص الأول : بدون برهان

إذا كان $f(Z)$ تابعاً نظامياً في الساحة D وكانت $\{Z_n\}$ متتالية من نقاط D متقاربة من $a \in D$ (a نقطة تجمع لـ $\{Z_n\}$)
وكان :

$$f(Z_n) = 0$$

فإنّ :

$f(Z) \equiv 0$ على D.

النص الثاني :

إذا كان $f(Z)$ تابعاً نظامياً في الساحة D وكان :
$f(Z) \equiv 0$ على المجموعة E المحتواة في D
بشرط أن يكون لـ E نقطة (تجمع) تراكم $a \in D$ (واحدة على الأقل)
عندئذٍ فإنّ :

$f(Z) \equiv 0$ على D.

البرهان :

بما أنّ a نقطة تراكم للمجموعة E فإنّه استناداً إلى تعريف نقطة التراكم يوجد متتالية $\{Z_n\}$ من E بحيث :

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = a$$

وبما أنّ $f(Z) \equiv 0$ على E فإنّ :

$f(Z_n) \equiv 0$ على E

وبالتالي حسب مبرهنة الوحدانية الجزء الأول

$f(Z) \equiv 0$ على D

الجزء الثالث:

إذا كان $f(Z)$, $g(Z)$ تابعان نظاميان في الساحة D وكان

$$f(Z) \equiv g(Z)$$

على المجموعة $E \subset D$ وكان للمجموعة E نقطة تراكم (تجمع) $a \in D$ عندئذ فإن:

$f(Z) \equiv g(Z)$ على كل D.

البرهان:

التابع

$$h(Z) = f(Z) - g(Z)$$

تابع نظامي في D

$h(Z) \equiv 0$ على E (فرق تابعين متطابقين على E).

وحسب مبرهنة الوحدانية (الجزء الثاني)

$h(Z) \equiv 0$ على D

ومنه

$f(Z) \equiv g(Z)$ على D

وهو المطلوب

ملاحظة:

ليكن لدينا التابع

$$f(Z) = \sin \frac{1}{Z}$$

عندئذ فإن:

$$f(Z_n) = 0 \quad ; Z_n = \frac{1}{\pi n} \quad ; n \in \mathbb{Z}$$

لكن $f(Z) \not\equiv 0$ على $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ساحة نظامية f

إن هذا المثال لا يتناقض مع مبرهنة الوحدانية لأن نقطة التجمع $a=0$ للمتتالية $\{Z_n\}$ لا تنتمي للساحة D ساحة نظامية f.

هام سؤال دورة

تعريف التمديد التحليلي:

لنفرض تحقق الشروط الآتية:

1) $f(Z)$ تابع معرف على المجموعة E.
2) $F(Z)$ تابع نظامي على الساحة D.
3) $E \subset D$
4) $F(Z) \equiv f(Z)$ (أياً كانت $Z \in E$)

عندئذ نسمي بالتعريف التابع $F(Z)$ الممدد النظامي للتابع $f(Z)$ من E إلى D.

سؤال دورة

مبرهنة "المبدأ الأساسي في التمديد التحليلي":

ضمن الفرض في التعريف السابق إذا كانت $a \in D$ نقطة تجمع للمجموعة E فإن التمديد النظامي للتابع $f(Z)$ من E إلى D وحيد.

البرهان:

إذا كان $F_1(Z)$ و $F_2(Z)$ تمديدان نظاميان للتابع $f(Z)$ من E إلى D عندئذ:

$$F_1(Z) \equiv f(Z) \qquad \forall Z \in E$$
$$F_2(Z) \equiv f(Z) \qquad \forall Z \in E$$

$$\Rightarrow F_1(Z) \equiv F_2(Z) \qquad \forall Z \in E \subset D$$

وبما أن E تملك نقطة تراكم تنتمي إلى D فإنه حسب مبرهنة

الوحدانية النص الثالث فإن:

$$F_1(Z) \equiv F_2(Z)$$

على الساحة D ، إذن المدد النظامي وحيد

مثال: أوجد التمديد النظامي للتابع:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} Z^n$$

الحل:

بما أن التابع $f(Z)$ معرف على شكل سلسلة فإن ساحة تعريفه هي ساحة التقارب وهي سلسلة هندسية فهي متقاربة في القرص:

$$E: |Z| < 1$$

ومن جهة ثانية التابع

$$F(Z) = \frac{1}{1-Z}$$

نظامي في $\mathbb{C} \setminus \{1\}$

وبما أن:

$$\sum_{n=0}^{\infty} Z^n = \frac{1}{1-Z}$$

فإن

$$f(Z) \equiv F(Z) \quad \forall Z \in E$$

ومنه

$$F(Z) = \frac{1}{1-Z}$$

هو المدد النظامي للتابع $f(Z)$ من داخل قرص الوحدة إلى المستوي الموخوذ عند $Z = 1$

مثال: أثبت أن التابع e^Z هو التمديد النظامي للتابع e^x من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{C}$.

الحل:

نعلم أن التابع $f(x) = e^x$ معرف على المجموعة $E = \mathbb{R}$

وأن التابع $F(Z) = e^Z$ نظامي في المستوي $\mathbb{C}$ (تابع صحيح)

ولدينا:

$$F(Z)\big|_{\mathbb{R}} = f(x)$$

ومنه نجد أن التابع e^Z هو المدد النظامي للتابع e^x من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{C}$.

ملاحظة:

التوابع e^Z ، $\sin Z$ ، $\cos Z$ ، $ch Z$ ، $sh Z$

التي درسناها سابقاً ، التوابع الصحيحة ، يمكن تعريفها على أنها التمديد النظامي للتوابع:

e^x ، $\sin x$ ، $\cos x$ ، $ch x$ ، $sh x$

دورة مفاهيم التمديد التحليلي (طرق التمديد التحليلي):

1- التمديد التحليلي على طول سلسلة ساحات (جزيرة ساحات).

2- التمديد التحليلي على طول منحني.

3- التمديد التحليلي بواسطة سلاسل القوى.

4- التمديد التحليلي بواسطة الصيغ التكاملية.

1- التمديد التحليلي على طول سلسلة ساحات (جزيرة ساحات):

لنفرض تحقق الشروط:

1) $f_k(Z)$ $(k=\overline{1,n})$ توابع نظامية في الساحات D_k $(k=\overline{1,n})$ على الترتيب

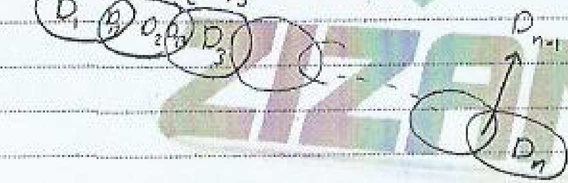
$$D_k \cap D_{k+1} = D_{k,k+1} \neq \phi \qquad (2$$

$$f_k(Z) \equiv f_{k+1}(Z) \qquad \forall\, Z \in D_{k,k+1} \qquad (3$$

عندئذ نسمي بالتعريف $f_{k+1}(Z)$ الممدد التحليلي المباشر للتابع $f_k(Z)$

من D_k إلى D_{k+1} عبر ساحة التقاطع $D_{k,k+1}$

ونسمي $f_n(Z)$ الممدد التحليلي لـ $f_1(Z)$ من D_1 إلى D_n عبر سلسلة الساحات D_k ($k=\overline{1,n}$)



إن هذا التمديد وحيد.

* إن زمرة التوابع المنظامية

$$\{ f_1(Z), f_2(Z), \ldots, f_n(Z) \}$$

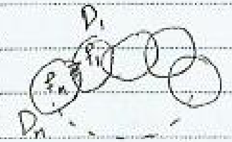
تعرف تابعاً $F(Z)$ قيمته تعطى بالعلاقة:

$$F(Z) = f_k(Z) \quad ; \quad Z \in D_k \quad (k=\overline{1,n})$$

نلاحظ على أن هذا التابع قد لا يكون وحيد القيمة..

* سلسلة الساحات D_k ($k=\overline{1,n}$) قد تكون مغلقة أي D_1 تتقاطع مع D_n عندها فإن التابعين $f_1(Z)$ و $f_n(Z)$ في D_{1n} ليست بالضرورة متساوية.

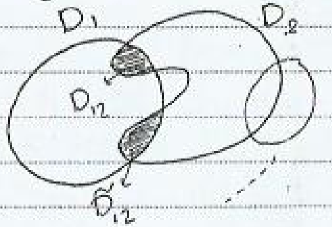
وبالتالي سيكون في النقطة $Z \in D_{1n}$



$$F(Z) = \begin{cases} f_1(Z) \\ \text{أو} \\ f_n(Z) \end{cases}$$

وفي حال تحقق ذلك سنكون أمام تابع ثنائي القيم.

* كما أن تعددية القيم للتابع $F(Z)$ يمكن أن تظهر في الخطوة الأولى إذا كانت $D_1 \cap D_2$ تتألف من أكثر من ساحة واحدة كما في الشكل المجاور:



$$D_1 \cap D_2 = D_{12} \cup \tilde{D}_{12}$$

فإذا كانت $Z \in D_1 \cap D_2$

وإذا كان:

$$f_1(Z) \equiv f_2(Z)$$

على D_{12} فإنه ليس من الضرورة أن يكون:

$f_1(Z) \equiv f_2(Z)$ على $\tilde{D}_{12}$

وفي هذه الحالة نحصل على تابع ثنائي القيم...

تعاريف أساسية:

تعريف 1.:

المنظم في Z_0 هو تابع $f(Z)$ معرف في النقطة Z_0 ونظامي في جوار ما لها.

(Z_0 ليست نقطة شاذة لـ $f(Z)$)

تعريف «2»:

العنصر الأساسي في z_0 هو العنصر الذي تبدأ منه عملية التمديد.

تعريف «3»:

العنصران المتكافئان هما العنصران المعرفان في نفس النقطة z_0 والمتطابقان في جوار ما لها

إن علاقة التكافؤ هذه متعدية. فيما سيأتي سندرس أي عنصر كممثل للعناصر المكافئة له

تعريف «4»: (التابع التحليلي بمفهوم فايرشتراس):

هو مجموعة كل العناصر الناتجة بتمديد العنصر الأساسي المعطى في النقطة z_0 تحليلياً على طول كل جزيئات الساحات (المنحنيات) التي يمكن التمديد عليها وبالتالي التابع التحليلي هو التمام عناصر نظامية «تسمى أيضاً فروع نظامية»

ونسمي أوسع ساحة يكون فيها $F(Z)$ موجوداً بساحة تحليلية التابع

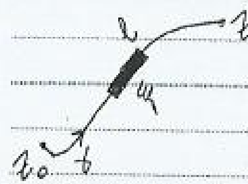
2. التمديد التحليلي على طول منحني:

ليكن $\overset{\frown}{z_0 z_1}$: لا منحني بدايته z_0 ونهايته z_1 وإذا كان:

1) $\ell(Z)$ تابع مستمر على المنحني لا

2) في كل نقطة $q \in$ لا يتعرف عنصر $f_q(Z)$ بحيث:

$$f_q(Z) = \ell(Z) \quad \text{على } \ell$$



(ℓ هو جزء من لا يحتوي على q)

عندئذ نقول بالتعريف عن العنصر $f_{z_1}(Z)$ أنه تمديد تحليلي للعنصر $f_{z_0}(Z)$

ونقول في هذه الحالة أيضاً أن العنصر $f_{z_0}(Z)$ يقبل التمديد تحليلياً على طول لا

- إن التمديد التحليلي على طول منحني وحيد في حال وجوده.

ملاحظة

التابع التحليلي الناتج بالتمديد على طول منحني يكون وحيد القيمة إذا كان هذا المنحني بسيطاً ويكون متعدد القيم إذا كان هذا المنحني يتقاطع مع نفسه (مكرر).

3. التمديد التحليلي بواسطة سلاسل القوى:

ليكن $f_0(Z)$ عنصراً في a عندئذ حسب تعريف العنصر في a ينشر في سلسلة قوى في جوار a من الشكل:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (Z-a)^n \quad ; \; k_0 : |Z-a| < R_0$$

نأخذ نقطة كيفية من داخل القرص k_0 ولتكن $b \in k_0$ وننشر من جديد التابع $f_0(Z)$ بقوى $(Z-b)$ فنحصل على:

$$f_1(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (Z-b)^n \quad ; \; k_1 : |Z-b| < R_1$$

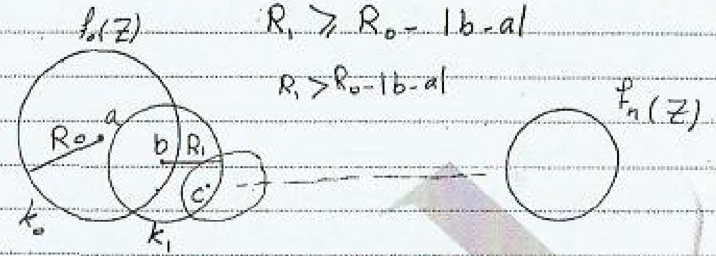
وهنا نميز حالتين:

إما: $k_0 \supset k_1$ وهنا نقول أنه لا يوجد تمديد.

أو: $k_0 \not\supset k_1$ عندها يوجد تمديد تحليلي أي يوجد تمديد

تحليلي عندما

$$R_1 \geq R_0 - |b-a|$$



عندها k_1 غير واقع كلياً في k_0 بل يتقاطع معه واستناداً إلى نظرية الوحدانية فإن:

$$f_0(Z) \equiv f_1(Z) \quad ; \quad Z \in k_0 \cap k_1$$

وبالتالي فإن السلسلة $f_1(Z)$ هي تمديد تحليلي مباشر للسلسلة $f_0(Z)$ من القرص k_0 إلى القرص k_1

نكرر هذه العملية ولنفرض وجود متتالية من العناصر

$$f_0(Z) \,,\, f_1(Z) \,,\, \text{——} \,,\, f_n(Z)$$

عندها العنصر $f_n(Z)$ هو تمديد تحليلي للعنصر $f_0(Z)$ على طول جزيرة الأقراص أو سلسلة الأقراص:

$$k_0, k_1, \text{- - - -}, k_n$$

يعتبر التمديد التحليلي باستخدام سلاسل القوى حالة خاصة من التمديد التحليلي على طول جزيرة ساحات...

مبرهنة (حول التابع العكسي) البسيطة:

إذا كان $w = f(Z)$ تابعاً نظامياً في النقطة Z_0 وكان

$$f'(Z_0) \neq 0$$

فإنه يتحقق:

1- يوجد جواران

$$k : |Z - Z_0| < R$$
$$\tilde{k} : |w - w_0| < \tilde{R}$$

بحيث أن المعادلة:

$w = f(Z)$ حلها وحيد بالنسبة لـ Z.

2- التابع "$w_0 = f(Z_0)$"

$Z = h(w) = f^{-1}(w)$ نظامي في w_0

3- بما أن $Z = h(w)$ نظامي في w_0 فهو قابل للاشتقاق عند w_0 وحولها وعبارة المشتق تعطى بالعلاقة:

$$h'(w) = \frac{1}{f'(Z)} = \frac{1}{f'(h(w))}$$

المنحنيات الهوموتوبية (القابلة للتشكيل المستمر)

تعريف:

ليكن

$$\gamma_0 : Z = Z_0(t)$$
$$\gamma_1 : Z = Z_1(t)$$

حيث $0 \leq t \leq 1$ منحنيان من ساحة ما D

نقول إن المنحنيات γ_0 ، γ_1 هوموتوبيان في الساحة D (أو γ_0 قابل للتشكيل المستمر إلى γ_1 وبالعكس)

ونكتب

• $\gamma_0 \approx \gamma_1$ "γ_0 هوموتوبي مع γ_1 وبالعكس"

إذا تحقق:

1) المنحنيان γ_0 و γ_1 لهما نفس البداية a ونفس النهاية b

2) يوجد تابع $Z(t, s)$ مستمر في المربع

$$0 \leq t \leq 1$$
$$0 \leq s \leq 1$$

يحقق:

• $\gamma_s(t_0, s) \subset D$

حيث t_0 نقطة مثبتة بين 0 و 1 .

وكلما غيرنا t_0 ضمن المجال $[0,1]$ نحصل على منحني γ_s واقع ضمن المساحة D .

• $Z(t,0) = Z_0(t)$

أي عندما $s = 0$

نحصل على المنحني γ_0

$Z(t,1) = Z_1(t)$

أي عندما $s = 1$ نحصل على المنحني γ_1

$Z(0,s) = a$

$Z(1,s) = b$

أي عندما $t = 0$ و $t = 1$ فإن التابع $Z(t,s)$ يطابق البداية والنهاية على الترتيب .

التعريف الهندسي (أو من الناحية العملية) :

• نقول عن المنحني γ أنه هوموتوبي مع الصفر عندما يتحول بتشويه مستمر إلى الصفر ونكتب :

$\gamma \approx 0$

• نقول عن المنحني γ_0 أنه هوموتوبي مع المنحني γ_1 إذا كان لهما نفس الأطراف (البداية والنهاية).

وكانت المساحة بينهما وحيدة الاتصال ، أي إذا أمكن تحويل أحدهما إلى الآخر بتشويه مستمر مع البقاء ضمن المساحة D

خواص المنحنيات الهوموتوبية (بدون برهان) :

1. إذا كانت D ساحة وحيدة الاتصال فإن أي منحنيين لهما البداية والنهاية نفسها هما منحنيان هوموتوبيان .

وفي حالة خاصة إذا كان أحدهما مغلق فإنه هوموتوبي مع الصفر .

2. إذا كانت D ساحة ما وكان :

$\gamma = \gamma_1 \gamma_2 \quad (\gamma_1 \cup \gamma_2)$

و

$\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1 \tilde{\gamma}_2$

وكان γ و $\tilde{\gamma}$ لهما نفس النهاية والبداية وكان γ_1 هوموتوبي مع $\tilde{\gamma}_1$ و γ_2 هوموتوبي مع $\tilde{\gamma}_2$ في D

فإن :

γ هوموتوبي مع $\tilde{\gamma}$ في D

3. المنحني $\gamma^{-}\gamma$ هوموتوبي مع الصفر في D

نفس γ ولكن بالجهة المعاكسة

$\gamma^{-}\gamma \approx 0$

إنّ فلسفتي في هذه الحياة قلبي
وقلبي هو عواطفي وعواطفي هي
فوضى تعبر عن قلب مجروح وعين تذرف
آلاف الدموع وحياة تبعثرت
بين الحروف ....

التوابع الزاوية المتعددة القيم

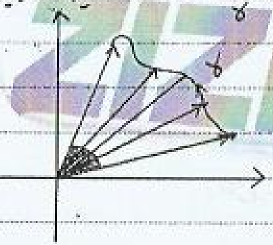
1. تابع الزاوية $\arg Z$

تغير زاوية على طول منحنٍ :

تعريف :

تغير الزاوية على طول المنحني γ هو الزاوية التي يصنعها أو يمسحها الشعاع $Z \in \gamma$ عندما تمسح النقطة Z المنحني γ من بدايته وحتى نهايته ولمرة واحدة ونرمز له بـ

$\Delta_{\gamma} \arg Z$ " تغير الزاوية على طول γ "

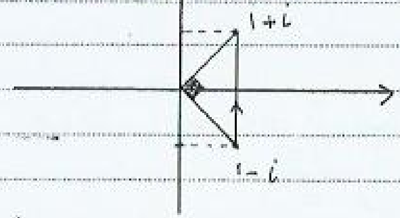


مثال :

إذا كان γ منحني $\gamma : [1-i , 1+i]$

احسب $\Delta_{\gamma} \arg Z$

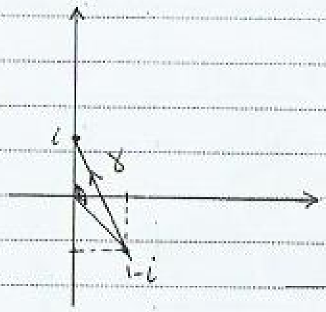
الحل :



$$\Delta_{\gamma} \arg Z = \frac{\pi}{2}$$

مثال : إذا كان $\gamma : [1-i , i]$ ، احسب $\Delta_{\gamma} \arg Z$

الحل :



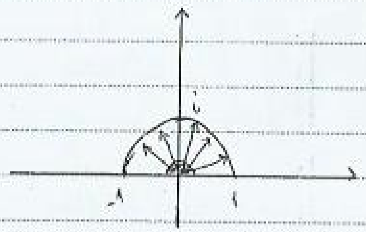
$$\Delta_{\gamma} \arg Z = \frac{3\pi}{4}$$

مثال :

إذا كان $\gamma : Z = e^{it}$ حيث $0 < t < \pi$

احسب $\Delta_{\gamma} \arg Z$

الحل :



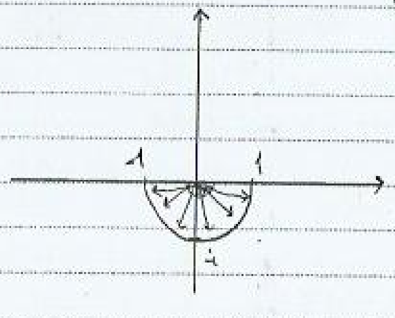
$$\Delta_{\gamma} \arg Z = \pi$$

مثال :

إذا كان $\gamma : Z = e^{-it}$ حيث $0 < t < \pi$

احسب $\Delta_{\gamma} \arg Z$

الحل :



$$\Delta_{\gamma} \arg Z = \pi$$

برهنة (الصيغة التحليلية «التكاملية» لتابع الزاوية):

إذا كان γ منحني محدود لا يمر من الصفر فإن:

$$1)\quad \underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = \int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$2)\quad \underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = Im \int_{\gamma} \frac{dZ}{Z}$$

البرهان:

1) ليكن $\gamma: Z = Z(t)$ حيث $\alpha \leq t \leq \beta$

ولكن $Z = re^{i\varphi}$ نقطة متحركة على المنحني γ

بالمطابقة:

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$

بمفاضلة الطرفين نجد:

$$dx = \cos\varphi\,dr - r\sin\varphi\,d\varphi$$
$$dy = \sin\varphi\,dr + r\cos\varphi\,d\varphi$$

نضرب العلاقة الأولى بـ $-\sin\varphi$ والعلاقة الثانية بـ $\cos\varphi$ نجد:

$$-\sin\varphi\,dx = -\sin\varphi\cos\varphi\,dr + r\sin^2\varphi\,d\varphi$$
$$\cos\varphi\,dy = \sin\varphi\cos\varphi\,dr + r\cos^2\varphi\,d\varphi$$

بالجمع نجد:

$$-\sin\varphi\,dx + \cos\varphi\,dy = r\,d\varphi$$

$$\Rightarrow d\varphi = \frac{-\sin\varphi\,dx + \cos\varphi\,dy}{r}$$

$$d\arg Z = \frac{-r\sin\varphi\,dx + r\cos\varphi\,dy}{r^2}$$

$$d\arg Z = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

إن قيمة التكامل على طول γ تساوي الى قيمة التابع الأصلي في نهاية المنحني γ ناقص قيمة التابع الأصلي في بداية المنحني γ أي هي تماماً تغير الزاوية ومنه:

$$\underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = \int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

2)

$$\int_{\gamma} \frac{dZ}{Z} = \int_{\gamma} \frac{dx + i\,dy}{x + iy}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{(dx + i\,dy)(x - iy)}{(x+iy)(x-iy)}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{x\,dx - iy\,dx + ix\,dy + y\,dy}{x^2+y^2}$$

$$= \int_{\gamma} \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2} + i\int_{\gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

من هذه العلاقة ومن تعريف تغير الزاوية

$$\Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = Im \int_{\gamma} \frac{dZ}{Z}$$

مثال: باستخدام الصيغة التكاملية لتغير الزاوية، احسب تغير الزاوية على طول γ حيث:

$$\gamma: Z = e^{it} \quad ; \quad 0 \le t \le \pi$$

الحل:

لدينا:

$$\Delta_\gamma \arg Z = Im \int_\gamma \frac{dZ}{Z}$$

$$Z = e^{it} \Rightarrow dZ = i e^{it}\, dt$$

$$\int_\gamma \frac{dZ}{Z} = \int_0^\pi \frac{i e^{it}}{e^{it}}\, dt = i\int_0^\pi dt = it\Big|_0^\pi = \pi i$$

$$\Delta_\gamma \arg Z = Im(\pi i) = \pi$$

ملاحظة:

$\Delta_\gamma \arg Z$ تمثل مقدار زاوية دوران الشعاع Z حول $Z=0$ أما $\Delta_\gamma \arg(Z-Z_0)$ تمثل مقدار زاوية دوران الشعاع Z حول $Z=Z_0$

* أما $\Delta_\gamma \arg f(Z)$ تمثل مقدار زاوية دوران الشعاع $f(Z)$ حول

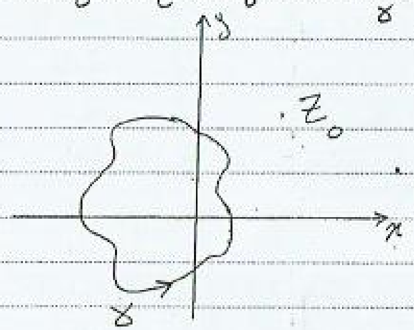
$$w = f(Z) = 0$$

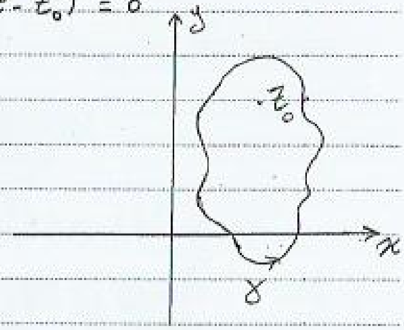
ملاحظة:

إذا كان γ منحني مغلق بسيط:

$\Delta_\gamma \arg(Z-Z_0) = 2\pi$ عندما Z_0 تقع داخل γ

$\Delta_\gamma \arg(Z-Z_0) = 0$ عندما Z_0 تقع خارج γ





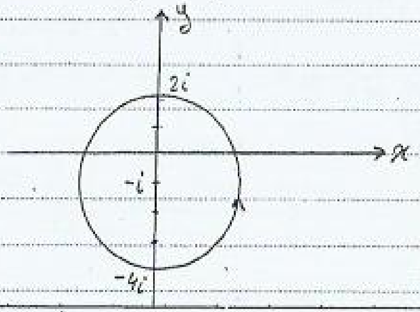
$\Delta_\gamma \arg(Z-Z_0) = 0$ $\qquad$ $\Delta_\gamma \arg(Z-Z_0) = 2\pi$

تمرين (دورة):

إذا كان $\gamma: |Z+i| = 3$

احسب $\Delta_\gamma \arg(Z-4)$

$\Delta_\gamma \arg Z$



الحل:

$\Delta_\gamma \arg(Z-4) = 0$

لأن $Z=4$ و 4 تقع خارج γ

$\Delta_\gamma \arg Z = 2\pi$

لأن $Z=0$ تقع داخل γ

نظرية غرين :

إذا كانت $p(x,y)$ و $q(x,y)$ تابعين حقيقيين متحولين و P_y و q_x توابع مستمرة في الساحة D .

فإنه :

1) إذا كانت D ساحة وحيدة الاتصال وكان γ منحني مغلق فإنه :

$$P_y = q_x$$

إذا وفقط إذا كان :

$$\int_{\gamma} P\,dx + q\,dy = 0$$

2) إذا كانت D ساحة ما وكان $\gamma_1 \approx \gamma_2$ وكان $P_y = q_x$ فإنه :

$$\int_{\gamma_1} P\,dx + q\,dy = \int_{\gamma_2} P\,dx + q\,dy$$

خواص تغير الزاوية :

1) إذا كانت $\gamma_1 \approx \gamma_2$ هوموتوبيين في الساحة $\mathbb{C} \setminus \{0,\infty\}$ أو $0 < |z| < \infty$

فإنه :

$$\Delta_{\gamma_1} \arg z = \Delta_{\gamma_2} \arg z$$

البرهان :

لنأخذ $$p(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$P_y = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$q_x = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow P_y = q_x$$

نلاحظ أن $p(x,y)$ و $q(x,y)$ و P_y و q_x توابع مستمرة في $\mathbb{C} \setminus \{0,\infty\}$

إذاً فرض نظرية غرين محقق ومنه :

$$\int_{\gamma_1} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int_{\gamma_2} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \Delta_{\gamma_1} \arg z = \Delta_{\gamma_2} \arg z$$

2) إذا كان γ منحني مغلق وكان $\gamma \approx 0$ في الساحة $\mathbb{C} \setminus \{0,\infty\}$ فإنه :

$$\Delta_{\gamma} \arg z = 0$$

البرهان :

لنأخذ

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$q = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$P_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$q_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\Rightarrow P_y = q_x$$

و $\gamma \simeq 0$ حسب نظرية غرين

$$\int_\gamma P\,dx + q\,dy = 0$$

$$\int_\gamma \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = 0$$

(3 $\underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = - \underset{\gamma^-}{\Delta} \arg Z$

نفس المنحني γ بالجهة المعاكسة.

(4 إذا كان :

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

فإن :

$$\underset{\gamma}{\Delta} \arg Z = \underset{\gamma_1}{\Delta} \arg Z + \underset{\gamma_2}{\Delta} \arg Z$$

(5 $\underset{\gamma}{\Delta} \arg (f_1 . f_2) = \underset{\gamma}{\Delta} \arg f_1 + \underset{\gamma}{\Delta} \arg f_2$

$$\underset{\gamma}{\Delta} \arg \frac{f_1}{f_2} = \underset{\gamma}{\Delta} \arg f_1 - \underset{\gamma}{\Delta} \arg f_2$$

وتعمم ......

تمرين (دورة) :

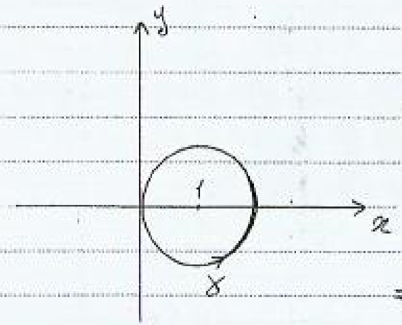
عرف تغير الزاوية على طول منحني ثم احسب :

$$\underset{\gamma}{\Delta} \arg [(Z^2-1)(Z-\tfrac{1}{2})]$$

حيث

$$\gamma : |Z-1| = 1$$

مكررة مرة ونصف المرة.



الحل :

$$= \underset{\gamma}{\Delta} \arg (Z-1) + \underset{\gamma}{\Delta} \arg (Z+1) + \underset{\gamma}{\Delta} \arg (Z - \tfrac{1}{2})$$

$$= 3\pi + 0 + 3\pi = 6\pi$$

الفروع الوحيدة القيمة والمستمرة لتابع الزاوية :

إن $\arg Z$ هي قيمة معينة ثابتة عندما تكون Z نقطة ثابتة ولكن $\arg Z$ تصبح تابع ندعوه تابع الزاوية عندما تتحول Z في ساحة ما.

وجدنا سابقاً أن :

$$\mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{تقابل}} \text{نقاط مستقيم الأعداد}$$

نقاط المستوي $(x, y) \longleftrightarrow \mathbb{C}$

$$\mathbb{C} \;\not\longleftrightarrow\; (r, \arg Z)$$

إن عدم التناظر الأحادي (التقابل) في العلاقة الأخيرة يجعلنا نتساءل ما هو الحل ؟

وقد وجدنا سابقاً ذلك بأن يتم بأخذ التعيين الرئيسي أي الزاوية الرئيسية ووجدنا ذلك عندما:

$$\text{Arg } Z \in (-\pi, \pi]$$

عندئذ يصبح

$$\mathbb{C} \longleftrightarrow (r, \text{Arg } Z)$$

ويعطى $\text{Arg } Z$ بالعلاقات:

$$\text{Arg } Z = \begin{cases} \text{arctg } \frac{y}{x} & ; \; x > 0 \\ \pi + \text{arctg } \frac{y}{x} & ; \; x < 0, \; y > 0 \\ -\pi + \text{arctg } \frac{y}{x} & ; \; x < 0, \; y < 0 \end{cases}$$

وإذا كان Z معرف في ساحة ما فإن:

$$\varphi(Z) = \text{Arg } Z$$

هو تابع وحيد القيمة ومستمر وقابل للاشتقاق في المستوي $\mathbb{C}$ باستثناء النقطتين 0 و ∞ لذلك:

$\text{Arg } 0$ و $\text{Arg } \infty$ غير معرفين

وعندئذ يكون:

$$\arg Z = \text{Arg } Z + 2\pi k \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

تابع متعدد القيم « لانهائي القيم ».

عندما $k = 0$ نحصل على الفرع الرئيسي

$$\varphi(Z) = \text{Arg } Z$$

تعريف فرع تابع الزاوية:

هو ذلك التابع $(\arg Z)_*$ الذي قيمته في كل نقطة Z من ساحة الدراسة تتطابق مع إحدى قيم التابع $(\arg Z)$ ويكون:

$$\arg Z = (\arg Z)_* + 2\pi k$$

عزل فروع تابع الزاوية:

إن عزل الفرع يعني استخلاص أحد فروع التابع المدروس الذي هو تابع متعدد القيم في ساحة الدراسة

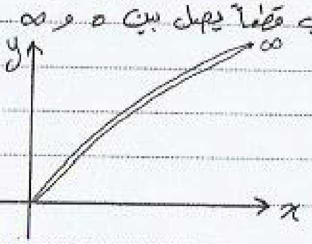
ونقبل بدون برهان المبرهنة التالية:

مبرهنة:

يمكن عزل فروع تابع الزاوية $\arg Z$ في أي ساحة وحيدة الاتصال لا تحتوي على 0 و ∞

ملاحظة:

إن أوسع ساحة يمكن عزل فروع تابع الزاوية فيها هي المستوي المركب الموسع بأكمله والذي يحوي قطعاً يصل بين 0 و ∞ كما في الشكل:



و أجمل هذه القواطع هو :
$ox^- \equiv]-\infty, 0]$
$ox^+ \equiv [0, \infty+[$
oy^+
oy^-

وفي هذه الحالة تصبح الساحة وحيدة الاتصال حدودها القاطع فقط.

مبرهنة :
إذا كانت D ساحة وحيدة الاتصال في المستوي الموسع $\mathbb{C}$ ولا تحتوي على 0 ، ∞ ($\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$ مثلا) عندئذ :

$$(\arg Z)_0 = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z$$

هو فرع وحيد القيمة ومستمر لتابع الزاوية وتكون بقية الفروع لتابع الزاوية :

هامة

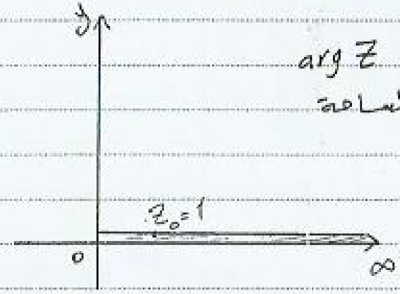
$$\boxed{\arg Z = (\arg Z)_k = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k}$$

وهذه هي الصيغة المعرفة لجميع فروع تابع الزاوية حسب قيم k .
حيث :
Z_0 نقطة مثبتة من $\overline{D}$
$\arg Z_0$ قيمة مثبتة لتابع الزاوية .
$\gamma : \overset{\frown}{Z_0 Z}$ منحني بدايته Z_0 ونهايته Z النقطة المدروسة ويقع في $\overline{D}$.

ملاحظة :
معرفة أحد فروع تابع الزاوية كافية لمعرفة بقية فروع التابع وذلك بإضافة $2\pi k$

مثال :
لتكن D هي الساحة :
$D = \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$.
ولتكن $Z_0 = 1 \in \ell^+$ حيث
$\arg 1^+ = 0$
1- أوجد الفرع الرئيسي لتابع الزاوية بعد أن تبين سبب إمكانية عزل الفروع في الساحة D .
2- أوجد قيمة الفرع الرئيسي لتابع الزاوية على طول oy^+ ، oy^-
ℓ^+ ، ℓ^- ، ox^- ، $Z = 1+i$
حيث ℓ^+ هي الضفة العليا للقاطع $[0,\infty)$
ℓ^- " " السفلى " $[0,\infty)$

الحل :
1- يمكن عزل فروع تابع الزاوية $\arg Z$ في الساحة D لأن هذه الساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي 0 ، ∞
$\mathbb{C} \setminus [0, +\infty[$



وتعطى صيغة الفروع لهذا التابع بالعلاقة :

$$(\arg Z)_k = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k$$

من أجل $k=0$ نحصل على الفرع الرئيسي :

$$(\arg Z)_0 = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z$$

حيث : $Z_0 = 1 \in \ell^+$ و $\gamma : \overset{\frown}{1Z} \subset D$

$\Rightarrow \quad (\arg Z)_0 = \Delta_{\gamma} \arg Z$

$; \; D \supset \gamma : \overset{\frown}{1Z}$

عندئذ تكون بقية الفروع :

$(\arg Z)_k = \Delta_{\gamma} \arg Z + 2\pi k \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$

*) $Z = iy \quad ; \; y > 0$ 2.

$\Rightarrow Z \in oy^+$

$\Delta_{\gamma} \arg Z = \frac{\pi}{2} \quad ; \; \gamma : \overset{\frown}{1(iy)}$

$\Rightarrow (\arg Z)_0 \Big|_{oy^+} = \frac{\pi}{2}$

*) $Z = -iy \quad ; \; y > 0$

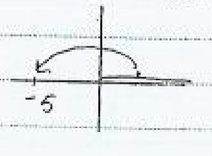
$\Rightarrow Z \in oy^-$

$\Rightarrow \Delta_{\gamma} \arg Z = \frac{3\pi}{2}$

$(\arg Z)_0 \Big|_{oy^-} = \frac{3\pi}{2}$

*) $Z = -5$

$\Delta_{\gamma} \arg Z = \pi \quad ; \; \gamma : \overset{\frown}{1\,(-5)}$



$(\arg Z)_0 \Big|_{Z=-5} = \pi$

$\Rightarrow (\arg Z)_0 \Big|_{ox^-} = \pi$

*) $Z = x \in \ell^+$

$\Delta_{\gamma} \arg Z = 0 \quad ; \; \gamma : \overset{\frown}{1x}$

$(\arg Z)_0 \Big|_{\ell^+} = 0$

* $Z = x \in \ell^-$

$\Delta_{\gamma} \arg Z = 2\pi$

$\Rightarrow (\arg Z)_0 \Big|_{\ell^-} = 2\pi$

* $Z = 1 + i$

$\Rightarrow \Delta_{\gamma} \arg Z = \frac{\pi}{4} \quad ; \; \gamma = \overset{\frown}{1, 1+i}$

$(\arg Z)_0 \Big|_{Z=1+i} = \frac{\pi}{4}$

تمرين :

لتكن الساحة $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ، ولتكن $Z_0 = 3$

و $\arg Z_0 = -2\pi$ ، والمطلوب :

1- أوجد الفرع الرئيسي لتابع الزاوية بعد التأكد من إمكانية عزل الفروع.

