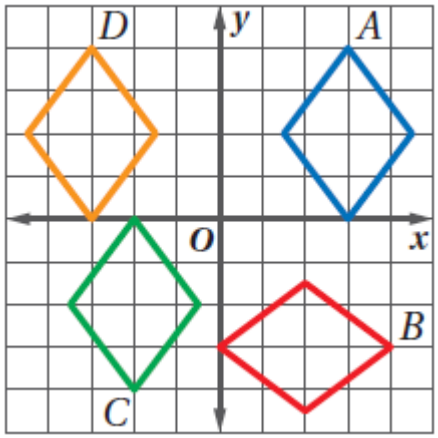
7

التحويلات الهندسية والتماثل

التهيئة

صنِّف كلًّا من التحويلات الهندسية الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران مستعملًا الشكل المجاور.



1) A إلى B

دوران

2) D إلى A

إزاحة أو انعكاس

3) A إلى C

إزاحة

4) **هندسة إحداثية :** إحداثيات رؤوس $\triangle PQR$ هي $Q\,(3,0),\ R(4\ ,\ 3)$, $P(-4,2)$. إذا أُزيح $\triangle PQR$ 4 وحدات إلى أسفل و 6 وحدات إلى اليمين للحصول على $\triangle P'Q'R'$ ، فما إحداثيات رؤوس $\triangle P'Q'R'$ ؟

الاحداثيات بعد الإزاحة: $R^{\hat{O}}(0,-9)$, $Q^{\hat{O}}(-1,6)$, $P^{\hat{O}}(-8,8)$

استعمل صيغة المسافة بين نقطتين لإيجاد البعد بين كل نقطتين فيما يلي:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(5 $(0,1)\ ,\ (2,8)$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(2-0)^2 + (8-1)^2} \\ &= \sqrt{4+49} \\ &= \sqrt{53} \end{aligned}$$

(6 $(-2,0)\ ,\ (3,3)$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[3-(-2)]^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{25+9} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

(7 $(6,4),\ (2,1)$

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(6-2)^2 + (4-1)^2} \\ &= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} \\ &= 5 \end{aligned}$$

(8 $(-3,-1),\ (0,5)$

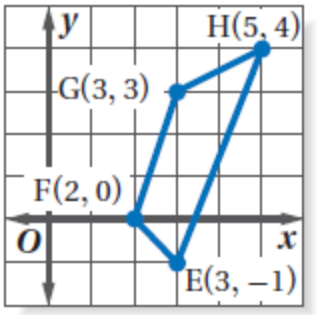
$$\begin{aligned} d &= \sqrt{[0-(-3)]^2 + (5-(-1))^2} \\ &= \sqrt{9+36} = \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

9) **تصوير:** رسم أسعد صورةً مكبرة لنملة؛ لاستعمالها في درس العلوم، أوجد مقياس الرسم للصورة إذا كان طول النملة الحقيقي $\frac{1}{2}$ in ، وكان طول الصورة 1 ft

1ft. = 12in.

$$\text{مقياس الرسم} = \frac{12}{\frac{1}{2}} = 24$$

احسب طول كل ضلع من أضلاع الشكل الرباعي $EFGH$.



10) $\overline{EF}$

$$d = \sqrt{(2-3)^2 + (0-(-1))^2}$$
$$= \sqrt{1+1}$$
$$= \sqrt{2}$$

11) $\overline{FG}$

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (3-0)^2}$$
$$= \sqrt{1+9}$$
$$= \sqrt{10}$$

12) $\overline{GH}$

$$d = \sqrt{(3-5)^2 + (3-4)^2}$$
$$= \sqrt{4+1}$$
$$= \sqrt{5}$$

13) $\overline{HE}$

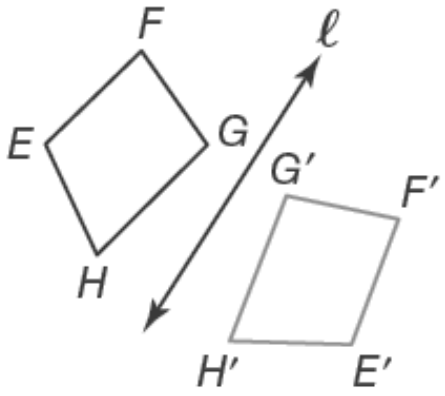
$$d = \sqrt{(5-3)^2 + [4-(-1)]^2}$$
$$= \sqrt{4+25}$$
$$= \sqrt{29}$$

7-1 الانعكاس

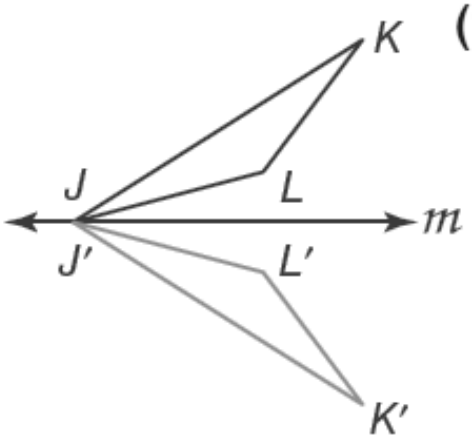
تحقق

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

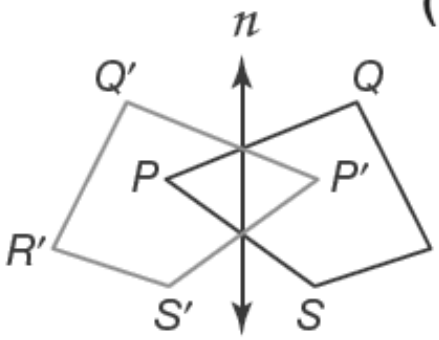
(1A



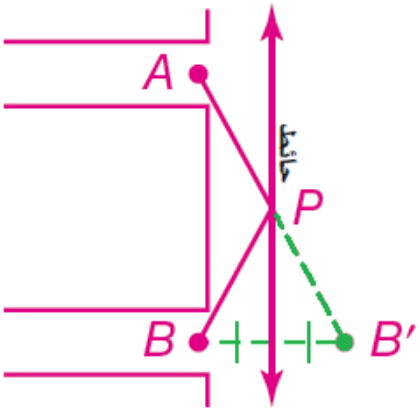
(1B



(1C



2) **مبيعات تذاكر:** يريد فهد أن يختار موقعًا مناسبًا لبيع تذاكر مباراة كرة قدم، عيّن النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخصٌ ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن.



أفهم:

المعطيات:

يريد فهد أن يختار موقعاً مناسباً لبيع تذاكر مباراة كرة القدم

المطلوب:

عين النقطة P على الحائط، بحيث تكون المسافة التي يسيرها شخص ما من النقطة A إلى P ثم إلى النقطة B أقل ما يمكن

خطط:

تكون المسافة المطلوبة أقل ما يمكن عندما يكون هذه النقاط على استقامة واحدة،

حل:

ارسم $\overline{BB'}$ بحيث B′ صورة النقطة B بالانعكاس حول الحائط، ثم أصل AB′ فيكون $AP + PB'$ أقل ما يمكن

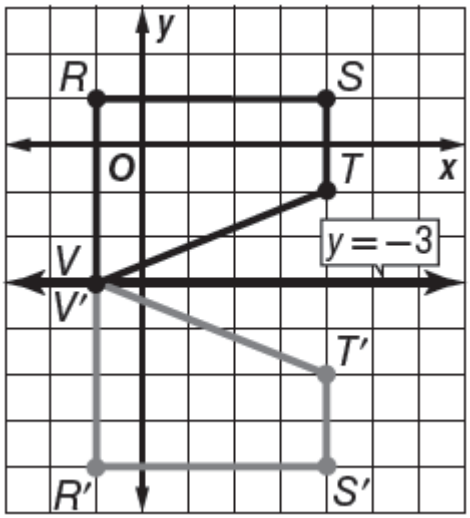
تحقق:

اختر واقع أخرى للنقطة P على الحائط وتأكد ان الموقع الذي تم تحديده هو الذي يجعل المجموع أقل ما يمكن

مثِّل بيانيًّا شبه المنحرف $RSTV$، الذي إحداثيات رؤوسه هي: $V(-1, -3)$, $R(-1, 1), S(4, 1), T(4, -1)$، وارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى في كلٍّ ممّا يأتي:

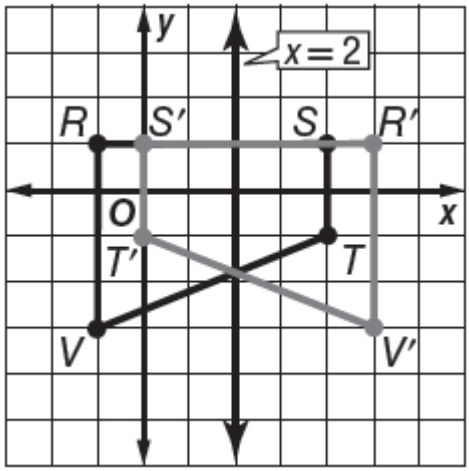
3A $y = -3$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = -3$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



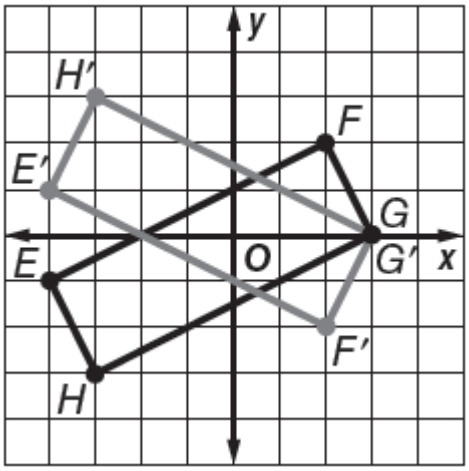
3B $x = 2$

استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = 2$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.