2- احسب قيم هذا الفرع على :

$Z = 1+i$ ، ℓ^- ، ℓ^+ ، oy^- ، oy^+ ، ox^+

الحل :

1. إنَّ الساحة D هي ساحة وحيدة الدخول لا تحوي 0 و ∞ وبالتالي يمكن عزل فروع التابع في هذه الساحة

$$(\arg Z)_k = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

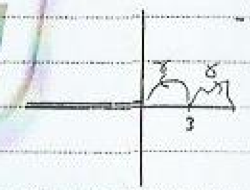
$$Z_0 = 3 \quad , \quad \arg Z_0 = -2\pi$$

$$Z \in \overline{D} \quad ; \quad \gamma : \overset{\frown}{3Z}$$

والفرع الرئيسي عندما $k = 0$

$$(\arg Z)_0 = -2\pi + \Delta_\gamma \arg Z$$

2.



$$Z = x \in ox^+ \quad , \quad x > 0$$

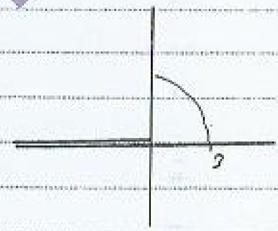
$$\Delta_\gamma \arg Z = 0$$

$$(\arg Z)_0 \Big|_{ox^+} = -2\pi$$

$$Z = iy \in oy^+ \quad ; \quad y > 0$$

$$\Delta_\gamma \arg Z = \frac{\pi}{2} \quad ; \quad \gamma : \overset{\frown}{3\,iy}$$

$$(\arg Z)_{oy^+} = \frac{-3\pi}{2}$$



(إكمالة السؤال وظيفة....)

تمرين :

لنفرض أنَّ الساحة D هي المستوي المقطوع على طول المنحني الذي معادلته :

$$Z = \frac{t}{\pi} e^{it} \quad ; \quad 0 < t < \infty$$

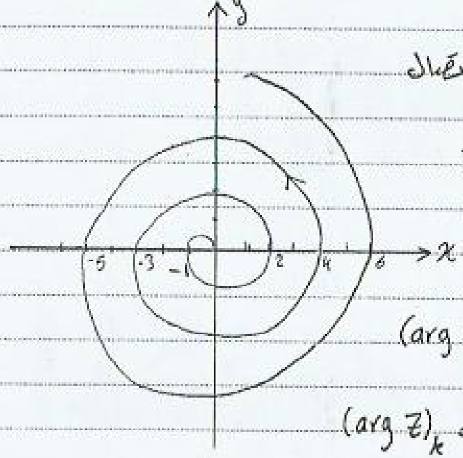
ولتكن $Z_0 = 5$

حيث $\arg 5 = 2\pi$

1. بين سبب إمكانية عزل فروع تابع الزاوية في هذه الساحة ثم أوجد صيغة الفرع الرئيسي.

2. احسب قيم هذا الفرع في النقاط -4 ، 7 ، -6 ، 1 ، -2 ، 3

الحل :



1. بما أنَّ D ساحة وحيدة الدخول لا تحتوي على 0 و ∞ فإنه يمكن عزل فروع تابع الزاوية في هذه الساحة وهذه الفروع هي :

$$(\arg Z)_k = \arg Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k$$

$$(\arg Z)_k = \arg 5 + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k$$

$$\gamma : \overset{\frown}{5Z} \quad ; \quad Z \in \overline{D}$$

$$(\arg Z)_k = 2\pi + \Delta_\gamma \arg Z + 2\pi k$$

عندما $k = 0$ نحصل على الفرع الرئيسي :

$$(\arg Z)_k = 2\pi + \Delta_\gamma \arg Z$$

وهي الصيغة المعرفة للفرع الرئيسي لتابع الزاوية.

2. $\arg(-4) = (\arg z)_0 \Big|_{z=-4} = 2\pi + \Delta_\gamma \arg z$

حيث:

$\gamma : \overline{5(-4)} \subset D$

$\Delta_\gamma \arg z = -\pi$

$\Rightarrow \arg(-4) = \pi$

$z = 7 \Rightarrow \Delta_\gamma \arg z = 2\pi \; ; \; \gamma : \overline{5(7)} \subset D$

$\arg(7) = 2\pi + 2\pi = 4\pi$

$z = -6 \Rightarrow \Delta_\gamma \arg z = \pi \; ; \; \gamma : \overline{5(-6)}$

$\arg(-6) = 3\pi$

$z = 6 \in \ell^+$ "الضفة العليا".

$\Delta_\gamma \arg z = 2\pi \; ; \; \gamma : \overline{56}$

$\arg(6) = 2\pi + 2\pi = 4\pi$

2. التابع اللوغاريتمي $F(z) = \ln z$

لقد درسنا سابقاً التابع اللوغاريتمي كتابع عكسي للتابع الأسي e^z وتعرفنا على بعض من خواص هذا التابع.
وسندرس في هذه الفقرة التابع اللوغاريتمي كتمديد تحليلي للتابع الحقيقي $\ln x$ المعرف من أجل القيم الحقيقية الموجبة x.
وسوف نتعرف على خواص أخرى لهذا التابع.

التمديد التحليلي للتابع $\ln x$:

إن التابع $\ln x$ ينشر في سلسلة تايلور بالشكل:

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (x-1)^n$$

وهي سلسلة متقاربة في المجال

$$x \in (0,2) \Leftrightarrow |x-1| < 1$$

لنأخذ التابع:

$$f_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} (z-1)^n$$

إن هذه السلسلة تتقارب ضمن القرص:

$D_0 : |z-1| < 1$

وواضح على أن: $k \subset D_0$

$\& \quad f_0(z)\Big|_{z=x} = \ln x \; ; \; x \in k$

ومنه $f_0(Z)$ هو التمديد التحليلي للتابع $\ln x$ من المجال $(0,2)$ إلى القرص

$$D_0 : |Z-1| < 1$$

- لنرمز الآن:

$$F(Z) = \ln Z$$

للتابع التحليلي المولد بالعنصر $f_0(Z)$ المعطى بالنقطة $Z_0 = 1$ حيث:

$$f_0(1) = \ln 1 = 0$$

- إن مسألتنا الآن هي توضيح ما هي المنحنيات التي يمكن تمديد $f_0(Z)$ عليها ومن ثم نبحث عن صيغة عملية تعبر عن $\ln Z$

من أجل ذلك يمكن استخدام سلاسل القوى إلا أن هذا الطريق صعب ومن الأسهل استخدام التمثيل التكاملي لهذا التابع. نعلم أن

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t} \quad ; \quad 0 < x < \infty$$

إن هذه العلاقة صحيحة من أجل العنصر $f_0(Z)$ ونقبل ذلك من خلال المبرهنة.

<u>مبرهنة</u>: بدون برهان

يقبل العنصر $f_0(Z)$ في القرص $|Z-1| < 1$ التمثيل التكاملي

$$f_0(Z) = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi}$$

حيث γ أي منحني بدايته $Z_0 = 1$ ونهايته Z من القرص $|Z-1| < 1$.

<u>مبرهنة</u>: بدون برهان

يمكن تمديد العنصر $f_0(Z)$ تحليلياً على طول أي منحني γ بدايته $Z_0 = 1$ ولا يمر من الصفر واللانهاية.

<u>مبرهنة</u>:

التابع $F(Z) = \ln Z$ تحليلي في الساحة $0 < |Z| < \infty$ أي في الساحة $\bar{\mathbb{C}} \setminus \{0, \infty\}$

(لاحقاً سنبرهن على أن $Z = 0$ و $Z = \infty$ نقاط شاذة للتابع $\ln Z$ تسمى نقاط تفرع).

الخواص الأساسية للتابع $\ln Z$:

<u>الخاصة الأولى</u>:

إن قيمة $\ln Z$ في نقطة ما والناتجة بتمديد العنصر الأساسي تحليلياً على طول المنحني γ الذي بدايته 1 ونهايته Z ولا يمر من الـ 0 و ∞ تعطى بالعلاقة:

$$\ln Z = \ln|Z| + i \Delta_\gamma \arg Z$$

تسمى هذه العلاقة بالعلاقة الأساسية للتابع $\ln Z$.

البرهان:

$$\ln Z = \int_\gamma \frac{d\xi}{\xi} \quad ; \quad \gamma : \overset{\frown}{1Z}$$

ولا يمر من الصفر واللانهاية.

نفرض

$$\xi = re^{i\varphi}$$

$$d\xi = e^{i\varphi} dr + ire^{i\varphi} d\varphi$$

نعوض في العلاقة :

$$\ln Z = \int_\gamma \frac{e^{i\theta}\,dr + ire^{i\theta}\,d\theta}{re^{i\theta}}$$

$$\ln Z = \int_\gamma \frac{dr}{r} + i\int_\gamma d\theta$$

$$\boxed{\ln Z = \ln|Z| + i\Delta_\gamma \arg Z}$$

ملاحظة :

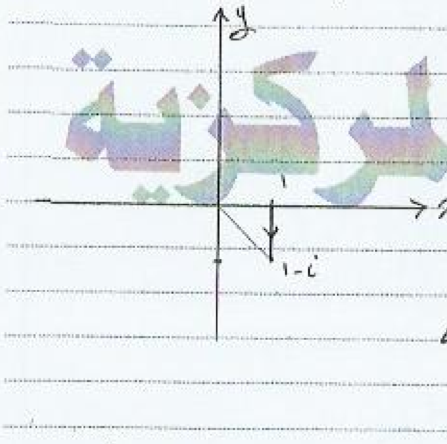
إن قيمة $\ln Z$ تتعلق بـ Z وللمنحنى γ الذي يأخذ عليه التكامل .

مثال :

أوجد قيمة $\ln Z$ في النقطة $Z = 1-i$ والناتجة بتمديد العنصر الأساسي $f_0(Z)$ تحليليا على طول المنحنى $\gamma: [1, 1-i]$ حيث $f_0(1) = 0$

الحل :

بما أن عملية التمديد تبدأ من النقطة $Z_0 = 1$ نستخدم العلاقة



$$\ln Z = \ln|Z| + i\Delta_\gamma \arg Z$$

$$\ln Z\Big|_{Z=1-i} = \ln|1-i| - i\frac{\pi}{4}$$

$$= \ln\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4}$$

تمرين :

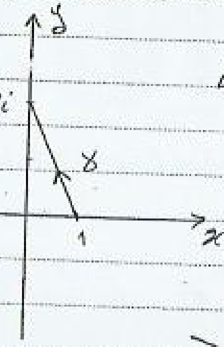
أوجد قيمة $\ln Z$ في النقطة $Z_1 = 2i$ والناتجة بتمديد العنصر الأساسي $f_0(Z)$ (حيث $f_0(1) = \ln 1 = 0$) على طول المنحنى γ في الحالات :

1. $\gamma_1 : [1, 2i]$
2. $\gamma_2 : [1, 1+3i] \cup [1+3i, 2i]$
3. $\gamma : \widehat{1Z_1}$ ويقع في الربع الأول
4. $\gamma : \widehat{1Z_1}$ ويقع في الأرباع الثاني والثالث والرابع .

الحل :

بما أن عملية التمديد تبدأ من $Z_0 = 1$ فإننا نستخدم الصيغة

$$\ln Z = \ln|Z| + i\Delta_\gamma \arg Z$$

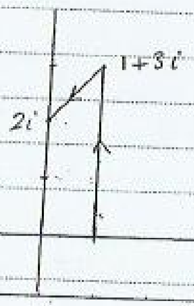


1. $\ln Z\Big|_{Z=2i} = \ln(2i)$

$$= \ln|2i| + i\Delta_{\gamma_1} \arg Z$$

$$\Delta_\gamma \arg Z = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \ln(2i) = \ln 2 + \frac{\pi}{2} i$$

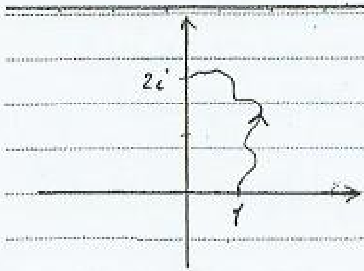


2. $\ln Z = \ln|Z| + i\Delta_{\gamma_2} \arg Z$

$$\Rightarrow \ln 2i = \ln|2i| + i\frac{\pi}{2}$$

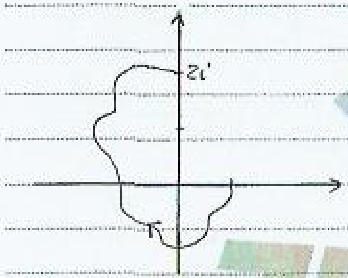
$$\ln 2i = \ln 2 + \frac{\pi}{2} i$$

$$Ln Z = Ln|Z| + i\,\Delta_{\gamma_3} \arg Z \qquad -3$$



$$\Delta_{\gamma_3} \arg Z = \frac{\pi}{2}$$

$$Ln Z = Ln|Z| + i\,\Delta_{\gamma_4} \arg Z \qquad -4$$



$$\Delta_{\gamma_4} \arg = \frac{-3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Ln\, 2i = Ln|2i| - \frac{3\pi}{2} i$$

$$\Rightarrow Ln\, 2i = Ln\, 2 - \frac{3\pi}{2} i$$

ملاحظة:

ان الصيغة التحليلية لفرع التابع اللوغاريتمي هي:

$$Ln Z = Ln|Z| + i(\Delta_{\gamma} \arg Z + 2\pi k)$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

الخاصة الثانية:

نعلم أن:

$$Ln Z = Ln|Z| + i(Arg Z + 2\pi k)$$

ولدينا:

$\arg Z = Arg Z + 2\pi k$ ← تابع الزاوية

$$\Rightarrow Ln Z = Ln|Z| + i \arg Z$$

$$\Rightarrow \quad Ln Z = Ln|Z| + i(\arg Z)_0 + 2\pi k i$$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

الخاصة الثالثة:

إذا كان $f_n(Z)$ و $f_m(Z)$ فرعين للتابع اللوغاريتمي في النقطة Z_0 فإن:

$$f_n(Z) - f_m(Z) = 2\pi k i$$

دورة

الخاصة الرابعة:

إذا كان $f(Z)$ فرعاً للتابع $Ln Z$ في النقطة Z_0 حيث:

$$f(Z_0) = Ln Z_0 = \omega_0$$

فإنه ينشر بسلسلة تايلور حول Z_0 بالشكل:

$$f(Z) = Ln Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n Z_0^n} (Z - Z_0)^n$$

والمتقاربة في القرص $|Z - Z_0| < |Z_0|$

البرهان:

نعلم أن القانون العام لنشر تابع في سلسلة تايلور حول Z_0 هو:

$$f(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!} (Z - Z_0)^n$$

$$f(Z) = f(Z_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(Z_0)}{n!} (Z - Z_0)^n$$

$f(Z) = Ln Z$ ← أحد العناصر

$$f'(Z) = \frac{1}{Z} \Rightarrow f'(Z_0) = \frac{1}{Z_0}$$

$$f''(Z) = \frac{-1}{Z^2} \Rightarrow f''(Z_0) = -\frac{1}{Z_0^2}$$

$$f'''(Z) = \frac{2}{Z^3} \Rightarrow f'''(Z_0) = \frac{2}{Z_0^3}$$

بالاستقراء نجد :

$$f^{(n)}(Z) = \frac{(-1)^n (n-1)!}{Z^n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(Z_0) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{Z_0^n}$$

نعوض في قانون تايلور فنجد :

$$f(Z) = \ln Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!\,(-1)^{n-1}}{n!\, Z_0^n} (Z - Z_0)^n$$

$$f(Z) = \ln Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n\, Z_0^n} (Z - Z_0)^n$$

وهي سلسلة متقاربة في هذا القرص

$$|Z - Z_0| < |Z_0|$$

الخاصة الخامسة :

لتكن قيمة التابع $\ln Z$ في النقطة Z_0 معطاة $\ln Z_0 = w_0$ وليكن γ منحني بدايته Z_0 ونهايته Z (النقطة المراد حساب القيمة عندها) عندئذ قيمة التابع $\ln Z$ في النقطة Z الناتجة بتمديد العنصر

$$f(Z) = \ln Z$$

/ /

تحليلياً على طول γ الذي بدايته Z_0 على طول المنحني γ تعطى بإحدى العلاقتين :

1) $\ln Z = \ln Z_0 + \ln \left| \frac{Z}{Z_0} \right| + i \Delta_\gamma \arg Z$

2) $\ln Z = \ln |Z| + i \left[\operatorname{Im}(\ln Z_0) + \Delta_\gamma \arg Z \right]$

البرهان :

1) نعلم أنّ :

$$\ln Z = \int_{\gamma: 1 \to Z} \frac{d\xi}{\xi} = \int_1^Z \frac{d\xi}{\xi}$$

تكامل ثابت

تكامل متغير

$$\ln Z = \int_1^{Z_0} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{Z_0}^{Z} \frac{d\xi}{\xi}$$

$$\ln Z = \ln Z_0 + \int_{Z_0}^{Z} \frac{d(re^{i\varphi})}{re^{i\varphi}}$$

$$\ln Z = \ln Z_0 + \int_{Z_0}^{Z} \frac{dr}{r} + i \int_{Z_0}^{Z} d\varphi$$

$$\ln Z = \ln Z_0 + \ln|Z| - \ln|Z_0| + i \Delta_\gamma \arg Z$$

$$\ln Z = \ln Z_0 + \ln \left| \frac{Z}{Z_0} \right| + i \Delta_\gamma \arg Z$$

/ /

ج) لدينا:

$$\ln Z_0 = \ln|Z_0| + i(Im(\ln Z_0))$$

$$\ln Z = \ln|Z_0| + i\,Im(\ln Z_0) + \ln|Z| - \ln|Z_0| + i\,\Delta_\gamma \arg Z$$

$$\ln Z = \ln|Z| + i\left(Im(\ln Z_0) + \Delta_\gamma \arg Z\right)$$

مثال:

ليكن $f_0(Z)$ هو العنصر المعرف بالشرط:

$$\ln i = f_0(i) = \frac{5\pi}{2} i$$

للتابع اللوغاريتمي وليكن $\gamma: [i, 3]$

والمطلوب:

أوجد قيمة $f_0(Z)$ في النقطة $Z = 3$ والناتجة بتمديد العنصر $f_0(Z)$ على طول γ

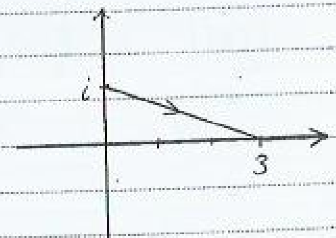
الحل:

بما أن عملية التمديد تمت من النقطة $Z_0 = i$ فإننا نطبق العلاقة:

$$\ln Z = \ln|Z| + i(Im \ln Z_0 + \Delta_\gamma \arg Z)$$

$$\ln Z_0 = \ln i = \frac{5\pi}{2} i$$

$$\Delta_\gamma \arg Z = -\frac{\pi}{2}$$



/ /

$$\ln 3 = \ln|3| + i\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\ln 3 = \ln 3 + 2\pi i$$

ع.د

الخاصة السادسة:

يمكن عزل فروع التابع $\ln Z$ في أي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على الصفر واللانهاية.

مثلاً: يمكن عزل الفروع في أي من الساحات التالية:

$$\mathbb{C}\setminus[0, +\infty) = \mathbb{C}\setminus ox^+$$
$$\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0] = \mathbb{C}\setminus ox^-$$
$$\mathbb{C}\setminus[0, i\infty) = \mathbb{C}\setminus oy^+$$
$$\mathbb{C}\setminus(-\infty i, 0] = \mathbb{C}\setminus oy^-$$

سطح ريمان للتابع $f(Z) = \ln Z$

تعريف:

لتكن D ساحة وحيدة الاتصال لا تحتوي على $0, \infty$ نثبت نقطة Z_0 من الساحة D وليكن $\ln Z_0 = w_0$ قيمة معطاة بإجراء تمديد تحليلي للعنصر $f(Z)$ (الذي من أجله $f(Z_0) = w_0$) على طول جميع الطرق (منحنيات) التي بدايتها Z_0 والواقعة في D نحصل على تابع وحيد القيمة في D. هذا التابع (الوحيد القيمة) الناتج يدعى فرع نظامي للتابع اللوغاريتمي في D. باختيار قيمة أخرى للوغاريتم في Z_0 نحصل على فرع نظامي آخر في الساحة D.

وهكذا يتضح لنا أنه يوجد عدد غير منته من الفروع النظامية للتابع اللوغاريتمي أي أنه متعدد القيم.

والسؤال الآن كيف نحول هذا التابع إلى تابع وحيد القيمة؟ وما هي الساحة التي يكون فيها التابع اللوغاريتمي وحيد القيمة؟

يتم تحويل هذا التابع إلى تابع وحيد القيمة لتشكيل سطح لدينا خالي من الاصطناع الذي يسمى سطح ريمان وهو ساحة وحيدة الاتصال.

سؤال دورة:

شكل سطح ريمان للتابع $F(Z) = \ln Z$ في الساحة $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$:

إن هذه الساحة هي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على 0 و ∞ وبالتالي فإنه يمكن عزل فروع التابع اللوغاريتمي فيها! إن التابع $\ln Z$ يتوضع في هذه الساحة على شكل عدد غير منته من الفروع الوحيدة القيمة وهذه الفروع لها الشكل:

$$f_k(Z) = \ln Z = \ln|Z| + i(\arg Z)_0 + 2\pi k i \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

حيث $(\arg Z)_0$ فرع وحيد القيمة لـ $\arg Z$

بحيث يكون

$$-\pi < (\arg Z)_0 < \pi$$

لتحويل $\ln Z$ إلى تابع وحيد القيمة على الساحة D نقوم بما يلي:

بدلاً من دراسة توابع نظامية عددها غير منته في ساحة واحدة D نأخذ عدد غير منته من الساحات صور طبق الأصل عن الساحة D ونرمز لها

$D_k \quad (k \in \mathbb{Z})$

بحيث يكون $f_k(Z)$ نظامي في D_k

لنصل الآن الساحات D_k بحيث تشكل سطح واحد (ليكون سطح ريمان)

ليكن l_k القطع $(-\infty, 0]$ المحذوف من D_k

ولنرمز l_k^+ الضفة العليا للقطع l_k^- الضفة السفلى للقطع

إذا كان $Z = x < 0$

$$f_k(x) = \ln|x| + i\pi(2k+1) \quad ; x \in l_k^+ \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

حيث

$$(\arg Z)_0 = \pi \quad ; x \in l_k^+$$

$$f_k(x) = \ln|x| + i\pi(2k-1) \quad ; x \in l_k^-$$

$$(\arg Z)_0 = -\pi \quad ; x \in l_k^-$$

نبدل في العلاقة الأخيرة كل k بـ $k+1$ فنجد:

$$f_{k+1}(x) = \ln(x) + i\pi(2k+1) \quad ; x \in l_{k+1}^-$$

وهذا يعني أن:

$$f_{k+1}(x)\Big|_{l_{k+1}^-} = f_k(x)\Big|_{l_k^+}$$

أي أن قيم الفروع $f_k(x)$ على الصفحة العليا من D_k تتطابق مع قيم الفروع $f_{k+1}(x)$ من الصفحة السفلى من الساحة D_{k+1}

لذلك نصل الصفحة العليا للقطع ℓ_k^+ مع الصفحة السفلى للقطع ℓ_{k+1}^-

عندها التابع $\ln Z$ سيكون وحيد القيمة على السطح اللانهائي الصفائح الناتج والذي يسمى سطح ريمان للوغاريتم.

ملاحظة:
إن سطح ريمان هو ساحة وحيدة الاتصال..

ملاحظة:
لتشكيل سطح ريمان لأي تابع متعدد القيم نتبع الخطوات الآتية:

1. نأخذ ساحة يمكن فيها عزل فروع التابع (وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع)..
2. نكتب الصيغة التحليلية لفروع هذا التابع.
3. نأخذ ساحات طبق الأصل عن ساحة عزل الفروع عددها مساوي لعدد فروع التابع.
4. نصل هذه الساحات من أطراف القطع فيكون السطح الناتج هو سطح ريمان.

إذا كان الممتاز ممكناً فإن
الجيد لا يكفي...

3. التابع الأسي العام $F(Z) = Z^\alpha$

نعلم أنه عندما $x>0$ و $\alpha \in R$ فإن:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$$

وبسهولة نجد أن التمديد التحليلي لهذا التابع هو:

$$g_0(Z) = e^{\alpha f_0(Z)}$$

$\alpha \in \mathbb{C}$ ،

حيث $g_0(Z)$ هو العنصر الأساسي للتابع Z^α المعطى في النقطة $Z_0 = 1$ حيث:

$$g_0(1) = 1^\alpha = 1$$

$f_0(Z)$ هو العنصر الأساسي للتابع $\ln Z$ المعطى في النقطة $Z_0 = 1$

حيث:

$$f_0(1) = \ln 1 = 0$$

مبرهنة:

التابع $F(Z) = Z^\alpha$ تحليلي في الساحة $\mathbb{C} \setminus \{0, \infty\}$

(كتركيب لتابعين تحليليين)

«لاحقاً سنعرف أن $0, \infty$ هي نقاط تفرع للتابع Z^α»

خواص التابع $F = Z^\alpha$:

الخاصة الأولى:

إن قيمة Z^α في نقطة ما الناتجة بتمديد العنصر $g_0(Z)$ تحليلياً على طول منحني ℓ بدايته $Z_0 = 1$ ونهايته Z حيث $g_0(1) = 1$ تعطى بالعلاقة:

$$Z^\alpha = |Z|^\alpha \cdot e^{i\alpha \Delta_\gamma \arg Z}$$

البرهان:

لدينا
$$g_0(Z) = e^{\alpha f_0(Z)}$$

$$Z^\alpha = e^{\alpha[\ln|Z| + i\Delta_\gamma \arg Z]}$$

$$Z^\alpha = e^{\alpha \ln|Z|} \, e^{i\alpha \Delta_\gamma \arg Z}$$

$$Z^\alpha = |Z|^\alpha \cdot e^{i\alpha \Delta_\gamma \arg Z}$$

الخاصة الثانية:

إن قيمة Z^α والناتجة بتمديد العنصر $g_0(Z)$ تحليلياً على طول المنحني γ الذي بدايته Z_0 ونهايته Z حيث: $g_0(Z_0) = \omega_0$

ولا يمر من 0 , ∞ تعطى بالعلاقة:

$$Z^\alpha = |Z|^\alpha e^{i\alpha(\overset{Im \ln Z_0}{\varphi_0} + \Delta_\gamma \arg Z)}$$

دورة تمارين:

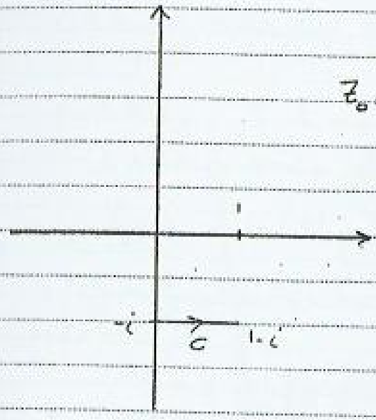
ليكن $\ln(-i) = -\frac{9\pi i}{4}$ و $c: [-i, 1-i]$

المطلوب:

1. أوجد قيمة المحدود التحليلي للتابع اللوغاريتمي المعين بالشرط في الأعلى على طول المنحني c.

2. أوجد قيمة المحدود التحليلي للتابع Z^α المعين بالشرط في الأعلى على طول المنحني c.

3. أوجد سلسلة تايلور للتابع $\ln Z$ حول النقطة $Z = 1-i$ ضمن الشروط السابقة.



الحل:

1. بما أن عملية التمديد تبدأ من $Z_0 = -i$ نطبق العلاقة:

$$\ln Z = \ln|Z| + i(Im(\ln Z_0) + \Delta_c \arg Z)$$

$$\Delta_c \arg Z = \frac{\pi}{4}$$

$$\ln Z_0 = -\frac{9\pi}{4} i$$

$$\varphi_0 = Im(\ln Z_0) = -\frac{9\pi}{4}$$

$$\ln Z\Big|_{Z=1-i} = \ln|1-i| + i\left(\frac{9\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \ln\sqrt{2} - 2\pi i$$

2. $$Z^\alpha = |Z|^\alpha \cdot e^{i\alpha(\varphi_0 + \Delta_c \arg Z)}$$

العنصر المثبت لـ Z^α هو:

$$Z^\alpha = e^{\alpha \ln Z}$$

$$(-i)^\alpha = e^{\alpha \cdot \frac{9\pi}{4} i}$$

$$Z^\alpha \Big|_{Z=1-i} = |1-i|^\alpha . e^{i\alpha\left[\frac{-9\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right]}$$

$$Z^\alpha \Big|_{Z=1-i} = 2^{\frac{\alpha}{2}} e^{-2\pi i\alpha}$$

3- سلسلة تايلور لـ $\ln Z$ حول النقطة $Z=1-i$

نحن نعلم أن:

$$\ln Z = \ln Z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n Z_0^n} (Z-Z_0)^n$$

; $|Z-Z_0|<|Z_0|$

$$\ln Z = \ln\sqrt{2} - 2\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(1-i)^n} (Z-1+i)^n$$

; $|Z-1+i|<\sqrt{2}$

وهو النشر المطلوب.

الخاصة الثالثة:

إن قيم التابع Z^α في النقطة $Z=re^{i\varphi}$ تعطى بالعلاقة:

$$Z^\alpha = (re^{i\varphi})^\alpha$$

$$Z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha(\varphi+2\pi k)}$$

$$Z^\alpha = |Z|^\alpha . e^{i\alpha(\varphi+2\pi k)}$$

; $k\in \mathbb{Z}$, $\alpha\in \mathbb{R}$

الخاصة الرابعة:

إذا كان $f(Z)$ فرع لـ Z^α معطى في النقطة $Z_0 \neq 0,\infty$ (أي $f(Z_0)=Z_0^\alpha$ معطى)،
عندئذ فإن هذا التابع ينشر بسلسلة تايلور حول Z_0:

$$f(Z) = Z_0^\alpha . \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} \left(\frac{Z-Z_0}{Z_0}\right)^k$$

المتقاربة في القرص:

$$|Z-Z_0|<|Z_0|$$

البرهان:

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(Z)}{k!} (Z-Z_0)^k$$

$$f(Z) = Z^\alpha$$

$$f'(Z) = \alpha Z_0^{\alpha-1}$$

$$f''(Z) = \alpha(\alpha-1) Z_0^{\alpha-2}$$

$$f^{(k)}(Z) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1) Z_0^{\alpha-k}$$

$$f(Z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!} Z_0^{\alpha-k} (Z-Z_0)^k$$

$$f(Z) = Z_0^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k}{\alpha} \left(\frac{Z-Z_0}{Z_0}\right)^k \quad ; \ |Z-Z_0|<|Z_0|$$

الخاصية الخامسة:

مشتق التابع Z^α يعطى بالعلاقة:

$$(Z^\alpha)' = \alpha Z^{\alpha-1}$$

الخاصية السادسة:

يمكن عزل فروع Z^α في أي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي 0 , ∞

مثال: $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

الخاصية السابعة:

إذا كان $f_1(Z)$ و $f_2(Z)$ عنصرين من عناصر Z^α

فإن:

$$f_1(Z) = e^{2\pi k i\alpha} f_2(Z)$$

أي أحدهما ينتج من الآخر بضربه بالمقدار $e^{2\pi k i\alpha}$

ملاحظات هامة:

1. إذا كان $\alpha\in\mathbb{Z}$ فإن التابع Z^α تابع وحيد القيمة

2. عندما $\alpha = \frac{m}{n}$ فإن:

$$Z^\alpha = Z^{\frac{m}{n}} \quad ; n\geq 2$$
$$m\in\mathbb{Z} \quad , (m,n)=1$$

$$Z^{\frac{m}{n}} = |Z|^{\frac{m}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{m \operatorname{Arg} Z + 2\pi k}{n}\right)} \quad ; k=\overline{0,n-1}$$

في هذه الحالة Z^α متعدد القيم وعدد قيمه منتهٍ أي يتألف من n قيمة مختلفة.

نظرية 3. إذا كان $\alpha \in Q^c$ أو ($\alpha\in\mathbb{R}$ ، $\alpha\notin Q$)

أي α عدد حقيقي غير عادي، فإن Z^α لا نهائي القيم

البرهان:

نعلم أن جميع قيم التابع Z^α في النقطة $Z=re^{i\varphi}$ حيث $\varphi\in\mathbb{R}$ تعطى بالعلاقة:

$$Z^\alpha = r^\alpha e^{i\alpha(\varphi+2\pi k)} \quad ; k\in\mathbb{Z}$$

ولنثبت أن القيم المختلفة لـ k يقابلها قيم مختلفة لـ Z^α عندما α عدد حقيقي غير عادي

لنفرض العكس:

أي يوجد عددان صحيحان k_1 ، k_2 ($k_1\neq k_2$) بحيث:

$$e^{i\alpha(\varphi+2\pi k_1)} = e^{i\alpha(\varphi+2\pi k_2)}$$

$$e^{2\pi k_1\alpha i} = e^{2\pi k_2\alpha i}$$

$$e^{2\pi(k_1-k_2)\alpha i} = 1 = e^{2\pi m i} \quad ; m\in\mathbb{Z}$$

$$e^{2\pi(k_1-k_2)\alpha i} = e^{2\pi m i}$$

$$(k_1-k_2)\alpha = m$$

$$\alpha = \frac{m}{k_1-k_2} \in Q$$

/ /

وهذا تناقض لأننا فرضنا $\alpha \in Q^c$ إذن

$$e^{2\pi k_1 \alpha i} \neq e^{2\pi k_2 \alpha i} \quad ; \quad k_1 \neq k_2$$

4- إذا كان $\alpha \in \mathbb{C}$ حيث $Im\,\alpha \neq 0$
فإن Z^{α} يتألف من عدد غير منتهٍ من الفروع
أي Z^{α} لا نهائي القيم.

$\boxed{\text{سطح ريمان للتابع } Z^{\alpha}}$

نميز الحالات الآتية:

1- $\alpha \in Z$ فإنه لا يوجد سطح ريمان للتابع Z^{α} لأن هذا التابع هو تابع وحيد القيمة أو يمكن القول بأن سطح ريمان التابع وحيد القيمة هو ساحة تعريفه.

2- إذا كان α عدد حقيقي غير عادي أو α عدد مركب قسمه التخيلي غير معدوم فإن:
Z^{α} لا نهائي القيم وسطح ريمان له في هذه الحالة لا يختلف عن سطح ريمان للتابع $Ln\,Z$

3- $\alpha = \frac{m}{n}$ عدد حقيقي عادي فإن Z^{α} متعدد القيم (منتهي القيم) ويمكن بناء سطح ريمان له.

/ /

سطح ريمان للتابع $F(Z) = \sqrt[n]{Z}$

• لنأخذ الساحة $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$
وهي ساحة وحيدة الاتصال لا تحتوي 0 و ∞ وبالتالي يمكن عزل فروع $\sqrt[n]{Z}$ فيها.

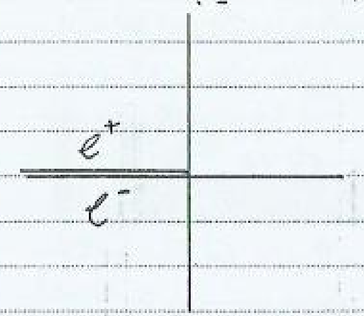
• إن التابع $F(Z) = \sqrt[n]{Z}$ يملك في الساحة D عدداً منتهياً من الفروع وعددها n
وتعطى بالعلاقة:

$$f_k(Z) = |Z|^{\frac{1}{n}} \cdot e^{i\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)} \quad ; \quad k = \overline{0, n-1}$$

$$-\pi < \varphi < \pi$$

• بد لنا من دراسة الفروع f_k $(k = \overline{0, n-1})$ في الساحة D
نأخذ ساحات طبق الأصل عن الساحة D
ولتكن D_k $(k = \overline{0, n-1})$
بحيث يكون $f_k(Z)$ نظامي في D_k على الترتيب.

• لنصل هذه الساحات من طرف القطع:
إذا كان $Z = x < 0$
في هذه الحالة:



$$f_k(Z)\Big|_{l_k^+} = |x|^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi} \quad ; \quad \varphi = \pi$$

$$f_k(Z)\Big|_{l_k^-} = |x|^{\frac{1}{n}} e^{i\pi\left(\frac{2k-1}{n}\right)} \quad ; \quad \varphi = -\pi$$

/ /

نبدل في العلاقة الأخيرة كل k بـ $k+1$

$$f_{k+1}(Z)\Big|_{l^{-}_{k+1}} = |x|^{\frac{1}{n}} e^{\pi i\left(\frac{2k+1}{n}\right)}$$

وبالتالي :

$$f(x)\Big|_{l^{-}_{k+1}} = f(x)\Big|_{l^{+}_{k}}$$

نحصل على سطح يتألف من n طبقة أو صفيحة يسمى هذا السطح سطح ريمان ويكون عليه التابع وحيد القيمة.

نقاط التفرع

إنّ التوابع التحليلية المتعددة القيم يمكن أن تملك نقاط شاذة من نوع جديد تدعى نقاط التفرع .

تعريف :

ليكن $F(Z)$ تابعاً تحليلياً في جوار محذوف في النقطة a ومتعدد القيم في هذه النقطة عندها نسمي a بالتعريف نقطة تفرع منعزلة للتابع $F(Z)$.

تعريف :

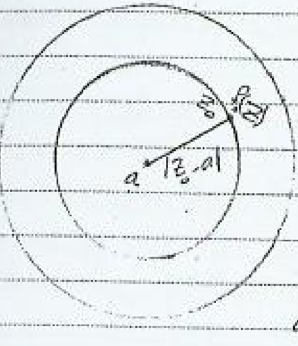
ليكن $F(Z)$ تابعاً تحليلياً في الحلقة :

$$0 < |Z - a| < r$$

ولنأخذ Z_0 نقطة من هذه الحلقة و $f_0(Z)$ عنصر في Z_0 ولنمدد هذا التابع تحليلياً على طول محيط الدائرة :

/ /

$$|Z-a| = |Z_0 - a|$$



(أو أي منحني مغلق بدايته Z_0)

(هذه العملية سنعبر عنها اختصاراً : أن نقول نجري دوران حول النقطة a في الاتجاه السالب أو الموجب)

إذا كان العنصر $f_1(Z)$ الذي حصلنا عليه كنتيجة لهذا التمديد التحليلي لا يتطابق مع العنصر الأساسي $f_0(Z)$ فإننا نقول عن a أنها نقطة تفرع للتابع $F(Z)$.

تقسم نقاط التفرع إلى قسمين :

1- نقاط تفرع جبرية :

هي تلك النقاط التي نعود إلى العنصر الأساسي بالدوران حولها (تمديد هذا العنصر) بعدد منته من الدورات وليكن n دورة عندئذ ندعوها أو نسميها نقطة تفرع جبرية من الدرجة n .

2- نقاط تفرع لوغاريتمية :

هي تلك النقاط التي لا نستطيع العودة إلى العنصر الأساسي بالدوران حولها مهما كان عدد الدورات وتسمى أيضاً نقاط تفرع لا نهائية .

مثال :

أثبت أنّ الصفر واللانهاية هي نقاط تفرع لوغاريتمية للتابع

$$F(Z) = \ln Z$$

وذلك باستخدام التمديد التحليلي .

الحل :

ليكن $f_0(Z)$ عنصراً للتابع $\ln Z$ في النقطة $Z_0 \neq 0 , \infty$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{\text{دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) + 2\pi i$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{\text{دورتين}} f_0(Z) + 4\pi i$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{n \text{ دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) + 2\pi n i$$

نلاحظ أنه لا يمكن العودة إلى العنصر الأساسي $f_0(Z)$ مهما كان عدد الدورات وهذا ما يرهن أن $Z=0$ نقطة تفرع لوغاريتمية.
وبما أن الدوران حول الصفر يعني تماماً الدوران حول ∞ بالاتجاه السالب فإن $Z=\infty$ نقطة تفرع لوغاريتمية.

مثال:
أثبت أن الصفر واللانهاية هي نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثالثة للتابع:

$$F(Z) = \sqrt[3]{Z}$$

الحل:
إذا كان $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً للتابع $F(Z)=\sqrt[3]{Z}$ في النقطة Z_0 المختلفة عن 0 و ∞
ولنجري دوران حول $Z=0$:

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول الصفر}]{\text{دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z)\,.\,e^{2\pi \frac{1}{3} i}$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{بالاتجاه الموجب}]{\text{دورتين حول الصفر}} f_0(Z)\,.\,e^{\frac{4\pi i}{3}}$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{الصفر إيجاباً}]{\text{ثلاث دورات حول}} f_0(Z)\, e^{\frac{6\pi}{3} i} = f_0(Z)$$

نلاحظ أنه بعد ثلاث دورات بالاتجاه الموجب حول $Z=0$ حصلنا على العنصر الأساسي أي
$Z=0$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة الثالثة.
وبما أن الدوران حول الصفر بالاتجاه الموجب يعني دوران حول ∞ بالاتجاه السالب فإن:
$Z=\infty$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة الثالثة.

مثال:
أوجد النقاط الشاذة للتابع:

$$F(Z) = \frac{1}{\sqrt{Z}} = Z^{-\frac{1}{2}}$$

الحل:
لنفرض أن $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً للتابع $F(Z)=Z^{-\frac{1}{2}}$
في $Z_0 \neq 0, \infty$ ولنجري دوران حول $Z=0$ بالاتجاه الموجب

$$f_0(Z) \xrightarrow{\text{دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z)\, e^{2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{\text{دورتين بالاتجاه الموجب}} f_0(Z)\, e^{-\frac{4}{2}\pi i} = f_0(Z)$$

نلاحظ أنه بعد دورتين بالاتجاه الموجب عدنا إلى العنصر الأساسي أي $Z=0$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة الثانية.
وبما أن الدوران حول الصفر بالاتجاه الموجب يعني دوران حول ∞ بالاتجاه السالب فإن $Z=\infty$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة الثانية.

/ /

تمرين :

ادرس النقاط الشاذة للتابع : $F(Z) = Z^{\alpha}$

الحل :

1) إذا كان α عدد صحيح سنميز حالتين :

$\alpha = n$ عدد صحيح موجب عندئذ $Z = \infty$ قطب من الدرجة n.

$\alpha = -n$ عدد صحيح سالب عندئذ $Z = 0$ قطب من الدرجة n.

2) $\alpha = \frac{m}{n}$ أي $\alpha \in Q$

فإن :

$Z=0$ و $Z=\infty$ نقاط تفرع جبرية من الدرجة n

ولنبين ذلك :

إذا كان $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً للتابع $F(Z) = Z^{\frac{m}{n}}$

في النقطة $Z_0 \neq 0, \infty$

ولنجري دوران حول $Z=0$ بالاتجاه الموجب.

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{\text{دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) \cdot e^{\frac{2\pi i m}{n}}$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول الصفر}]{n \text{ دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) \cdot e^{\frac{2\pi i m \cdot n}{n}} = f_0(Z)$$

وبما أنه بعد n دورة عدنا إلى العنصر الأساسي فإن $Z=0$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة n.

وبما أن الدوران حول الصفر بالاتجاه الموجب يكافئ دوران حول ∞ بالاتجاه السالب فإن $Z=\infty$ نقطة تفرع جبرية من الدرجة n

٢٨٧

/ /

3) $\alpha \in Q^c$ أو $\alpha \in \mathbb{C}$ و $Im\,\alpha \neq 0$

فإن 0 و ∞ نقاط تفرع لوغاريتمي أو لا نهائية

ولنبرهن ذلك :

ليكن $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً لـ Z^{α} في Z_0 المختلفة عن الصفر واللانهاية ولنجري دوران حول $Z=0$ بالاتجاه الموجب

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{بالاتجاه الموجب}]{\text{دورة حول الصفر}} f_0(Z)\, e^{2\pi i \alpha}$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول الصفر}]{k \text{ دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) \cdot e^{2\pi i k\alpha}$$

واضح أننا لن نعود إلى $f_0(Z)$ مهما كان k لأنه لا يمكن أن يكون αk عدداً صحيحاً عندما $\alpha \in Q^c$ أو $\alpha \in \mathbb{C}$ حيث $Im\,\alpha \neq 0$

وبالتالي $Z=0$ و $Z=\infty$ نقاط تفرع لوغاريتمية...

تمرين :

ادرس طبيعة تعددية القيم للتابع :

$F(Z) = Z \ln Z$

حيث $Ln\,1 = 0$

الحل :

إن $Z=0$ و $Z=\infty$ نقطتان شاذتان للتابع $F(Z)$

ولتحديد طبيعتها نأخذ $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً للتابع $Ln\,Z$

في النقطة $Z_0 = 1$ حيث $Ln\,1 = 0$

ولنجري دوران حول $Z=0$ بالاتجاه الموجب.

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{\text{دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) + 2\pi i$$

$$f_0(Z) \xrightarrow[\text{حول } Z=0]{k \text{ دورة بالاتجاه الموجب}} f_0(Z) + 2\pi k i \qquad ; k \in \mathbb{Z}$$

وبالتالي:

$$Z \cdot f_0(Z) \xrightarrow{k \text{ دورة بالاتجاه الموجب}} Z f_0(Z) + 2\pi k i Z$$

نلاحظ أنه لا يمكن العودة إلى العنصر الأساسي.
مهما كان عدد الدورات، إذاً $Z=0$ نقطة تفرع لوغاريتمية (لانهائية)
وبما أن الدوران حول الصفر بالاتجاه الموجب هو دوران حول ∞ بالاتجاه السالب فإنه:

$Z=\infty$ نقطة تفرع لوغاريتمية

أي أن التابع $F(Z)$ ذو طبيعة لانهائية، أي عدد عناصره غير منته.

ملاحظة:
نقطة التفرع لتابع تحليلي ما تبقى على حالها إذا ضرب هذا التابع بتابع تحليلي وحيد القيمة

تمرين:

ادرس النقاط الشاذة للتابع:

$$F(Z) = \cos\sqrt{Z}$$

الحل:

ليكن $f_0(Z)$ عنصراً أساسياً للتابع $\sqrt{Z}$ في النقطة Z_0

المختلفة عن 0 و ∞ ، ولنجري دوران حول $Z=0$ بالاتجاه الموجب

$$f_0(Z) \longrightarrow f_0(Z)\, e^{\frac{2\pi i}{2}} = -f_0(Z)$$

$$\cos f_0(Z) \longrightarrow \cos(-f_0(Z)) = \cos f_0(Z)$$

وهذا يعني أن التابع $F(Z)$ لا يغير قيمته بعد دورة، إذن $F(Z)$ تابع وحيد القيمة، رغم وجود تابع متعدد القيم ($\sqrt{Z}$) في صيغته
وتكون $Z=0$ نقطة شاذة قابلة للإصلاح للتابع $F(Z)$ و $Z=\infty$ نقطة شاذة أساسية لهذا التابع.

تمرين: وظيفة

ادرس النقاط الشاذة للتابع:

1) $F(Z) = \dfrac{\sin\sqrt{Z}}{\sqrt{Z}}$

2) $F(Z) = \sqrt{Z} \cdot \sin\sqrt{Z}$

ملاحظة:
ليس بالضرورة كل تابع يحوي في صيغته Z^α أو $\ln Z$ يمثل تابع متعدد القيم وذلك واضح من الأمثلة السابقة.

N

الـتابـع $F(Z) = \ln f(Z)$

الخاصة الأولى:

قيمة $\ln f(Z)$ في نقطة ما Z والناتجة بتمديد العنصر الأساسي تحليلياً على طول المنحني γ الذي بدايته Z_0 ونهايته Z حيث $\ln f(Z_0) = \omega_0$ تعطى بالعلاقة:

$$\ln f(Z) = \ln|f(Z)| + i(\operatorname{Im}\omega_0 + \Delta_\gamma \arg Z)$$

الخاصة الثانية:

التابع $F(Z) = \ln f(Z)$ تحليلي في المستوي المركب ماعدا القيم التي تجعل $f(Z)=0$ و $f(Z)=\infty$ (أي أصفار وأقطاب $f(Z)$ والتي تسمى نقاط تفرع)

الخاصة الثالثة:

يمكن عزل فروع التابع $F(Z)=\ln f(Z)$ في أي ساحة وحيدة الاتصال لا تحتوي على نقاط تفرع.

سطح ريمان للتابع $\ln f(Z)$:

يتم تشكيل سطح ريمان للتابع $\ln f(Z)$ بنفس الخطوات لتشكيل سطح ريمان للتابع $\ln Z$ ويكون عدد صفائحه غير منتهي.

تمرين: ليكن التابع:

$$F(Z) = \ln \frac{Z+1}{Z-1}$$

والمطلوب:

1) أوجد ساحة تحليلية التابع $F(Z)$ وماهو نوع $Z=\infty$ لهذا التابع.
2) أوجد ساحة يمكن عزل فروع هذا التابع فيها.
3) أوجد ساحة لا يمكن عزل فروع هذا التابع فيها.
4) شكل سطح ريمان لهذا التابع.

الحل:

1)
$$f(Z)=0 \Rightarrow Z=-1$$
$$f(Z)=\infty \Rightarrow Z=1$$
الأصفار والأقطاب نقاط تفرع لوغاريتمية

إذن $Z=1$ و $Z=-1$ نقاط تفرع لوغاريتمية للتابع $F(Z)$

نرمز بـ

$$f(Z) = \frac{Z+1}{Z-1} = \frac{1+\frac{1}{Z}}{1-\frac{1}{Z}}$$

$$f(\infty)=1$$

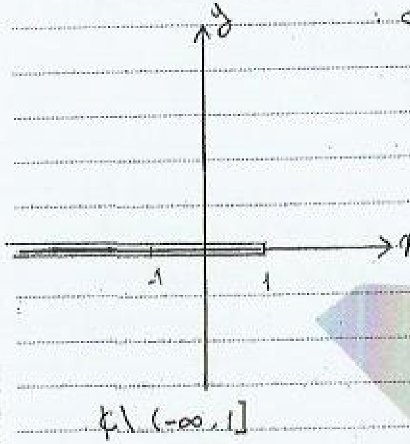
إذن:

$$f(Z) = \frac{Z+1}{Z-1}$$

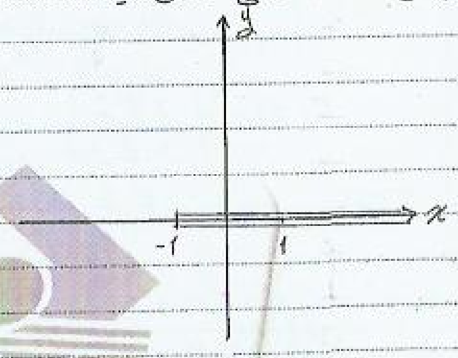
نظامي في $Z=\infty$ ومنه $Z=\infty$ نقطة عادية التابع $F(Z)$ وبالتالي ساحة التحليلية هي:

$$D = \bar{\mathbb{C}} \setminus \{\mp 1\}$$

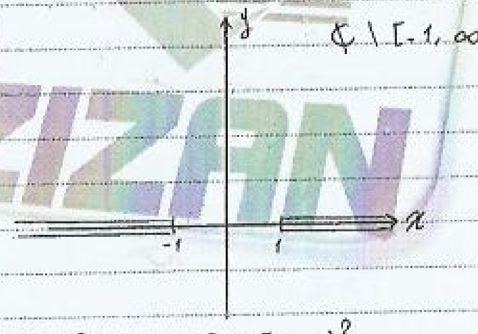
2) يمكن عزل فروع التابع في الساحات :



$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 1]$



$\mathbb{C} \setminus [-1, \infty)$



$\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$

لأن هذه الساحات هي ساحات وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع

3) لا يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ في الساحة

$D = \mathbb{C} \setminus (-\infty,-1]$

لأنها تحتوي على نقطة تفرع $Z = 1$.

4) ولنأخذ الساحة

$.D = \mathbb{C} \setminus (-\infty,1]$

وهي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط التفرع $Z = \mp 1$

إذن يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ فيها.

. وهذه الفروع عددها لا نهائي وتعطى بالصيغة :

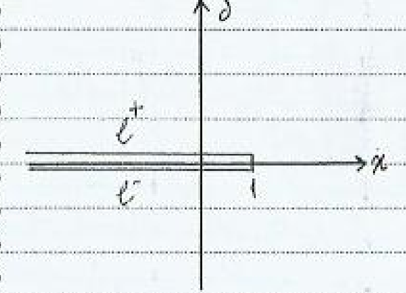
$$F_k(Z) = \ln f(Z) = \ln |f(Z)| + i(\arg f(Z))_0 + 2\pi k i$$

$; k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots$

$; Z \in D$

. بدلاً من دراسة فروع $F(Z)$ والتي عددها لا نهائي في الساحة D نأخذ ساحات طبق الأصل عن الساحة D ولتكن D_k $(k = 0, \mp 1, \mp 2, \ldots)$ بحيث يكون $F_k(Z)$ نظامي في D_k على الترتيب.

. لنصل الساحات D_k من طرف القطع فنجد :



$$F_k(x)\Big|_{\ell_k^+} = F(x)\Big|_{\ell_{k+1}^-}$$

فيكون السطح الناتج هو سطح ريمان.

تم

إن أقدس دموعنا لما تذرف الطريق إلى ماضينا ...

التابع $F(Z) = (f(Z))^\alpha$

الخاصة الأولى:

قيمة $(f(Z))^\alpha$ في النقطة Z الناتجة بتحديد العنصر المناسب تحليلياً على طول "γ" الذي بدايته Z_0 ونهايته Z حيث:

$$(f(Z_0))^\alpha = \omega_0$$

تعطى بالعلاقة:

$$(f(Z))^\alpha = |f(Z)|^\alpha \, e^{i\alpha [Im(Ln f(Z_0)) + \Delta_\gamma \arg f(Z)]}$$

الخاصة الثانية:

التابع $F(Z) = (f(Z))^\alpha$ تحليلي في المستوي كاملاً باستثناء قيم Z التي تجعل $f(Z)=0$ و $f(Z)=\infty$ والتي تسمى نقاط تفرع

الخاصة الثالثة:

يمكن عزل فروع التابع $F(Z) = (f(Z))^\alpha$ في أي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع

سطح ريمان للتابع $F(Z) = (f(Z))^\alpha$:

يتم تشكيل سطح ريمان للتابع $F(Z)$ بطريقة مماثلة لتشكيل سطح ريمان للتابع:

$$Z^\alpha$$

تمرين "دورة ٢٠٠٧":

ادرس النقاط الشاذة للتابع:

$$F(Z) = \sqrt[3]{\frac{2Z-1}{3Z+2}}$$

في المستوي الموسع، وإذا فرضنا f_1 هو أحد عناصر $F(Z)$ فما هي العناصر الأخرى بدلالة f_1.

الحل:

$$f(Z) = 0 \Rightarrow Z = \frac{1}{2}$$

$$f(Z) = \infty \Rightarrow Z = -\frac{2}{3}$$

وهي نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثالثة للتابع $F(Z)$

نرمز بـ

$$f(Z) = \frac{2Z-1}{3Z+2}$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{Z}}{3 + \frac{2}{Z}}$$

$$f(\infty) = \frac{2}{3}$$

إذن: $f(Z)$ نظامي في $Z=\infty$ وبالتالي $F(Z)$ تحليلي في $Z=\infty$

وساحة التحليلية هي:

$$\mathbb{C} \setminus \{-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\}$$

$$f_2 = f_1\, e^{2\pi i \frac{1}{3}}$$

$$f_3 = f_1\, e^{4\pi i \frac{1}{3}}$$

$f_4 \longrightarrow f_1$ (وهذا ما يؤكد أن النقاط $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right)$ جبرية)

تمرين "دورة ٢٠٠٧ & ٢٠٠٩":

ليكن التابع:

$$F(Z) = \left(\frac{Z-i}{Z+i}\right)^{\frac{2}{3}}$$

السؤال كان فقط رسم شكل سطح ريمان لكن لتشكيل سطح ريمان علينا ايجاد النقاط الشاذة

1) أوجد النقاط الشاذة لهذا التابع وبين نوعها.
2) أوجد ساحة يمكن عزل فروع هذا التابع فيها.
3) إذا كان f_0 هو أحد فروع هذا التابع أوجد بقية الفروع بدلالة f_0.
4) شكل سطح ريمان لهذا التابع

الحل:

1)
$$f(Z) = \frac{Z-i}{Z+i}$$

$$f(Z) = 0 \Rightarrow Z = i$$
$$f(Z) = \infty \Rightarrow Z = -i$$

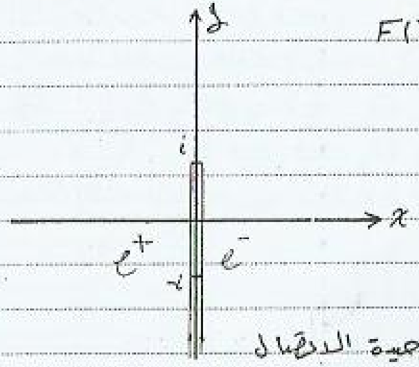
نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثالثة.

وساحة التحليلية لـ $F(Z)$ هي:

$$\bar{\mathbb{C}} \setminus \{\mp i\}$$

/ /

2) ساحات يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ هي:



$$\mathbb{C} \setminus (-i\infty, i] \quad \text{أو} \quad \mathbb{C} \setminus [-i, i\infty)$$

أو

$$\mathbb{C} \setminus \{(-i\infty, -i] \cup [i, i\infty)\}$$

إن هذه الساحات هي ساحات وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط التفرع $\mp i$

3)
$$f_1 = e^{\frac{2\pi i 2}{3}} f_0 = e^{\frac{4\pi i}{3}} f_0 \quad ; k=1, \alpha = \frac{2}{3}$$

$$f_2 = e^{\frac{2\pi i 4}{3}} f_0 = e^{\frac{8\pi i}{3}} f_0 \quad ; k=2, \alpha = \frac{2}{3}$$

$$f_3 = f_0$$

4) تشكيل سطح ريمان:

لنأخذ الساحة:

$$D = \mathbb{C} \setminus (-i\infty, +i]$$

وهي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع وبالتالي يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ فيها.

إن لهذا التابع ثلاثة فروع وهي تتوضع في الساحة D بالصيغة:

$$F_k(Z) = |F(Z)|^{\alpha} \cdot e^{i\alpha\left[(\arg f(Z))_0 + 2\pi k\right]} \quad ; k=0,1,2$$

$$= |F(Z)|^{\frac{2}{3}} \cdot e^{i\frac{2}{3}\left[(\arg f(Z))_0 + 2\pi k\right]} \quad ; k=0,1,2$$

بدلاً من دراسة فروع التابع $F(Z)$ والتي عددها ثلاثة في الساحة D نأخذ ساحات منفصلة عن D وهي D_0 ، D_1 ، D_2 بحيث يكون f_0 نظامي في D_0 و f_1 نظامي في D_1 و f_2 نظامي في D_2

نصل هذه الساحات من أطراف القطع $(-i\infty, i]$

$$F_k(Z)\Big|_{l_k^+} = F(Z)\Big|_{l_{k+1}^-}$$

فيكون السطح الناتج هو سطح ريمان

عزل الفروع النظامية للتوابع التحليلية في ساحات وحيدة الاتصال أو متعددة الاتصال:

أولاً: في الساحات وحيدة الاتصال:

نظرية:

إذا كان $F(Z)$ تابعاً تحليلياً في الساحة D وحيدة الاتصال فإنه يتوضع على شكل فروع نظامية (أي يمكن عزل فروعه) وتسمى هذه النظرية بنظرية المالندروحي

ثانياً: في الساحات المتعددة الاتصال:

إن نظرية المالندروحي لم تجب على السؤال التالي:

هل يمكن عزل فروع نظامية للتابع $F(Z)$ في ساحة ليست وحيدة الاتصال

إن هذه المسألة تدرس وفق النظرية الآتية:

نظرية:

ليكن $f(Z)$ تابعاً نظامياً ولا ينعدم في الساحة D وليكن $F(Z) = \ln f(Z)$ (أو $F(Z) = (f(Z))^\alpha$) التابع التحليلي المولد بالعنصر $F_0(Z)$ في النقطة $Z_0 \in D$ إذا كانت جميع قيم التابع $F(Z)$ التي نحصل عليها كنتيجة من الدورانات على طول جميع المنحنيات المغلقة "لا" التي بدايتها Z_0 والواقعة في الساحة D تتطابق مع $F_0(Z_0)$ فإن التابع التحليلي $F(Z)$ يمكن عزل فروعه في D (المتعددة الاتصال).

تمرين:

ليكن التابع:

$$F(Z) = \sqrt{Z^2 - 1}$$

والمطلوب:

1) ادرس امكانية عزل فرعي هذا التابع في الساحة
$D_1 = \mathbb{C} \setminus \{]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\}$

2) ادرس امكانية عزل فرعي هذا التابع في الساحة
$D_2 = \mathbb{C} \setminus \{[-1, 1]\}$

3) إذا كان $f(Z) = \sqrt{Z^2-1}$ في الساحة D_2 ; $f(2) = \sqrt{3}$ عنصر من عناصر $F(Z)$ احسب قيم (هذا العنصر) $f(Z)$ على المحاور الاحداثية.

4) أوجد سلسلة لوران للعنصر $f(Z)$ حول $Z=\infty$ ثم استنتج نوع $Z=\infty$ لهذا الفرع.

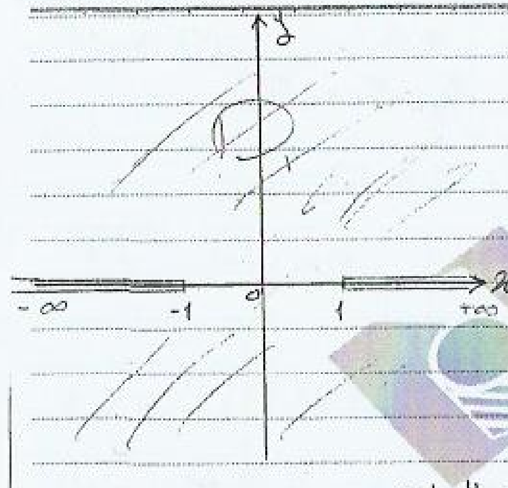
5) شكل سطح ريمان لهذا التابع.

الحل:

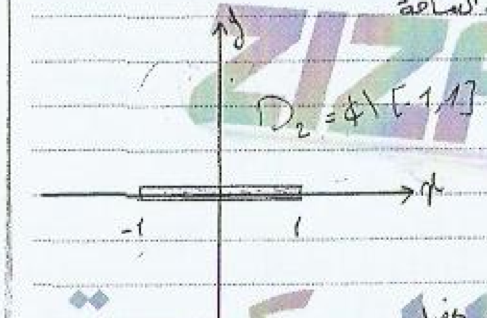
1) إن التابع $F(Z)$ تحليلي في الساحة D_1 الوحيدة الاتصال، إذن يمكن عزل فروعه حسب نظرية المانودرومي وإذا كان $f_0(Z)$ أحد فرعيه فإن:

$$f_1(Z) = -f_0(Z)$$

هو الفرع (الجذر) الآخر



2) إن التابع $F(Z)$ تحليلي في الساحة D_2 المتعددة الاتصال (ثنائية) لذلك لدراسة امكانية عزل الفروع نفرض $F_0(Z)$ عنصراً للتابع $F(Z)$ في النقطة $Z_0 \in D_2$ و " γ " منحني مغلق بدايته Z_0 ويقع كلياً في D_2 بعد دورة (إيجابية) على المنحني γ نحصل على:



$$F(Z_0) = F_0(Z_0) \cdot e^{i\alpha\varphi}$$

عامل [illegible] لدوران حول [illegible] ساحة متعددة الاتصال

حيث:

$$\varphi = \Delta_\gamma \arg(Z^2 - 1)$$

$$\alpha = \frac{1}{2}$$

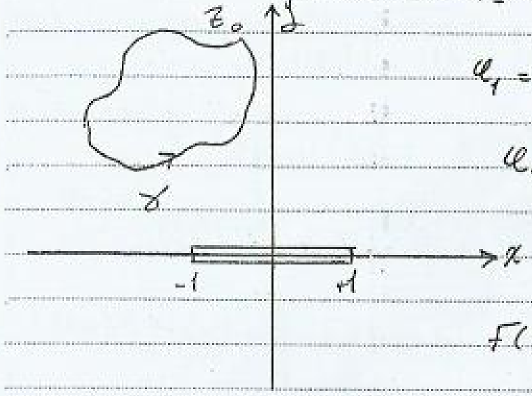
ومنه:

$$\varphi = \Delta_\gamma \arg(Z+1) + \Delta_\gamma \arg(Z-1)$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

ونميز حالتين:

أ) إذا كان القطع $[-1, 1]$ يقع خارج " γ "



$$\varphi_1 = \Delta_\gamma \arg(Z-1) = 0$$

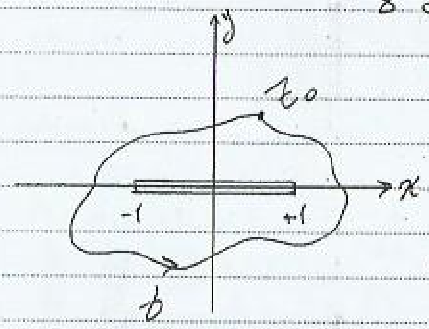
$$\varphi_2 = \Delta_\gamma \arg(Z+1) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = 0$$

أي أن:

$$F(Z_0) = F_0(Z_0)$$

2) القطع $[-1, 1]$ يقع داخل " γ "



$$\varphi_1 = 2\pi$$

$$\varphi_2 = 2\pi$$

$$\varphi = 4\pi$$

$$F(Z_0) = F_0(Z_0) \cdot e^{\frac{4\pi i}{2}}$$

$$\Rightarrow F(Z_0) = F_0(Z_0)$$

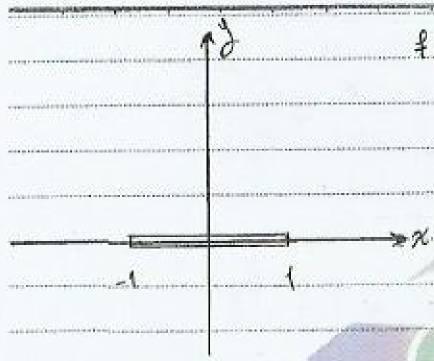
إذن يمكن عزل فرعي التابع $F(Z)$ في الساحة D_2 وإذا كان $f_0(Z)$ أحد فرعي هذا التابع فإن:

$$f_1(Z) = -f_0(Z)$$

هو الفرع الثاني

(3) $f(Z)=\sqrt{Z^2-1}$; $f(2)=\sqrt{3}$

; $Z\in D_2$



$$(f(Z))^{\alpha}=|f(Z)|^{\alpha}\, e^{i\alpha(\varphi_0+\Delta_\gamma \arg f(Z))}$$

$$\sqrt{Z^2-1}=|Z^2-1|^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}\Delta_\gamma \arg(Z^2-1)}$$

حيث

$$\varphi=\Delta_\gamma \arg(Z^2-1)$$

حيث "γ" منحنى بدايته $Z_0=2$ ونهايته النقطة المدروسة.

$$\varphi=\Delta_\gamma \arg(Z-1)+\Delta_\gamma \arg(Z+1)$$

$$\Rightarrow \varphi=\varphi_1+\varphi_2$$

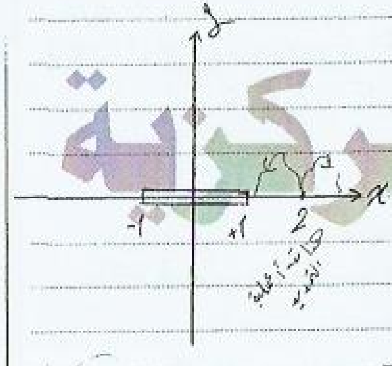
ومنه:

$$f(Z)=|Z^2-1|^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{i}{2}\varphi}$$

على المحور ox:

وهنا نميز 4 حالات:

الحالة الأولى: $x>1$



$\varphi_1=0$, $\varphi_2=0$

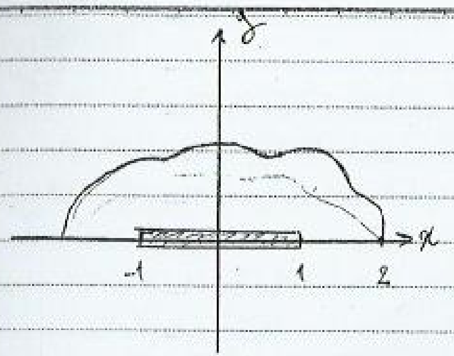
$\Rightarrow \varphi=0$

$$f(Z)\Big|_{Z=x>1}=f(x)=\sqrt{x^2-1}\,.\,e^{\frac{i}{2}.0}$$

$$\Rightarrow f(x)=\sqrt{x^2-1} \quad : x>1$$

نقطة التفرع لا تغير القيمة عند الدوران ...

الحالة الثانية: $x<-1$

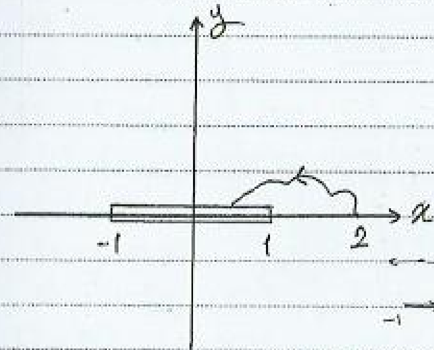


$\varphi_1=\varphi_2=\pi$

$\varphi=2\pi$

$$f(Z)\Big|_{Z=x<-1}=f(x)=\sqrt{x^2-1}\,.\,e^{\frac{2\pi i}{2}}$$

$$f(x)=-\sqrt{x^2-1} \quad : x<-1$$



الحالة الثالثة:

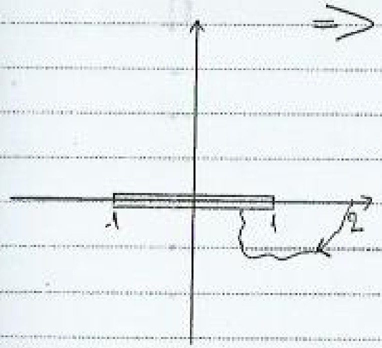
$x\in(-1,1)^+$ الضفة العليا

$(-1,1)$ للقطع

$\left.\begin{array}{l}\varphi_1=\pi\\ \varphi_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi=\pi$

$$f(Z)\Big|_{Z=x\in l^+}=f(x)=\sqrt{|x^2-1|}\; e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$\Rightarrow f(x)=i\sqrt{1-x^2} \quad : x\in(-1,1)^+$$



الحالة الرابعة:

$x\in(-1,1)^-=l^-$

$\left.\begin{array}{l}\varphi_1=-\pi\\ \varphi_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi=-\pi$

/ /

$$f(Z)\Big|_{Z=x\in \ell^-} = f(x) = \sqrt{|x^2-1|}\ .\ e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$\Longrightarrow f(x) = \sqrt{1-x^2}\ .\ (-i)$$

$$= -i\sqrt{1-x^2} \quad ; \ x\in(-1,1)^-$$

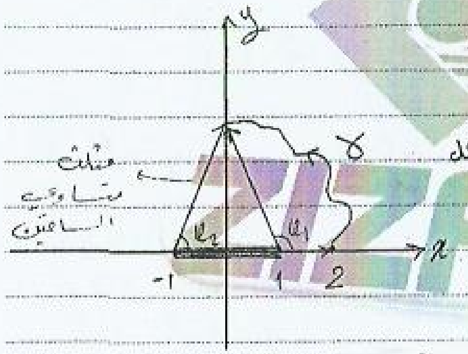
- على المحور : oy

ولنميز حالتين :

الحالة الأولى :

$Z = iy \quad ; \ y>0$

$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \pi$ من الشكل



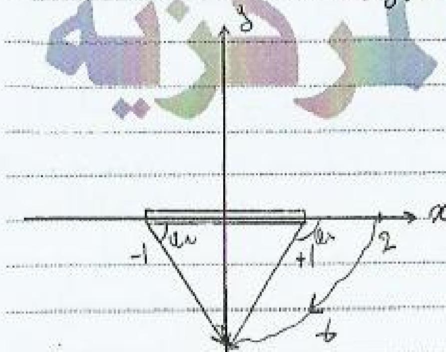
$$f(Z)\Big|_{Z\in oy^+} = f(iy) = \sqrt{|(iy)^2-1|}\ .\ e^{\frac{\pi}{2}i}$$

$$f(iy) = i\sqrt{|-y^2-1|}$$

$$f(iy) = i\sqrt{y^2+1} \quad ; \ y\in oy^+$$

الحالة الثانية :

$Z = iy \quad ; \ y<0$



$$f(Z)\Big|_{oy^-} = f(iy)$$

$$= \sqrt{|(iy)^2-1|}\ \ e^{-\frac{\pi}{2}i}$$

$$= -i\sqrt{y^2+1} \quad ; \ y\in oy^-$$

/ /

4) سلسلة لوران حول $Z=\infty$

$$f(Z) = \sqrt{Z^2-1} \qquad ; \ f(2)=\sqrt{3}$$

$$; \ Z\in D_2$$

$$f(Z) = \sqrt{Z^2}\ .\ \sqrt{1-\frac{1}{Z^2}}$$

حسب الفرع المطلوب حيث $f(2)=\sqrt{3}$ موجب

أما إذا كان $f(2)=-\sqrt{3}$ نضع $(-Z)$

$$= Z\ .\ \left(1-\frac{1}{Z^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= Z\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\frac{1}{2}}\left(\frac{-1}{Z^2}\right)^n$$

$$f(Z) = Z\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n}{\frac{1}{2}}(-1)^n\ Z^{-2n}$$

إذن $Z=\infty$ قطب بسيط لهذا الفرع .