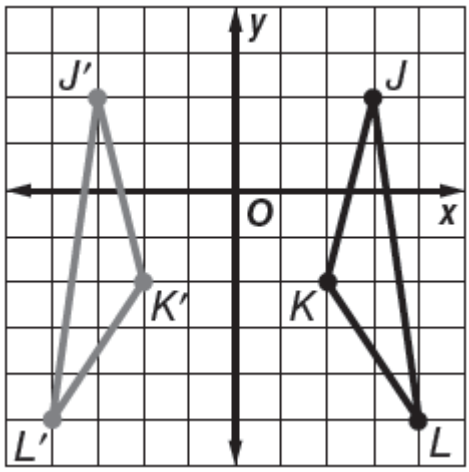
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

4A) المستطيل الذي إحداثيات رؤوسه: $G(3,0), H(-3,-3)$,
$E(-4,-1), F(2,2)$ بالانعكاس حول المحور x.



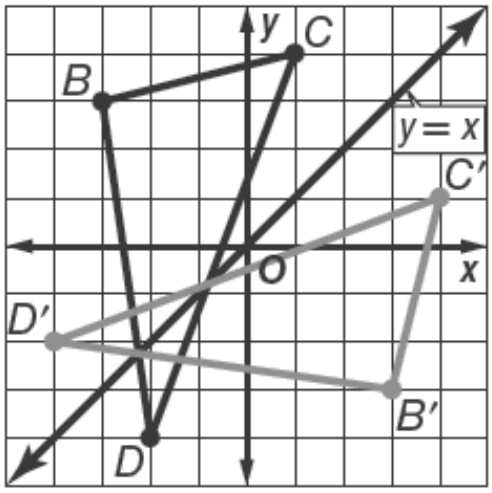
$G(3,0) \rightarrow G'(3,0)$
$H(-3,-3) \rightarrow H'(-3,3)$
$F(2,2) \rightarrow F'(2,-2)$
$E(-4,-1) \rightarrow E'(-4,1)$

4B) $\triangle JKL$ الذي إحداثيات رؤوسه: $K(2,-2), L(4,-5)$,
$J(3,2)$ بالانعكاس حول المحور y .



$J(3,2) \rightarrow J'(-3,2)$
$K(2,-2) \rightarrow K'(-2,-2)$
$L(4,-5) \rightarrow L'(-4,-5)$

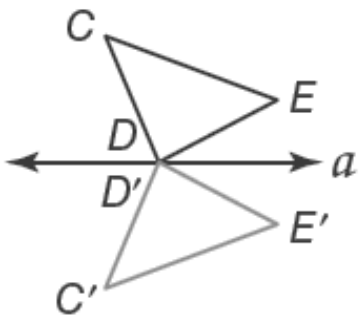
5) مثّل بيانيًّا $\triangle BCD$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $B(-3, 3), C(1, 4), D(-2, -4)$،
ثم ارسم صورته بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



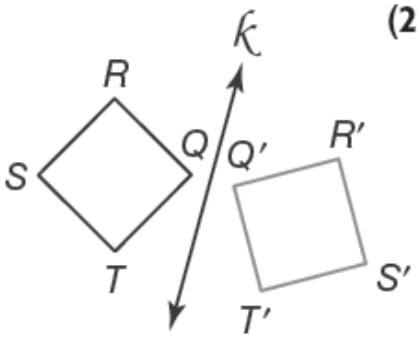
$\mathbf{B(-3, 3) \rightarrow B'(3, -3)}$
$\mathbf{C(1, 4) \rightarrow C'(4, 1)}$
$\mathbf{D(-2, -4) \rightarrow D'(-4, -2)}$

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى:

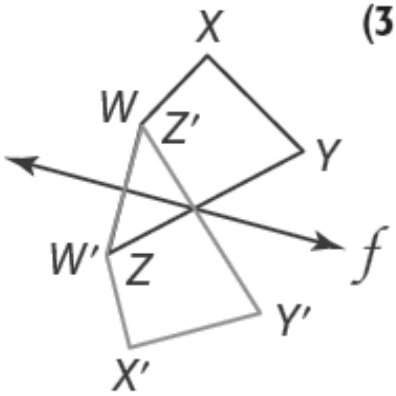
(1

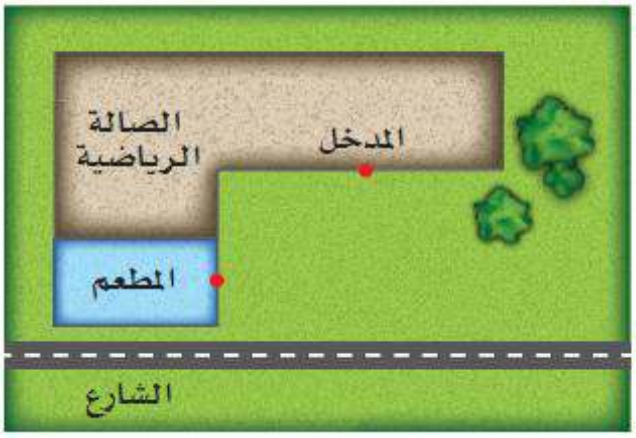


(2

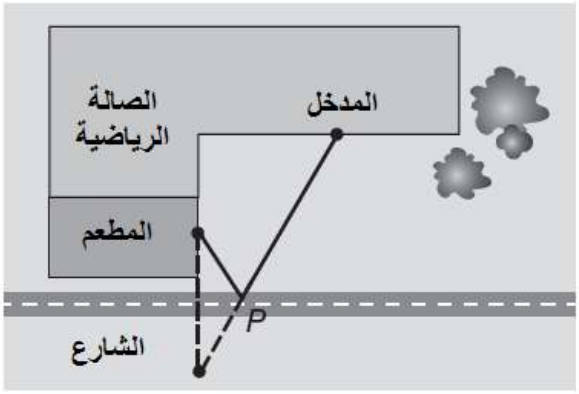


(3



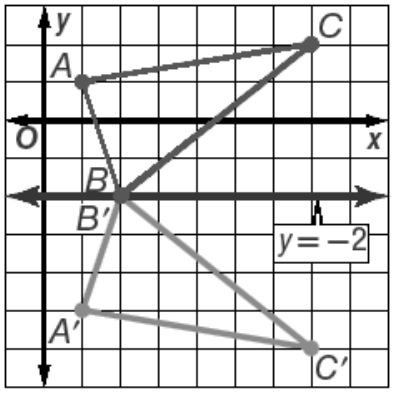


4) مباريات: ينتظر ماجد في المطعم صديقًا سيأتيه بتذكرة لحضور مباراة في الصالة الرياضية. في أي موقع على الشارع، يجب أن يُوقِفَ صديقه سيارته، حتى تكون المسافة التي يسيرها ماجد من المطعم إلى السيارة ثم إلى مدخل الصالة الرياضية أقل ما يمكن؟ ارسم شكلًا يوضح إجابتك.



مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle ABC$ المبيّن جانبًا بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ من السؤالين 6، 5.

5) $y = -2$

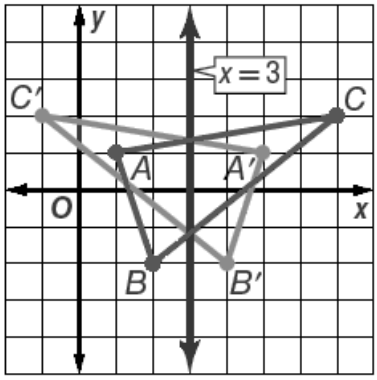


$\mathbf{A(1, 1) \rightarrow A'(1, -5)}$

$\mathbf{B(-2, -2) \rightarrow B'(-2, -2)}$

$\mathbf{C(7, 2) \rightarrow C'(7, -6)}$

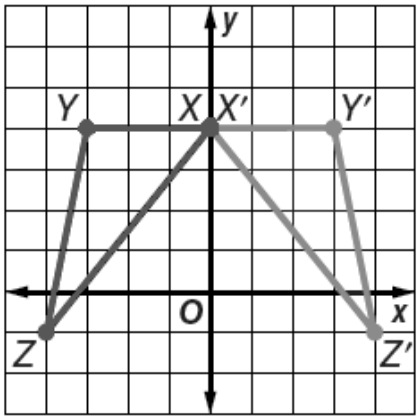
(6 $x = 3$



$\mathbf{A(1, 1) \rightarrow A'(5, 1)}$
$\mathbf{B(-2, -2) \rightarrow B'(4, -2)}$
$\mathbf{C(7, 2) \rightarrow C'(7, -6)}$

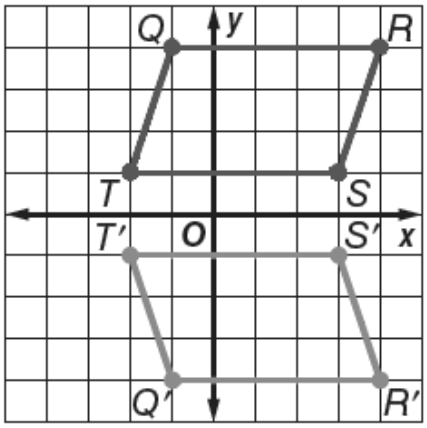
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

(7 $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $X(0, 4), Y(-3, 4), Z(-4, -1)$ بالانعكاس حول المحور y.



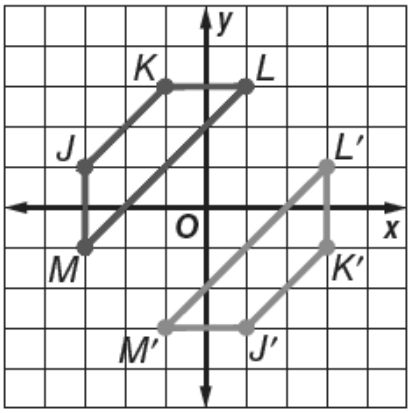
$\mathbf{X(0, 4) \rightarrow X'(0, 4)}$
$\mathbf{Y(-3, 4) \rightarrow Y'(3, 4)}$
$\mathbf{Z(-4, -1) \rightarrow Z'(4, -1)}$

(8 $\square QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(-1, 4), R(4, 4), S(3, 1), T(-2, 1)$ بالانعكاس حول المحور x.



$\mathbf{T(-2, 1) \rightarrow T'(-2, -1)}$
$\mathbf{Q(-1, 4) \rightarrow Q'(-1, -4)}$
$\mathbf{R(5, 4) \rightarrow R'(5, -4)}$
$\mathbf{S(3, 1) \rightarrow S'(3, -1)}$

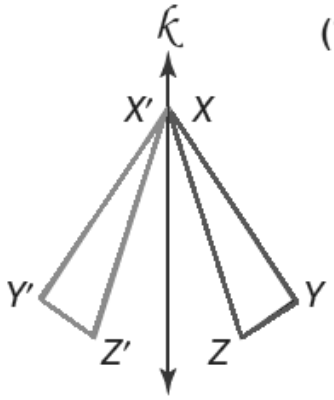
9) الشكل الرباعي الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-3, 1), K(-1, 3), L(1, 3), M(-3, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



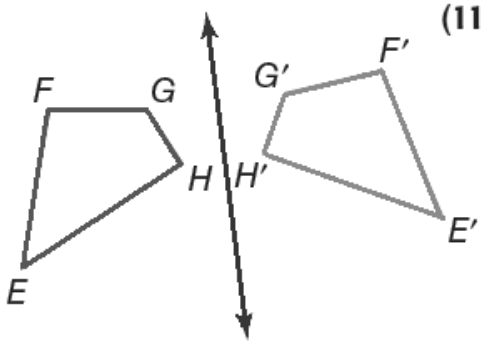
$$J(-3, 1) \rightarrow J'(1, -3)$$
$$K(-1, 3) \rightarrow K'(3, -1)$$
$$L(1, 3) \rightarrow L'(3, 1)$$
$$M(-3, -1) \rightarrow M'(-1, -3)$$

ارسم صورة كل شكل مما يأتي بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

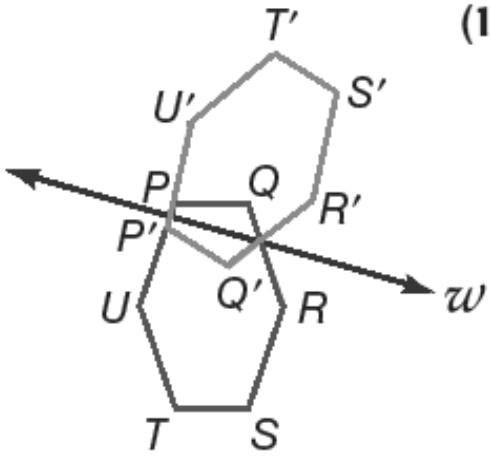
(10

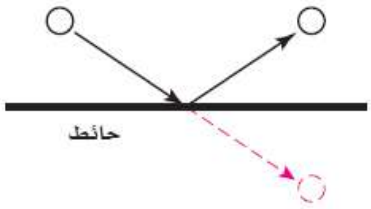


(11



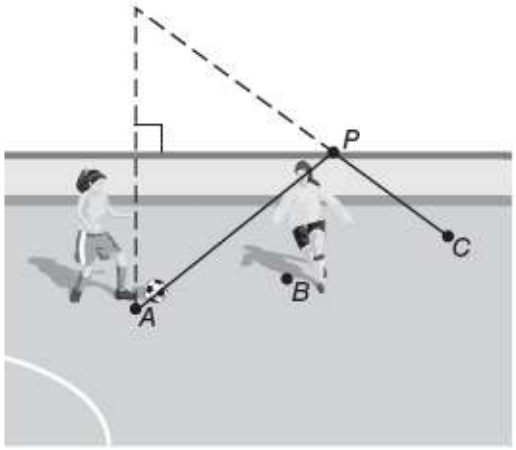
(12





13) كرة قدم: عندما ترتطم كرة بحائطٍ فإنها ترتدُّ عنه وتتحرك في مسار نصف مستقيم يمثل انعكاس مسار حركتها لو أنها اخترقت الحائط كما هو موضح جانبًا.

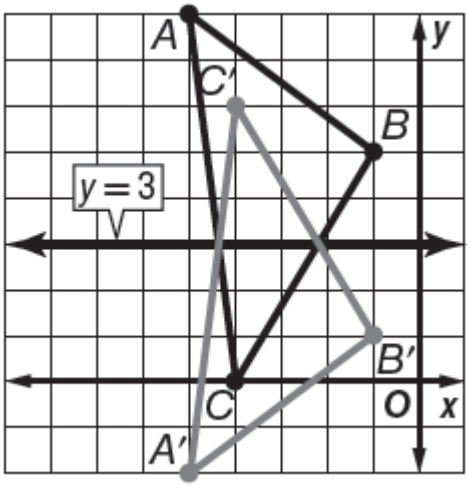
استعمل هذه المعلومات في رسم شكل يبين الموقع الدقيق للنقطة P على الحائط التي يجب أن يصوب سليمان إليها الكرة إذا كان يشارك في مباراة كرة قدم في ملعبٍ داخليٍّ، ويريد أن يمرّر الكرة إلى صديقه يوسف عند النقطة C، متجنبًا لاعبًا من الفريق الخصم عند النقطة B، ولذلك قرر أن يركل الكرة من النقطة A إلى نقطة على الحائط الجانبي، بحيث ترتد عنه نحو النقطة C.



لتكن P النقطة التي يصوب اليها سليمان، لذا P تقع على المستقيم الواصل بين النقطة C و نقطة انعكاس A على الحائط الجانبي، و تكون عند التقاطع مع الحائط الجانبي.

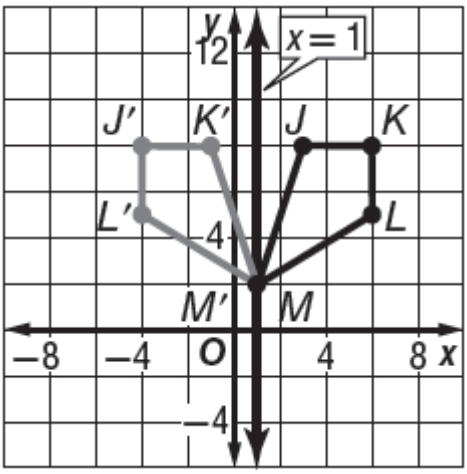
مثِّل صورة كل شكلٍ مما يأتي بيانيًّا بالانعكاس حول المستقيم المُعطَى .

14) $\triangle ABC, y = 3$



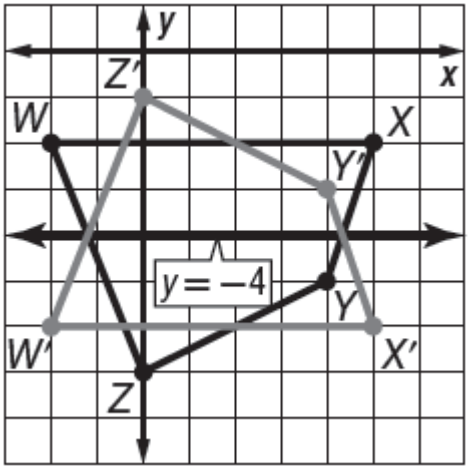
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 3$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

15) $JKLM, x = 1$



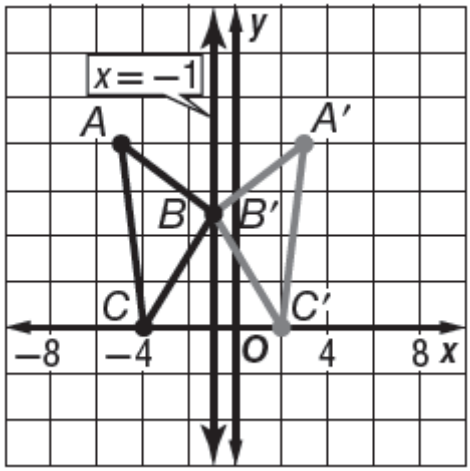
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = 1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

16) $WXYZ, y = -4$



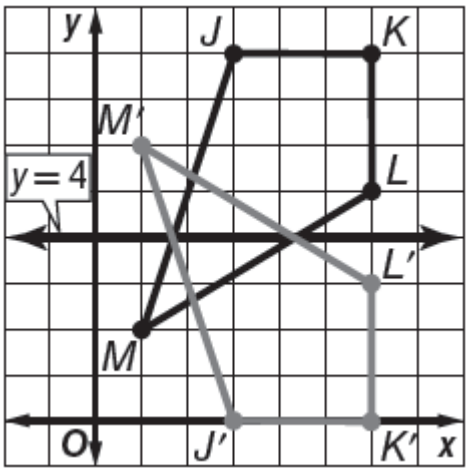
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = -4$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