5) سطح ريمان « وظيفة »

تمرين :

اعزل الفرعين النظاميين للتابع :

$$F = \sqrt{(Z^2-4)(Z^2-9)}$$

في الساحة :

$$D = \mathbb{C}\setminus\{[-3,-2]\cup[2,3]\}$$

الحل:

نأخذ $F_0(Z)$ عنصراً أساسياً في النقطة Z_0 و D و "γ" منحنى مغلق بدايته Z_0 ويقع كلياً في D وبعد دورة على المنحنى "γ" نجد:

$$F_0(Z) = F_0(Z_0) . e^{i\alpha \ell}$$

$$\ell = \Delta_{\gamma} \arg[(Z^2-4)(Z^2-9)]$$

$$\Rightarrow \ell = \Delta_{\gamma} \arg(Z-2) + \Delta_{\gamma} \arg(Z+2) + \Delta_{\gamma} \arg(Z-3) + \Delta_{\gamma} \arg(Z+3)$$

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 + \ell_4$$

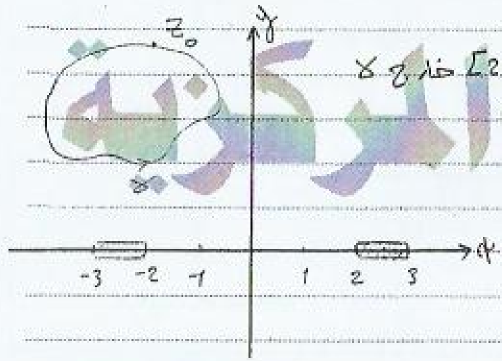
ولنميز الحالات الآتية:

الحالة الأولى:

القطعتين $[-3,-2]$, $[2,3]$ خارج γ

$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 0$$

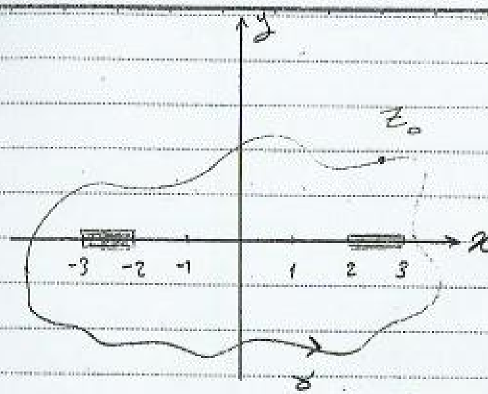
$$\Rightarrow \ell = 0$$



$$F_0(Z) = F_0(Z_0)$$

الحالة الثانية:

القطعتين $[-3,-2]$, $[2,3]$ داخل المنحنى المغلق "γ"



$$\ell_1 = \ell_2 = \ell_3 = \ell_4 = 2\pi$$

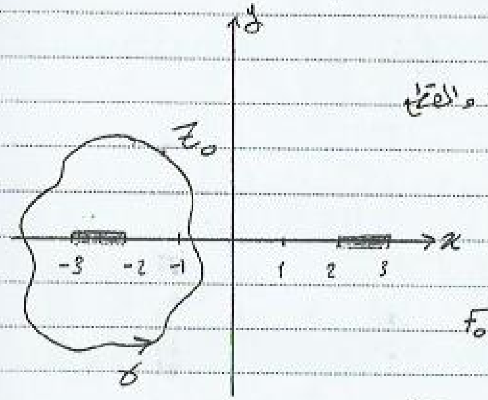
$$\Rightarrow \ell = 8\pi$$

$$F_0(Z) = F_0(Z_0) . e^{\frac{1}{2}.8\pi}$$

$$F_0(Z) = F_0(Z_0)$$

الحالة الثالثة:

القطعة $[-3,-2]$ داخل "γ" والقطعة $[2,3]$ خارج "γ"



$$\ell_1 = 0 \quad , \ell_2 = 2\pi$$

$$\ell_3 = 0 \quad , \ell_4 = 2\pi$$

$$F_0(Z) = F_0(Z_0) \; e^{\frac{4\pi i}{2}}$$

$$\Rightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$$

الحالة الرابعة:

القطعة $[2,3]$ داخل "γ" والقطعة $[-2,-3]$ خارج "γ"

عندئذ:

$$\ell_1 = 2\pi \quad , \ell_2 = 0$$

$\varphi_3 = 2\pi$, $\varphi_4 = 0$

$\Rightarrow \varphi = 4\pi$

$\Rightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$

وهذا ما يبرهن انه يمكن عزل فرعي F في الساحة D المعطاة وإذا كان $f_0(Z)$ احد الفرعين فإن الفرع الثاني

$f_1(Z) = -f_0(Z)$; $f_0(Z_0) = \omega_0$

تمرين:

ليكن التابع:

$$F(Z) = \left(\frac{2-Z}{2+Z}\right)^{\alpha} , \alpha \in \mathbb{R}$$

والمطلوب:

1) عين قيم α التي لأجلها يكون التابع F وحيد القيمة ثم متعدد القيم ثم لا نهائي القيم

2) أوجد ساحة يمكن فيها عزل فروع التابع F

3) أثبت أنه يمكن عزل فروع F في الساحة $D = \mathbb{C} \setminus [-2, +2]$

4) بفرض أن $f(Z)$ هو العنصر الذي من أجله $f(0+0i) = 1$

في الساحة D.

احسب قيم $f(Z)$ على المحور ox ثم احسب $f(2i)$

5) بفرض أن $\alpha = \frac{9}{11}$ أوجد النقاط الشاذة للتابع F

ثم بين ما هو نوع $Z=\infty$

وما هو عدد صفائح سطح ريمان في هذه الحالة

الحل:

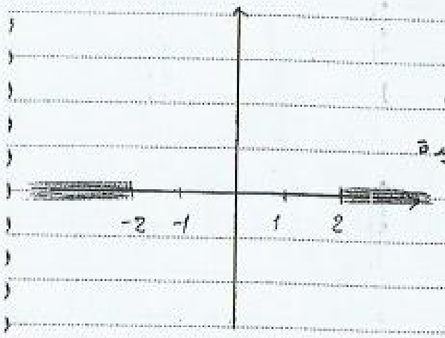
1) عندما $\alpha \in Z$ فإن $F(Z)$ وحيد القيمة.

عندما $\alpha \in Q$ و $\alpha \notin Z$

أي $\alpha = \frac{m}{n}$ فإن F متعدد القيم

منته وعدد قيمه n ..

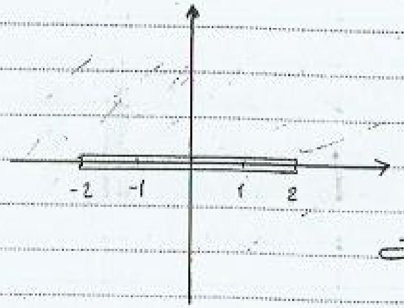
عندما $\alpha \in Q^c$ فإن F متعدد القيم ولا نهائي القيم



2) لنأخذ الساحة

$\mathbb{C} \setminus (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

إن هذه الساحة هي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع لذلك يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ فيها.



3) إن الساحة D هي ساحة ثنائية الاتصال لذلك لإثبات امكانية عزل الفروع في هذه الساحة نأخذ:

$F_0(Z)$ فرعاً أساسياً للتابع $F(Z)$ في $Z_0 \in D$, و γ منحني مغلق بدايته Z_0 ويقع في D

وبعد دورة على المنحني "γ" نجد:

$$F_0(Z) = F_0(Z_0) \cdot e^{i\alpha\varphi}$$

$$\varphi = \Delta_{\gamma} \arg\left(\frac{2-Z}{2+Z}\right)$$

$$= \Delta_\gamma \arg(2-Z) - \Delta_\gamma \arg(2+Z)$$

$$\Longrightarrow \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

ولنميز حالتين :

الحالة الأولى :

القطع $[-2,2]$ خارج "γ" في هذه الحالة :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$$

$$\Longrightarrow \varphi = 0$$

$$\Longrightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$$

الحالة الثانية :

القطع $[-2,2]$ داخل "γ" في هذه الحالة :

$$\varphi_1 = \varphi_2 = 2\pi$$

$$\Longrightarrow \varphi = 0$$

$$\Longrightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$$

أي يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ في الساحة D وتكون الصيغة التحليلية لهذه الفروع هي :

$$f_k(Z) = \left|\frac{2-Z}{2+Z}\right|^{\alpha} . e^{i\alpha\left(\varphi_0 + \Delta_\gamma \arg\left(\frac{2-Z}{2+Z}\right) + 2\pi k\right)}$$

حيث : $k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi_0 = Im[\ln f(Z_0)]$$

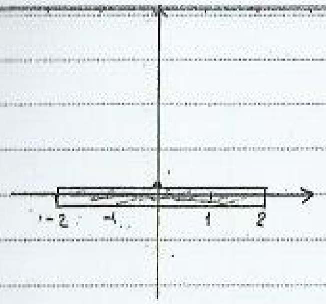
$\ln f(Z_0) = w_0$ قيمة معطاة ...

(4

$$f(0+i0) = 1 \quad ; \quad 1^{\alpha} = 1$$

$$(f(Z))^{\alpha} = |f(Z)|^{\alpha} . e^{i\alpha\varphi}$$

$$; \varphi = \Delta_\gamma \arg f(Z)$$

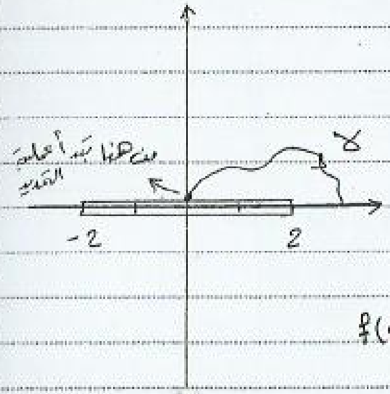


على المحور ox :

الحالة الأولى :

$$Z = x > 2$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = -\pi \\ \varphi_2 = 0\end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi = -\pi$$



$$f(Z)\Big|_{x>2} = f(x) = \left|\frac{2-x}{2+x}\right|^{\alpha} . e^{-i\alpha\pi}$$

$$f(x) = \left(\frac{-2+x}{2+x}\right)^{\alpha} . e^{-\pi i\alpha} \quad ; x > 2$$

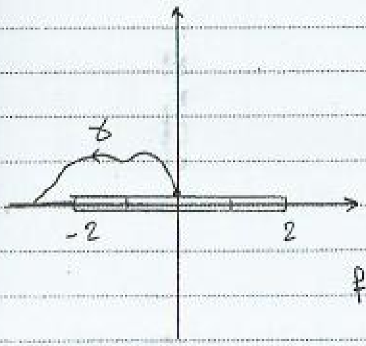
الحالة الثانية :

$$Z = x < -2$$

$$\varphi_1 = 0$$

$$\varphi_2 = \pi$$

$$\Longrightarrow \varphi = -\pi$$



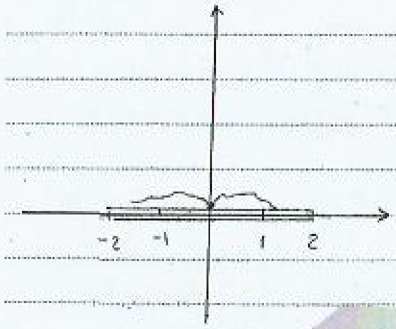
$$f(x) = \left|\frac{2-x}{2+x}\right|^{\alpha} e^{i\alpha\pi}$$

$$f(x) = \left(\frac{x-2}{x+2}\right)^{\alpha} . e^{-\pi i\alpha} \quad ; x < -2$$

الحالة الثالثة :

$x \in (-2, 2)^+$

$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = 0 \\ \theta_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = 0$



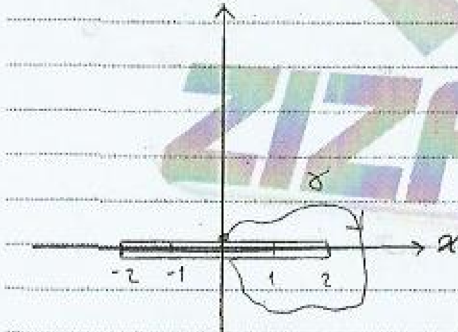
$$f(x) = \left| \frac{2-x}{x+2} \right|^{\alpha} \cdot e^{i\alpha(0)}$$

$$= \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\alpha} \quad ; \ x \in (-2, +2)^+$$

الحالة الرابعة :

$x \in (-2, 2)^- = \ell$

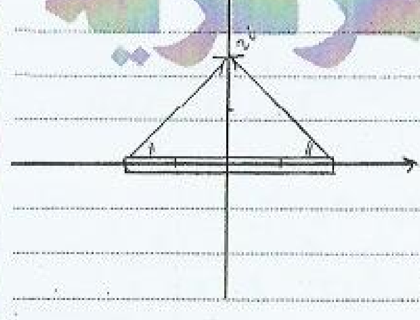
$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = -2\pi \\ \theta_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -2\pi$



$$f(x) = \left| \frac{2-x}{2+x} \right|^{\alpha} \cdot e^{-2\pi i\alpha}$$

$$= \left(\frac{2-x}{2+x} \right)^{\alpha} \cdot e^{-2\pi i\alpha} \quad ; x \in (-2, 2)^-$$

حساب $f(2i)$:



$\left.\begin{array}{l}\theta_1 = -\frac{\pi}{4} \\ \theta_2 = +\frac{\pi}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$f(2i) = \left| \frac{2-2i}{2+2i} \right|^{\alpha} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}\alpha i}$$

$$f(2i) = 1^{\alpha} \, e^{-\frac{\pi}{2} i\alpha} = e^{-\frac{\pi}{2} i\alpha}$$

5) $\alpha = \frac{9}{11}$

$$F(Z) = \left(\frac{2-Z}{2+Z} \right)^{\frac{9}{11}}$$

$Z = -2$ و $Z = 2$ نقاط تفرع جبرية من الدرجة 11

$Z = \infty$ نقطة عادية

عدد صفائح سطح ريمان = عدد الفروع = 11 صفيحة.

تمرين " دورة " وظيفة

ليكن التابع :

$$F(Z) = \left(\frac{a-Z}{b+Z} \right)^{\alpha}$$

حيث $a, b \in R$ $(a > b)$ والساحة $D = \mathbb{C} \setminus [-b, a]$

والمطلوب :

1- عين قيم α التي يكون لأجلها F وحيد القيمة ثم متعدد القيم ثم لا نهائي القيم.

2- بفرض $\alpha = \frac{5}{6}$ أثبت إمكانية عزل الفروع المنتظمة للتابع $F(Z)$ في الساحة D (ثنائية الترابط) واذكر الصيغة التحليلية لهذه الفروع.

3- إذا كان f هو الفرع الذي يحقق :

$$f(0 + 0i) = \left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \in \mathbb{R}$$

مع $0 \in (-b, a)$

احسب القيم التالية : $f(a+1)$ ، $f(-b-1)$ ، $f(Z)\Big|_{\ell^+}$

4- كم هو عدد صفائح سطح ريمان للتابع F ولماذا؟ وما هو نوع النقاط $(-b)$ و (∞) و (2) لهذا التابع.

تمرين :

ليكن التابع :

$$F(Z) = \ln \frac{1-Z}{1+Z}$$

1) أوجد النقاط الشاذة لهذا التابع وبيّن نوعها .
2) أعطي ساحة يمكن عزل فروع هذا التابع فيها .
3) أعطي ساحة لا يمكن عزل فروع هذا التابع فيها .
4) أثبت امكانية عزل فروع هذا التابع في الساحة $D = \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$
5) اكتب الصيغة التحليلية لفروع هذا التابع .
6) إذا كان $f(Z)$ هو الفرع الذي يحقق : $f(0+i0) = 0$
احسب قيم هذا الفرع على المحور ox ثم احسب $f(i)$
7) شكل سطح ريمان لهذا التابع .

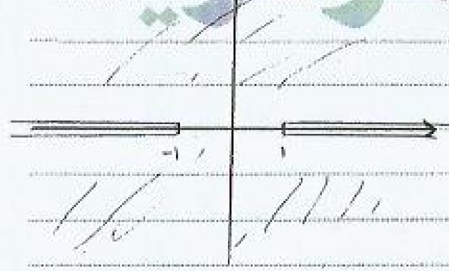
الحل :

1) $Z=1$ و $Z=-1$ نقاط تفرع لوغاريتمية و $Z=\infty$ نقطة عادية
ومنه ساحة تحليلية النقاط هي :

$\mathbb{C} \setminus \{\mp 1\}$

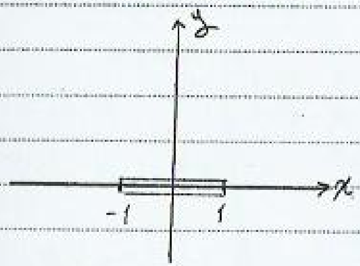
2) الساحة هي :

$\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,+\infty)\}$



ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع . إذن يمكن عزل فروع التابع $F(Z)$ فيها

3) الساحة $\mathbb{C} \setminus [0, +\infty)$
ساحة وحيدة الاتصال وتحتوي على $Z=-1$ نقطة تفرع . إذن لا يمكن عزل الفروع فيها .



4) إن الساحة $D = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$ هي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على نقاط تفرع ولإثبات إمكانية عزل الفروع فيها ، نأخذ $F_0(Z)$ فرعاً أساسياً في النقطة $Z_0 \in D$ و γ منحني مغلق بدايته Z_0 ولنجد دورة على المنحني γ نجد أن :

$$F_0(Z) = F_0(Z_0) + i\theta$$

حيث :

$$\theta = \Delta_\gamma \arg\left(\frac{1-Z}{1+Z}\right)$$

$$\theta = \Delta_\gamma \arg(1-Z) - \Delta_\gamma \arg(1+Z)$$

$$\Rightarrow \theta = \theta_1 + \theta_2$$

ونميز حالتين :

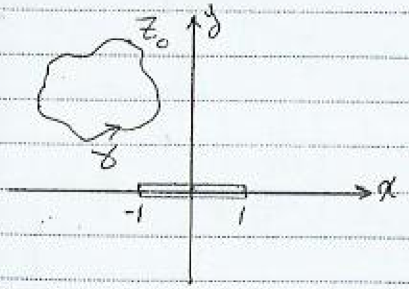
الحالة الأولى :

المقطع $[-1,1]$ خارج γ

$\theta_1 = \theta_2 = 0$

$\Rightarrow \theta = 0$

$\Rightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$

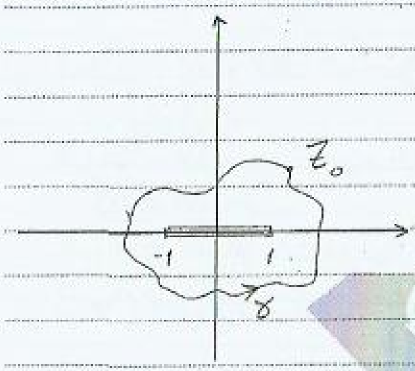


الحالة الثانية :

المنحنى "γ" داخل $[-1, 1]$

$\ell_1 = \ell_2 = 2\pi$

$\Rightarrow \ell = 0$



$\Rightarrow F_0(Z) = F_0(Z_0)$

ومنه يمكن عزل فروع F في المساحة D.

(5
$$f_k(Z) = \ln\left|\frac{1-Z}{1+Z}\right| + i\left[Im(\ln f_0(Z_0)) + \Delta_\gamma \arg\frac{1-Z}{1+Z} + 2\pi k\right]$$

حيث :

$\ln f(Z_0) = \omega_0$ قيمة معطاة (مثبتة)

و "γ" منحنى بدايته Z_0 ونهايته $Z \in \bar{D}$

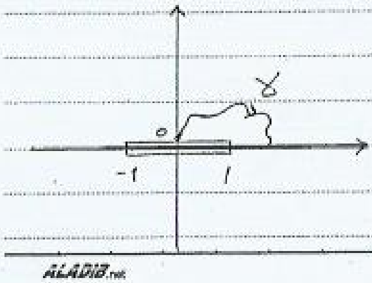
(6
$$f(Z) = \frac{1-Z}{1+Z} \quad ; \quad f(0+0i) = 0$$

$$F(Z) = \ln\left|\frac{1-Z}{1+Z}\right| + i\ell$$

$$\Delta_\gamma \arg\frac{1-Z}{1+Z} = \ell = \ell_1 - \ell_2 \quad ; \quad \gamma = \vec{oZ}$$

الحالة الأولى :

$Z = x > 1$



$\ell_1 = -\pi$

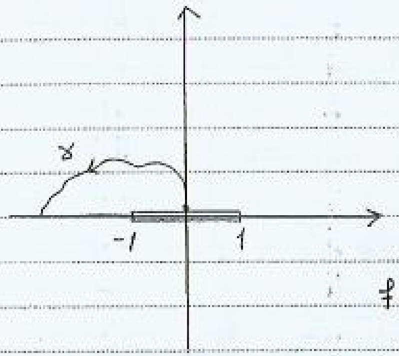
$\ell_2 = 0$

$\Rightarrow \ell = -\pi$

$$f(x) = \ln \frac{\quad}{1+x} - \pi i \quad ; \quad x > 1$$

الحالة الثانية :

$Z = x < -1$



$\ell_1 = 0$

$\ell_2 = \pi$

$\Rightarrow \ell = -\pi$

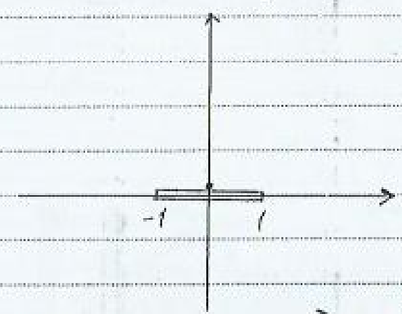
$$f(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - \pi i$$

$$f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1} - \pi i \quad ; \quad x < -1$$

الحالة الثالثة :

$Z = x \in (-1, 1)^+$

$\left.\begin{array}{l}\ell_1 = 0\\ \ell_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \ell = 0$



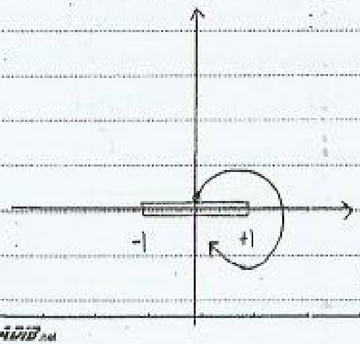
$$f(x) = \ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$$

$$\Rightarrow f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} \quad ; \quad x \in (-1, 1)^+$$

الحالة الرابعة :

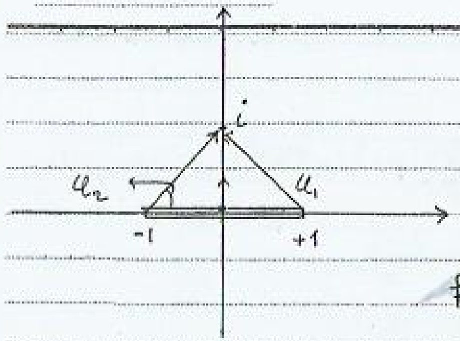
$Z = x \in (-1, 1)^-$

$\left.\begin{array}{l}\ell_1 = -2\pi\\ \ell_2 = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \ell = -2\pi$



$$f(x) = \ln\frac{1-x}{1+x} - 2\pi i \quad ; \quad x \in (-1, 1)^-$$

حساب $f(i)$:



$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1 = -\frac{\pi}{4}\\ \varphi_2 = \frac{\pi}{4}\end{array}\right\} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$f(i) = \ln\left|\frac{1-i}{1+i}\right| - \frac{\pi}{2}i$$

$$f(i) = 0 - \frac{\pi}{2}i$$

$$\Rightarrow f(i) = -\frac{\pi}{2}i$$

تمرين " دورة " :

. ابحث في التابع

$$F(Z) = Z^Z$$

. ليكن

$$F(Z) = Z + \sqrt{Z^2 - 9}$$

$$D = \mathbb{C} \setminus [-3, 3]$$

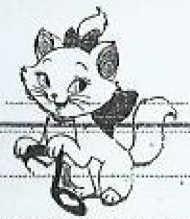
المطلوب :

1. أثبت أنه يمكن عزل الفرعين التحليليين للتابع F في الساحة D .

2. إذا فرضنا أن f_0 هو الفرع الذي يحقق :

$$f_0(4) = 4 + \sqrt{7}$$

ما هو نوع نقطة اللانهاية بالنسبة لفرعي F .



/ /

التوابع المثلثية العكسية

أولاً : تابع الظل العكسي :

$$F(Z) = \operatorname{arctg} Z$$

1. اكتب الصيغة التكاملية للتابع $F(Z)$ ثم عبر عن هذا التابع بدلالة التابع اللوغاريتمي .

2. أوجد النقاط الشاذة لهذا التابع و ساحة التحليلية للتابع F .

3. أوجد سلسلة ماك لوران لعنصر التابع F الذي يحقق :

$$f(0) = 0$$

4. ما هي عبارة المشتق للتابع F .

الحل :

1. لدينا :

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

و بالمثل :

$$\operatorname{arctg} Z = \int_0^Z \frac{d\xi}{1+\xi^2} \quad ; \; \gamma : \widehat{0Z}$$

و هي الصيغة التكاملية ..

$$\operatorname{arctg} Z = \int_0^Z \frac{d\xi}{(\xi - i)(\xi + i)}$$

$$\operatorname{arctg} Z = \frac{1}{2}\int_0^Z \left[\frac{1}{1-i\xi} + \frac{1}{1+i\xi}\right] d\xi$$

$$= \frac{-1}{2i}\int_0^Z \frac{-i\,d\xi}{1-i\xi} + \frac{1}{2i}\int_0^Z \frac{i\,d\xi}{1+i\xi}$$

$$= -\frac{1}{2i}\ln(1-iZ) + \frac{1}{2i}\ln(1+iZ)$$

$$\operatorname{arctg} Z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iZ}{1-iZ}\right)$$

2- $Z = \mp i$

نقاط تفرع لوغاريتمية للتابع $\operatorname{arctg} Z$ ومساحة القليلية هي:

$\mathbb{C} \setminus \{\mp i\}$

أي $Z = \infty$ نقطة عادية.

3- $f_0(Z)$ عنصراً من عناصر $\operatorname{arctg} Z$ الذي $f(0) = 0$

عندها سلسلة ماك لوران هي:

$$\frac{1}{1+\xi^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \xi^{2n}$$

بمكاملة الطرفين بين 0 و ∞

$$\operatorname{arctg} Z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot Z^{2n+1}$$

4- أما عبارة المشتق فنحصل بالعلاقة:

$$(\operatorname{arctg} Z)' = \frac{1}{1+Z^2}$$

*) وبصورة مشابهة تتم دراسة التوابع $\operatorname{arc\,cotg} Z$

$\operatorname{arc\,th} Z$

$\operatorname{arc\,coth} Z$

وطالما أننا نكتب بدلالة التابع اللوغاريتمي فهي توابع لانهائية القيم ويتحول حساب قيمتها إلى حساب قيمة اللوغاريتم.

ثانياً: تابع الجيب المعكوس:

$$F = \arcsin Z$$

1- نعلم أن:

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad ; t \in (-1,1)$$

لنمدد هذا التابع تحليلياً إلى الحقل المركب:

$$\arcsin Z = \int_0^Z \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

يمكن التعبير عن هذا التابع بدلالة التابع اللوغاريتمي كما يلي:

$$w = \arcsin Z$$
$$Z = \sin w$$

$$Z = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}$$

$$e^{2iw} - 2iZe^{iw} - 1 = 0$$

$$\Delta = -4Z^2 + 4 \implies \sqrt{\Delta} = 2\sqrt{1-Z^2}$$

$$(1+Z)^{\alpha} = 1+\alpha Z + \alpha(\alpha-1)\frac{Z^2}{2!}+\cdots$$

/ /

$$e^{iW} = \frac{2iZ+2\sqrt{1-Z^2}}{2}$$

$$e^{iW} = iZ + \sqrt{1-Z^2}$$

$$iW = \ln\left(iZ+\sqrt{1-Z^2}\right)$$

$$\arcsin Z = -i\ln\left(iZ+\sqrt{1-Z^2}\right)$$

النقاط الشاذة للتابع $\arcsin Z$ هي:

$Z = \mp 1$ و $Z = \infty$

وساحة القابلية هي:

$\mathbb{C} \setminus \{\mp 1\}$

ساحة عزل الفروع هي:

$\mathbb{C} \setminus \{(-\infty,-1] \cup [1,\infty)\}$

نشر ماك لوران للعنصر (الفرع) من عناصر التابع $\arcsin Z$ الذي يحقق:

$f(0) = 0$

نعلم أن:

$$f(Z) = \int_0^Z \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} = (1-\xi^2)^{-\frac{1}{2}} = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)(-\xi^2)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{(-\xi^2)^2}{2!}+\cdots$$

بمكاملة الطرفين حداً حداً بين 0 و Z نجد:

/ /

$$f(Z) = Z + \frac{1}{2\cdot 3}Z^3 + \frac{3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}Z^5 + \cdots$$

وهكذا نجد أن:

$$f(Z) = Z + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\,\frac{Z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |Z|<1$$

$$(\arcsin Z)' = \frac{1}{\sqrt{1-Z^2}}$$

* وبالمثل تتم دراسة التوابع:

arc cos Z

arc sh Z

arc ch Z

وجميعها توابع متعددة القيم تكتب بدلالة التابع اللوغاريتمي...

قال رسول الله (ص): «اللهم بارك لنا في شامنا
اللهم بارك لنا في يمننا»

نظرية الرواسب وتطبيقاتها

ليكن $f(Z)$ تابعاً تحليلياً في الحلقة $r < |Z-a| < R$
حيث a نقطة شاذة معزولة لهذا التابع عندئذ نشر التابع في سلسلة لوران هو:

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} c_n (Z-a)^n \; ; \; c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\, d\xi$$

$; n = 0, \mp 1, \dots$

و γ منحني مغلق يحوي a ويقع في الحلقة.

$$f(Z) = \dots + \frac{c_{-2}}{(Z-a)^2} + \frac{c_{-1}}{(Z-a)} + c_0 + c_1(Z-a) + \dots \quad (*)$$

تعريف:
راسب التابع $f(Z)$ في النقطة $Z=a$ هو الأمثال c_{-1} في سلسلة لوران للتابع $f(Z)$ حول $Z=a$ ونرمز لذلك:

$$\operatorname*{res}_{Z=a} f(Z) = c_{-1}$$

بمكاملة طرفي العلاقة $(*)$ على منحني مغلق يحوي a ويقع في الحلقة نجد:

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = \dots + c_{-2}\int_\gamma \frac{dZ}{(Z-a)^2} + c_{-1}\int_\gamma \frac{dZ}{Z-a} + c_0\int_\gamma dZ + c_1\int_\gamma (Z-a)\,dZ + \dots$$

وحسب تمرين نموذجي في الصفحة "1" نجد:

$$\int_\gamma f(Z)\,dZ = 2\pi i\, c_{-1}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(Z)\,dZ = 2\pi i \operatorname*{res}_{Z=a} f(Z)$$

مثال: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma e^{-\frac{2}{Z}}\, dZ$$

حيث:

$$\gamma : |Z| = 1$$

الحل:
التابع المستكامل هو:

$$f(Z) = e^{-\frac{2}{Z}}$$

ويملك $Z=0$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل "γ".
وبالتالي:

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{Z=0} f(Z)$$

$$e^{-\frac{2}{Z}} = 1 + \frac{1}{1!}\left(\frac{-2}{Z}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{-2}{Z}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{-2}{Z}\right)^3 + \dots$$

$; 0 < |Z| < \infty$

إذن:
من النشر:

$$\operatorname*{res}_{Z=0} f(Z) = c_{-1} = -2$$

نعوض:

$$\Rightarrow I = -4\pi i$$

تمرين: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma z\cdot\cos\frac{1}{z+1}\,dz$$

حيث: $\gamma: |z+1| = 1$

الحل:

التابع المتكامل:

$$f(z) = z\cdot\cos\frac{1}{z+1}$$

حيث $z=-1$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل "γ".

$$I = 2\pi \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$$

$$f(z) = [(z+1)-1]\cos\frac{1}{z+1}$$

$$= [(z+1)-1]\cdot\left[1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z+1)^4}+\cdots\right]$$

$;\ 0<|z+1|<\infty$

$$f(z) = (z+1) - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z+1)^3} + \cdots$$

$$-1 + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z+1)^4}+\cdots$$

$$= -1 + (z+1) - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z+1} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z+1)^2}+\cdots$$

من النشر نجد:

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi i$$

وظيفة تمرين:

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma e^{z+\frac{1}{z}}\,dz$$

$;\ \gamma: |z| = 1$

طرق حساب الرواسب:

سنميز الثلاث الحالات الآتية:

1- إذا كانت $z=a\neq\infty$ مختلفة عن ∞ عادية أو قابلة للإصلاح للتابع $f(z)$ فإنّ:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = 0$$

لأنّ سلسلة لوران في هذه النقطة هي نفسها سلسلة تايلور، وسلسلة تايلور لا تحتوي على أسس سالبة

2- إذا كانت $z=a\neq\infty$ قطب التابع $f(z)$ نميز حالتين:

الحالة الأولى:

$z=a$ قطب بسيط "من الدرجة الأولى" للتابع $f(z)$ عندئذٍ:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$$

البرهان:

بما أنّ $z=a$ قطب بسيط للتابع $f(z)$ فإنّ سلسلة لوران حول a هي:

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$(z-a)\, f(z) = c_{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

$$\lim_{z\to a} (z-a).f(z) = c_{-1} + 0$$

$$\Longrightarrow \operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z\to a} (z-a)\, f(z)$$

حالة خاصة:

إذا كان $z = a$ قطب بسيط للتابع $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$

أي $f(z)$.

$p(a) \neq 0$, $q'(a) \neq 0$, $q(a) = 0$

فإنّ:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

البرهان:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \operatorname*{res}_{z=a} \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z\to a} (z-a) \frac{p(z)}{q(z)}$$

$$= \lim_{z\to a} \frac{p(z)}{\frac{q(z) - q(a)}{z-a}} \quad q(a)=0$$

$$= \frac{\lim_{z\to a} p(z)}{\lim_{z\to a} \frac{q(z)-q(a)}{z-a}} = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

الحالة الثانية:

إذا كانت $z = a$ قطب من الدرجة n للتابع $f(z)$ عندئذ:

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[(z-a)^n f(z)\right]$$

البرهان:

بما أنّ $z = a$ قطب من الدرجة n فإنّ سلسلة لوران لهذا التابع حول $z = a$ هي:

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z-a)^n} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^m$$

بضرب الطرفين ب $(z-a)^n$

$$(z-a)^n f(z) = c_{-n} + \dots + c_{-1}(z-a)^{n-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m (z-a)^{m-n}$$

وبالاشتقاق $(n-1)$ مرة نجد:

$$\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right] = \overbrace{(n-1)(n-2)\dots(1)}^{(n-1)!} + \sum_{m=0}^{\infty} A (z-a)^{m+1}$$

$$\lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n f(z)\right] = (n-1)!\, c_{-1} + 0$$

$$\operatorname*{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-a)^n . f(z)\right]$$

حالة خاصة :

إذا كان :

$$f(Z) = \frac{h(Z)}{(Z-a)^n}$$

حيث $h(Z)$ نظامي في a و $h(a) \neq 0$

أي $Z=a$ قطب من الدرجة n للتابع $f(Z)$ فإنّ :

$$\underset{Z=a}{\operatorname{res}} f(Z) = \frac{h^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

البرهان :

$$\underset{Z=a}{\operatorname{res}} f(Z) = \underset{Z=a}{\operatorname{res}} \frac{h(Z)}{(Z-a)^n}$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{Z \to a} \frac{d^{n-1}}{dZ^{n-1}} \left[(Z-a)^n \frac{h(Z)}{(Z-a)^n} \right]$$

$$= \frac{1}{(n-1)!} \lim_{Z \to a} h^{(n-1)}(Z)$$

$$= \frac{h^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

3- إذا كانت $Z=a$ نقطة شاذة أساسية للتابع $f(Z)$ فلا يوجد طريقة لإيجاد الراسب في هذه النقطة إلا عن طريق نشر التابع في سلسلة لوران حول a .

تمرين : احسب التكامل :

$$I = \oint_\gamma \cotg Z \, dZ \quad ; \gamma : |Z| = 2$$

الحل :

التابع المستكمل :

$$f(Z) = \cotg Z = \frac{\cos Z}{\sin Z}$$

النقاط الشاذة هي جذور المعادلة :

$$\sin Z = 0$$

$$\Rightarrow Z_k = \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

$$Z_0 = 0$$

نقطة شاذة تقع داخل " γ " قطب بسيط.

$$I = 2\pi i \underset{Z=0}{\operatorname{res}} f(Z)$$

$$\underset{Z=0}{\operatorname{res}} f(Z) = \frac{p(0)}{q'(0)} = \left. \frac{\cos Z}{(\sin Z)'} \right|_{Z=0} = \left. \frac{\cos Z}{\cos Z} \right|_{Z=0} = 1$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i$$

الراسب في $Z = \infty$:

إذا كان $f(Z)$ تابعاً نظامياً في الحلقة :

$$\rho < |Z| < \infty$$

فإنّ سلسلة لوران لهذا التابع حول $Z=\infty$ هي :

$$f(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n Z^n$$

$$= \cdots + \frac{c_{-2}}{Z^2} + \frac{c_{-1}}{Z} + c_0 + c_1 Z + \cdots \quad (*)$$

بالتعريف نسمي c_{-1} - ناقص أمثال $\frac{1}{Z}$ في نشر لوران للتابع

حول $z=\infty$ براسب التابع $f(z)$ في $z=\infty$.. ونرمز لذلك:

$$\underset{\infty}{\text{res}}\, f(z) = -c_{-1}$$

بمكاملة طرفي العلاقة * على منحني "γ" مغلق يقع في الحلقة نجد:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \dots + c_{-2}\int_\gamma \frac{dz}{z^2} + c_{-1}\int_\gamma \frac{dz}{z} + c_0\int_\gamma dz + \dots$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, c_{-1} + 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = -2\pi i\, \underset{\infty}{\text{res}}\, f$$

طرق حساب الراسب في $z=\infty$:

1- يمكن حساب الراسب في ∞ باستخدام القانون:

$$\underset{z=\infty}{\text{res}}\, f(z) = -\underset{t=0}{\text{res}}\left[\frac{1}{t^2}\cdot f\left(\frac{1}{t}\right)\right]$$

وهو قليل الاستخدام من الناحية العملية...

2- إذا كانت $z=\infty$ صفر بسيط للتابع $f(z)$ فإنه:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{c_{-1}}{z}$$

وعندها:

$$\underset{z=\infty}{\text{res}}\, f(z) = -c_{-1}$$

3- إذا كانت $z=\infty$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ حيث $m \geq 2$ فإنه:

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{c_{-m}}{z^m}$$

وعندها:

$$\underset{z\to\infty}{\text{res}}\, f(z) = 0$$

مثال:

احسب الراسب عند $z=\infty$ للتابع:

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}\cdot \sin\frac{1}{z}$$

الحل:

$$\frac{z}{z^3+1} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{z}{z^3} = \frac{1}{z^2}$$

$$\sin\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^3}$$

وبالتالي $z=\infty$ صفر من الدرجة الثالثة..

$$\underset{z=\infty}{\text{res}}\, f(z) = 0$$

مثال:

احسب الراسب عند $z=\infty$ للتابع:

$$f(z) = \frac{1}{z+2}\cdot \cos\frac{1}{z}$$

الحل:

$$\frac{1}{z+2} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$$\cos\frac{1}{z} \underset{z\to\infty}{\sim} 1$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

إذاً: $z=\infty$ صفر بسيط ...