$\triangle ABC, x = -1$ **(17**



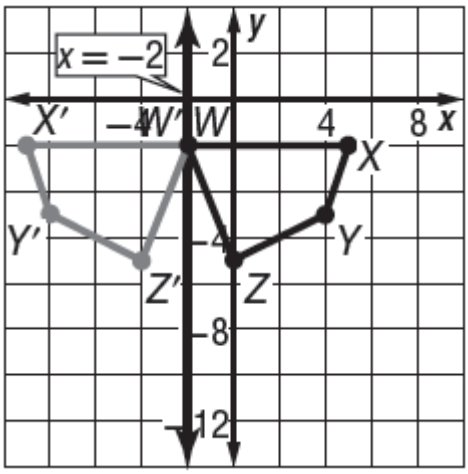
استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = -1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

$JKLM, y = 4$ **(18**



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 4$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

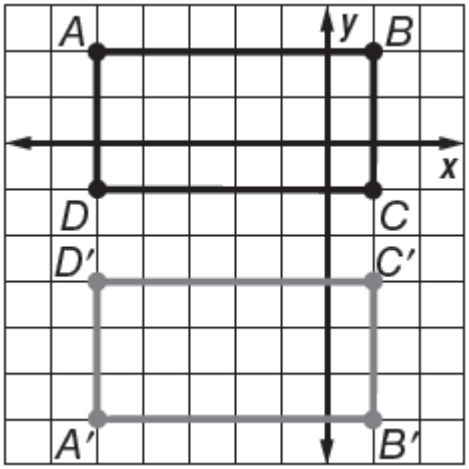
19 $WXYZ;\ x = -2$



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $x = -2$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

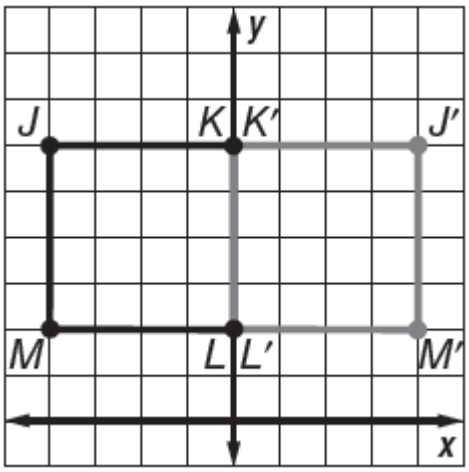
مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد .

20 المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-5, 2)$, $B(1, 2)$, $C(1, -1)$, $D(-5, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = -2$.



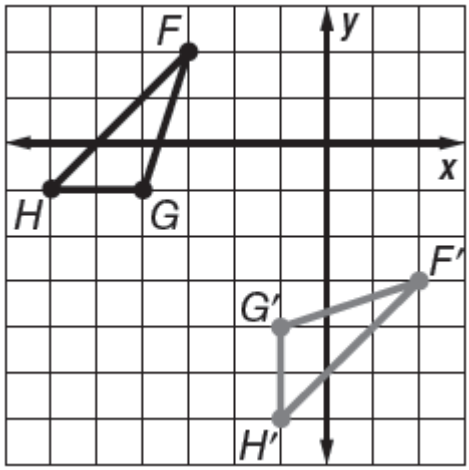
$\mathbf{A(-5, 2) \rightarrow A'(-5, -6)}$
$\mathbf{B(1, 2) \rightarrow B'(1, -6)}$
$\mathbf{C(1, -1) \rightarrow C'(1, -3)}$
$\mathbf{D(-5, -1) \rightarrow D'(-5, -3)}$

21) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $J(-4, 6), K(0, 6), L(0, 2), M(-4, 2)$ بالانعكاس حول المحور y.



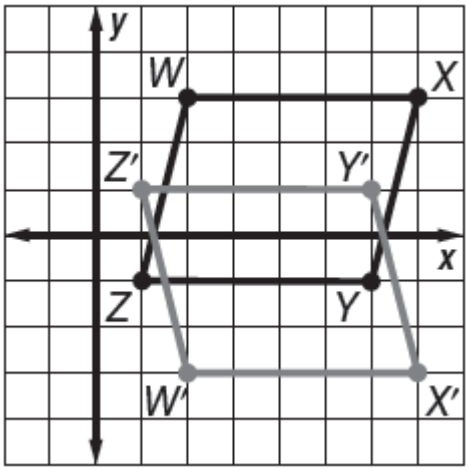
$$J(-4, 6) \rightarrow J'(4, 6)$$
$$K(0, 6) \rightarrow K'(0, 6)$$
$$L(0, 2) \rightarrow L'(0, 2)$$
$$M(-4, 2) \rightarrow M'(4, 2)$$

22) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-3, 2), G(-4, -1), H(-6, -1)$ بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$$F(-3, 2) \rightarrow F'(2, -3)$$
$$H(-6, -1) \rightarrow H'(-1, -6)$$
$$G(-4, -1) \rightarrow G'(-1, -4)$$

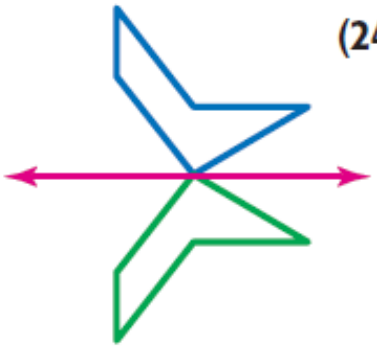
23 $\square WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $W(2,3), X(7,3), Y(6,-1), Z(1,-1)$ بالانعكاس حول المحور x.



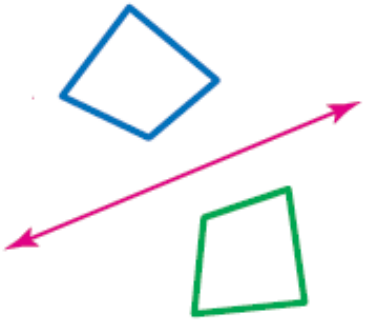
$$W(2,3) \rightarrow W'(2,-3)$$
$$X(7,3) \rightarrow X'(7,-3)$$
$$Y(6,-1) \rightarrow Y'(6,1)$$
$$Z(1,-1) \rightarrow Z'(1,1)$$

يبيِّنُ كلٌّ من الأشكال الآتية مضلعًا وصورته بالانعكاس حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس في كلٍّ منها.

24

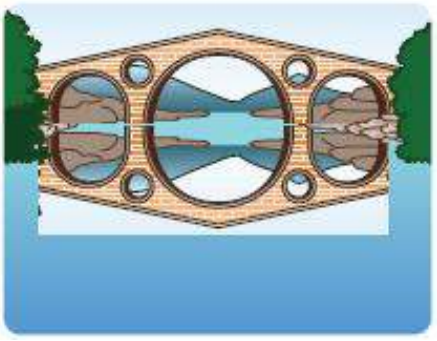


25



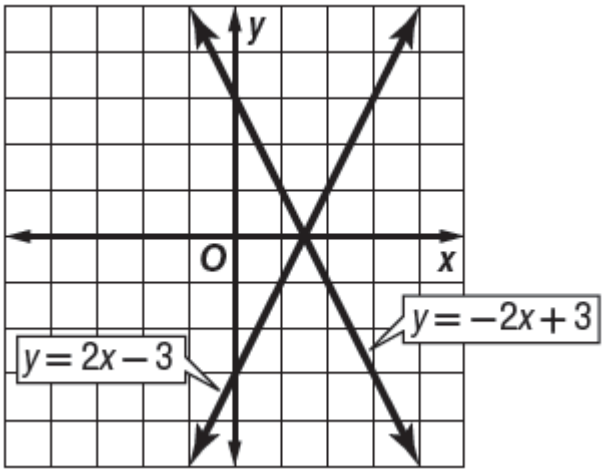
26

27) **تصوير:** ارسم صورة الجسر الموضح في الصورة المجاورة بالانعكاس في الماء.



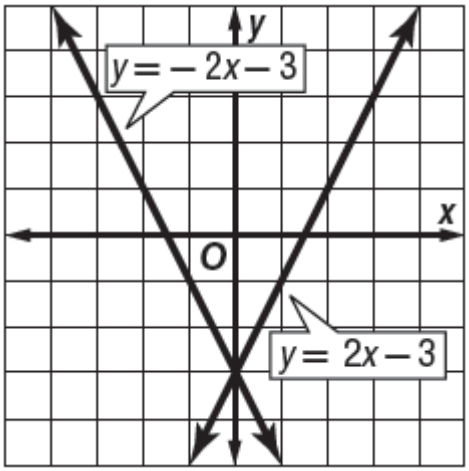
جبر: مثِّل بيانيًّا المستقيم $y = 2x - 3$ وصورته بالانعكاس حول المستقيم المعطى في كلٍّ مما يأتي، ثم اكتب معادلة المستقيم الناتج عن الانعكاس

28) المحور x



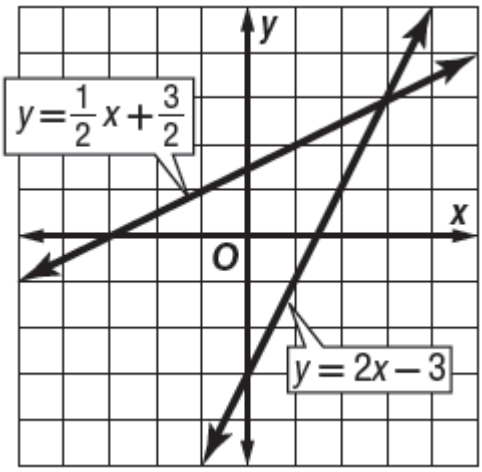
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2x + 3$

29) المحور y



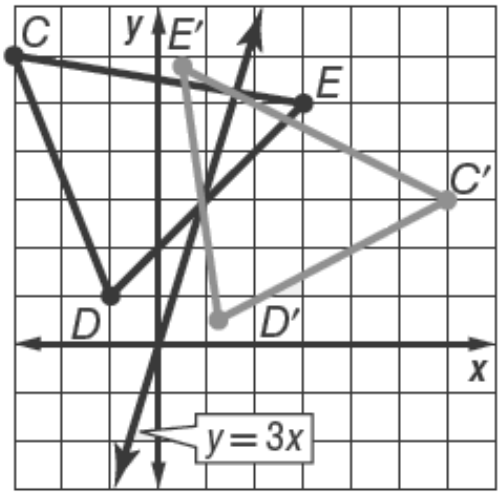
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2x - 3$

30) المستقيم $y = x$

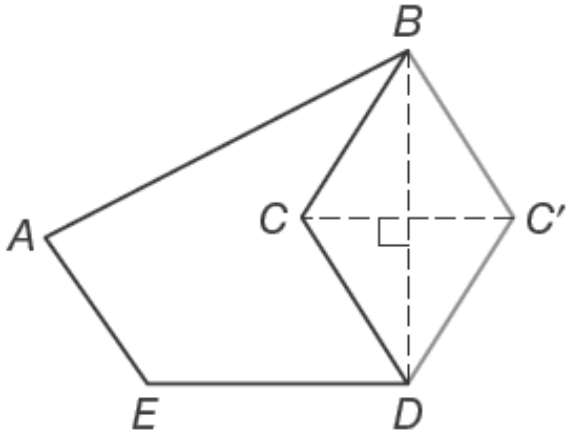


معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$

31) مثِّل بيانيًّا صورة $\triangle CDE$ المبين أدناه بالانعكاس حول المستقيم $y = 3x$.

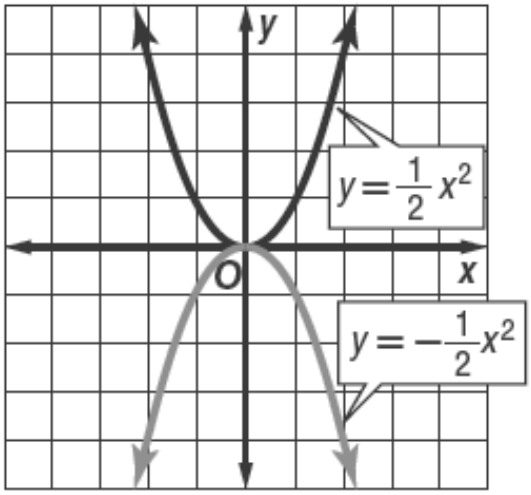


32) غيِّر موقع الرأس C ليصبح المضلع $ABCDE$ محدبًا، وتبقى أطوال أضلاعه كما هي دون تغيير.



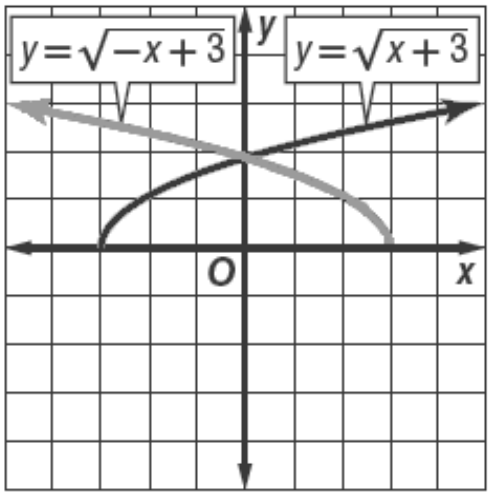
جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدوال الآتية بالانعكاس حول المحور المحدد، ثم اكتب معادلة الصورة الناتجة عن الانعكاس.

33) المحور x



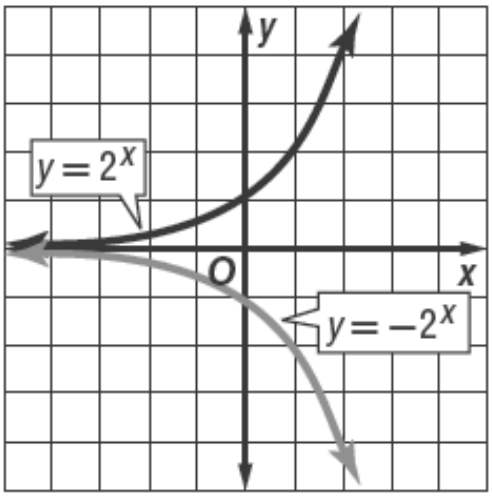
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y=-\frac{1}{2}x^2$

34) المحور y



معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y=\sqrt{-x+3}$

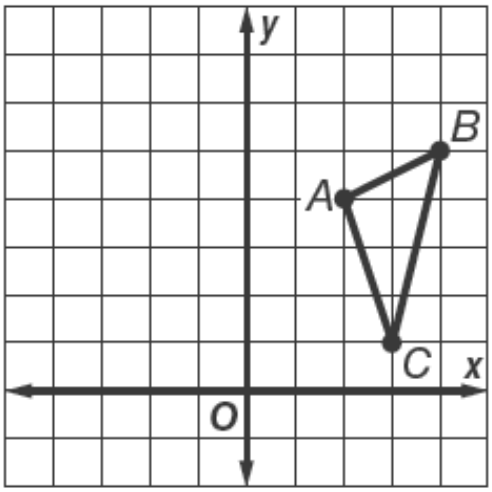
35) المحور x



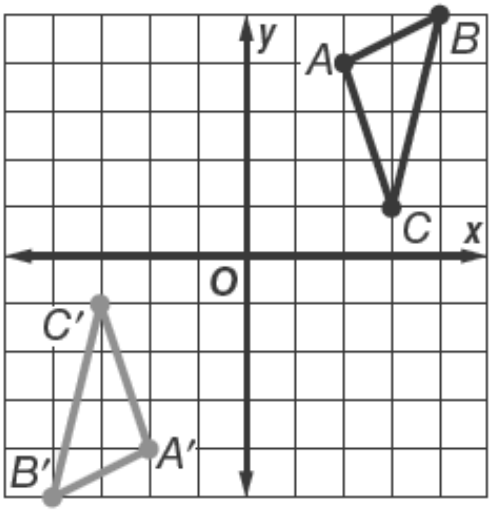
معادلة المستقيم بعد الانعكاس: $y = -2^x$

36) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول نقطة الأصل.

a) هندسيًّا: ارسم المثلث ΔABC في المستوى الإحداثي، بحيث تكون إحداثيات رؤوسه أعدادًا صحيحة موجبة.



b) بيانيًا: عيِّن النقاط A', B', C' الناتجة عن الانعكاس، بحيث تكون النقطة الأصلية وصورتها ونقطة الأصل على استقامةٍ واحدةٍ، وتكون النقطة الأصلية وصورتها على البعد نفسه من نقطة الأصل.



c) جدوليًا: انقل الجدول الآتي وأكمله.

	$\triangle ABC$		$\triangle A'B'C'$	
الإحداثيات	A	$(2, 4)$	A'	$(-2, -4)$
	B	$(4, 5)$	B'	$(-4, -5)$
	C	$(3, 1)$	C'	$(-3, -1)$

d) لفظيًا: ضع تخمينًا حول العلاقة بين إحداثيات الرؤوس المتناظرة لشكلٍ وصورته الناتجة عن انعكاسه حول نقطة الأصل.

إحداثيا الصورة بالانعكاس في نقطة الأصل هما المعكوسان الجمعيان لإحداثيي النقطة الأصلية.

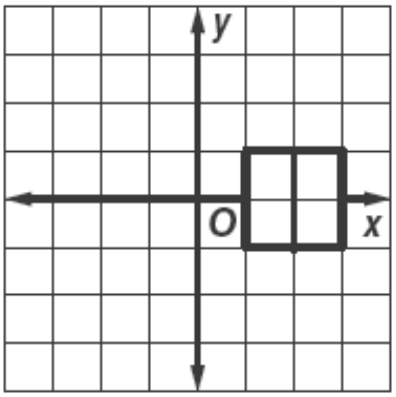
مسائل مهارات التفكير العليا:

37) اكتشف الخطأ: يجد جميل وإبراهيم إحداثيات صورة النقطة $C\,(2, 3)$، الناتجة عن انعكاس حول المحور x، فهل إجابة أيٍّ منهما صحيحة؟ وضّح إجابتك.

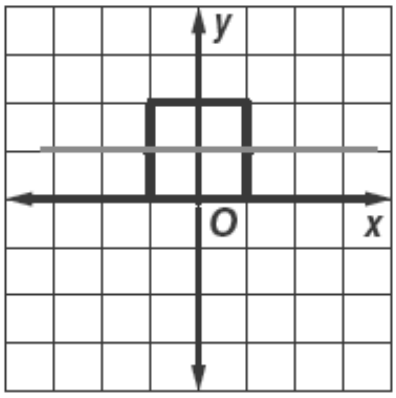
جميل	إبراهيم
$C'(2, -3)$	$C'(-2, 3)$

جميل، إجابة ممكنة: صورة نقطة بالانعكاس حول المحور X يبقي موقع الصورة الأفقي نفسه ولكنه يتغير رأسياً. عندما تعكس النقطة (2, 3) حول المحور X يكون إحداثيا الصورة (-3 , 2) لأنها تكون في الموقع الأفقي نفسه ولكن في الجهة الأخرى من المحور X رأسياً.