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -1$$

طريقة 2:

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

$$= \frac{1}{z}\left[1-\frac{2}{z}+\frac{4}{z^2}-\frac{8}{z^3}+\cdots\right]$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\frac{4}{z^3}-\frac{8}{z^4}+\cdots$$

$$\left|\frac{2}{z}\right|<1$$

$$|z|>2$$

$$\cos\frac{1}{z} = 1-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z^4}+\cdots \quad ; \quad 0<|z|<\infty$$

$$f(z) = \frac{1}{z}-\frac{2}{z^2}+\cdots$$

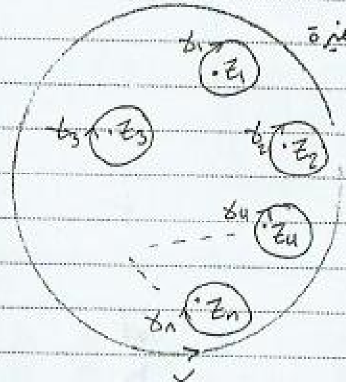
$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\infty} f(z) = -c_1 = -1$$

المبرهنة الأساسية الأولى للرواسب:

إذا كان $f(z)$ تابع تحليلي في ساحة وحيدة الاتصال D باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة z_k $(k=1,2,\dots,n)$ ولكن وإذا كان γ منحني مغلق واقع في D ويحوي على جميع النقاط الشاذة z_k عندئذ فإن:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$$

البرهان:



نحيط كل نقطة شاذة z_k بدائرة صغيرة γ_k حيث $(k=\overline{1,n})$

فيكون حسب نظرية كوشي في الساحات المتعددة الاتصال:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} f + 2\pi i \operatorname*{res}_{z_2} f + \cdots + 2\pi i \operatorname*{res}_{z_n} f$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$$

ح.و

نتيجة "1":

إذا كان $f(z)$ تابعاً نظامياً في $\bar{\mathbb{C}}$ باستثناء النقاط الشاذة المعزولة z_k $(k=\overline{1,n})$ فإن:

$$\underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z) + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res} f(z) = 0$$

البرهان:

لنأخذ دائرة كبيرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها كبير بقدر كاف بحيث تحتوي على جميع النقاط z_k ولتكن:

$$\gamma : |z| = R$$

ونحيط كل نقطة z_k بمنحني γ_k فيكون حسب مبرهنة كوشي في الساحات المتعددة الاتصال:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z) \quad (1)$$

"حسب تعريف الراسب في ∞" (2)

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -2\pi i \underset{\infty}{\operatorname{res}} f$$

من (1) و(2) نجد المطلوب.

نتيجة "2":

من المبرهنة الأساسية الأولى ومن النتيجة "1" نجد:

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = -2\pi i \left(\underset{\infty}{\operatorname{res}} f + \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z) \right)$$

حيث z_k نقاط شاذة تقع خارج "γ".

المبرهنة الأساسية الثانية للرواسب:

إذا كان $f(z)$ تابع نظامي في الساحة D من المستوي الموسع $\bar{\mathbb{C}}$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة المنعزلة z_k $(k=\overline{1,n})$ ولنفرض أن $f(z)$ مستمر حتى الحدود Γ (Γ هي حدود D) عندئذ فإن:

1. إذا كانت $z=\infty \notin D$ (أي D محدودة) فإن:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z)$$

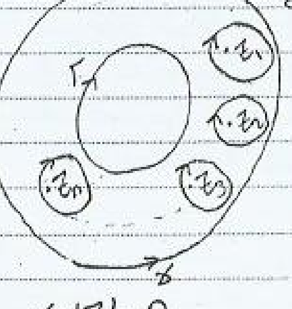
2. إذا كانت $z=\infty \in D$ (D غير محدودة) فإن:

$$\int_{\Gamma} f(z)\,dz = -2\pi i \left[\sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z) + \underset{\infty}{\operatorname{res}} f(z) \right]$$

البرهان:

1. يتم البرهان كما في برهان المبرهنة الأساسية الأولى.

2. نأخذ دائرة كبيرة مركزها مبدأ الإحداثيات ونصف قطرها كبير بقدر كاف بحيث تحتوي على حدود الساحة D وجميع النقاط الشاذة z_k ونحيط كل نقطة z_k بمنحني مغلق γ_k فنحصل على ساحة جديدة G حدودها



$\gamma : |z| = R$

$$\tilde{\gamma} = \gamma \cup \gamma_k \cup \Gamma \cup \ell_k^{\mp}$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

$$\int_\gamma + \int_\Gamma + \int_{\gamma_1} + \cdots + \int_{\gamma_n} = 0$$

$$\Rightarrow \int_\gamma = \int_\Gamma + \int_{\gamma_1} + \cdots + \int_{\gamma_n}$$

" لأن التوجيه سالب "

$$-2\pi i \operatorname{res}_\infty f = \int_\Gamma f\,dz + 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma f(z)\,dz = -2\pi i \left[\operatorname{res}_\infty f + \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f\right]$$

تم المطلوب

تطبيقات نظرية الرواسب:

1- حساب التكاملات المركبة للتوابع الوحيدة القيمة:

لحساب تكامل مركب لتابع وحيد القيمة نقوم بما يلي:

1- نوجد النقاط الشاذة المنعزلة للتابع المستكمل.

2- نأخذ من هذه النقاط، النقاط التي تقع داخل المنحني γ فقط.

3- نحسب الرواسب في هذه النقاط.

4- نطبق نظرية الرواسب الأساسية الأولى أو الثانية..

تمرين:

استخدم نظرية الرواسب في حساب التكامل:

$$I = \int_\gamma \frac{e^{\frac{1}{z-2}}}{z-3}\,dz \quad ; \quad \gamma : |z| = \frac{5}{2}$$

تمرين:

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{e^z+1}$$

حيث: $\gamma : |z-2i| = 2$

الحل:

النقاط الشاذة للتابع المستكمل:

$$f(z) = \frac{1}{e^z+1}$$

وهي جذور المعادلة:

$$e^z + 1 = 0$$

$$\Rightarrow e^z = -1$$

$$z = \ln(-1)$$

$$\Rightarrow z_k = \ln|-1| + i(\pi + 2\pi k)$$

$$z_k = i\pi(1+2k) \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}$$

وهي أقطاب بسيطة..

$z_0 = \pi i$ قطب بسيط يقع داخل "γ"

$z_1 = -\pi i$ " " " خارج "γ"

وحسب نظرية الرواسب

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_0} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{1}{(e^{z}+1)'}\Bigg|_{z=\pi i} = \frac{1}{e^{z}}\Bigg|_{z=\pi i}$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{e^{\pi i}} = -1$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i$$

تمرين:

$$I = \int_{\gamma} e^{z+\frac{1}{z}}\, dz$$

حيث:

$$\gamma : |z| = 1$$

الحل:

$$f(z) = e^{z+\frac{1}{z}}$$

$z=0$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل "γ"

$$\Rightarrow I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z)$$

$$f(z) = e^{z}\cdot e^{\frac{1}{z}} = \left(1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2} + \dots\right)$$

$$f(z) = \left[\frac{1}{1!} + \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,3!} + \frac{1}{3!\,4!} + \dots\right]\cdot\frac{1}{z} + \dots$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1!} + \frac{1}{1!\,2!} + \frac{1}{2!\,3!} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\,(n+1)!}$$

تمرين "دورة مكرر":

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{\gamma} \frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{z-2}\, dz$$

حيث:

$$\gamma : |z| = 4$$

الحل:

$z=1$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل "γ"

$z=2$ قطب بسيط يقع داخل "γ".

وحسب نظرية الرواسب:

$$I = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{1} f + \operatorname*{res}_{2} f\right]$$

وحسب نتيجة:

$$I = -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{\frac{1}{z-1}} \underset{z\to\infty}{\sim} 1 \\ \frac{1}{z-2} \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z} \end{array}\right\} \Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$z=\infty$ صفر بسيط.

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = -1$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i$$

تمرين :

احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^9}{(1-z^2)(z^8+1)}\, dz$$

حيث : $\gamma : |z| = \frac{\pi}{2}$

الحل :

التابع المتكامل :

$$f(z) = \frac{z^9}{(1-z^2)(z^8+1)}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام :

$$(1-z^2)(z^8+1) = 0$$

إما : $z = \mp 1$

أقطاب بسيطة داخل γ

أما : $z^8 + 1 = 0$

$$z^8 = -1 \Rightarrow z_k = \sqrt[8]{-1}$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[8]{|-1|}\, e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{8}\right)} \quad ; \quad k = \overline{0,7}$$

$$z_k = e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{8}\right)} \quad ; \quad k = \overline{0,7}$$

وهي أقطاب بسيطة تقع داخل "γ" لأن :

$$|z_k| = 1$$

$$I = 2\pi i \left[\underset{1}{\text{res}}\, f(z) + \underset{-1}{\text{res}}\, f(z) + \sum_{k=0}^{7} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \right]$$

حسب نتيجة :

$$I = -2\pi i \, \underset{\infty}{\text{res}}\, f(z)$$

$$z^9 \underset{z\to\infty}{\sim} z^9$$

$$(1-z^2) \underset{z\to\infty}{\sim} z^2$$

$$(z^8+1) \underset{z\to\infty}{\sim} z^8$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{-1}{z}$$

$$\Rightarrow \underset{z=\infty}{\text{res}}\, f(z) = +1$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i$$

تمرين "دورة" :

احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^2+2}{z(z^6+2)^3}\, dz$$

حيث $\gamma : |z| = \pi$

الحل :

التابع المتكامل :

$$f(z) = \frac{z^2+2}{z(z^6+2)^3}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام ....

$$z(z^6+2)^3=0$$

$$z=0$$

قطب بسيط يقع داخل " γ "

$$z^6+2=0 \Rightarrow z^6=-2$$

$$\Rightarrow z=\sqrt[6]{-2}$$

$$z_k=\sqrt[6]{|-2|}\; e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)} \quad ; \quad k=\overline{0,5}$$

$$=2^{\frac{1}{6}}\; e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)} \quad ; \quad k=\overline{0,5}$$

وهي أقطاب من الدرجة الثالثة تقع داخل " γ " لأن

$$|z_k|=2^{\frac{1}{6}}$$

ومنه حسب نظرية الرواسب:

$$I=2\pi i\left(\operatorname*{res}_{0} f(z)+\sum_{k=0}^{5}\operatorname*{res}_{z_k} f(z)\right)$$

وحسب نتيجة:

$$=-2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$$

$$z^2+2 \underset{z\to\infty}{\sim} z^2$$

$$z(z^6+2)^3 \underset{z\to\infty}{\sim} z^{19}$$

$$\Rightarrow f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z^{17}}$$

$z=\infty$ صفر من الدرجة 17

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=0$$

$$\Rightarrow I=0$$

تمرين:

احسب قيمة التكامل:

$$I=\int_{\gamma} e^{\frac{1}{z}}\cdot \cos\frac{1}{z^2}\, dz$$

حيث: $\gamma: |z|=3$

الحل:

التابع المستكمل:

$$f(z)=e^{\frac{1}{z}}\cdot \cos\frac{1}{z^2}$$

النقاط الشاذة: $z=0$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل " γ "

$$I=2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z)$$

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{1!}\cdot\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\cdots$$

$$\cos\frac{1}{z^2}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z^4}\right)^2+\cdots$$

$$\Rightarrow f(z)=\frac{1}{z}+\cdots$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z)=1$$

$$\Rightarrow I=2\pi i$$

تمرين "دورة مكرر":

احسب قيمة التكامل باستخدام نظرية الرواسب:

$$I = \int_{\gamma} \frac{dz}{(z-3)(z^5-1)}$$

حيث: $\gamma : |z| = 2$

الحل:

التابع المتكامل:

$$f(z) = \frac{1}{(z-3)(z^5-1)}$$

$z = 3$ قطب بسيط تقع خارج "γ"

$z^5 = 1$

$\Rightarrow z = \sqrt[5]{1}$

$z_k = \sqrt[5]{|1|} \cdot e^{i\left(\frac{0+2\pi k}{5}\right)} \quad ; k = \overline{0,4}$

$z_k = e^{\frac{2\pi k i}{5}} \quad ; k = \overline{0,4}$

أقطاب بسيطة تقع داخل "γ" لأنّ:

$|z_k| = 1$

وحسب نظرية الرواسب:

$$I = 2\pi i \sum_{k=0}^{4} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z)$$

$$I = -2\pi i \left(\underset{3}{\text{res}}\, f + \underset{\infty}{\text{res}}\, f\right)$$

يتبع

$$\underset{3}{\text{res}}\, f = \lim_{z \to 3} \cancel{(z-3)} \frac{1}{\cancel{(z-3)}(z^5-1)}$$

$$= \frac{1}{3^5-1} = \frac{1}{242}$$

$$f(z) \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{1}{z^6}$$

$$\underset{\infty}{\text{res}}\, f(z) = 0$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i \cdot \frac{1}{242} \Rightarrow I = \frac{-\pi i}{121}$$

مكرر تمرين "دورة":

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{\gamma} (2z-1) \cos \frac{z}{z-1}\, dz$$

حيث: $\gamma : |z| = 2$

الحل:

$$f(z) = (2z-1) \cdot \cos \frac{z}{z-1}$$

$z = 1$ نقطة شاذة أساسية تقع داخل "γ"

$$I = 2\pi i \underset{z=1}{\text{res}}\, f(z)$$

$$f(z) = \left[2(z-1+1)-1\right] \cos\left(\frac{z-1+1}{z-1}\right)$$

$$= \left[2(z-1)+1\right]\cos\left(1+\frac{1}{z-1}\right)$$

$$= \left[2(z-1)+1\right]\left[\cos 1 \cdot \cos\frac{1}{z-1} - \sin 1 \cdot \sin\frac{1}{z-1}\right]$$

$$= \left[2(z-1)+1\right]\Big[\cos 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{(z-1)^4} + \cdots\right)$$

$$- \sin 1 \cdot \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3} + \cdots\right)\Big]$$

$$= \left[-\cos 1 - \sin 1\right]\cdot\frac{1}{z-1} + \cdots$$

$$\Rightarrow \underset{z=1}{\operatorname{res}} f(z) = c_{-1} = -(\cos 1 + \sin 1)$$

$$\Rightarrow I = -2\pi i(\cos 1 + \sin 1)$$

تمارين "دورة":

1) $I = \int_\gamma \dfrac{\cos\frac{1}{z}}{(z+2)^5}\,dz \quad ; \gamma : |z-1| = 3$

2) $I = \int_\gamma \dfrac{z+a}{z^n(z+b)}\,dz \quad ; \gamma : |z| = 1$

$|b| > 1 \quad , n \geq 1$

3) $I = \int_\gamma \dfrac{\operatorname{sh} z}{(z^2+1)^5(z^2+9)}\,dz \quad ; \gamma : |z+3i| = 1$

الحل:

2) $I = \int_\gamma \dfrac{z+a}{z^n(z+b)}\,dz \quad ; \gamma : |z| = 1$

$, |b| > 1 \quad , n \geq 1$

$$f(z) = \frac{z+a}{z^n(z+b)}$$

$z=0$ قطب من الدرجة $n \geq 1$ يقع داخل "γ".

$z=-b$ قطب بسيط يقع خارج "γ".

$$I = 2\pi i \underset{z=0}{\operatorname{res}} f(z) = -2\pi i\left(\underset{\infty}{\operatorname{res}} f + \underset{-b}{\operatorname{res}} f\right)$$

$$\underset{-b}{\operatorname{res}} f = \frac{p(-b)}{q'(-b)}$$

$$= \left.\frac{\frac{z+a}{z^n}}{(z+b)'}\right|_{z=-b} = \frac{-b+a}{(-b)^n} = \frac{a-b}{(-b)^n}$$

لحساب الاصبع عند $z=\infty$ نميز حالتين:

1) $n=1$

$$f(z) \underset{z\to\infty}{\sim} \frac{1}{z}$$

$$\Rightarrow \underset{\infty}{\operatorname{res}} f = -1$$

2) $n \geq 2$

$$f(z) = \frac{1}{z^n} \Rightarrow \underset{\infty}{\operatorname{res}} f = 0$$

$$I = \begin{cases} -2\pi i \left[-1 + \dfrac{a-b}{(-b)^n} \right] & ; n = 1 \\ -2\pi i \left(\dfrac{a-b}{(-b)^n} \right) & ; n \geq 2 \end{cases}$$

2. حساب التكاملات المركبة للتوابع المتعددة القيم :

تمرين :

احسب قيمة التكامل الآتي :

$$I = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{Z}}{Z-1}\, dZ$$

حيث : $\gamma : |Z-1| = \dfrac{1}{2}$

الحل :

إن التابع $\sqrt{Z}$ يتفرع داخل القرص $|Z-1| < \frac{1}{2}$ إلى فرعين نظاميين هما:

$g_1(Z)$ و $g_2(Z)$ حيث :

$$g_2(Z) = -g_1(Z)$$

(لأن القرص ساحة وحيدة الاتصال لا يحوي على نقاط تفرع 0 ، ∞) وبالتالي فإن التابع الموجود تحت رمز التكامل يتفرع إلى فرعين نظاميين هما:

$$f_1(Z) = \frac{g_1(Z)}{Z-1} \quad ; \quad g_1(1) = 1$$

$$f_2(Z) = \frac{g_2(Z)}{Z-1} \quad ; \quad g_2(1) = -1$$

إن كلاً من التابعين $f_1(Z)$ و $f_2(Z)$ نظاميين داخل "γ" باستثناء $Z=1$ قطب بسيط فيكون استناداً إلى نظرية الرواسب

$$I_1 = \int_{\gamma} f_1(Z)\, dZ = 2\pi i \operatorname*{res}_{Z=1} f_1(Z)$$

$$\operatorname*{res}_{Z=1} f_1(Z) = \frac{P(1)}{q'(1)} = \left. \frac{g_1(Z)}{(Z-1)'} \right|_{Z=1}$$

$$= \frac{g(1)}{1} = 1$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i$$

$$I_2 = \int_{\gamma} f_2(Z)\, dZ = 2\pi i \operatorname{res} f_2(Z)$$

$$\operatorname{res} f_2(Z) = \frac{P(1)}{q'(1)} = \left. \frac{g_2(Z)}{(Z-1)'} \right|_{Z=1}$$

$$= \frac{g_2(1)}{1} = -1$$

$$\Rightarrow I_2 = -2\pi i$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} 2\pi i & ; g_1(1) = 1 \\ -2\pi i & ; g_2(1) = -1 \end{cases}$$

تمرين "دورة" :

$$I = \int_{\gamma} \frac{\sqrt{Z}}{(Z-1)^2}\, dZ$$

حيث : $\gamma : |Z-1| = e^{-1}$

الحل:

إن التابع $\sqrt{z}$ تابع ثنائي القيمة و $z=0$ ، $z=\infty$ نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثانية له.. وهو يتفرع داخل القرص

$$|z-1| < \frac{1}{e}$$

الى فرعين نظاميين هما $g_1(z)$ و $g_2(z)$ حيث:

$$f_1(z) = \frac{g_1(z)}{(z-1)^2} \quad ; \quad g_1(1) = 1$$

$$f_2(z) = \frac{g_2(z)}{(z-1)^2} \quad ; \quad g_2(1) = -1$$

التابعين $f_1(z)$ و $f_2(z)$ نظاميين داخل المنحني المغلق " γ " ماعدا $z=1$ قطب من الدرجة الثانية وبالتالي حسب نظرية الرواسب:

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f_1(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to 1} \left[\frac{d}{dz} (z-1)^2 \frac{g_1(z)}{(z-1)^2} \right]$$

$$= \lim_{z\to 1} \frac{1}{2g_1(z)} = \frac{1}{2g_1(1)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i \times \frac{1}{2} = \pi i$$

$$I_2 = \int_\gamma f_2(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} f_2(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f_2(z) = \frac{g_2'(z)}{(2-1)!}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{2g_2(z)}\Bigg|_{z=1} = \frac{1}{2g_2(1)} = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow I_2 = -2\pi i \times \frac{1}{2} = -\pi i$$

$$I = \begin{cases} \pi i & ; \quad g_1(1) = 1 \\ -\pi i & ; \quad g_2(1) = -1 \end{cases}$$

تمرين:

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$$

حيث:

$$\gamma : |z| = \frac{1}{2}$$

الحل: إن التابع $\sqrt{z^2-1}$ تابع ثنائي القيمة و $z=\mp 1$ ، $z=\infty$ نقاط تفرع جبرية. ويتفرع داخل القرص $|z| < \frac{1}{2}$ الى فرعين نظاميين هما: $g_1(z)$ و $g_2(z)$ حيث:

$$g_2(z) = -g_1(z)$$

وبالتالي التابع المستكمل يتفرع الى فرعين هما:

$$f_1(z) = \frac{1}{z \cdot g_1(z)} \quad ; \quad g_1(0) = i$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z \cdot g_2(z)} \quad ; \quad g_2(0) = -i$$

التابعين $f_1(z)$ و $f_2(z)$ نظاميين داخل "γ" باستثناء النقطة $z=0$ قطب بسيط،

$$I_1 = \int_\gamma f_1(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f_1(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_1(z) = \frac{P(0)}{q'(0)} = \left.\frac{\frac{1}{g_1(z)}}{(z)'}\right|_{z=0}$$

$$= \frac{1}{g_1(0)} = \frac{1}{i} = -i$$

طريقة ثانية لحساب الراسب:

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_1(z) = \lim_{z\to 0} z \cdot \frac{1}{z\, g_1(z)} = \frac{1}{g_1(0)} = -i$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i(-i) = 2\pi$$

$$I_2 = \int_\gamma f_2(z)\,dz$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} f_2(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f_2(z) = \lim_{z= 0} z \cdot \frac{1}{z \cdot g_2(z)} = \frac{1}{g_2(0)} = \frac{+1}{-i} = i$$

$$\Rightarrow I_2 = 2\pi i(i) = -2\pi$$

$$\Rightarrow I = \begin{cases} 2\pi & ; g_1(0) = i \\ -2\pi & ; g_2(0) = -i \end{cases}$$

تمرين : احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_\gamma \frac{dz}{z\sqrt{z^2-1}}$$

حيث:

$$\gamma : |z| = 2$$

الحل:

$$z\sqrt{z^2-1} = z^2\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$$

إن التابع $\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}$ ثنائي القيمة و $z=\mp 1$ نقاط تفرع

لذا التابع ويتفرع خارج القرص:

$|z|>2$ إلى فرعين نظاميين هما:

$g_1(z)$ و $g_2(z)$

حيث: $g_2(z) = -g_1(z)$

حيث:

$$g_1(\infty) = 1$$
$$g_2(\infty) = -1$$

وبالتالي التابع المستكمل يتفرع خارج القرص $|z|>2$ إلى فرعين هما:

$$f_1(z) = \frac{1}{z^2 \cdot g_1(z)} \quad ; g_1(\infty) = 1$$

$$f_2(z) = \frac{1}{z^2 g_2(z)} \quad ; g_2(\infty) = -1$$

وحسب نظرية الرواسب:

$$I_1 = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z)$$

$$\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} \sim \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname*{res}_{\infty} f_1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad I_1 = 0$$

$$I_2 = -2\pi i \operatorname*{res}_{z=\infty} f_2(z)$$

$$\frac{1}{z\sqrt{z^2-1}} \sim \frac{-1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \operatorname{res} f_2(z) = 0$$

$$\Rightarrow I_2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 0}$$

تمرين :

احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_{\gamma} \frac{z^2+1}{\ln z - \pi i}\, dz$$

حيث :

$$\gamma : |z+1| = \frac{1}{2}$$

الحل :

إن التابع المستكمل له عدد غير منته من الفروع داخل " γ " وذلك كون $\ln z$ لدينا خي الفرعي، ويمكن عزل فروعه في القرص $|z+1| < \frac{1}{2}$ ونرمز لهذه الفروع بالرمز $g_k(z)$ وبالتالي فإن التابع المستكمل له عدد غير منته من الفروع هي :

$$f_k(z) = \frac{z^2+1}{g(z) - \pi i}$$

ولدينا :

$$g_k(-1) = \ln|-1| + i\pi(2k+1)$$

$$g_k(-1) = \pi i(2k+1)$$

$$g_0(-1) = \pi i$$

وبالتالي فإن التوابع $f_k(z)$ حيث $k \neq 0$ هي توابع نظامية داخل المنحني المغلق " γ ".

وحسب نظرية كوشي :

$$I_k = \int_{\gamma} f_k(z)\, dz = 0 \quad , \ k \neq 0$$

التابع $f_0(z)$ نظامي داخل " γ " ماعدا $z=-1$ قطب بسيط عندئذ حسب نظرية الرواسب :

$$I_0 = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=1} f_0(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=1} f_0(z) = \frac{P(-1)}{q'(-1)} = \left.\frac{z^2+1}{(g_0(z) - \pi i)'}\right|_{z=1} = \left.\frac{z^2+1}{\frac{1}{z}}\right|_{z=-1} = -2$$

$$I = I_k = \begin{cases} 0 & ; k \neq 0 \\ -4\pi i & ; k = 0 \end{cases}$$

تمرين "دورة" :

احسب التكامل :

$$I = \int_{\gamma} \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}\, dz \quad ; \gamma : |z| = 2$$

حيث التابع المستكمل هو الفرع الذي يأخذ قيماً موجبة على ضفة المقطع العليا للساحة :

$$D = \mathbb{C} \setminus [0,1]$$

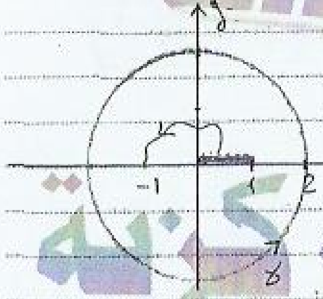
الحل : النقاط الشاذة للتابع المستكمل هي :

$$z = 1 \quad \text{و} \quad z = 0$$

نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثالثة وحسب نظرية الرواسب :

$$I = 2\pi i \left[\operatorname*{res}_{z=0} f + \operatorname*{res}_{z=1} f\right]$$

$$= -2\pi i \operatorname*{res}_{\infty} f(z)$$



بالنسبة للتابع $f(z)$

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}}$$

نظراً لأنه خارج الدائرة $|z| = 2$ فإنه لإيجاد الراسب عند $z=\infty$ يجب نشر التابع في سلسلة لوران حول $z=\infty$ من أجل ذلك نكتب :

$$f(z) = \sqrt[3]{\frac{z}{1-z}} = (-1)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{z}{1-z}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{z}\right)^{-\frac{1}{3}}$$

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = |-1|^{\frac{1}{3}} = e^{i\frac{1}{3}\Delta_{\gamma} \arg z}$$

$$\Delta_{\gamma} \arg z = \pi \quad \Rightarrow (-1)^{\frac{1}{3}} = e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$f(z) = e^{\frac{\pi}{3}i}\left[1 + \left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-1}{z}\right) + \cdots\right]$$

$$= e^{\frac{\pi}{3}i}\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{z} + \cdots\right]$$

$$\left|\frac{1}{z}\right| < 1 \iff |z| > 1$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z) = \frac{-e^{\frac{\pi}{3}i}}{3}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \frac{e^{\frac{\pi}{3}i}}{3} = \frac{2}{3}\pi i\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{3}(-\sqrt{3} + i)$$

3- حساب التكاملات الحقيقية التي ترد إلى تكاملات لتوابع مركبة وحيدة القيمة :

أولاً : حساب التكاملات من الشكل :

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta$$

حيث R تابع كسري.

لحساب هذا النوع من التكاملات نفرض

$z = e^{i\theta}$ حيث

$$0 < \theta < 2\pi$$

$$dz = ie^{i\theta} d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

ولدينا :

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \frac{z - \frac{1}{z}}{2}$$

عندما $0 \leq \theta \leq 2\pi$ فإن z ترسم دائرة الوحدة.
نبدل في التكامل ونكامل على الدائرة $|z| = 1$ فنجد:

$$I = \int_{\gamma} F(z)\, dz$$

حيث: $\gamma : |z| = 1$

$$I = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z = z_k}{\operatorname{res}} F(z)$$

حيث z_k هي النقاط الشاذة الواقعة داخل الدائرة $|z| = 1$.

مثال:

باستخدام نظرية الرواسب، احسب التكامل:

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2} \quad ; \quad |a| < 1$$

الحل:

نفرض $z = e^{i\theta}$ حيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2} = \frac{z^2 + 1}{2z}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{1 - 2a\left(\frac{z^2+1}{2z}\right) + a^2} \quad ; \quad \gamma : |z| = 1$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z - az^2 - a + a^2 z}{z}}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{-i\, dz}{-az^2 + (a^2+1)z - a}$$

$$I = \int_{\gamma} \frac{i\, dz}{a\left[z^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z + 1\right]}$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{i}{a\left[z^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z + 1\right]}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام:

$$z^2 - \left(a + \frac{1}{a}\right)z + 1 = 0$$

$$(z - a)\left(z - \frac{1}{a}\right) = 0$$

أما $z = a$ قطب بسيط يقع داخل "γ".
أو $z = \frac{1}{a}$ " " " خارج "γ".

$$I = 2\pi i \underset{z=a}{\operatorname{res}} f(z)$$

$$\underset{z=a}{\operatorname{res}} f(z) = \lim_{z \to a} (z - a) \frac{i}{a(z-a)\left(z - \frac{1}{a}\right)} = \frac{i}{a^2 - 1}$$

$$\Rightarrow I = 2\pi i \frac{i}{a^2 - 1} \Rightarrow I = \frac{2\pi}{1 - a^2} \in \mathbb{R}$$

تمرين "وظيفة": باستخدام نظرية الرواسب، احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 4\cos\theta}$$

ثانياً: حساب التكاملات من الشكل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$$

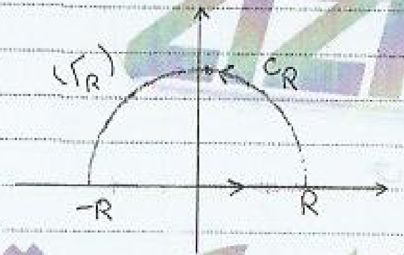
حيث $R(x)$ تابع كسري عادي درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بدرجتين على الأقل.

في هذا النوع من التكاملات لا يمكننا مباشرة تطبيق نظرية الرواسب لكون المنحني غير محدود وغير مغلق ولكي نتمكن من تطبيق نظرية الرواسب نأخذ منحنياً مساعداً Γ_R المؤلف من المجال الحقيقي $[-R, R]$

و نصف الدائرة C_R

$$C_R = \{ |z| = R \ ; \ 0 < \arg z < \pi \}$$

و الموضح بالشكل:



ونحسب التكامل:

$$\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz$$

مبرهنة:

إذا كان $R(z)$ تابعاً تحليلياً في الساحة $\operatorname{Im} z > 0$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة ولتكن $z_k \ (k=\overline{1,n})$ ومستمراً حتى الحدود وإذا كان:

1) $\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$ متقارب " أي $R(x)$ تابع كسري عادي درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بدرجتين على الأقل "

2) $$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} R(z)\,dz = 0$$

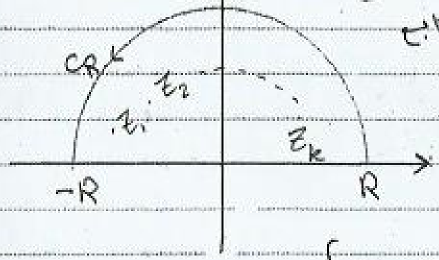
فإن:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} R(z)}$$

حيث z_k هي النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ والواقعة في النصف العلوي...

البرهان:

نأخذ المنحني المغلق Γ_R الموضح بالشكل المجاور ونختار R كبير بحيث تقع جميع النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ والواقعة في النصف العلوي للمستوي العقدي داخل Γ_R واستناداً إلى نظرية الرواسب نجد



$$\int_{\Gamma_R} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} R(z)$$

$$\int_{-R}^{R} R(x)\,dx + \int_{C_R} R(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} R(z)$$

بأخذ نهاية طرفي العلاقة الأخيرة عندما $R \to \infty$ نجد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx + 0 = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{\substack{z=z_k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} f(z)$$

ملاحظة:

يجب الانتباه دائماً إلى أنّ قيمة التكامل الحقيقي هي عدد حقيقي..

ملاحظة:

بنفس أسلوب برهان للبرهنة السابقة يمكن أن نبرهن على أنّ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ Im\, z_k < 0}}^{n} \underset{z_k}{res}\, R(z)$$

حيث z_k هي النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ والواقعة في النصف السفلي..

ملاحظة:

في بعض التكاملات من النمط السابق يمكن أن يطلب حساب التكامل من الشكل:

$$\int_{0}^{\infty} R(x)\,dx$$

حيث $R(x)$ تابع زوجي..
يمكن حسابه بالشكل الآتي:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx = \pi i \sum_{\substack{k=1 \\ Im\, z_k > 0}}^{n} \underset{z_k}{res}\, R(z)$$

تعميم النظرية السابقة:

إذا كانت z_k $(k=\overline{1,n})$ نقاط شاذة للتابع $R(z)$ واقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي و a_k $(k=\overline{1,m})$ أقطاب بسيطة لـ $R(z)$ واقعة على المحور الحقيقي وكان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \text{ متقارباً}$$

فإنّ:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k=1 \\ Im\, z_k > 0}}^{n} \underset{z_k}{res}\, R(z) + \pi i \sum_{\substack{k=1 \\ Im\, a_k = 0}}^{m} \underset{a_k}{res}\, R(z)$$

مثال:

باستخدام نظرية الرواسب احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3+1}$$

الحل: إنّ التابع المستكمل هو:

$$R(x) = \frac{1}{x^3+1}$$

تابع كسري عادي درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بثلاث درجات لذلك فهو متقارب

ولنأخذ التابع:

$$R(z) = \frac{1}{z^3+1}$$

إنّ النقاط الشاذة لهذا التابع هي أصفار المقام وهي جذور المعادلة:

$$z^3+1=0$$

$$\Rightarrow z_k = \sqrt[3]{-1}$$

$$Z_k = |-1|^{\frac{1}{3}} \cdot e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right)} \quad ; k = 0, 1, 2$$

قطب بسيط يقع في النصف العلوي $Z_0 = e^{\frac{\pi}{3} i} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

قطب بسيط يقع على المحور الحقيقي $Z_1 = e^{\pi i} = -1$

قطب بسيط يقع في النصف السفلي $Z_2 = e^{\frac{5\pi}{3} i} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

وحسب مبرهنة يكون:

$$I = 2\pi i \operatorname{res}_{Z_0} R(Z) + \pi i \operatorname{res}_{Z_1} R(Z)$$

$$\operatorname{res}_{Z_0} R(Z) = \frac{P(Z_0)}{Q'(Z_0)} = \left.\frac{1}{3Z^2}\right|_{Z = Z_0} = \frac{1}{3} e^{-\frac{2\pi}{3} i}$$

$$= \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$\operatorname{res}_{Z_1} R(Z) = \frac{P(Z_1)}{Q'(Z_1)} = \left.\frac{1}{3Z^2}\right|_{Z = -1} = \frac{1}{3}$$

$$I = 2\pi i\left[-\frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{6}\right] + \frac{\pi}{3} i$$

$$= -\frac{\pi}{3} i + \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\pi + \frac{\pi}{3} i$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3}\pi \in \mathbb{R}$$

تمرين:

باستخدام نظرية الرواسب احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

الحل:

التابع المستكمل:

$$R(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بأربع درجات لذلك التكامل متقارب وبما أن التابع المستكمل زوجي فيمكن أن نكتب:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^4 + 1}$$

لنأخذ التابع

$$R(Z) = \frac{1}{Z^4 + 1}$$

إن النقاط الشاذة هي أصفار المقام وهي جذور المعادلة:

$$Z^4 + 1 = 0$$

$$Z = \sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{|-1|} \cdot e^{i\left(\frac{\pi + 2\pi k}{4}\right)} \quad ; k = 0, 1, 2, 3$$

قطب بسيط يقع في النصف العلوي $Z_0 = e^{\frac{\pi}{4} i}$

" " " " " " $Z_1 = e^{\frac{3\pi}{4} i}$

$Z_2 = e^{\frac{5\pi}{4}i}$ قطب بسيط يقع في النصف السفلي

$Z_3 = e^{\frac{7\pi}{4}i}$ " " " " " " "

$$I = \pi i\left[\underset{Z_0}{res}\,R(Z) + \underset{Z_1}{res}\,R(Z)\right]$$

$$\underset{Z_0}{res}\,R(Z) = \frac{P(Z_0)}{q'(Z_0)} = \frac{1}{4Z^3}\Bigg|_{Z=Z_0}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{3\pi}{4}i} = \frac{1}{4}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\underset{Z_1}{res}\,R(Z) = \frac{P(Z_1)}{q'(Z_1)} = \frac{1}{4Z^3}\Bigg|_{Z=Z_1}$$

$$= \frac{1}{4}e^{-\frac{9\pi}{4}i} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$I = \pi i\left[-\frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{2}} - i\frac{1}{4\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \in \mathbb{R}$$

تمرين "دورة "

احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\,dx}{(x^2+4x+13)^2}$$

الحل: التابع المستكمل هو:

$$f(x) = \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}$$

نلاحظ أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بثلاث درجات والتكامل متقارب لنأخذ التابع:

$$R(Z) = \frac{Z}{(Z^2+4Z+13)^2}$$

إن النقاط الشاذة لهذا التابع هي أصفار المقام، وهي جذور المعادلة:

$$Z^2+4Z+13=0$$

$$\Delta = 36i^2$$

$$Z_1 = \frac{-4+6i}{2} = -2+3i$$

قطب من الدرجة الثانية يقع في النصف العلوي للمستوي العقدي.

$$Z_2 = -2-3i$$

قطب من الدرجة الثانية يقع في النصف السفلي من المستوي العقدي فيكون حسب مبرهنة:

$$I = 2\pi i\,\underset{Z_1}{res}\,R(Z)$$

$$\underset{Z_1}{res}\,R(Z) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{Z\to Z_1}\frac{d}{dZ}\left[(Z-Z_1)^2\frac{Z}{(Z-Z_1)^2(Z-Z_2)^2}\right]$$

$$= \lim_{Z\to Z_1}\frac{(Z-Z_2)^2 - 2Z(Z-Z_2)}{(Z-Z_2)^4}$$

$$= \lim_{Z\to Z_1}\frac{Z-Z_2-2Z}{(Z-Z_2)^3} = \frac{-Z_2-Z_1}{(Z_1-Z_2)^3}$$

$$= \frac{2+3i+2-3i}{(-2+3i+2+3i)^3} = \frac{4}{(6i)^3}$$

$$\underset{z_1}{\operatorname{res}} R(z) = \frac{4}{-6\times 36(i)} = \frac{i}{54}$$

$$I = 2\pi i\left(\frac{i}{54}\right) = \frac{-\pi}{27} \in \mathbb{R}$$

ثالثاً: التكاملات من الشكل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$$

حيث $R(x)$ "درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بدرجة على الأقل" تابع كسري عادي.