38) مسألة مفتوحة: ارسم مضلعًا في المستوى الإحداثي، بحيث تكون صورته الناتجة عن انعكاس حول المحور x منطبقةً عليه تمامًا.



39) مسألة مفتوحة: ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، يكون اتجاه صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم $y = 1$ مماثلًا لاتجاه الشكل نفسه. وضِّح الشروط التي يجب توافرها لتحقيق هذا الأمر.



استعمل خطوط الشبكة الإحداثية لإيجاد النقطة المناظرة لكل رأس، بحيث يكون المستقيم $y = 1$ هو المنصف العمودي للقطع المستقيمة التي تصل بين كل رأس وصورته.

40) تحدٍ: إذا كانت صورة النقطة $A(4, 3)$ بعد الانعكاس حول مستقيم معينٍ هي $A'(-1, 0)$، فأوجد معادلة محور الانعكاس. وضح إجابتك.

ميل المستقيم الذي يمر بالنقطة وصورتها $\frac{3}{5}$. وباستعمال قانون نقطة المنتصف نجد أن نقطة منتصف القطعة الواصلة بين النقطة وصورتها $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$. وباستعمال صيغة النقطة والميل لمعادلة المستقيم نجد أن معادلة خط الانعكاس $y = \frac{-5}{3}x + 4$.

(ميل العمود المنصف يساوي $\frac{-5}{3}$ لأنه يساوي سالب مقلوب الميل $\frac{3}{5}$)

41) **تبرير:** هل تقع صورة نقطة بالانعكاس حول مستقيم ما في الجهة الثانية من هذا المستقيم دائمًا أم أحيانًا أم لا تقع فيها أبدًا؟

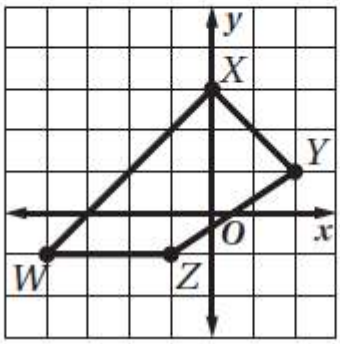
أحياناً، إذا وقعت النقطة على محور الانعكاس فتبقى صورتها في الموقع نفسه.

42) **اكتب:** تقع النقاط P, Q, R على استقامةٍ واحدةٍ، حيث Q واقعة بين P و R. باستعمال الهندسة الإحداثية، صف خطةً لإثبات أن انعكاس هذه النقاط حول مستقيم يحافظ على الاستقامة وترتيب مواقع النقاط.

أنشئ النقاط P،Q ، R على استقامة واحدة، بحيث تكون Q بين R وP. ارسم المستقيم l، ثم أنشئ أعمدة من كل من P,Q ,R على المستقيم l.
واستعمل صيغة الميل لتبين أم ميل P`Q` يساوي ميل P`R` فتكون النقاط P`، Q` ، R` على استقامة واحدة ولأن PQ = P`Q`، PR =P`R` , QR= Q`R`
وحيث أن PR= PQ+ QR فإن P`R`= P`Q`+ Q`R` ما يعني أن Q` تقع بين R` وP`.

تدريب على اختبار

43) إجابة قصيرة: إذا كانت صورة الشكل الرباعي $WXYZ$ الناتجة عن انعكاسه حول المحور y هي $WX'Y'Z'$ ، فما إحداثيات X'؟



$$X' = (0, 3)$$

44) إحداثيات النقطتين A, B في المستوى الإحداثي هي $(-2, 4), (3, 3)$ على الترتيب، احسب AB.

A $(1, 7)$

B $\sqrt{26}$

C $(5, -1)$

D $\sqrt{50}$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$AB = \sqrt{[3 - (-2)]^2 + (3 - 4)^2}$$

$$= \sqrt{(5)^2 + (-1)^2}$$

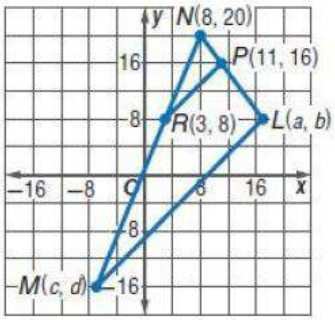
$$= \sqrt{25 + 1}$$

$$= \sqrt{26}$$

الاختيار الصحيح: **B** $\sqrt{26}$

مراجعة تراكمية

45) هندسة إحداثية : في $\triangle LMN$ ، $\overline{PR}$ تقسِّم الضلعين MN , NL إلى قطع مستقيمة متناظرة أطولها متناسبة، إذا كانت $\frac{LP}{PN} = \frac{2}{1}$ وكانت $RN = 3$، فأوجد MR.



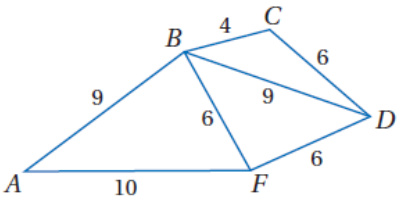
L (17, 8), M (-7, -16)

استعمل الشكل المجاور لتكتب متباينةً تصف العلا
أو طولَي القطعتين المستقيمتين في كلٍّ مما يأتي.

46) $m\angle BDC,\ m\angle FDB$

$\because \overline{BF} \cong \overline{DC}$, $\overline{BD} \cong \overline{BD}$, $BC < FD$

$\therefore m\angle BDC < m\angle FDB$



47) $m\angle FBA,\ m\angle DBF$

$\because \overline{AB} \cong \overline{BD}$, $\overline{BF} \cong \overline{BF}$, $FD < AF$

$\therefore m\angle FBA < m\angle DBF$

استعد للدرس اللاحق

48) إحداثيات طرفيَ $\overline{AB}$ هما $B(3,-1)$, $A(5,4)$ ، تحركت كلٌّ من هاتين النقطتين 3 وحداتٍ إلى اليمين و5 وحداتٍ إلى أسفل، فكانت مواقعهما الجديدة A' , B' على الترتيب.

a) اكتب قاعدة هذا التحويل الهندسي.

$$(x\ ,\ y)\rightarrow(x+3\ ,\ y-5)$$

b) أوجد إحداثيات A' , B' .

$$A'(8,-1)\ \ ,\ \ B'(6,-6)$$

c) أوجد طول كلٍّ من $\overline{AB}, \overline{A'B'}$.

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$AB=\sqrt{(3-5)^2+(-1-4)^2}$$
$$=\sqrt{4+25}$$
$$=\sqrt{29}$$

$$A'B'=\sqrt{(6-8)^2+[-6-(-1)]^2}$$
$$=\sqrt{4+25}$$
$$=\sqrt{29}$$

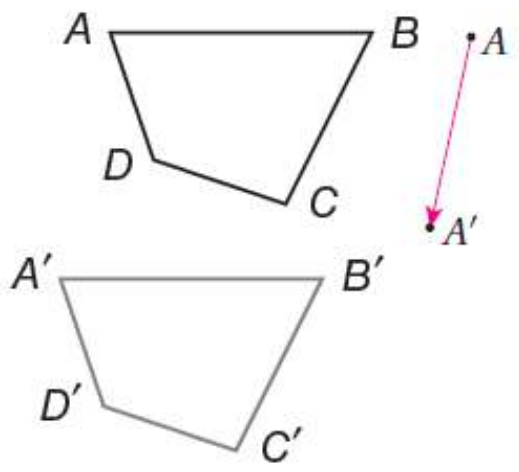
الإزاحة (الانسحاب)

7-2

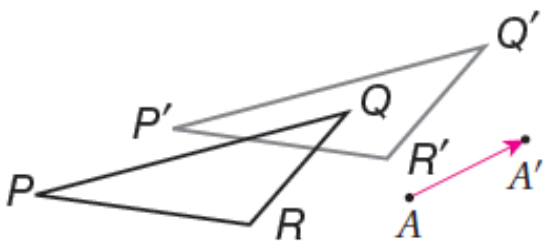
تحقق

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' .

(1A

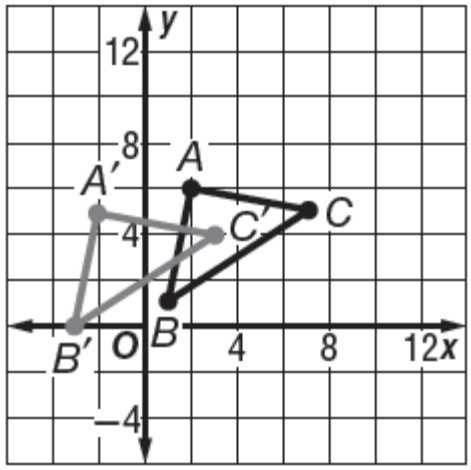


(1B

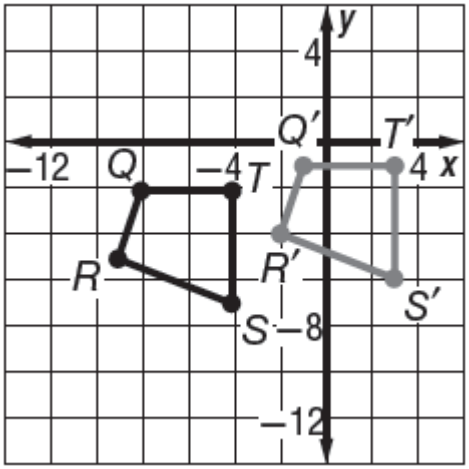


مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

2A) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(2, 6), B(1, 1), C(7, 5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-4, y-1)$

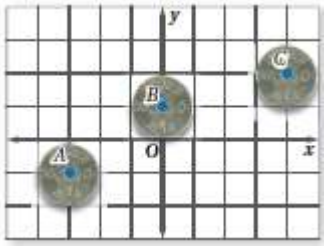


2B) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $S(-4, -7), T(-4, -2), Q(-8, -2), R(-9, -5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x+7, y+1)$



3) **نقود:** تمَّ تصوير حركة قطعة نقود في مواقع مختلفة على المستوى الإحداثي.

A) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع B لفظيًّا.



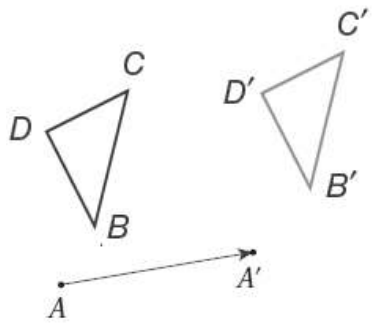
تحركت قطعة النقد 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أعلى.

B) صِفْ حركة القطعة عند انتقالها من الموقع A إلى الموقع C باستعمال قاعدة الإزاحة.

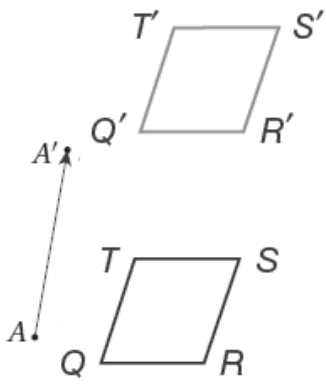
$$-3+a=4$$
$$a=4+3=7$$
$$-1+b=2$$
$$b=2+1=3$$
$$(x\ ,\ y)\rightarrow(x+7\ ,\ y+3)$$

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ ممَّا يأتي:

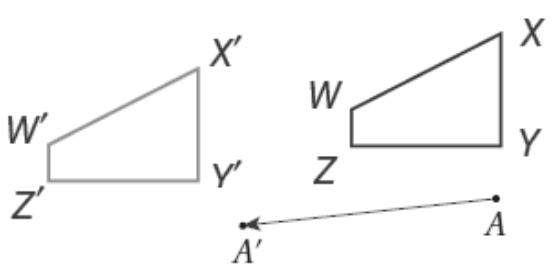
(1



(2

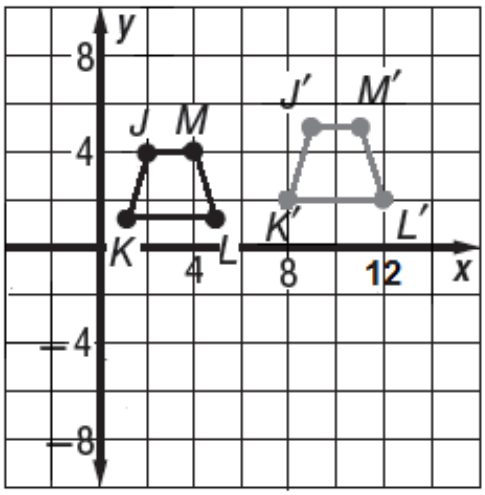


3)

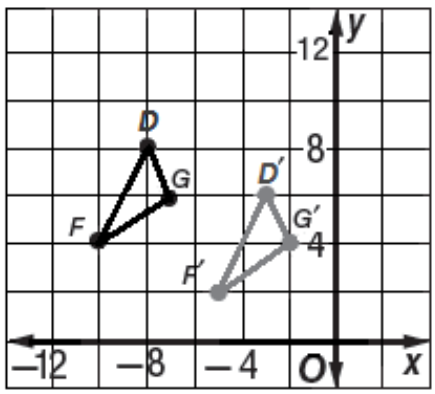


مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

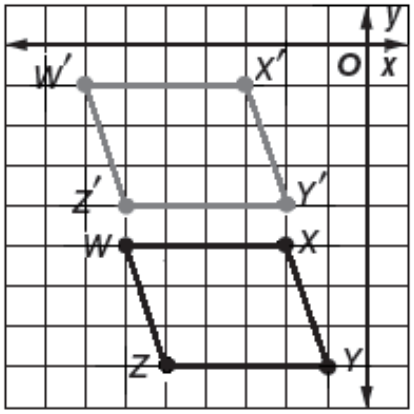
4) شبه المنحرف $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه: $L(5, 1), M(4, 4)$,
$J(2, 4), K(1, 1)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 7, y + 1)$



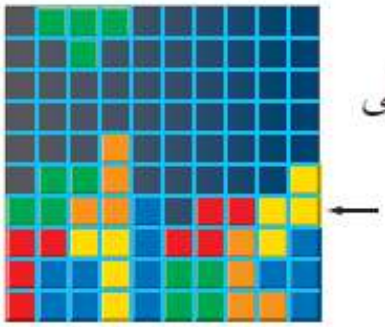
5) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $G(-7, 6), F(-10, 4), D(-8, 8)$،
أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 5, y - 2)$



6) متوازي الأضلاع $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Y(-1,-8), Z(-5,-8)$,
$W(-6,-5), X(-2,-5)$، أُزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-1, y+4)$



7) **ألعاب فيديو:** إن هدف اللعبة المجاورة هو تحريك القطع الملونة إلى اليمين أو اليسار، عندما تنزل من أعلى الشاشة لملء كل صف دون ترك فراغاتٍ فيه. إذا كان الموقع الابتدائي للقطعة في أعلى الشاشة (x, y)، فاكتب قاعدةً لوصف الانسحاب الذي يملأ الصف المشار إليه بالسهم.



يجب ان تتحرك القطعة 3 وحدات إلى اليمين و 5 إلى الأسفل، لذا الإزاحة تكون $(3, -5)$

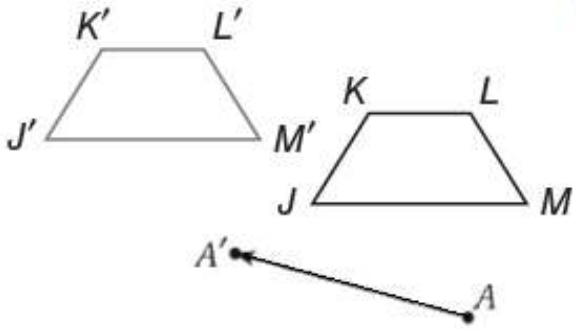
قاعدة الانسحاب:

$$(x,\ y) \rightarrow (x+3,\ y-5)$$

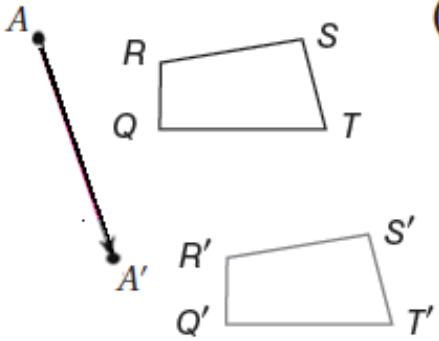
تدرب وحل المسائل:

ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة A إلى النقطة A' في كلٍّ مما يأتي:

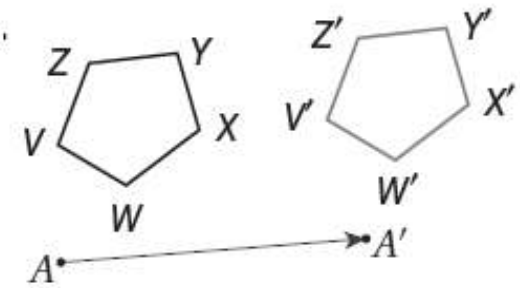
(8



(9

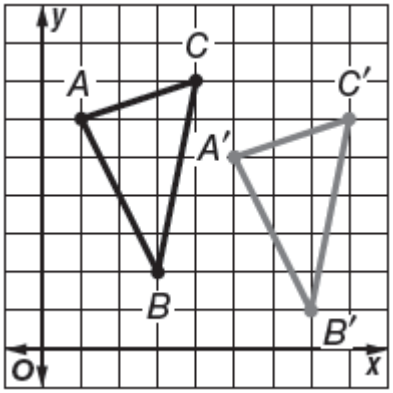


(10

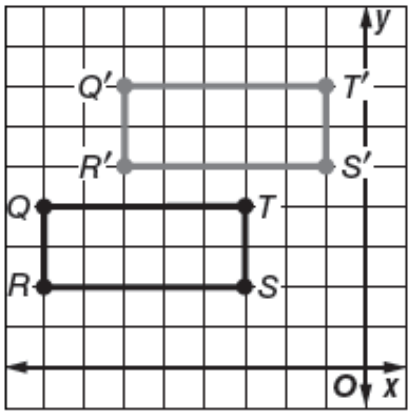


مثِّل الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ مما يأتي بيانيًّا:

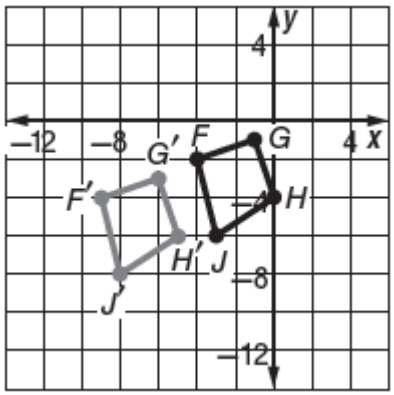
11) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(1, 6), B(3, 2), C(4, 7)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 4, y - 1)$



12) المستطيل $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $S(-3, 2), T(-3, 4)$, $Q(-8, 4), R(-8, 2)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + 2, y + 3)$



13) الشكل الرباعي $FGHJ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $H(0, -4), J(-3, -6)$,
$F(-4, -2), G(-1, -1)$، أزيح وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x - 3, y - 6)$



14) مواقع: تبين الشبكة المجاورة بعض المواقع في الحي الذي يقطنه سعيد.

a) إذا غادر سعيد منزله، وانتقل 4 وحدات إلى الشمال و 3 وحدات إلى الشرق، فأين يصل؟

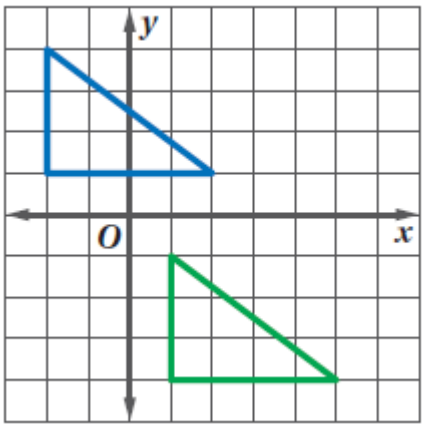
المسجد

b) صِف لفظيًّا إزاحتين تنقلان سعيد من المدرسة إلى منزله.