إن التكامل من هذا الشكل يمثل تحويل فورييه للتابع $R(x)$.

توطئة جوردان:

إذا كان $\alpha > 0$ وإذا تحقق الشرطان:

1) $R(z)$ تابع تحليلي خارج نصف الدائرة

$$|z| \geq R > 0$$

والواقعة في نصف المستوي العلوي

$$\operatorname{Im} z \geq 0$$

2) $$M(R) = \max_{C_R} |R(z)| \longrightarrow 0$$

عندما $R \to \infty$ حيث C_R الدائرة التي معادلتها:

$$\{|z| = R \;;\; \operatorname{Im} z \geq 0\}$$

عندئذ فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} R(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 0$$

مبرهنة:

إذا كان:

1) $R(z)$ تابع تحليلي في $\operatorname{Im} z > 0$ باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة ولتكن z_k $(k=\overline{1,n})$ ومستمرة حتى الحدود.

2) التكامل:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx$$

متقارب.

3) $$\lim \int_{C_R} e^{i\alpha z} R(z)\, dz = 0$$

عندئذ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1} \underset{z_k}{\operatorname{res}} f(z)$$

$$\operatorname{Im} z_k > 0$$

حيث:

$$f(z) = R(z)\cdot e^{i\alpha z}$$

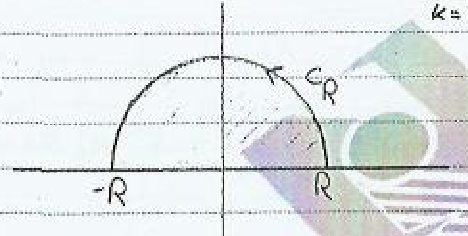
z_k النقاط الشاذة الواقعة في النصف العلوي من المستوي العقدي.

البرهان:

لنأخذ المنحني Γ_R المؤلف من القطعة المستقيمة $[-R,R]$ وقوس الدائرة C_R حيث تقع جميع النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ داخل هذا المنحني فيكون:

$$\int_{\Gamma_R} R(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = \int_{\Gamma_R} f(z)\, dz$$

$$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k > 0$$



$$\int_{-R}^{R} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx + \int_{C_R} R(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k > 0$$

بجعل $R \to \infty$ في طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx + \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} R(z)\, e^{i\alpha z}\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k > 0$$

ملاحظة: إذا كان $\alpha < 0$ فإن:

$$I = 2\pi i \sum_{k=1} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k < 0$$

نتيجة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\alpha x\, dx = \operatorname{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx\right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\alpha x\, dx = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx\right]$$

تعميم المبرهنة السابقة:

إذا كان $R(z)$ تابعاً نظامياً في نصف المستوي العلوي باستثناء عدد منته من النقاط الشاذة z_k $(k=\overline{1,n})$ ولكن a_k $(k=\overline{1,m})$ أقطاب بسيطة للتابع $R(z)$ واقعة على المحور الحقيقي وكان:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx \quad ; \quad \alpha > 0$$

متقارباً

عندئذ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\, e^{i\alpha x}\, dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{\text{res}}\, f(z) + \pi i \sum_{a_k} \underset{a_k}{\text{res}}\, f(z) \qquad \operatorname{Im} z_k > 0,\quad \operatorname{Im} a_k = 0$$

تمرين:

باستخدام نظرية الرواسب، احسب قيمة التكامل الآتي:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)\cos 5x}{x^2 - 2x + 5}\, dx$$

الحل : لنأخذ التكامل :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-1)e^{i5x}}{x^2-2x+5}\,dx$$

$$I = Re(I_1)$$

التابع المستكمل :

$$f(x) = \frac{(x-1)e^{i5x}}{x^2-2x+5}$$

نلاحظ أن درجة المقام أكبر من درجة البسط بدرجة واحدة وبالتالي التكامل I_1 متقارب ، لنأخذ التابع :

$$f(Z) = \frac{(Z-1).e^{i5Z}}{Z^2-2Z+5}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام وهي أصفار المعادلة :

$$Z^2-2Z+5=0$$

$$\Delta = 16i^2$$

$$\Rightarrow Z_1 = 1+2i$$

قطب بسيط يقع في النصف العلوي

$$Z_2 = 1-2i$$

قطب بسيط يقع في النصف السفلي . ومنه حسب مبرهنة :

$$I_1 = 2\pi i \operatorname*{res}_{Z_1} f(Z)$$

$$\operatorname*{res}_{Z_1} f(Z) = \frac{P(Z_1)}{Q'(Z_1)} = \left.\frac{(Z-1)e^{5iZ}}{(Z^2-2Z+5)'}\right|_{Z=Z_1} = \left.\frac{(Z-1)e^{5iZ}}{2Z-2}\right|_{Z=Z_1}$$

$$\operatorname*{res}_{Z_1} f(Z) = \left.\frac{e^{5iZ}}{2}\right|_{Z=Z_1} = \frac{e^{5i(1+2i)}}{2} = \frac{1}{2}e^{5i}e^{-10}$$

$$= \frac{e^{-10}}{2}(\cos 5 + i\sin 5)$$

$$\Rightarrow I_1 = 2\pi i \; \frac{e^{-10}}{2}(\cos 5 + i\sin 5)$$

$$= e^{-10}\pi(i\cos 5 - \sin 5) = (-\pi e^{-10}\sin 5) + i(\pi e^{-10}\cos 5)$$

$$I = Re I_1$$
$$= -\pi e^{-10}\sin 5 \in \mathbb{R}$$

تمرين :

بإستخدام نظرية الرواسب ، احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

الحل :

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

لنأخذ التكامل :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x}\,dx$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} Im(I_1)$$

$$f(Z) = \frac{e^{iZ}}{Z}$$

$Z=0$ قطب بسيط يقع على المحور الحقيقي

$$I_1 = \pi i \operatorname*{res}_{z=0} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \frac{P(0)}{q'(0)} = \frac{e^{iz}}{(z)'}\Big|_{z=0} = 1$$

$$I_1 = \pi i$$

$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

تمارين :

باستخدام نظرية الرواسب ، احسب قيمة التكاملات :

دورة $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \pi x}{x^5 - x}\, dx$

دورة $I = \int_{0}^{\infty} \frac{1 - \cos x}{x^2}\, dx$

دورة $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x^3 - 8}\, dx$

دورة $I = \int_{0} \frac{\sin mx}{(x+b)^2 (x^2+b^2)^2}\, dx$

حيث $b > 0$ & $m > 0$

دورة $I = \int_{0} \frac{\cos ax}{x^2 + b^2}\, dx$

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2}\, dx$$

حيث $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$

و $\alpha \neq \beta$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^3 - 8}\, dx$$

الحل: التابع المستعمل :

$$f(x) = \frac{\cos(2x)}{x^3 - 8}$$

درجة مقامه أكبر من درجة بسطه بثلاث درجات فهو متقارب

لنأخذ التكامل :

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^3 - 8}\, dx$$

$I = Re(I_1)$:

$$f(z) = \frac{e^{2iz}}{z^3 - 8}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام وهي أصفار المعادلة :

$$z^3 - 8 = 0$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[3]{8}$$

$$z_k = \sqrt[3]{|8|}\, e^{\frac{2\pi k i}{3}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2$$

$z_0 = 2$ قطب بسيط على المحور الحقيقي ..

$$Z_1 = 2 e^{\frac{2\pi}{3} i}$$ قطب بسيط يقع في النصف العلوي.

$$Z_2 = 2 e^{\frac{4\pi}{3} i}$$ قطب بسيط يقع في النصف السفلي.

$$I = 2\pi i \operatorname*{res}_{z_1} f(z) + \pi i \operatorname*{res}_{z_0} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z_0} f(z) = \frac{p(2)}{q'(2)} = \frac{e^{2iz}}{(z^3-8)'}\Bigg|_{z=2} = \frac{e^{4i}}{12}$$

$$= \frac{1}{12}(\cos 4 + i\sin 4)$$

$$\operatorname*{res}_{z_1} f(z) = \frac{p(z_1)}{q'(z_1)} = \frac{e^{2iz}}{3z^2}\Bigg|_{z=z_1}$$

$$= \frac{e^{4ie^{\frac{2\pi}{3}i}}}{12 e^{\frac{4\pi}{3}i}} = \frac{1}{12} e^{4ie^{\frac{2\pi}{3}i}} \cdot e^{-\frac{4}{3}\pi i}$$

$$= \frac{1}{12}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) e^{4i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$$

$$= \frac{1}{24}(-1 + i\sqrt{3}) e^{-2i - 2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{24}(-1 + i\sqrt{3})(\cos 2 - i\sin 2)$$

$$= \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{24}\left[(-\cos 2 + \sqrt{3}\sin 2) + i(\sqrt{3}\cos 2 + \sin 2)\right]$$

$$I_1 = 2\pi i \frac{e^{-2\sqrt{3}}}{24}\left[(-\cos 2 + \sqrt{3}\sin 2) + i(\sqrt{3}\cos 2 + \sin 2)\right] + \frac{\pi}{12} i (\cos 4 + i\sin 4)$$

$$I = -\frac{\pi}{12} e^{-2\sqrt{3}}(\sqrt{3}\cos 2 + \sin 2) - \frac{\pi}{14}\sin 4 \quad \in \mathbb{R}$$

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi x}{x^5 - x}\, dx$$

الحل: لنأخذ التكامل:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\pi i x}}{x^5 - x}\, dx$$

$$I = \operatorname{Im}(I_1)$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi i x}}{x^5 - x}$$

نلاحظ أن درجة المقام أكبر بخمس درجات من درجة البسط فالتكامل متقارب

$$f(z) = \frac{e^{\pi i z}}{z^5 - z}$$

النقاط الشاذة هي أصفار المقام وهي جذور المعادلة:

$$z^5 - z = 0$$

$$z(z-1)(z+1)(z+i)(z-i) = 0$$

$z = 0$ قطب بسيط يقع على المحور ox

$z = 1$ 〃 〃 〃 〃 〃 ox

$z = -1$ 〃 〃 〃 〃 〃 ox

$z = i$ 〃 〃 〃 في النصف العلوي

$z = -i$ 〃 〃 〃 〃 السفلي من المستوي العقدي.

$$I_1 = \pi i\left(\underset{0}{res}\, f + \underset{1}{res}\, f + \underset{-1}{res}\, f\right) + 2\pi i\, \underset{i}{f}$$

$$\underset{0}{res}\, f(z) = \frac{P(0)}{q'(0)} = \left.\frac{e^{\pi i z}}{5z^4-1}\right|_{z=0} = -1$$

$$\underset{1}{res}\, f(z) = \frac{P(1)}{q'(1)} = \frac{e^{\pi i}}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\underset{-1}{res}\, f(z) = \frac{P(-1)}{q'(-1)} = \frac{-1}{4}$$

$$\underset{i}{res}\, f(z) = \frac{P(i)}{q'(i)} = \frac{e^{-\pi}}{4}$$

$$I_1 = \pi i\left(-1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) + 2\pi i\, \frac{e^{-\pi}}{4}$$

$$= \frac{-3}{2}\pi i + \pi i\, \frac{e^{-\pi}}{2}$$

$$= \pi i\left(\frac{-3 + e^{-\pi}}{2}\right)$$

$$I = \pi\left(\frac{e^{-\pi} - 3}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

رابعاً: تكاملات حقيقية تؤول إلى تكاملات لتوابع متعددة القيم:

1- حساب التكامل من الشكل:

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} \cdot R(x)\, dx$$

حيث $R(x)$ تابع كسري عادي و α عدد حقيقي وليس صحيح
ويسمى هذا التكامل بتحويل "ميللين" للتابع $R(x)$

* لحساب هذا التكامل نختبر هل هذا التكامل متقارب أم متباعد.

إن التكامل I يكون متقارب إذا وفقط إذا كان:

1) ليس للتابع $R(z)$ أقطاب في نصف المحور $[0, +\infty)$

2) $z = 0$ ليست صفراً للتابع $R(z)$ أي:

$$R(0) \neq 0$$

3) $0 < \alpha < k$ حيث k نعين من العلاقة:

$$R(z) \underset{z \to \infty}{\sim} \frac{A}{z^k}$$

مبرهنة:

إذا كان التكامل:

$$I = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} R(x)\, dx$$

متقارباً، فإن:

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^{n} \underset{z_k}{res}\, f(z)$$

حيث z_k جميع أقطاب $R(z)$ و

$$f(z) = z^{\alpha-1} \cdot R(z)$$
$$= h(z) \cdot R(z)$$

حيث $h(z)$ فرع نظامي للتابع $z^{\alpha-1}$ والموجب على الضفة العليا للمقطع $[0, \infty)$.

تمرين "دورة" :

باستخدام نظرية الرواسب احسب التكامل:

$$I=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\,\frac{1}{x+1}\,dx$$

حيث $0<\alpha<1$

الحل:

إن هذا التكامل من نمط تحويل ميلين للتابع $R(x)=\frac{1}{x+1}$

إن هذا التكامل متقارب لأن:

1) ليس للتابع $R(z)=\frac{1}{z+1}$ أقطاب في المجال $[0,\infty)$

2) $z=0$ ليست قطب للتابع $R(z)$ لأن $R(0)=1$

3) $0<\alpha<k$ لأن:

$$\frac{1}{z+1}\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{1}{z}$$

$k=1$ وبالتالي $0<\alpha<1$ وبالتالي:

$$R(z)=\frac{1}{z+1}$$

$z=-1$ قطب بسيط لهذا التابع وحيد.

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$$

$$f(z)=z^{\alpha-1}\,\frac{1}{z+1}$$

فرع موجب على الجهة العليا للقطع $[0,\infty)$

وهو الفرع الذي يوافق $k=0$ (فرع رئيسي).

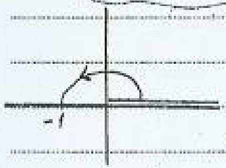
$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=\frac{P(-1)}{q'(-1)}=\left.\frac{z^{\alpha-1}}{(z+1)'}\right|_{z=-1}$$

$$=\left.e^{(\alpha-1)\ln z}\right|_{z=-1}=e^{(\alpha-1)\ln(-1)}$$

$$\boxed{\ln(-1)=\ln|-1|+i(\pi+2\pi k)\Rightarrow \ln(-1)=\pi i\ \ (k=0\text{ لأن})}\Rightarrow \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)=e^{(\alpha-1)\pi i}$$

$$=e^{\alpha\pi i}\,\overbrace{e^{-\pi i}}^{-1}$$

$$=-e^{\alpha\pi i}$$



نعوض في التكامل:

$$I=\frac{-2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\,e^{\pi i\alpha}$$

نضرب البسط والمقام بـ $e^{-\pi i\alpha}$

$$I=\frac{-2\pi i}{e^{-\pi i\alpha}-e^{\pi i\alpha}}=\frac{\pi}{\frac{e^{\pi i\alpha}-e^{-\pi i\alpha}}{2i}}$$

$$I=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}\in\mathbb{R}$$

تمرين "دورة 2010" "15 د"

احسب قيمة التكامل:

1) $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(x+1)}$

دورة 2) $I=\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}\,(x+1)}$

الحل: (1

$$I=\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\,(x+1)}$$

إن هذا التكامل يكتب بالشكل:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{-\frac{2}{3}}}{x+1}\,dx$$

وهو تحويل ميلين للتابع $R(x)$ حيث:

$$R(x)=\frac{1}{x+1}$$

حيث: $\alpha-1=-\frac{2}{3} \Leftarrow \alpha=\frac{-2}{3}+\frac{3}{3}$

$$\alpha=\frac{1}{3}$$

لنختبر فيما إذا كان التكامل متقارب.

1) ليس للتابع $R(z)=\frac{1}{z+1}$ أقطاب في المجال $[0,\infty)$

2) $R(0)=1$ وبالتالي $z=0$ ليست صفر لـ $R(z)$.

3) $R(z)=\frac{1}{z+1}\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{1}{z}$

$k=1$ و $\alpha=\frac{1}{3}$ إذن $0<\alpha<k$ محقق

ومنه التكامل متقارب

$z=-1$ قطب بسيط للتابع $R(z)=\frac{1}{z+1}$ وبالتالي هو قطب بسيط للتابع

$$f(z)=\frac{z^{-\frac{2}{3}}}{(z+1)}$$ ← فرع موجب على القيمة العليا للقطع

وبالتالي:

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\operatorname*{res}_{z=-1}f(z)$$

$$=\frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\operatorname*{res}_{z=-1}f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1}f(z)=\frac{P(-1)}{q'(-1)}=\left.\frac{z^{-\frac{2}{3}}}{(z+1)'}\right|_{z=-1}=\left.e^{-\frac{2}{3}\ln z}\right|_{z=-1}$$

القيمة الرئيسية للتابع اللوغاريتمي ←

$$=e^{-\frac{2}{3}\ln(-1)}=e^{-\frac{2}{3}\pi i}$$

$$\Rightarrow I=\frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}}\,e^{-\frac{2}{3}\pi i}=\frac{2\pi i}{e^{\frac{2\pi i}{3}}-e^{\frac{4\pi i}{3}}}$$

$$I=\frac{\pi}{\frac{e^{(\pi-\frac{\pi}{3})i}-e^{(\pi+\frac{\pi}{3})i}}{2i}}$$

$$=\frac{\pi}{\frac{e^{\frac{\pi}{3}i}-e^{-\frac{\pi}{3}i}}{2i}}=\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}}=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\in\mathbb{R}$$

تمرين: دورة

احسب التكامل الآتي:

$$I=\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{(1+x^2)^2}\,dx \quad ; 0<\alpha<4$$

الحل: إن هذا التكامل يمثل تحويل ميلين للتابع:

$$R(x)=\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

إن هذا التكامل متقارب لأن:

1) ليس للتابع $R(z)=\frac{1}{(1+z^2)^2}$ أقطاب في المجال $[0,\infty)$

2) $R(0)=1$ أي $z=0$ ليست صفر للتابع $R(z)$

3)
$$R(z)=\frac{1}{(1+z^2)}\underset{z\to\infty}{\sim}\frac{1}{z^4}$$

$k=4$ و $0<\alpha<4$ محقق

نلاحظ أن للتابع $R(z)$ قطبان هما $z=\mp i$ أقطاب من الدرجة الثانية، وهي أقطاب من الدرجة الثانية للتابع $f(z)$

$$f(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z^2)^2}$$

$$=h(z)\,\frac{1}{(1+z^2)^2}$$

لـ z موجب على الصفحة العليا

فيكون:

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left(\operatorname*{res}_{z=i}f(z)+\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)\right)$$

$$\operatorname*{res}_{z=i}f(z)=\left.\frac{\left(\frac{z^{\alpha-1}}{(z+i)^2}\right)'}{(2-1)!}\right|_{z=i}$$

$$=\left.\frac{(\alpha-1)z^{\alpha-2}(z+i)^2-2(z+i)z^{\alpha-1}}{(z+i)^4}\right|_{z=i}$$

$$=z^{\alpha-1}\left.\left[\frac{(\alpha-1)\frac{1}{z}(z+i)-2}{(z+i)^3}\right]\right|_{z=i}$$

القيم الرئيسية

$$=e^{(\alpha-1)(\ln i)}\left(\frac{(\alpha-1)(-i)(2i)-2}{(2i)^3}\right)$$

$$=e^{(\alpha-1)\frac{\pi}{2}i}\,\frac{2(\alpha-1)-2}{-8i}$$

$$=e^{(\alpha-1)\frac{\pi}{2}i}\,\frac{2\alpha-4}{-8i}=e^{(\alpha-1)\frac{\pi}{2}}\,\frac{\alpha-2}{-4i}$$

$$=e^{\alpha\frac{\pi}{2}i}\,e^{-\frac{\pi}{2}i}\,\frac{\alpha-2}{-4i}=\frac{\alpha-2}{4}\,e^{\alpha\frac{\pi}{2}i}$$

وبالمثل نجد

$$\operatorname*{res}_{z=-i}f(z)=\frac{\alpha-2}{4}\,e^{\frac{3\alpha\pi i}{2}}$$

$$\Rightarrow I=\frac{(2-\alpha)\pi}{4\sin\frac{\alpha\pi}{2}}\in\mathbb{R}\quad;\quad 0<\alpha<4$$

2- حساب التكامل من الشكل:

$$I=\int_0^1\left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha}R(x)\,dx$$

ويسمى هذا التكامل بالتكامل من النمط B حيث α عدد حقيقي وليس صحيح و $R(x)$ تابع كسري عادي.

إن التكامل I يتقارب إذا وفقط إذا كان:

1) ليس للتابع $R(z)$ أقطاب في المجال $[0,1]$

2) $-1<\alpha<1$

مبرهنة:

إذا كان التكامل I متقاربا فإن قيمته تعطى بالعلاقة:

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left[\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{z_k}f(z)+\operatorname*{res}_{\infty}f(z)\right]$$

حيث Z_k جميع النقاط الشاذة لـ $R(Z)$ و

$$f(Z) = \left(\frac{Z}{1-Z}\right)^{\alpha} R(Z)$$

$$= h(Z) \cdot R(Z)$$

حيث $h(Z)$ فرع نظامي موجب على الضفة العليا للقطع $[0,1]$ (فرع رئيسي)

و

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(Z) = -e^{\pi i \alpha}(\alpha C_0 + C_{-1})$$

حيث C_0 , C_{-1} نوجدها من نشر لوران التابع $R(Z)$ حول $Z=\infty$

<u>مثال :</u>

احسب قيمة التكامل :

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^{\alpha} R(x)\, dx$$

حيث $-1 < \alpha < 1$

و

$$R(x) = \frac{1}{1+x}$$

<u>الحل :</u> إن هذا التكامل من النمط B وهو متقارب لذلك :

1) ليس للتابع $R(Z) = \frac{1}{1+Z}$ أقطاب في المجال $[0,1]$

2) $-1 < \alpha < 1$

$Z=-1$ قطب بسيط للتابع $R(Z)$ فهي قطب بسيط للتابع :

$$f(Z) = \left(\frac{Z}{1-Z}\right)^{\alpha} \cdot \frac{1}{1+Z}$$

لـ فرع نظامي موجب على الضفة العليا للقطع $[0,1]$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \left[\operatorname*{res}_{-1} f(Z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(Z)\right]$$

$$\operatorname*{res}_{Z=-1} f(Z) = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \left.\frac{\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^{\alpha}}{(1+Z)'}\right|_{Z=-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{1+1}\right)^{\alpha} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{\alpha} = e^{\alpha[\ln(-\frac{1}{2})]}$$

$$= e^{\alpha(\ln|-\frac{1}{2}| + \pi i)} \qquad k=0$$

$$= e^{\alpha \ln \frac{1}{2}} \, e^{\pi i \alpha}$$

$$\operatorname*{res}_{Z=-1} f(Z) = e^{-\alpha \ln 2} \cdot e^{\pi i \alpha} = e^{\ln 2^{-\alpha}} \cdot e^{\pi i \alpha}$$

$$\operatorname*{res}_{Z=-1} f(Z) = 2^{-\alpha} \cdot e^{\pi i \alpha}$$

ولدينا :

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(Z) = -e^{\pi i \alpha}(\alpha C_0 + C_{-1})$$

لدينا :

$$R(Z) = \frac{1}{1+Z} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{Z}}$$

$$= \frac{1}{Z}\left[1 - \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} - \cdots\right] \quad ; \left|\frac{1}{Z}\right| < 1$$

$$R(Z) = \frac{1}{Z} - \frac{1}{Z^2} + \frac{1}{Z^3} \cdots$$

$$C_0 = 0 \,,\quad C_{-1} = 1$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(Z) = -e^{\pi i \alpha}(0+1) = -e^{\pi i \alpha}$$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \left(2^{-\alpha} e^{\pi i \alpha} - e^{\pi i \alpha} \right)$$

نضرب البسط والمقام بـ $e^{-\pi i \alpha}$

$$= \frac{2\pi i}{e^{-\pi i \alpha} - e^{\pi i \alpha}} \left(2^{-\alpha} - 1 \right)$$

$$= \frac{\pi i}{\frac{e^{\pi i \alpha} - e^{-\pi i \alpha}}{2i}} \left(1 - 2^{-\alpha} \right) = \frac{\pi (1 - 2^{\alpha})}{\sin \alpha} \in \mathbb{R}$$

تمرين: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{x+1}$$

الحل:

إنّ هذا التكامل من النمط B وهو متقارب لأنّ:

1) ليس للتابع $R(Z) = \frac{1}{Z+1}$ أقطاب في المجال $[0,1]$

2) $-1 < \alpha = \frac{3}{4} < 1$

$Z = -1$ قطب بسيط للتابع $R(Z)$ وهي قطب بسيط للتابع $f(Z)$

$$f(Z) = \left(\frac{Z}{1+Z} \right)^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+Z}$$

فرع ظاهري موجب على الحافة العليا للقطع $[0,1]$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \left[\operatorname*{res}_{Z=-1} f(Z) + \operatorname*{res}_{\infty} f(Z) \right]$$

$$\operatorname*{res}_{Z=-1} f(Z) = \frac{P(-1)}{Q'(-1)} = \left. \frac{\left(\frac{Z}{1-Z}\right)^{3/4}}{(1+Z)'} \right|_{Z=-1} = \left(\frac{-1}{2}\right)^{3/4}$$

$$= e^{\frac{3}{4} \ln\left(\frac{-1}{2}\right)} = e^{\frac{3}{4}\left(\ln \frac{1}{2} + \pi i \right)}$$

$$= e^{-\frac{3}{4} \ln 2} \, e^{\frac{3\pi i}{4}} = 2^{-\frac{3}{4}} \, e^{\frac{3\pi i}{4}}$$

"من التمرين السابق"

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(Z) = -e^{\pi i \alpha} = -e^{\frac{3\pi}{4} i}$$

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{\frac{6\pi i}{4}}} \left(2^{-\frac{3}{4}} e^{\frac{3\pi i}{4}} - e^{\frac{3\pi i}{4}} \right)$$

$$= \frac{\pi \left(1 - 2^{-3/4}\right)}{\frac{e^{\frac{3\pi i}{4}} - e^{-\frac{3\pi i}{4}}}{2i}} = \frac{\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)}{\sin 3\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{\pi \left(1 - \frac{1}{\sqrt[4]{8}}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \in \mathbb{R}$$

مثال: احسب التكامل الآتي:

$$I = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \frac{dx}{(x+2)^2}$$

الحل: إنّ هذا التكامل يمكن كتابته بالشكل:

$$I = \left(\frac{x}{1-x} \right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+2)^2}$$

إنّ هذا التكامل من النمط B حيث $\alpha = -\frac{1}{2}$ وهو متقارب لأنّ:

1) ليس للتابع $R(Z) = \frac{1}{(Z+2)^2}$ أقطاب في المجال $[0,1]$

2) $-1 < \alpha = -\frac{1}{2} < 1$

$z=-2$ قطب من الدرجة الثانية للتابع $R(z)$ فهي قطب من الدرجة الثانية للتابع

$$f(z)=\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{(z+2)^2}$$

فرع تحليلي موجب على الضفة العليا للقطع $[0,1]$

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left[\operatorname*{res}_{-2} f(z)+\operatorname*{res}_{\infty} f(z)\right]$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to-2}\left[\frac{d}{dz}\left((z+2)^2\cdot\frac{\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-\frac{1}{2}}}{(z+2)^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{z\to-2}\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{1-z}\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{-2}{3}\right)^{-3/2}\left(\frac{1}{9}\right)$$

$$=-\frac{1}{18}e^{-\frac{3}{2}\ln\left(-\frac{2}{3}\right)}$$

$$=-\frac{1}{18}e^{-\frac{3}{2}\left(\ln\frac{2}{3}+\pi i\right)}$$

$$=-\frac{1}{18}e^{-\frac{3}{2}\ln\frac{2}{3}}\cdot e^{-\frac{3\pi i}{2}}$$

$$=-\frac{1}{18}\left(\frac{2}{3}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot e^{\frac{-3\pi i}{2}}$$

$$=-\frac{1}{18}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{8}{27}}}(0+i)$$

$$=-\frac{1}{18}\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}}i=\frac{-1}{18}\frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}i$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2} f(z)=\frac{-\sqrt{3}}{12\sqrt{2}}i=\frac{-1}{12}\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}i$$

$$=-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$R(z)=\frac{1}{(z+2)^2}\sim\frac{1}{z^2}$$

$z=\infty$ صفر من الدرجة الثانية

$$C_0=C_{-1}=0$$

$$\operatorname*{res}_{\infty} f(z)=-e^{\pi i\alpha}(0+0)=0$$

$$I=\frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i(-\frac{1}{2})}}\left[-\frac{1}{8}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}i+0\right]$$

$$=\frac{\pi}{8}\sqrt{\frac{2}{3}}\in\mathbb{R}$$

3. حساب التكامل من الشكل:

$$I=\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m\cdot R(x)\,dx$$

حيث α عدد حقيقي & m عدد صحيح أكبر أو يساوي الواحد $(m\geq1)$

$R(x)$ تابع كسري عادي.

يتقارب هذا التكامل إذا تحققت شروط تقارب التكامل في تحويل ميللين

لذلك $(\ln x)^m$ لا يؤثر على عملية التقارب.

نلاحظ أن هذا التكامل يمكن الحصول عليه بإشتقاق تحويل ميللين

$R(x)$ m مرة.

$$\frac{d}{d\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1}R(x)\,dx=\int_0^\infty x^{\alpha-1}\ln x\,R(x)\,dx$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2}\int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^2 R(x)\,dx$$

- - - - - - - - - -

$$\frac{d^m}{d\alpha^m}\int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx = \int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx$$

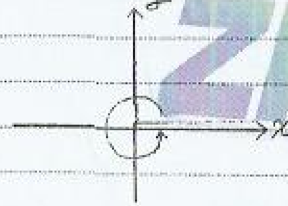
ومع ذلك نريد إيجاد طريقة مستقلة لحساب هذا النوع من التكاملات

ليكن:

$$h(z) = z^{\alpha-1}$$

الفرع النظامي للتابع $z^{\alpha-1}$ والموجب على الضفة العليا للقطع $[0,\infty)$

عندما



$z = x+0i > 0$ or $z \in \ell^+$

$h(x+0i) = |x|^{\alpha-1} e^{-2\pi i}$

$= x^{\alpha-1} > 0$

عندما:

$z = x - i0$ or $z \in \ell^-$

$h(\tilde{x}) = h(x-i0) = |x|^{\alpha-1} e^{i(\alpha-1)2\pi}$

على الضفة السفلى $= x^{\alpha-1} e^{2\pi i\alpha} e^{-2\pi i}$

$h(\tilde{x}) = h(\bar{x}) = h(x)\, e^{2\pi i\alpha}$

ولكن $\ln z$ فرع نظامي التابع اللوغاريتمي والذي يأخذ قيم حقيقية على الضفة العليا للقطع $[0,\infty)$ في الساحة $D = \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$

لدينا:

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z$$

عندما $z = x \in \ell^+$ من الضفة العليا فإن: $\arg z = 0$

$\Rightarrow \ln z = \ln|x| + 0i = \ln x$

عندما $z = x \in \ell^-$ من الضفة السفلى فإن: $\arg z = 2\pi$

$\Rightarrow \ln z = \ln|x| + 2\pi i = \ln x + 2\pi i$

لنضع:

$$f(z) = h(z)(\ln z)^m R(z)$$

فيكون:

$$f(x) = f(x+0i) = h(x)(\ln x)^m R(x)$$

وهو التابع المستكمل

$$f(\tilde{x}) = f(x-0i) = h(x)\, e^{2\pi i\alpha}(\ln x + 2\pi i)^m R(x)$$

مبرهنة:

برهن أن:

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\tilde{x})]\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{res}_{z_k} f(z)$$

حيث z_k جميع النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ و

$f(z) = z^{\alpha-1}(\ln z)^m R(z)$

$z^{\alpha-1}$ فرع موجب على الضفة العليا للقطع

$\ln z$ فرع حقيقي على الضفة العليا للقطع

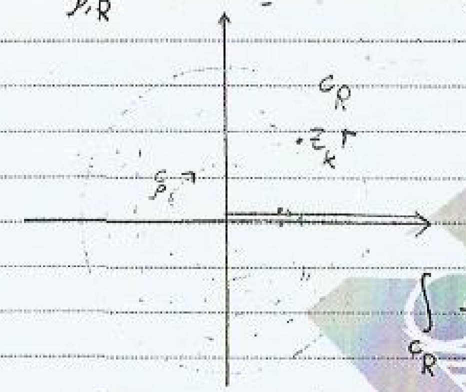
البرهان:

لنأخذ المنحني المغلق $\Gamma_{\rho,R}$ والمؤلف من الدائرتين:

$C_\rho: |z| = \rho$ صغير جداً ، $C_R: |z| = R$ كبير جداً

والجاليين الممتدين على ضفتي القطع العليا والسفلى $[\rho, R]$ ، $[R, \rho]$ حيث $R>0$ كبير بقدر كاف، و $\rho>0$ صغير بقدر كاف

حيث تقع جميع أقطاب التابع $R(Z)$ داخل المنحني المغلق $\Gamma_{\rho,R}$ والموضح بالشكل :



فيكون حسب نظرية الرواسب :

$$\int_{\Gamma_{\rho,R}} f(Z)\,dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

$$\int_{C_R} + \int_{C_\rho} + \int_{\rho}^{R} + \int_{R}^{\rho} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

بجعل $\rho \to 0$ & $R \to \infty$ نجد :

$$0 + 0 + \int_0^\infty f(x)\,dx + \int_\infty^0 f(\tilde{x})\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty [f(x) - f(\tilde{x})]\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

وهو المطلوب ...

حالات خاصة لحساب التكامل من الشكل :

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x)\,dx \quad ; \quad m \geq 1$$

α عدد حقيقي

1) α عدد ليس صحيح و $m = 1$

$$f(x) = h(x) . \ln x\, R(x)$$
$$f(\tilde{x}) = h(x)\, e^{2\pi i \alpha} (\ln x + 2\pi i) R(x)$$

بالطرح نجد :

$$f(x) - f(\tilde{x}) = h(x) . \ln x\, R(x) (1 - e^{2\pi i \alpha}) - h(x) e^{2\pi i \alpha}\, 2\pi i\, R(x)$$

بالمكاملة نجد :

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\tilde{x})]\,dx = (1 - e^{2\pi i \alpha}) I - 2\pi i e^{2\pi i \alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx$$

$$(1 - e^{2\pi i \alpha}) I - 2\pi i e^{2\pi i \alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} R(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

في هذه الحالة يمكن حساب التكامل المطلوب I وكذلك حساب تحويل ميللين التابع $R(x)$ ..

2) عندما α صحيح ...

$$I = \int_0^\infty (\ln x)^m . \tilde{R}(x)\,dx$$

حيث $\tilde{R}(x)$ تابع كسري عادي
لحساب هذا النوع من التكاملات نميز حالتين :
الحالة الأولى :
$\tilde{R}(x)$ تابع زوجي فإننا في هذه الحالة نكامل على المنحني المغلق $\Gamma_{\rho,R}$ والواقع في النصف العلوي للمستوي المركب باستثناء الصفر ، والموضح بالشكل :

$$\int_{\Gamma_{\rho,R}} f(Z)\,dZ = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

$$\int_{C_\rho} + \int_{C_R} + \int_{\rho}^{R} + \int_{-R}^{-\rho} = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

$$\int_0^\infty (\ln x)^m \tilde{R}(x)\,dx + \int_{-\infty}^{0} (\ln x + \pi i)^m \tilde{R}(x)\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{\operatorname{res}} f(Z)$$

Z_k الواقعة في النصف العلوي ...

الحالة الثانية:

عندما $\tilde{R}(x)$ تابع ليس زوجي فإننا نأخذ التابع:

$$f(Z) = \tilde{R}(Z)\,(\ln Z)^{m+1}$$

ونطبق المبرهنة وسنوضح ذلك بالأمثلة:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx$$

α عدد ليس صحيح نطبق المبرهنة

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\tilde{x})]\,dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \underset{Z_k}{res} f(Z)$$

Z_k جميع أقطاب $R(Z)$.

α عدد صحيح نميز حالتين

α عدد صحيح يصبح التكامل $\int_0^\infty \tilde{R}(x)(\ln x)^m dx$

$\tilde{R}(x)$ تابع زوجي نكامل على نصف دائرة واقعة في النصف العلوي بدون الصفر.

$\tilde{R}(x)$ تابع فردي $f(Z) = \tilde{R}(Z)\,(\ln Z)^{m+1}$ ثم نطبق المبرهنة فنحصل على المطلوب.

مثال: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \ln x \,\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

واستنتج من ذلك قيمة التكامل:

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

الحل: إن هذا التكامل من الشكل:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1}(\ln x)^m R(x)\,dx$$

حيث: $\alpha = \frac{1}{2} \Leftarrow \alpha - 1 = -\frac{1}{2}$ و $m=1$ (الحالة الأولى)

إن هذا التكامل متقارب لأن:

1) ليس للتابع $R(Z) = \frac{1}{(Z+1)^2}$ أقطاب في المجال $[0,\infty)$.

2) $R(0)=1$ إذن $Z=0$ ليس صفر التابع $R(Z)$

$$R(Z) \underset{Z\to\infty}{\sim} \frac{1}{Z^2} \qquad k=2$$

إذن: $0 < \alpha = \frac{1}{2} < 2$

$Z=-1$ قطب من الدرجة الثانية للتابع $R(Z)$.

$$f(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x \,\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f(\tilde{x}) = x^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{\pi i}(\ln x + 2\pi i)\,\frac{1}{(x+1)^2}$$

$$f(\tilde{x}) = -x^{-\frac{1}{2}} \ln x \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - x^{-\frac{1}{2}} \frac{2\pi i}{(x+1)^2}$$

$$f(x) - f(\tilde{x}) = 2x^{-\frac{1}{2}} \cdot \ln x \,\frac{1}{(x+1)^2} + 2\pi i\, x^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2}$$

نعوض في المبرهنة:

$$\int_0^\infty (f(x) - f(\tilde{x}))\,dx = 2\pi i \underset{Z=-1}{res} f(Z)$$

$$f(Z) = Z^{-\frac{1}{2}} \ln Z \,\frac{1}{(Z+1)^2}$$

فرع موجب على الضفة العليا $[0,\infty)$

فرع يأخذ قيم حقيقية على الضفة العليا للقطع $[0,\infty)$

34

$$2I + 2\pi i \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)^2}\, dx + 2\pi i \operatorname*{res}_{z=-1} f(z)$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to -1} \frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 \cdot z^{-\frac{1}{2}} \ln z \cdot \frac{1}{(z+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1}\left[-\frac{1}{2} z^{-\frac{3}{2}} \ln z + z^{-\frac{3}{1}}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1}\left[z^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\ln z + 1\right)\right] = (-1)^{-3/2}\left(-\frac{1}{2}\ln(-1) + 1\right)$$

$$\operatorname*{res}_{z=-1} f(z) = \frac{\pi}{2} + i$$

$$\Rightarrow 2I + 2\pi i \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\pi i\left(\frac{\pi}{2} + i\right) = \pi^2 i - 2\pi$$

بالمطابقة نجد:

$$2I = -2\pi \Rightarrow I = -\pi$$

$$2\pi \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)^2} = \pi^2 \Rightarrow \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$$

"سؤال الدورة لوحده علامة كاملة"

تمرين: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\, dx \quad ; \quad a > 0$$

واستنتج قيمة التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2}$$ "حسب الشكل الأول"

الحل: إن هذا التكامل من الشكل:

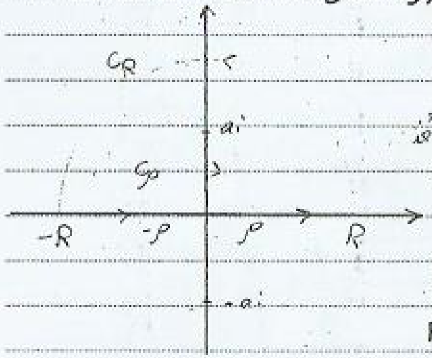
$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (\ln x)^m R(x)\, dx$$

$$R(x) = \frac{1}{x^2+a^2} \quad \& \quad m = 1 \quad , \quad \alpha = 1 \text{ عدد صحيح}$$

نأخذ المنحني العلوي المعتوي العكسي

تابع زوجي لذلك نأخذ المنحني $\Gamma_{\rho,R}$ الموضح بالشكل:

ولنأخذ التابع:



$$f(z) = \ln z \cdot \frac{1}{z^2+a^2}$$

فرع نظامي يأخذ قيم حقيقية على الضفة العليا

فيكون حسب نظرية الرواسب:

$$\int_{\Gamma_{\rho,R}} f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z)$$

نأخذ النقطة الواقعة في النصف العلوي

$$\int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{C_\rho} f(z)\, dz + \int_\rho^R f(x)\, dz + \int_{-R}^{-\rho} f(\tilde{x})\, dx = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z)$$

$$f(x) = \ln x \cdot \frac{1}{x^2+a^2} \quad , \quad f(\tilde{x}) = (\ln|x| + \pi i)\frac{1}{x^2+a^2}$$

نجعل $R \to \infty$ & $\rho \to 0$ نجد:

$$0 + 0 + \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\, dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\ln|x| + \pi i}{x^2+a^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{ai} f(z)$$

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\, dx + \int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+a^2}\, dx + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=ai} f(z)$$

$$2I + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i \operatorname*{res}_{ai} f(z)$$

$z = ai$ قطب بسيط للتابع $R(z)$ فهو قطب بسيط للتابع $f(z)$

$$\underset{ai}{res}\, f(z) = \frac{p(ai)}{q'(ai)} = \left.\frac{Ln\, z}{(z^2+a^2)'}\right|_{z=ai} = \frac{Ln\, ai}{2ai}$$

$$= \frac{1}{2ai}\left[Ln|ai| + i\left(\frac{\pi}{2}+0\right)\right] = \frac{ln a + \frac{\pi}{2} i}{2ai}$$

نعوض:

$$2I + \pi i \int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = 2\pi i\, \frac{ln a + \frac{\pi}{2} i}{2ai} = \frac{\pi}{a} ln a + \frac{\pi^2}{2a} i$$

بالمطابقة نجد:

$$2I = \frac{\pi\, ln a}{a} \Rightarrow I = \frac{\pi\, ln a}{2a} \in \mathbb{R}$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{2a} \in \mathbb{R}$$

تمرين: احسب قيمة التكامل:

$$I = \int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2}$$

الحل: إن هذا التكامل من الشكل:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} (ln x)^m R(x)\, dx$$

حيث $\alpha = 1$, $m = 0$

$R(x) = \frac{1}{(x^3+1)^2}$ ليس زوجي.

لذلك نأخذ التابع من الشكل: $f(z) = ln z . R(z)$

$$= ln z . \frac{1}{(z^3+1)^2}$$

النقاط الشاذة للتابع $R(z)$ هي جذور المعادلة:

$$z^3+1 = 0 \Rightarrow z^3 = -1$$

$$z_k = \sqrt[3]{|-1|}\, . e^{i\left(\frac{\pi+2\pi k}{3}\right)} \quad ; k = 0,1,2$$

$$z_0 = e^{\frac{\pi}{3} i} \quad , z_1 = e^{\pi i} = -1 \quad , z_2 = e^{\frac{5\pi}{3} i}$$

أقطاب من الدرجة الثانية ...

$$f(x) = \frac{ln x}{(x^3+1)^2} \quad , \quad f(\tilde{x}) = \frac{ln x + 2\pi i}{(x^3+1)^2}$$

نعوض في المبرهنة:

$$\int_0^\infty [f(x) - f(\tilde{x})]\, dx = 2\pi i \left(\underset{z_0}{res}\, f(z) + \underset{z_1}{res}\, f(z) + \underset{z_2}{res}\, f(z)\right)$$

$$-2\pi i \int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2} = 2\pi i \left(\underset{z_0}{res}\, f(z) + \underset{z_1}{res}\, f(z) + \underset{z_2}{res}\, f(z)\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^3+1)^2} = -\left[\underset{z_0}{res}\, f(z) + \underset{z_1}{res}\, f(z) + \underset{z_2}{res}\, f(z)\right]$$

$$\underset{z_0}{res}\, f(z) = \frac{1}{(2-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d}{dz}\left[(z-z_0)^2 \frac{1}{(z-z_0)^2(z-z_1)^2(z-z_2)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to z_0}\left(\frac{-2(z-z_1)(z-z_2)^2 - 2(z-z_1)^2(z-z_2)}{(z-z_1)^4(z-z_2)^4}\right)$$

$$= -2 \lim_{z\to z_0}\left[\frac{z-z_2+z-z_1}{(z-z_1)^3(z-z_2)^3}\right]$$

$$= -2\left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i} - e^{\frac{5\pi}{3}i} + 1}{(1)(-i3\sqrt{3})}\right) = -2\left(\frac{1+i\sqrt{3} - \frac{1}{2} + i\sqrt{3} + 1}{-3i\sqrt{3}}\right)$$

$$= (-2)\frac{\frac{3}{2} + i\frac{3\sqrt{3}}{2}}{3i\sqrt{3}} = \frac{3+i3\sqrt{3}}{i\sqrt{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{i\sqrt{3}}$$

مبدأ تغير الزاوية والتوابع الميرومورفية

تعريف :

المواضع $\{a\}$ للتابع $f(z)$ هي جذور المعادلة :

$$f(z)-a=0$$

أي أصفار التابع :

$$g(z)=f(z)-a$$

هام مبرهنة المشتق اللوغاريتمي :

ليكن $f(z)$ تابعاً نظامياً في الساحة G باستثناء أقطاب ولتكن D ساحة وحيدة الاتصال ومحدودة تقع مع حدودها Γ داخل G ولنفرض أنّ الحدود Γ لا تمر من أي صفر أو قطب للتابع $f(z)$ نجد :

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(N-P)$$

حيث N عدد أصفار $f(z)$ الواقعة داخل Γ مع مراعاة التكرار ،

و P عدد أقطاب $f(z)$ الواقعة داخل Γ مع مراعاة التكرار .

البرهان :

نفرض أنّ $z=a_k$ صفر من الدرجة n_k للتابع $f(z)$ عندئذ فإنّ :

$$f(z)=(z-a_k)^{n_k}\cdot g(z)$$

حيث $g(z)$ تابع نظامي ولا ينعدم في a_k .

$$f'(z)=n_k(z-a_k)^{n_k-1}\cdot g(z)+(z-a_k)^{n_k}\cdot g'(z)$$

نشكل التابع المستحدث :

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n_k}{z-a_k}+\frac{g'(z)}{g(z)}$$

حيث $\frac{g'(z)}{g(z)}$ تابع نظامي ولا ينعدم في a_k

/ /

و $z=a_k$ قطب بسيط للتابع $\frac{f'(z)}{f(z)}$

$$\operatorname*{res}_{a_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = c_{-1} = n_k$$

نفرض أنّ $z=b_k$ قطب من الدرجة P_k للتابع $f(z)$ عندئذ فإنّ :

$$f(z)=(z-b_k)^{-P_k}\cdot h(z) \longrightarrow$$ نظامي ولا ينعدم في b_k

$$f'(z)=-P_k(z-b_k)^{-P_k-1}h(z)+(z-b_k)^{-P_k}\cdot h'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{-P_k}{z-b_k}+\frac{h'(z)}{h(z)}$$

حيث $\frac{h'(z)}{h(z)}$ نظامي ولا ينعدم في b_k ومنه $z=b_k$ قطب بسيط للتابع $\frac{f'(z)}{f(z)}$

$$\operatorname*{res}_{b_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = -P_k$$

إذا كان للتابع $f(z)$ الأصفار a_k حيث $(k=\overline{1,s})$ والتي درجتها n_k وكان للتابع $f(z)$ الأقطاب b_k حيث $(k=\overline{1,m})$ والتي درجتها P_k ، الواقعة داخل Γ فحسب نظرية الرواسب :

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i\left[\underbrace{(n_1+n_2+\cdots+n_s)}_{N}-\underbrace{(P_1+\cdots+P_m)}_{P}\right]$$

$$\int_{\Gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(N-P)$$

مثال: إذا كان: $f(z) = \frac{z^2+1}{1-\cos 2\pi z}$

احسب:

$$\int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad ; \ \gamma : |z| = \pi$$

الحل:

$$I = 2\pi i\,(N - P)$$

حساب N:

$f(z) = 0$

أصفار بسيطة $z^2+1 = 0 \Rightarrow z = \mp i$

$\Rightarrow N = 2$

حساب P:

$1 - \cos 2\pi z = 0$

$2\sin^2 \pi z = 0$

$\sin \pi z = 0$

$\pi z = \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}$

$z_k = k \quad ; k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = 0 \quad ; k = 0$

$z_1 = 1 \quad ; k = 1$

$z_2 = 2 \quad ; k = 2$

$z_3 = 3 \quad ; k = 3$

$z_4 = -1 \quad ; k = -1$

$z_5 = -2 \quad ; k = -2$

$z_6 = -3 \quad ; k = -3$

$P = 14$

$$I = 2\pi i\,(2 - 14) = -24\pi i$$

تعميم المبرهنة السابقة:

إذا كان $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً في D ومستمراً على الحدود Γ، وكان $\varphi(z)$ تابع تحليلي في D وعلى الحدود Γ

عندئذ:

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\, \frac{f'(z)}{f(z) - A}\, dz = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i\, \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{n} \beta_j\, \varphi(b_j)}$$

حيث: a_i صفر من الدرجة α_i ويقع داخل Γ لـ $f(z)$

b_j قطب " " β_j " " Γ لـ $f(z)$

و A ثابت مركب..

تمرين:

إذا كان $f(z) = e^z + 3$ احسب التكامل:

$$I_1 = \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

$$I_2 = \int_\Gamma z \cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

حيث:

$$\Gamma : |z+1| = 4$$

الحل:

حساب N: $f(z) = 0$

$e^z + 3 = 0$

$e^z = -3$

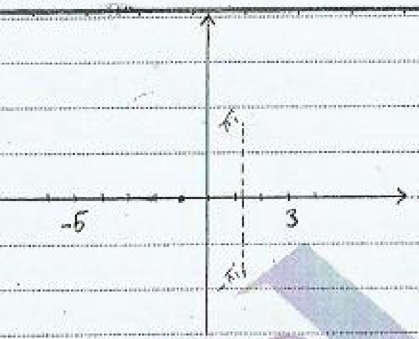
$z = \ln|-3| + i(\pi + 2\pi k)$

$z_k = \ln 3 + i(\pi + 2\pi k) \quad ; k \in \mathbb{Z}$

$z_0 = \ln 3 + \pi i \quad ; k = 0$

$z_1 = \ln 3 - \pi i \quad ; k = -1$

أصفار بسيطة تقع داخل γ..



حساب P :

P = 0 لأن التابع $f(z)$ نظامي في $\mathbb{C}$

$$I_1 = 2\pi i(2-0) = 4\pi i$$

$$I_2 = \int_\Gamma z \frac{f'}{f} dz$$

$\varphi(z) = z$

نظامي في $\mathbb{C}$

وبالتالي نظامي داخل Γ

$$I_2 = 2\pi i\left[1.(\ln 3 + \pi i) + 1(\ln 3 - \pi i) - 0\right] = 2\pi i \, 2\ln 3 = \pi i \ln 81$$

تمارين "وظيفة":

إذا كان: $f(z) = \frac{ch\, z}{e^{iz}-1}$

احسب: 1) $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f}\, dz$

2) $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{z} \frac{f'}{f}\, dz$

$\Gamma : |z| = 8$

تمارين "وظيفة":

$$f(z) = \frac{(z^2+1)^2}{(z^2+2z+2)^3}$$

1) $I_1 = \int_\Gamma \frac{f'}{f}\, dz$

2) $I_2 = \int_\Gamma z^2 \cdot \frac{f'}{f}\, dz$

حيث: $\Gamma : |z| = 4$

هامة: مبرهنة "مبدأ تغير الزاوية":

ضمن نفس معطيات المبرهنة السابقة يكون:

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi(N-P)$$

البرهان:

بالفرض لدينا $f(z)$ نظامي و $f(z) \neq 0$ على Γ وبالتالي:

$f(z) \neq 0$ في جوار ما للمنحني Γ وفي هذا الجوار يمكن عزل فرع نظامي التابع $\ln z$

لدينا: $\frac{d\ln f(z)}{dz} = \frac{f'(z)}{f(z)}$

حسب المبرهنة السابقة:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f'}{f}\, dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{d\ln f(z)}{dz}\, dz = N-P$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma d\ln f(z) = N-P$$

$$\frac{1}{2\pi i}\Delta_\Gamma \ln f(z) = N-P$$

لدينا:
$$\ln f(Z) = \ln|f(Z)| + i \arg f(Z)$$
$$\Delta_\Gamma \ln f(Z) = \underbrace{\Delta_\Gamma \ln|f(Z)|}_{0} + i\,\Delta_\Gamma \arg f(Z)$$
$$\Rightarrow \Delta_\Gamma \ln f(Z) = i\,\Delta_\Gamma \arg f(Z)$$
$$\frac{1}{2\pi i}\cdot i \cdot \Delta_\Gamma \arg f(Z) = N - P$$
$$\Rightarrow \Delta_\Gamma \arg f(Z) = 2\pi(N-P)$$

تمرين: دورة: إذا كان:
$$f(Z) = \frac{Z^2+i}{(Z^2+1)(Z-2)}$$
حيث: $\Gamma : |Z| = \pi$

احسب: $\Delta_\Gamma \arg f(Z)$

الحل: حسب مبرهنة مبدأ تغير الزاوية:
$$\Delta_\Gamma \arg f(Z) = 2\pi(N-P)$$
لحساب N:
$$f(Z) = 0$$
$$Z^2 + i = 0$$
$$Z = \mp e^{-\frac{\pi}{4}i}$$
أصفار بسيطة داخل Γ
$$Z^2 = -1$$
$$Z = \mp 1 \quad , \quad Z = 2$$
أقطاب بسيطة داخل Γ
$$N = 2 \quad , \quad P = 3$$
$$\Delta_\Gamma \arg f = 2\pi(2-3) = -2\pi$$

ملاحظة:
إن عدد الأصفار والأقطاب للتابع $f(Z)$ في الساحة D في المبرهنة السابقة منته..
البرهان:
إن عدد أقطاب $f(Z)$ إن وجد منته داخل Γ لأنه إذا كان عدد الأقطاب غير منته لتوجب وجود نقطة تراكم (نقطة تجمع) لهذه الأقطاب وهذه النقطة شاذة غير معزولة وهذا يناقض فرضنا أن التابع $f(Z)$ نظامي باستثناء أقطاب (ميرومورفي).
كما أن أصفار $f(Z)$ إن وجد منته داخل Γ لأنه إذا كان عدد الأصفار غير منته لشكلت متتالية $\{Z_n\}$ لها نقطة تراكم Z^*
$$\lim_{n\to\infty} Z_n = Z^*$$
حيث:
$$f(Z^*) = 0$$
$$f(Z_n) = 0$$
وبالتالي حسب مبرهنة الوحدانية $f(Z) = 0$ على D وهذا يناقض فرضنا أن $f(Z)$ لا يملك صفر على Γ..

تمرين: اشرح المعنى الهندسي لتغير الزاوية $\Delta_\Gamma \arg f(Z)$ وبين متى يكون هذا التغير مساوياً $2\pi N$ حيث: N هو عدد الأصفار للتابع $f(Z)$ الواقعة داخل المنحني المغلق Γ وبين متى يكون عدد الأصفار يساوي عدد الأقطاب...

الحل:
$\Delta_\Gamma \arg Z$: هو مقدار الزاوية التي يصفها الشعاع Z عندما يمسح المنحني Γ مرة واحدة بالاتجاه الموجب من بدايته إلى نهايته..

Nagham

$w = f(z)$: هو تحويل (تطبيق أو تابع) ينقل النقطة (المتغير) z من المستوي z إلى النقطة w من المستوي w

وبالتالي ينقل المنحني Γ إلى $\tilde{\Gamma}$.

- إن تغير الزاوية $\Delta_\Gamma \arg f(z)$ يمثل هندسياً عدد الدورات الكاملة حول النقطة $w=0$.

والتي يصنعها المتغير $w=f(z)$ عندما ترسم z المنحني Γ أي هو عدد دورات المتغير $w=f(z)$ عندما ترسم w المنحني $\tilde{\Gamma}$ صورة المنحني Γ.

ويكون:

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 2\pi N$$

عندما يكون $f(z)$ نظامي داخل Γ.

أي $P = 0$

ويكون عدد الأصفار يساوي عدد الأقطاب الواقعة داخل Γ عندما

$$\Delta_\Gamma \arg f(z) = 0$$

أي:

$$2\pi(N-P) = 0$$

$$\Rightarrow N = P$$

"تطبيق هام على مبدأ تغير الزاوية نأخذ مبرهنة روشيه"

"مبرهنة روشيه" هامة

إذا كان $f(z)$ و $g(z)$ تابعان نظاميان في الساحة الوحيدة الاتصال والمحدودة D، وكان على الحدود Γ

$$|f(z)| > |g(z)| \qquad \forall z \in \Gamma$$

فإن التابعين: $f(z)$ و $F = f(z) + g(z)$ نفس عدد الأصفار الواقعة داخل Γ...

البرهان:

إن $f(z) \neq 0$ على جميع نقاط Γ لأن:

$$|f(z)| > |g(z)| \geq 0$$

من ناحية ثانية:

$f(z) + g(z) \neq 0$ على Γ لأن:

$$|f(z) + g(z)| \geq \big||f(z)| - |g(z)|\big| > 0$$

وبالتالي يمكن تطبيق مبدأ تغير الزاوية على التابعين $f(z)$ و $F = f(z) + g(z)$

لنرمز بـ N_F لأصفار التابع $F(z)$ الواقعة داخل Γ.

وبـ N_f " " $f(z)$ " " Γ.

وحسب مبدأ تغير الزاوية يكون:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z) = N_f$$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F(z) = N_F$$

حيث:

$$P_F = P_f = 0$$

" لأن $f(z)$ و $g(z)$ توابع نظامية "

من جهة أخرى لدينا:

$$f(z) + g(z) = f(z)\left[1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right]$$

بتطبيق تغير الزاوية على طرفي العلاقة الأخيرة نجد:

$$\Delta_\Gamma \arg F(z) = \Delta_\Gamma \arg f(z) + \Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg F(z) = \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg f(z) + \frac{1}{2\pi} \Delta_\Gamma \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)$$

حتى يكون $N_F = N_f$ يجب أن نبرهن أن:

$$\Delta_C \arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right) = 0$$

بما أنه عندما تمسح z المنحني C فإن: $\omega = 1 + \frac{g(z)}{f(z)}$ تمسح المنحني $\tilde{C}$ الواقع في الدائرة: $|\omega - 1| < 1$ لأن:

بالفرض لدينا:

$$|f(z)| > |g(z)|$$

$$\Rightarrow \left|\frac{g(z)}{f(z)}\right| < 1$$

$$\Rightarrow |\omega - 1| < 1$$

وبذلك لا يمكن للشعاع ω الالتفاف حول الصفر.

ومنه:

$$\Delta_C \arg \frac{g(z)}{f(z)} = 0$$

وهذا يؤدي إلى أن:

$$N_F = N_f$$

أي أن عدد أصفار التابع $f(z)$ الواقعة داخل C يساوي عدد أصفار التابع $f(z)+g(z)$ الواقعة داخل C

وهو المطلوب...

ملاحظة: تفيد هذه المبرهنة في حساب عدد أصفار تابع وحيد القيمة....

مثال: أوجد عدد أصفار التابع:

$$F(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$$

الواقعة داخل الدائرة $|z| = 1$

الحل: بوضع:

الأكبر أمثالاً لدينا الدائرة أحادية

$$f(z) = \boxed{-6}\, z^4$$

$$g(z) = z^9 + 3z - 1$$

تابعان نظاميان في المستوي ⇐ فهما نظاميان داخل دائرة الوحدة.

$$|f(z)| = |-6z^4| = |-6||z^4| = 6$$

$$|g(z)| = |z^9 + 3z - 1| \le |z|^9 + 3|z| + |-1| = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$$

إذاً شروط مبرهنة روشيه محققة.

وبالتالي للتابعين:

$f(z) = -6z^4$ و $f(z) + g(z)$

نفس عدد الأصفار الواقعة داخل الدائرة $|z| = 1$

وبما أن التابع $f(z) = -6z^4$ أربعة أصفار ($z = 0$ مكرر أربع مرات) داخل $|z| = 1$ فإن للتابع

$$F(z) = z^9 - 6z^4 + 3z - 1$$

أربعة أصفار داخل $|z| = 1$

وهو المطلوب

نختار أكبر قوة لـ $f(z)$ عندما لا تكون العاملة دائرة الوحدة

" تطبيق هام على مبرهنة روشيه: أخذ المبرهنة الأساسية في الجبر "

هامة **المبرهنة الأساسية في الجبر:**

لكل كثيرة حدود:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

حيث: $a_n \neq 0$

n من الأصفار في المستوي $\mathbb{C}$ (مع مراعاة التكرار)...

البرهان:

لنأخذ $f(z) = a_n z^n$

و $g(z) = a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$

إن $f(z)$ و $g(z)$ توابع نظامية في المستوي $\mathbb{C}$

من ناحية ثانية لدينا:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = 0$$

أي أن التابع $\frac{g(z)}{f(z)}$ محدود في جوار اللانهاية

وبالتالي يمكن أن نكتب:

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1$$

في جميع النقاط التي تحقق $|z| \geq R$

$$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \Gamma \; ; \; \Gamma : |z| = R$$

إذن فرض مبرهنة روشيه محقق وبالتالي التابعين: $f(z) = a_n z^n$ و $P_n(z) = f(z) + g(z)$

نفس عدد الأصفار الواقعة داخل Γ

وبما أن للتابع $f(z) = a_n z^n$

n صفر ($z = 0$ مكرر n مرة) واقعة داخل Γ

فإن للتابع $P_n(z)$ n من الأصفار الواقعة داخل Γ

أي لكل كثيرة حدود من الدرجة n تماماً n من الأصفار...

تمرين "دورة":

أثبت أنه إذا كان: $|\alpha| > e$

فإن للمعادلة:

$$\alpha z^n = e^z$$

n جذراً داخل $|z| = 1$

الحل: لنفرض:

$$f(z) = \alpha z^n$$
$$g(z) = -e^z$$

إن $f(z)$ و $g(z)$ توابع نظامية في المستوي المركب فهي نظامية داخل دائرة الوحدة.

وعلى الدائرة $|z| = 1$ يكون لدينا:

$$|f(z)| = |\alpha z^n| = |\alpha| . |z|^n$$
$$\Rightarrow |f(z)| = |\alpha|$$

$$|g(z)| = |-e^z| = |-e^x . e^{iy}|$$
$$\Rightarrow |g(z)| = e^x \leq e$$

لأن $x \leq 1$ على دائرة الوحدة

وبما أن $|\alpha| > e$ فإن:

$$|f(z)| > |g(z)|$$

على الدائرة $|z| = 1$

إذن التابعين:

$$f(z) = \alpha z^n$$
$$f + g = \alpha z^n - e^z$$

نفس عدد الأصفار الواقعة داخل الدائرة $|Z| = 1$

وبما أن التابع:

$$f(Z) = \alpha Z^n$$

n صفراً ($Z = 0$ مكرر n مرة) واقعة داخل الدائرة $|Z| = 1$

فإن للمعادلة:

$$\alpha Z^n = e^Z$$

"n" من الأصفار الواقعة داخل دائرة الوحدة.

مثال: إذا كان:

$$f(Z) = 5i\, Z^6 - e^Z$$

احسب:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\, dZ \;;\; \gamma : |Z| = 1$$

الحل: "وظيفة"

$$I = 12\pi i$$

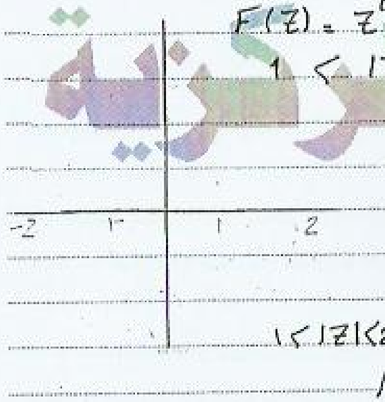
تمرين:

أوجد عدد أصفار التابع:

$$F(Z) = Z^4 - 5Z + 1$$

الواقعة في الحلقة: $1 < |Z| < 2$

الحل:



لنرمز بـ N_1 لعدد أصفار التابع $F(Z)$ الواقعة داخل الدائرة $|Z| = 1$

وبـ N_2 لعدد أصفار التابع $F(Z)$ الواقعة داخل الدائرة $|Z| = 2$

فيكون عدد الأصفار الواقعة في الحلقة $1 < |Z| < 2$ هو:

$$N = N_2 - N_1$$

← حساب N_1: لنضع

$$f(Z) = -5Z$$

$$g(Z) = Z^4 + 1$$

وهما تابعين نظاميين في وعلى داخل دائرة الوحدة

$$|f(Z)| = |-5||Z| = 5$$

$$|g(Z)| = |Z^4 + 1| \leq |Z|^4 + |1| = 2$$

$$\Rightarrow |f(Z)| > |g(Z)|$$

على الدائرة $Z = 1$

وبالتالي للتابعين $f(Z)$ و $F(Z)$ نفس عدد الأصفار داخل دائرة الوحدة وبما أن للتابع:

$$f(Z) = -5Z$$

صفر واحد داخل دائرة الوحدة

فإن للتابع:

$$F(Z) = Z^4 - 5Z + 1$$

صفر واحد داخل دائرة الوحدة

ومنه

$$N_1 = 1$$

← حساب N_2:

$$f(Z) = Z^4$$

$$g(Z) = -5Z + 1$$

وهما تابعين نظاميين داخل الدائرة $|Z| = 2$

$$|f(Z)| = |Z| = |Z|^4 = 2^4 = 16$$

$$|g(Z)| = |-5Z + 1| \leq |-5Z| + |1| = |5|.|Z| + 1 = 11$$

$$\Rightarrow |f(Z)| > |g(Z)|$$

على الدائرة $|Z| = 2$

وبالتالي حسب روشيه للتابعين:

$f(z) = z^4$

و $F(z) = z^4 - 5z + 1$

تقبل عدد الأصفار الواقعة داخل $|z| = 2$

وبما أن للتابع $f(z) = z^4$

أربع أصفار "$z = 0$ صفر مكرر 4 مرات"

تقع داخل الدائرة $|z| = 2$ فإن التابع $F(z)$ أربع أصفار

تقع داخل $|z| = 2$

ومنه: $N_2 = 4$

وبالتالي: $N = 4 - 1 = 3$

إذن يوجد ثلاث أصفار للتابع $F(z)$

تقع داخل $1 < |z| < 2$

تمرين: "وظيفة"

إذا كان: $f(z) = z^7 - 5z^3 + 12$

احسب:

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \quad ; \gamma : |z| = 2$$

تمرين:

أوجد عدد أصفار المعادلة:

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

الواقعة في الحلقة:

$$1 < |z| < 2$$

الحل: N_1 عدد الأصفار داخل الدائرة $|z| = 1$

N_2 .. .. $|z| = 2$

$N = N_2 - N_1$

← حساب N_1:

لنأخذ: $f(z) = 12$

$g(z) = z^7 - 5z^3$

تابعين نظاميين في المستوي المركب وبالتالي فهما نظاميين على الدائرة $|z| = 1$. على الدائرة $|z| = 1$ لدينا:

$|f(z)| = |12| = 12$

$|g(z)| = |z^7 - 5z^3|$

$\leq |z|^7 + 5|z|^3 = 6$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$

وبالتالي حسب مبرهنة روشيه للتابعين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$

نفس عدد الأصفار داخل الدائرة $|z| = 1$ وبما أنه ليس

للتابع $f(z) = 12$ أي صفر فإنه ليس للمعادلة:

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

أي جذر في الدائرة $|z| = 1$

$N_1 = 0$

← حساب N_2:

$f(z) = z^7$

$g(z) = -5z^3 + 12$

تابعين نظاميين في $\mathbb{C}$ فهما نظاميين في الدائرة $|z| = 2$

وعلى الدائرة $|z| = 2$:

$|f| = |z|^7 = 2^7 = 128$

$|g| = |-5z^3 + 12| \leq 5|z|^3 + 12 = 40 + 12$

$= 52$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)|$

وبالتالي حسب مبرهنة روشيه التابعين $f(z)$ و $f(z)+g(z)$
نفس عدد الأصفار داخل الدائرة $|z|=2$ وبما أن التابع

$f = z^7$

سبعة أصفار داخل $|z|=2$ ($z=0$ صفر من الدرجة السابعة)
فإن المعادلة:

$$z^7 - 5z^3 + 12 = 0$$

سبعة أصفار داخل الدائرة $|z|=2$.

$N_2 = 7$

$\Rightarrow N = 7 - 0 = 7$

حل التمرين الوظيفة:

$f = z^7 - 5z^3 + 12$

احسب:

$$\int_\gamma \frac{f'}{f}\, dz \quad ; \gamma : |z| = 2$$

$I = 2\pi i (N - P)$

$N = 7$ حسب مبرهنة روشيه

$P = 0$ لأن التابع نظامي...

تمرين دورة:

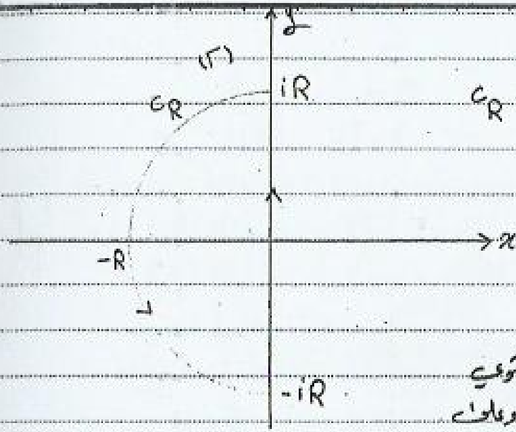
برهن أن المعادلة: $z + \lambda - e^z = 0$

حيث: $\lambda > 1$

جذراً واحداً في نصف المستوي الأيسر...

الحل: لنأخذ المنحني المغلق Γ المؤلف من القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\mp iR$ وقوس الدائرة $|z|=R$ الواقع في النصف الأيسر.

$\Gamma = C_R \cup I$



حيث:

$C_R = |z| = R \; ; \; Re\, z < 0$

$I = [-iR, iR]$

والموضح بالشكل:

لنأخذ:

$f(z) = z + \lambda$

$g(z) = -e^z$

وهما تابعان نظاميان في المستوي العقدي فهما نظاميان داخل وعلى المنحني Γ

- من أجل $z \in I$

$|f(z)| = |iy + \lambda|$

$= \sqrt{y^2+\lambda^2} \geq \lambda > 1$

$|g(z)| = |-e^{iy}| = 1$

$\Rightarrow |f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in I$

- من أجل $z \in C_R$ حيث $Re\, z < 0$

$|f(z)| = |z+\lambda| \geq |z| - |\lambda|$

$|f| \geq R - \lambda > 1$

$|g(z)| = |-e^z| = |-e^x||e^{iy}|$

لأن $x<0$

$|g| = e^x < 1$

$\Rightarrow |f| > |g| \quad \forall z \in C_R$

ومنه حسب مبرهنة روشيه للتابعين f و $f+g$ نفس عدد الأصفار داخل Γ وبما أن التابع:

/ /

$$f = z + \lambda$$

جذر واحد واقع داخل γ كافٍ للمعادلة :

$$z + \lambda - e^{z} = 0$$

جذر واحد واقع داخل γ أي في النصف الأيسر...

نشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة

عرفنا سابقاً التابع الميرومورفي بأنه تابع إن وجد له نقاط شاذة في $\mathbb{C}$ فهي أقطاب أو هو التابع الذي يملك في كل جزء محدود في المستوي المركب ليس أكثر من عدد منتهٍ من الأقطاب.

وقد وجدنا أنه إذا كان $f(z)$ يملك في $\bar{\mathbb{C}}$ فقط عدد منتهٍ من الأقطاب فهو تابع كسري عادي...

مثال :

$$f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-3)}$$

عدد منتهٍ من الأقطاب (كسري عادي)

$$f_1(z) = \frac{1}{e^{z}-1} \quad , \quad f_2(z) = tg\, z \quad , \quad f = cotg\, z$$

[illegible]

ولنا هذا يدعونا على صحة المبرهنة الآتية :

مبرهنة : " نشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة له عدد منتهٍ من الأقطاب "

إذا كان $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً له عدد منتهٍ من الأقطاب في $\bar{\mathbb{C}}$ فإنه ينشر بالشكل :

$$f(z) = A + f_0(z) + \sum_{k=0}^{s} f_k(z)$$

حيث $f_0(z)$ هو القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول $z=\infty$

/ /

$f_k(z)$ القسم الرئيسي من سلسلة لوران حول a_k حيث a_k $(k=\overline{1,s})$ أقطاب f.

$$A = \lim_{z\to\infty} \left(f(z) - f_0(z)\right)$$

- ماذا لو كان عدد الأقطاب غير منتهٍ في $\bar{\mathbb{C}}$ كيف يتم نشر هذا التابع في كسور بسيطة ؟

مثل : $cotg\, z$ ، $\frac{1}{\sin z}$ ، ......

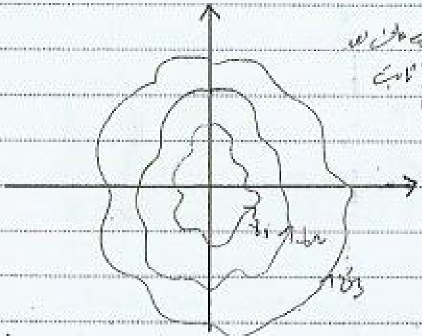
تعريف :

إذا كانت $\{\gamma_k\}$ متتالية (أسرة) من المنحنيات المغلقة تحقق :

1. متداخلة (أي كل منحني واقع داخل المنحني الذي يليه أي γ_k واقع داخل γ_{k+1})......

2. $z=0$ تقع داخل جميع المنحنيات γ_k

3.



$$\frac{S_k}{d_k} \leq C \quad : k = 1,2,\dots$$

طول أي منحني على بعد عن المبدأ < ثابت (محدود)

S_k هو طول γ_k

d_k هو بعد γ_k عن $z=0$

$c>0$ ثابت

$$\lim_{k\to\infty} d_k = \infty$$

عندئذ نسمي $\{\gamma_k\}$ جملة منحنيات عادية (نموذجية) للسيالة.

دورة

مبرهنة: "نشر تابع ميرومورفي له عدد غير منته من الأقطاب في كسور بسيطة"

النص الأول:

ليكن $f(z)$ تابعاً ميرومورفياً يملك عدد غير منته من الأقطاب البسيطة z_k والذي يحقق الشروط:

1) الأقطاب البسيطة z_k مرتبة وفق تزايد طويلاتها أي:

$$|z_1| \le |z_2| \le |z_3| \le \dots \le |z_k| \le \dots$$

2) $z=0$ نقطة عادية للتابع $f(z)$..

3) $f(z)$ محدود على جملة منحنيات عادية $\{\gamma_k\}$ أي:

$$|f(z)| \le M \quad \forall z \in \gamma_k$$

عندئذ فإن:

صيغة نشر تابع ميرومورفي

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} \right)$$

حيث:

$$A_k = \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$$

وتكون السلسلة متقاربة بانتظام في أي ساحة محدودة موضوعة في الأقطاب z_k

النص الثاني:

ضمن نفس المعطيات السابقة وباستبدال الشرط 3) بالشرط:

$$|f(z)| \le M \cdot |z|^p$$

حيث $p \ge 0$

فإن:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{p} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\frac{1}{z-z_k} + \frac{1}{z_k} + \frac{z}{z_k^2} + \dots + \frac{z^p}{z_k^{p+1}} \right]$$

حيث:

$$A_k = \operatorname*{res}_{z_k} f(z)$$

نلاحظ أن هذه العلاقة هي تعميم العلاقة السابقة وتقبل بدون برهان.

ملاحظة:

إن الشرط (2) في المبرهنة السابقة وهو أن يكون $z=0$ نقطة عادية للتابع $f(z)$ غير ضروري في التابع الذي نشره في كسور بسيطة ويتم ذلك بأخذ التابع $f(z)$ مطروح منه القسم الرئيسي حول z_k..

تطبيق نموذجي "يعتبر مبرهنة يستخدم في حل التمارين الأخرى":

انشر التابع $\cot g\, z$ في كسور بسيطة..

الحل:

لنتحقق من شروط المبرهنة البسيطة "النص الأول":

نلاحظ أن $z=0$ ليست نقطة عادية للتابع $\cot g\, z$ وإنما قطب بسيط لذلك نأخذ التابع:

$$f(z) = \cot g\, z - \frac{1}{z}$$

• التابع $f(z)$ ميرومورفي وله عدد غير منته من الأقطاب البسيطة:

$$z_k = \pi k \quad ; k \in \mathbb{Z}^*$$

والمرتبة وفق تناقص طويلاتها أي :

$$|\pi| < |2\pi| < |3\pi| < \ldots\ldots$$

• $z = 0$ نقطة عادية للتابع $f(z)$.

• لنختار جملة منحنيات عادية $\{\gamma_k\}$ بحيث :

γ_1 تقع داخل $\mp\pi$

γ_2 تقع داخل $\mp 2\pi$.

وهكذا...

فنجد أنه $|f| \leq M$ على γ_k

أي $f(z)$ محدود على جملة منحنيات عادية

إذاً شروط نشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة محقق وبالتالي :

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k\left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k}\right)$$

بالحساب نجد : $A_k = \operatorname*{res}_{z_k} f(z) = 1$

$$f(0) = 0$$

نبدل في العلاقة فنجد :

ماعدا الصفر

$$f(z) = 0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty}{}^{*}\left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k}\right)$$

لأن k تأخذ جميع القيم الصحيحة (السالبة والموجبة)

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k} + \frac{1}{z + \pi k} - \frac{1}{\pi k}\right)$$

نبدل كل k بـ $-k$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{z + \pi k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

وهو نشر التابع $\cot g\, z$ في كسور بسيطة ويعتبر تطبيق هام

تمرين :

انشر التابع $\coth z$ في كسور بسيطة.

الحل :

$$\coth z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z} = \frac{\cos iz}{-i \sin iz} = i \cot g\, iz$$

$$\coth z = i \cot g\, iz$$

$$\coth z = \frac{i}{iz} + i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2iz}{-z^2 - \pi^2 k^2}$$

$$\coth z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + \pi^2 k^2}$$

تمرين :

انشر التابع $tg\, z$ في كسور بسيطة.

الحل : لدينا :

$$tg\, z = -\cot g\left(z - \frac{\pi}{2}\right)$$

ولدينا :

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{z + \pi k}\right)$$

$$tg\, z = \frac{-1}{z - \frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z - \frac{\pi}{2} - \pi k} + \frac{1}{z - \frac{\pi}{2} + \pi k}\right]$$

$$= \frac{-1}{z-\frac{\pi}{2}} - \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\pi(k+\frac{1}{2})} + \frac{1}{z+\pi(k-\frac{1}{2})}\right]$$

نضيف أول حد في السلسلة

$$= -\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{z-\pi(k-\frac{1}{2})} + \frac{1}{z+\pi(k-\frac{1}{2})}\right]$$

$$\Rightarrow \quad tg\, z = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-2z}{z^2-\pi^2(k-\frac{1}{2})^2}$$

تمرين "وظيفة" : انشر التابع $th\, z$ في كسور بسيطة.

تمرين : انشر التابع $\frac{1}{\sin^2 z}$ في كسور بسيطة

الحل : لدينا :

$$\frac{1}{\sin^2 z} = -(cotg\, z)'$$

$$cotg\, z = \frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}{}^{*}\left(\frac{1}{z-\pi k} + \frac{1}{\pi k}\right)$$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = -\left[\frac{1}{z} + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}{}^{*}\left(\frac{1}{z-\pi k} + \frac{1}{\pi k}\right)\right]'$$

$$= \frac{1}{z^2} + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}{}^{*}\frac{1}{(z-\pi k)^2}$$

$$\frac{1}{\sin^2 z} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{1}{(z-\pi k)^2}$$

تمرين : هام جداً

انشر التابع $\frac{1}{e^z-1}$ في كسور بسيطة...

الحل : لنبرهن على صحة العلاقة :

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}\coth\frac{z}{2}$$

$$\frac{1}{e^z-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+1}{e^z-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{-\frac{z}{2}}-e^{\frac{z}{2}}+e^{\frac{z}{2}}+e^{-\frac{z}{2}}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}}{e^{\frac{z}{2}}-e^{-\frac{z}{2}}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{e^{z/2}+e^{-z/2}}{e^{z/2}-e^{-z/2}}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\coth\frac{z}{2}$$

$$\coth\frac{z}{2} = i\, cotg\,\frac{iz}{2}$$

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\, cotg\,\frac{iz}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\left(\frac{1}{\frac{iz}{2}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\cdot\frac{iz}{2}}{\left(\frac{iz}{2}\right)^2 - \pi^2 k^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{e^{z}-1} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4\pi^2 k^2}}$$

تمرين:

بالاستفادة من نشر التابع $\coth z$ في كسور بسيطة برهن أنّ:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right)$$

الحل: لدينا:

$$\coth z = i \cot g\, iz$$

$$\cot g\, z = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - \pi^2 n^2}$$

$$\coth z = \frac{1}{iz} + i\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2iz}{(iz)^2 - \pi^2 n^2}$$

$$= \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 + n^2\pi^2}$$

نبدل z بـ $a\pi$

$$\coth a\pi = \frac{1}{a\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2a\pi}{a^2\pi^2 + n^2\pi^2}$$

$$\coth a\pi - \frac{1}{a\pi} = \frac{2a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{2a}\left(\coth a\pi - \frac{1}{a\pi}\right)$$

تمرين:

بالاستفادة من نشر التابع $\coth z$ في كسور بسيطة

احسب مجموع السلسلة:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2}$$

ملاحظة:

نفس الحل السابق بعد ذلك نشتق الطرفين بالنسبة لـ a.

تمرين:

انشر التابع $\frac{1}{\sin z}$ في كسور بسيطة.

الحل: $z=0$ قطب بسيط للتابع $\frac{1}{\sin z}$ لذلك نأخذ التابع:

$$f(z) = \frac{1}{\sin z} - \frac{1}{z} = \frac{z - \sin z}{z \sin z}$$

1) النقاط الشاذة لـ $f(z)$ هي: $z_k = \pi k$ حيث $k \in \mathbb{Z}^*$

وهي أقطاب بسيطة مرتبة وفق تزايد طويلاتها

$|\pi| < |2\pi| < |3\pi| < \dots$

2) $z=0$ نقطة عادية للتابع $f(z)$ "قابلة للإصلاح"

$$f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z - \sin z}{z \cdot \sin z} = \lim_{z\to 0} \frac{1 - \cos z}{\sin z + z\cos z}$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{\cos z + \cos z - z\sin z} = \frac{0}{2} = 0$$

3) لنأخذ جملة منحنيات عادية $\{\gamma_k\}$ بحيث $\mp\pi$ تقع داخل γ_1

γ_2 " " $\mp 2\pi$

نلاحظ أن التابع $f(z)$ محدود على جملة منحنيات عادلية

$$|f| \Big|_{\gamma_k} \leq M$$

عندئذ:

$$f(z) = f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left(\frac{1}{z - z_k} + \frac{1}{z_k} \right)$$

$$A_k = \underset{\pi k}{\operatorname{res}} f(z)$$

$$= \frac{p(\pi k)}{q'(\pi k)} = \frac{z - \sin z}{(z \cdot \sin z)'} \Bigg|_{z = \pi k}$$

$$= \frac{z - \sin z}{\sin z + \cos z} \Bigg|_{z = \pi k} = \frac{\pi k - 0}{0 + \pi k \cos(\pi k)}$$

$$A_k = \underset{\pi k}{\operatorname{res}} f(z) = (-1)^k$$

$$f(z) = 0 + \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} {}^{*} (-1)^k \left[\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{\pi k} \right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left[\frac{1}{z - \pi k} + \frac{1}{z + \pi k} + \cancel{\frac{1}{\pi k}} - \cancel{\frac{1}{\pi k}} \right]$$

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2z}{z^2 - \pi^2 k^2}$$

نشر تابع صحيح في جداء لا نهائي

نعلم أن التابع الصحيح هو التابع التحليلي في المستوي المركب $\mathbb{C}$ - إذا كان:

$f(z) = P_n(z)$ كثير حدود من الدرجة n عندها:

$$f(z) = P_n(z) = A(z - z_1) \ldots (z - z_k)$$

$$= A \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)$$

لنعمم الجداء السابق إلى أي تابع صحيح ولدينا ثلاث حالات:

الحالة الأولى:

إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً لا يملك أي صفر في المستوي المركب $\mathbb{C}$ عندئذ:

$$f(z) = e^{F(z)}$$

حيث $F(z) = \ln f(z)$ فرع مثبت..

الحالة الثانية:

إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً ويملك s من الأصفار "عدد منتهٍ" وكل z_k رتبتها n_k $(k = \overline{1,s})$ عندئذ:

$$f(z) = \varphi(z) \cdot \psi(z)$$

حيث:

$$\psi(z) = (z - z_1)^{n_1} \cdot (z - z_2)^{n_2} \ldots (z - z_k)^{n_k}$$

$$\psi(z) = \prod_{k=1}^{s} (z - z_k)^{n_k}$$

مع $\varphi(z)$ تابع صحيح ولا ينعدم في $\mathbb{C}$.

عندئذٍ حسب الحالة الأولى :

$$\phi = e^{F(z)} \quad ; F(z) = \ln \phi(z)$$

فرع مثبت

ومنه :

$$f(z) = e^{F(z)} \cdot \prod_{k=1}^{s} (z - z_k)^{n_k}$$

الحالة الثالثة :

إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً ويملك عدداً لا نهائياً من الأصفار z_k " مع مراعاة التكرار " بمراتب n_k عندئذٍ كما وجدنا سابقاً فإن : z_k تكون أقطاب بسيطة للتابع :

$$F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

$$\underset{z_k}{\text{res}}\, F(z) = n_k$$

ومن أجل ذلك نأخذ المبرهنة الآتية :

مبرهنة :

النص الأول " الحالة البسيطة " :

إذا كان $f(z)$ تابعاً صحيحاً ويملك عدداً لا نهائياً من الأصفار z_k بحيث أن التابع $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ يحقق شروط نشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة .. عندئذٍ فإن :

$$f(z) = f(0) \cdot e^{F(0)} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{\frac{z}{z_k}}$$

النص الثاني " الحالة المعممة " :

ضمن نفس الشروط المبرهنة السابقة وباستبدال شرط المحدودية " الشرط الثالث في نشر التابع الميرومورفي " بشرط :

$$\|F\|_{\gamma_k} \le M|z|^p \quad ; p \ge 0$$

وحيث $z=0$ صفر من الدرجة m للتابع $f(z)$ فإن النشر يأخذ الشكل الآتي :

$$f(z) = z^m \cdot e^{g(z)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_k}\right) e^{h(z)}$$

حيث $g(z)$ كثيرة حدود درجتها ليست أكبر من $p+1$ أي :

$$g(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_s z^s$$

حيث : $s \le p+1$

$$h(z) = \frac{z}{z_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{z_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{p+1}\left(\frac{z}{z_k}\right)^{p+1}$$

- الشرط اللازم والكافي لكي يكون $\prod_{1}^{\infty} (1+a_k)$ متقارب (*)
إذا كانت السلسلة $\sum \ln(1+a_k)$ متقاربة
حيث $-\pi < \arg(1+a_k) \le \pi$
- إذا (*) متقارب مطلقاً $\Leftrightarrow \sum_{1}^{\infty} |a_k|$ متقاربة

لا يوجد فقرة دراسة تقارب جداءات التوابع

/ /

<u>تمرين</u> نظري هام :

انشر التابع $\sin Z$ في جداء لا نهائي.

<u>الحل:</u>

$$F(Z) = \frac{f'}{f} = \frac{\cos Z}{\sin Z}$$

نلاحظ أن $Z = 0$ نقطة شاذة من نوع قطب بسيط للتابع $\frac{f'}{f}$

لذلك نأخذ التابع $\frac{\sin Z}{Z}$

فيكون:

$$F(Z) = \frac{f'(Z)}{f(Z)} = \cot g\, Z - \frac{1}{Z}$$

إن هذا التابع حقق شروط نشر تابع ميرومورفي في كسور بسيطة عندها صفرا ساسيا "

عندئذ:

$$f(Z) = f(0) \cdot e^{F(0)} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Z}{Z_k}\right) e^{\frac{Z}{Z_k}}$$

$$f(Z) = \frac{\sin Z}{Z}$$

$$f(0) = 1$$

$$F(0) = 0$$

Z_k هي أصفار $f(Z)$

$$Z_k = \pi k \quad ; \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

$$\frac{\sin Z}{Z} = 1 \cdot e^{0} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Z}{\pi k}\right)\left(1 + \frac{Z}{\pi k}\right) \cdot e^{\frac{Z}{\pi k}} \, e^{-\frac{Z}{\pi k}}$$

$$\frac{\sin Z}{Z} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

/ /

<u>حفظ</u>

$$\boxed{\sin Z = Z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right)}$$

2010 <u>تمرين</u> "دورة" :

انشر التابع $\frac{e^{Z} - 1}{Z}$ في جداء لا نهائي.

<u>الحل:</u>

$$e^{Z} - 1 = \frac{2(e^{Z} - 1)}{2}$$

$$= 2e^{Z/2} \cdot \frac{e^{Z/2} - e^{-Z/2}}{2}$$

$$= 2e^{Z/2} \cdot \operatorname{sh} \frac{Z}{2}$$

لدينا:

$$\sin iZ = i \operatorname{sh} Z$$

$$\Rightarrow \operatorname{sh} \frac{Z}{2} = -i \sin \frac{iZ}{2}$$

$$e^{Z} - 1 = -2i e^{Z/2} \sin \frac{iZ}{2}$$

$$e^{Z} - 1 = -\cancel{2}i e^{Z/2} \cdot \frac{iZ}{\cancel{2}} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\left(\frac{iZ}{2}\right)^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

$$e^{Z} - 1 = Z \cdot e^{\frac{Z}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Z^2}{4\pi^2 k^2}\right)$$

$$\frac{e^{Z} - 1}{Z} = e^{\frac{Z}{2}} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Z^2}{4\pi^2 k^2}\right)$$

تمرين "دورة 2008":

1) انشر التابع $sh3Z$ في جداء لا نهائي

2) " " " " $shZ - Z$

الحل:

2)

$$\sin iZ = i\, shZ$$

$$\Rightarrow shZ = -i \sin iZ$$

$$shZ = -i(iZ) \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{(iZ)^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

$$shZ = Z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right)$$

$$shZ - Z = Z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right) - Z$$

$$= Z \left[\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right) - 1\right]$$

تمرين:

انشر التابع $\cos Z$ في جداء لا نهائي واستخدم من ذلك لإيجاد نشر التابع chZ

الحل:

$$\cos Z = \frac{2 \sin Z . \cos Z}{2 \sin Z}$$

$$= \frac{\sin 2Z}{2 \sin Z} = \frac{2Z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4Z^2}{\pi^2 k^2}\right)}{2Z . \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{Z^2}{\pi^2 k^2}\right)}$$

$$\cos Z = \frac{\left(1 - \frac{4Z^2}{\pi^2}\right)\cancel{\left(1 - \frac{4Z^2}{4\pi^2}\right)}\left(1 - \frac{4Z^2}{9\pi^2}\right)\cancel{\left(1 - \frac{4Z^2}{16\pi^2}\right)}\left(1 - \frac{4Z^2}{25\pi^2}\right)\cancel{\left(1 - \frac{4Z^2}{36\pi^2}\right)}\cdots}{\cancel{\left(1 - \frac{Z^2}{\pi^2}\right)}\cancel{\left(1 - \frac{Z^2}{4\pi^2}\right)}\cancel{\left(1 - \frac{Z^2}{9\pi^2}\right)}\cancel{\left(1 - \frac{Z^2}{16\pi^2}\right)}\cdots}$$

$$\cos Z = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4Z^2}{(2k-1)^2 \pi^2}\right)$$

برهن أن:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2} = \frac{1}{4a^4}\left(\frac{\pi^2 a^2}{sh^2 \pi a} + \pi a (\coth \pi a) - 2\right)$$

التحويلات المتماثلة هندسة التحليل المركب

وجدنا في التحليل العقدي - 1 - أنّ:

مبرهنة:

إذا كان $w = f(z)$ تابع مركب نظامي في النقطة z_0 وكان $f'(z_0) \neq 0$ فإنّ:

1) $f(z)$ يحفظ الزوايا بين المنحنيات المارة من z_0 وجميع هذه المنحنيات تدور بزاوية ثابتة قدرها

$$\alpha = \arg f'(z_0)$$

2) $f(z)$ يحفظ معامل التماكي للمنحنيات المارة من z_0 وقيمة هذا المعامل هي:

$$k = |f'(z_0)|$$

تعريف:

نقول عن التحويل $w = f(z)$ أنه متماثل في النقطة z_0 إذا كان نظامي في z_0 وكان يحفظ الزوايا ومعامل التماكي في z_0.

مبرهنة:

إذا كان $w = f(z)$ نظامي في z_0 وكان $f'(z_0) \neq 0$ فإنّ: $f(z)$ متماثل في z_0.

تعريف:

ليكن التحويل $w = f(z)$ تحويل متماثل في الساحة D إذا تحقق:

1. w وحيد الصفحة في D. أي إذا تحقق الشرط:

$$\forall z_1, z_2 \in D \; ; \; f(z_1) = f(z_2) \Rightarrow z_1 = z_2$$

$$\forall z_1, z_2 \in D \; ; \; z_1 \neq z_2 \Rightarrow f(z_1) \neq f(z_2)$$

2) إذا كان $w = f(z)$ نظامي في الساحة D باستثناء على الأكثر نقطة شاذة واحدة فقط ومن نوع قطب بسيط.

ملاحظة:

إذا كان $f(z)$ تحويل متماثل في D فإنّه متماثل في كل نقطة من نقاط D أمّا العكس فليس صحيح. أي إذا كان $f(z)$ متماثل في كل نقطة من نقاط D فإنه ليس بالضرورة أن يكون متماثلاً في D.

مثال:

التحويل $w = z^2$ متماثل في كل نقطة من نقاط المستوي العقدي ماعدا $z = 0$ لأنّ $f'(0) = 0$

ولكنه ليس متماثل في المستوي $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ لأنّه وحيد الصفحة في أي نصف مستوي حدوده تمر من مبدأ الاحداثيات.

وكذلك الأمر بالنسبة للتحويل e^z هو تحويل متماثل في كل نقطة من نقاط المستوي المركب $\mathbb{C}$ ولكنه ليس متماثل في المستوي المركب لأنه وحيد الصفحة في أي شريط أفقي عرضه لا يتجاوز 2π ...

خواص التحويلات المتماثلة:

1- تركيب تحويلين متماثلين هو تحويل متماثل. أي إذا كان

$f(z) : D \longrightarrow G$ متماثل في D

$g(z) : D_1 \subseteq G \longrightarrow D_2$ " " D_1

فإنّ:

$f(g(z)) : D \longrightarrow D_2$

متماثل في D

2- التحويل العكسي لتحويل متماثل هو تحويل متماثل. أي إذا كان:

$f(z) : D \longrightarrow G$ متماثل

فإنه :

$f^{-1} : G \longrightarrow D$ متماثل في G

3- أسرة التحويلات المتماثلة تشكل زمرة ...

4- إذا كان $w = f(z)$ تحويل متماثل في الساحة D فإنه ينقل الحدود إلى الحدود ، مع الحفاظ على الجهة . وبالعكس كل تحويل ينقل حدود ساحة إلى حدود ساحة أخرى بشكل واحد لـ واحد هو تحويل متماثل في تلك الساحة .

5- إذا كان $f(z)$ تابع نظامي في الساحة D ومستمر حتى حدودها Γ وكان $f(z)$ متماثل في الساحة D وينقل الحدود Γ إلى الحدود Γ^* عندئذ فإنه :

$f(z)$ تحويل وحيد الصفحة في D وينقل تماثلياً داخلية Γ إلى داخلية Γ^*

6- يكون التحويل $w = f(z)$ متماثل في D إذا كان :

1- نظامي في D

2- ينقل الحدود إلى الحدود .

التحويلات المتماثلة بالتوابع الأولية

1- التحويل $w = z + b$ حيث $b \in \mathbb{C}$ انسحاب إلى شعاع b .

2- التحويل $w = \alpha z ; \alpha \in \mathbb{R}^+$ محاكاة مركزها المبدأ وعامل التحاكي α

3- التحويل : $w = z \cdot e^{i\theta}$ دوران حول المبدأ بزاوية θ .

4- التحويل $w = z^2$:

• إن هذا التحويل وحيد الصفحة في أي نصف مستوي محدود يمر من مبدأ الإحداثيات

مثل : $Im z > 0$ ، $Im z < 0$

$Re z > 0$ ، $Re z < 0$

• متماثل في كل نقطة من نقاط المستوي $\mathbb{C}$ ماعدا $z = 0$ لأن :

$f'(0) = 0$

• متماثل في أي نصف مستوي محدود يمر من مبدأ الإحداثيات .

•

$$\arg z = \alpha \xrightarrow{z^2} \arg w = 2\alpha$$

$$|z| = \rho \xrightarrow{z^2} |w| = \rho^2$$

•

$Im z > 0 \xrightarrow{z^2}$

$Im z < 0 \xrightarrow{z^2}$ $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

•

$Re z > 0$

$Re z < 0$ $\longrightarrow \mathbb{C} \setminus (-\infty,0]$

* أوجد صورة المستقيمات $Re z = a$ وفق التحويل z^2 :

الحل :

$z = x + iy$

$w = u + iv$

$u + iv = (x + iy)^2$

$u + iv = x^2 - y^2 + 2ixy$

بالمطابقة :

$u = x^2 - y^2$

$v = 2xy$

لدينا : $Re z = x = a$

$u = a^2 - y^2$ ①

$v = 2ay$ ②

$$\Rightarrow y = \frac{v}{2a}$$

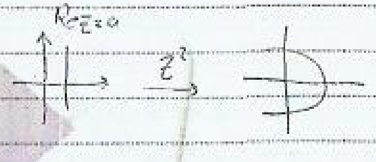
نعوض في (1) :

$$u = a^2 - \frac{v^2}{2a}$$

$$4a^2u = 4a^4 - v^2$$

$$v^2 = -4a^2(u - a^2)$$

$$p = 2a^2$$



صورة المستقيمات وفق z^2 $\boxed{v^2 = -2p\left(u - \frac{p}{2}\right)}$

هي معادلة قطع مكافئ

* أوجد صورة للمستقيمات $Im\,z = a$ وفق التحويل :

$$w = z^2$$

* أوجد صورة المساحة :

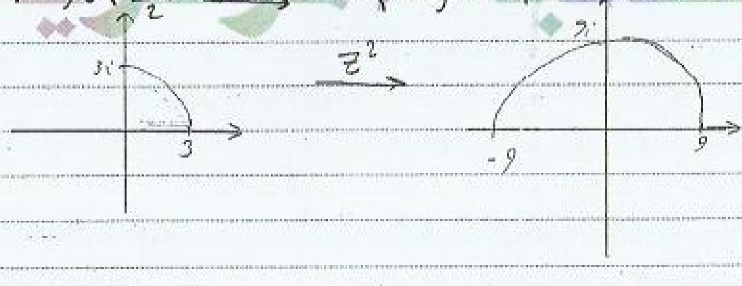
$$D = |z| = 3 \; ; \; 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$$

وفق التحويل $w = z^2$.

الحل :

$$|z| = 3 \xrightarrow{z^2} |w| = 9$$

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2} \xrightarrow{z^2} 0 < \arg w < \pi$$



5- التحويل $w = z^n$:

إن هذا التحويل وحيد الصفحة في القطاع الزاوي :

$$0 < \arg z < \frac{2\pi}{n}$$

$$0 < \arg z < \varphi \xrightarrow{z^n} 0 < \arg w < n\cdot\varphi$$

$$|z| = \rho \xrightarrow{z^2} |w| = \rho^n$$

6- التحويل $w = \sqrt{z}$:

إن هذا التحويل ثنائي القيمة وتحليلي في المستوي العقدي المأخوذ في الـ 0 و اللانهاية ويمكن عزل فرعيه f_1 ، f_2 في أي ساحة تحوي على قطعاً يصل الـ 0 مع ∞ ، ولنأخذ مثلاً الساحة :

$$D = \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$$

$$\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \xrightarrow{\sqrt{z}} \begin{cases} \xrightarrow{f_1} Im\,z > 0 \\ \xrightarrow{f_2} Im\,z < 0 \end{cases}$$

حيث : $f_1(x + 0i) = \sqrt{x} > 0$

$f_2(x - 0i) = -\sqrt{x} < 0$

$$\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \xrightarrow{\sqrt{z}} \begin{cases} \xrightarrow{f_1} Re\,z > 0 \\ \xrightarrow{f_2} Re\,z < 0 \end{cases}$$

7- التحويل $w = e^z$ وتابعه العكسي $\ln z$:

. إن هذا التحويل نظامي في المستوي $\mathbb{C}$ " تابع صحيح " .

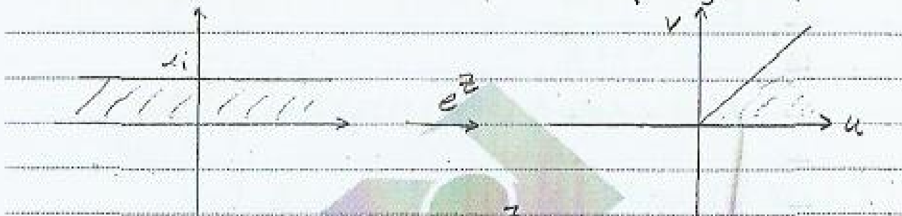
. وحيد الصفحة في أي شريط أفقي عرضه لا يتجاوز 2π مثل :

$$0 < Im\,z < 2\pi$$

/ /

ومن أهم خواص هذا التحويل أنه ينقل الشريط إلى قطاع زاوي :

$$0 < \operatorname{Im} z < \alpha \xrightarrow{e^z} 0 < \arg w < \alpha$$



$$0 < \operatorname{Im} z < 2\pi \xrightarrow{e^z} 0 < \arg w < 2\pi$$

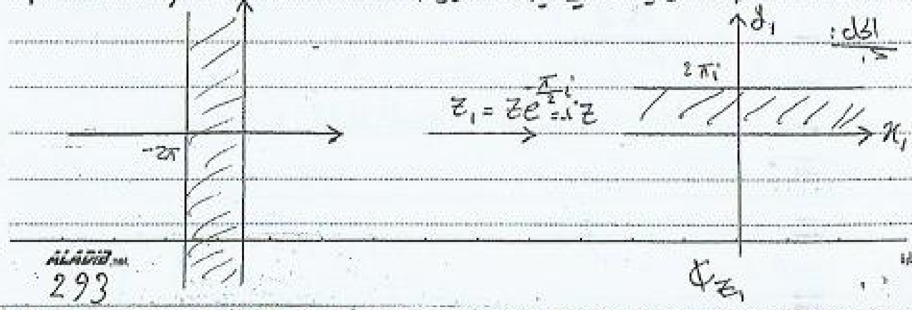
$$2\pi < \operatorname{Im} z < 4\pi \xrightarrow{e^z} 0 < \arg w < 2\pi$$

• تمرين :

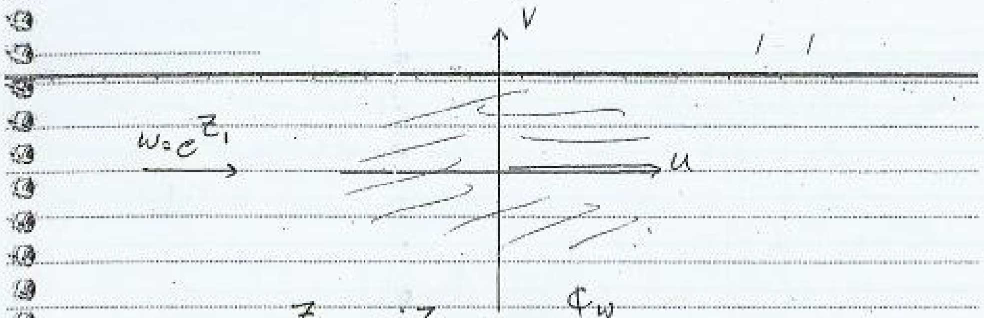
أوجد التحويل الذي ينقل الشريط المشكل الجاور على $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$:

الحل :

$$z_1 = z e^{-\frac{\pi}{2}i} = -iz$$



/ /



$$w = e^{z_1} = e^{-iz}$$

• إلا أنه يجب الحذر عند أخذ التابع العكسي لذلك التابع العكسي للتابع e^z هو $\ln z$ وهو تابع لانهائي القيم وله عدد غير منتهٍ من الفروع النظامية التي تكون معرفة في أي ساحة وحيدة الاتصال ولا تحتوي على 0 و ∞

ونرمز لهذه الفروع بالرمز :

$$f_k(z) \quad ; \; k \in \mathbb{Z}$$

فيكون :

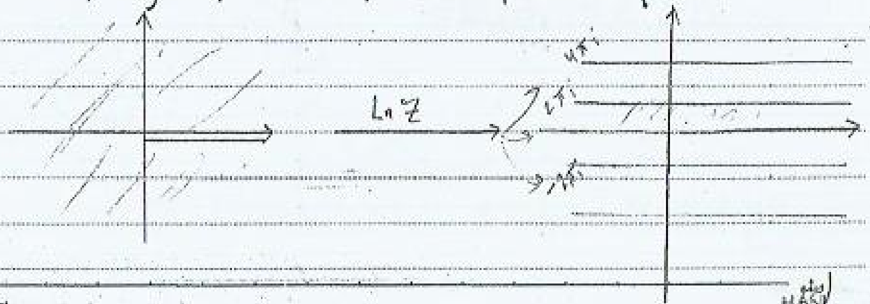
$$\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_0(z)} 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$$

$$\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_1(z)} 2\pi < \operatorname{Im} z < 4\pi$$

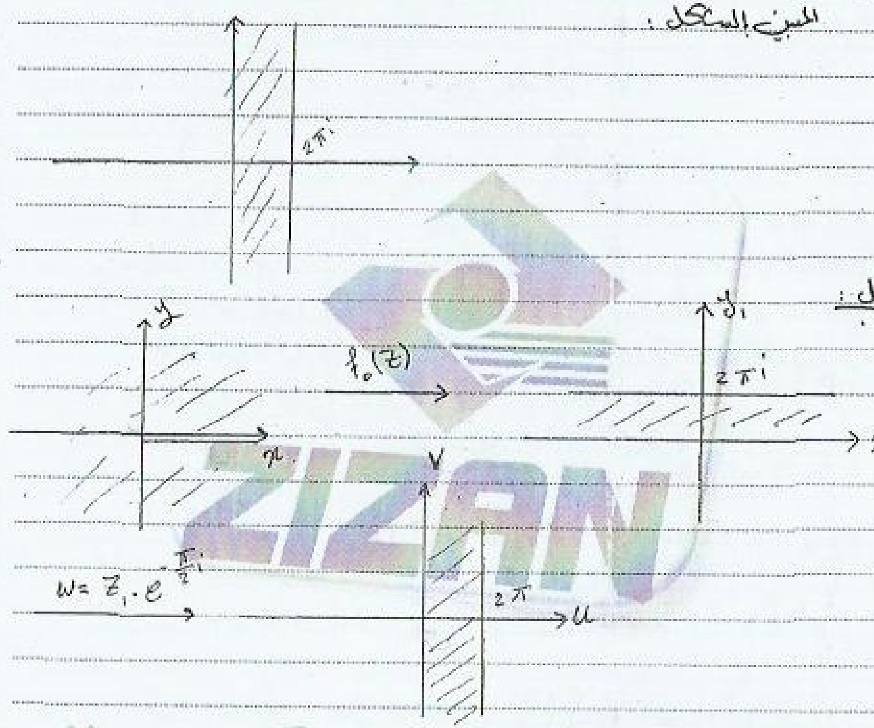
$$\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_{-1}(z)} -2\pi < \operatorname{Im} z < 0$$

$$\mathbb{C} \setminus [0,\infty) \xrightarrow{f_k(z)} 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi k + 2\pi$$

$$0 < \arg z < \alpha \xrightarrow{f_k(z)} 2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi k + \alpha$$



تمرين: أوجد التحويل الذي ينقل المستوي $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ إلى الشريط المبين بالشكل:



لكن $f_0(z)$ هو فرع من فروع $\ln z$ الذي ينقل $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ إلى الشريط $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$

وبالتالي:

$$w = i z_1 = i \ln z$$

تمارين في التمديد التحليلي:

تمرين:

ابحث في النقاط الشاذة للتابع:

$$F = \frac{1}{1+\sqrt{z}}$$

محدداً نوع النقاط الشاذة لكل فرع على حدى.

الحل:

$z = 0$ و $z = \infty$ نقاط تفرع جبرية من الدرجة الثانية للتابع $\sqrt{z}$ وبالتالي هي نقاط تفرع للتابع $F(z)$.

إن التابع $\sqrt{z}$ يتفرع في جوار $z = 1$ إلى فرعين هما $f_1(z)$ و $f_2(z)$ بحيث:

$$f_1(z) = 1$$

$$f_2(z) = -1$$

وبالتالي التابع F يتفرع إلى فرعين:

$$F_1 = \frac{1}{1+f_1}$$

$$F_2 = \frac{1}{1+f_2}$$

$z = 1$ نقطة عادية للفرع F_1 ونقطة شاذة قطب بسيط للفرع F_2

إذن ساحة التحليلية هي: $\mathbb{C}\setminus\{0, 1, \infty\}$

تمرين: ابحث في النقاط الشاذة للتابع:

$$F = \frac{\ln z}{z-1}$$

محدداً نوع النقاط الشاذة لكل فرع على حدى.

/ /

الحل: 0 ، ∞ نقاط تفرع لوغاريتمية للتابع $\ln z$ فهي نقاط تفرع التابع F

إن التابع $\ln z$ يتفرع في جوار $z=1$ الى عدد غير منته من الفروع وهي: $f_k(z)$

$$\ln 1 = f_k(1) = \ln|1| + 2\pi k i$$

$$f_k(1) = 2\pi k i$$

إن التابع: F يتفرع الى:

$$F_k = \frac{f_k(z)}{z-1}$$

إذن $z=1$ قطب بسيط للفرع F_k حيث $k \neq 0$

$z=1$ عادية للفرع F_0

إذن ساحة التحليلية هي $\mathbb{C} \setminus \{0, 1, \infty\}$

تمارين وظيفة:

$$F = \frac{1+\sqrt{z}}{z-1}$$

$$F = \frac{1}{\ln z + 1}$$

/ /

تعريف النقطة الشاذة الحدودية:

ليكن $f(z)$ تابع تحليلي في الساحة D التي حدودها Γ نقول إن النقطة $z=a$ نقطة شاذة حدودية للتابع $f(z)$ اذا كان:

1- $a \in \Gamma$

2- لا يمكن تمديد $f(z)$ تحليلياً على طول أي منحني γ بدايته z_0 $\gamma : \overset{\frown}{z_0 a}$

تمرين:

احسب التكامل:

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt[4]{(1-x)(1+x)^3}}{1+x^2}\, dx$$

الحل:

تعميم تكامل بيتا:

$$\int_a^b \left(\frac{x-a}{b-x}\right)^{\alpha} R(x)\, dx$$

وهو يحسب بنفس طريقة حساب التكامل بيتا فقط يختلف قانون حساب الراسب عند $z=\infty$.

$$\operatorname*{res}_{\infty} f = e^{i\alpha\pi}\left[\alpha c_0 (b-a) + c_{-1}\right]$$

إن التكامل يكتب بالشكل:

$$\int_{-1}^{1} \left(\frac{x+1}{1-x}\right)^{\frac{3}{4}} \frac{1-x}{1+x^2}\, dx$$

إن هذا التكامل من نمط تعميم التكامل بيتا:

$a=-1$ ، $b=1$ ، $\alpha = \frac{3}{4}$ ، $R(x) = \frac{1-x}{1+x^2}$

/ /

إنّ هذا التكامل متقارب لأنّ: 1. ليس للتابع $R(Z)$ أقطاب في المجال $[-1,1]$

2. $-1 < \alpha = \frac{3}{4} < 1$

النقاط الشاذة للتابع $R(Z) = \frac{1-Z}{1+Z^2}$ هي $\mp i$ أقطاب بسيطة إذن:

$$I = \frac{2\pi i}{1-e^{2\pi i\alpha}}\left[\operatorname{res}_{i} f + \operatorname{res}_{-1} f + \operatorname{res}_{\infty} f\right]$$

$$f = \left(\frac{Z+1}{1-Z}\right)^{3/4} R(Z)$$

نأخذ فرع رئيسي "في موجب

على الضفة العليا

الجواب:

$$I = \pi\sqrt{2}\left(\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{8} - 1\right)$$

انتهت

"وإني وإن كنت الأخير زمانه

لآتٍ بما لم تستطعه الأوائل"

نعم