يمكن أن يسير 5 وحدات باتجاه الغرب، ثم وحدة واحدة إلى الجنوب، أو أن يسير وحدة واحدة إلى الجنوب ثم 5 وحدات باتجاه الغرب.

اكتب قاعدة الإزاحة التي تنقل الشكل الأزرق إلى الشكل الأخضر في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

(15

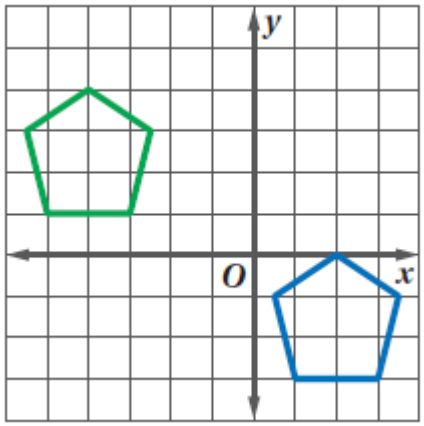


يجب ان تتحرك النقطة 3 وحدات إلى اليمين و 5 إلى الأسفل، لذا الإزاحة تكون $(3, -5)$

قاعدة الانسحاب:

$$(x,\ y) \rightarrow (x+3,\ y-5)$$

(16



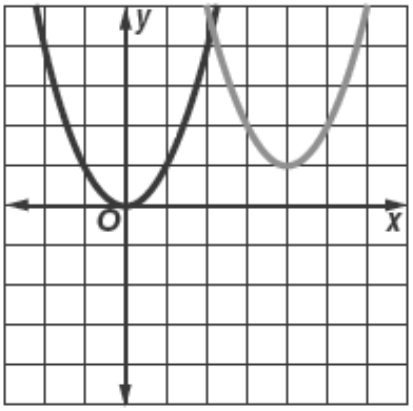
يجب ان تتحرك النقطة 6 وحدات إلى اليسار و 4 إلى الأعلى، لذا الإزاحة تكون $(3, -5)$

قاعدة الانسحاب:

$$(x,\ y) \rightarrow (x-6,\ y+4)$$

جبر: مثِّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الدالتين الآتيتين الناتجة عن الإزاحة المعطاة، ثم اكتب معادلة هذه الصورة.

17) $(x, y) \rightarrow (x + 4, y + 1)$



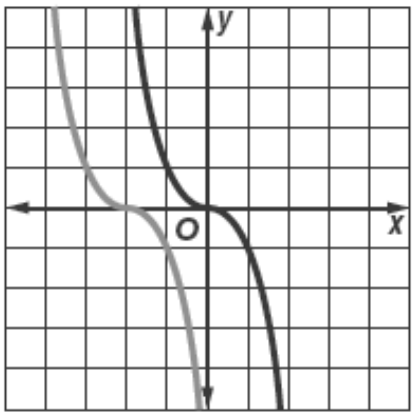
الإزاحة $(4, 1)$ تزيح كل نقطة من المنحنى 4 وحدات إلى اليمين و 1 وحدة إلى الأعلى، و على هذا النقطة $(0, 0)$ تزاح إلى النقطة $(4, 1)$.

و النقطة $(1, 1)$تزاح إلى النقطة $(5, 2)$. و النقطة $(-1, 1)$ تزاح الى النقطة $(3, 2)$. .... و هكذا

معادلة المنحنى بعد الإزاحة تكون

$$y = (x - 4)^2 + 1$$

18) $(x, y) \rightarrow (x - 2, y)$

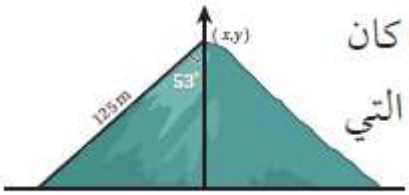


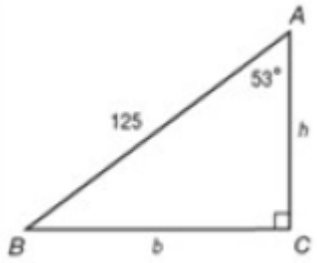
إزاحة النقطة $(-2, 0)$ تزيح كل نقطة من المنحنى 2 وحدة إلى اليسار، و على هذا النقطة $(0, 0)$ ستزاح إلى $(-2, 0)$.

و النقطة $(1, -1)$ تزاح إلى $(-1, -1)$، و النقطة $(-1, 1)$ تزاح إلى النقطة $(-3, 1)$. .... و هكذا

معادلة المنحنى بعد الإزاحة تكون $y = -(x + 2)^3$

19) تضاريس: طول منحدر تلةٍ من قمتها حتى أسفلها 125 m، وقياس الزاوية التي يصنعها مع المستقيم الرأسي 53°، إذا كان موقع منصور عند قمة التلة (x, y)، فاكتب قاعدة الإزاحة التي تمثل انتقاله إلى أسفل التلة.





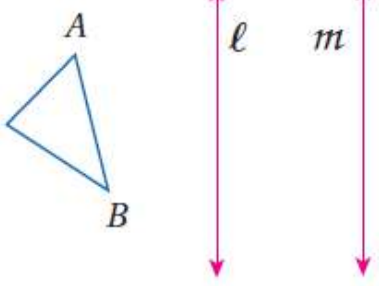
$$\sin 53^\circ = \frac{b}{125}$$
$$125 \sin 53^\circ = b$$
$$100 \approx b$$
$$\cos 53^\circ = \frac{h}{125}$$
$$125 \cos 53^\circ = h$$
$$75 \approx h$$

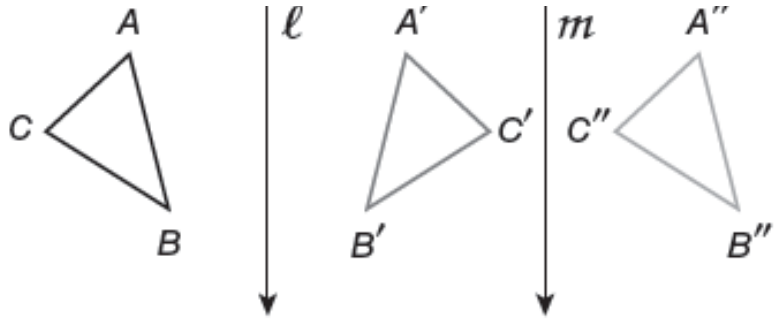
الرأس B ازيح الى (الأسفل 75 ft. و إلى اليسار بـ 100 ft.) بالنسبة إلى A

قاعدة الازاحة: $(x, y) \rightarrow (x - 75, y - 100)$

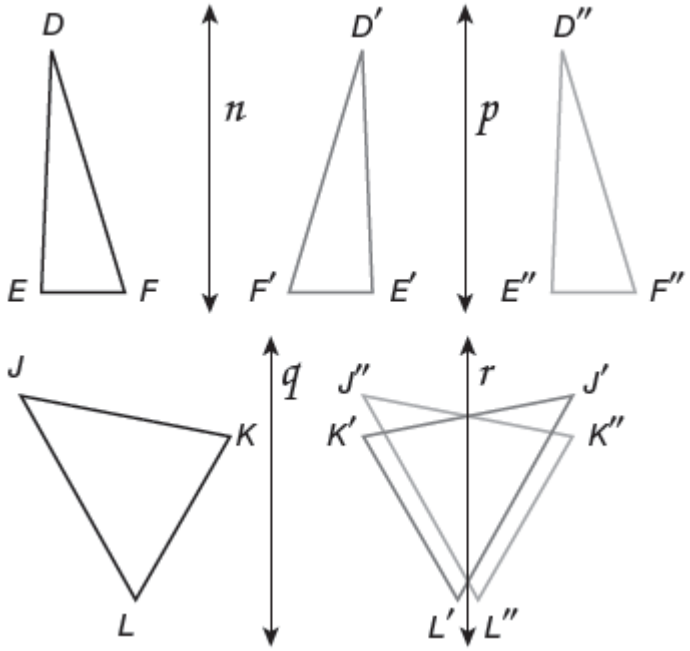
20) تمثيلات متعددة: ستستقصي في هذه المسألة نتيجة انعكاسين حول مستقيمين رأسيَّين.

a) هندسيًّا: ارسم على ورق شفاف $\triangle ABC$، والمستقيمين الرأسيّين ℓ, m، وارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ، بطيِّ الورقة على امتداد المستقيم ℓ وسمِّ هذه الصورة $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m، بطيّ الورقة على امتداد المستقيم m، وسمّ هذه الصورة $\triangle A''B''C''$.





b) **هندسيًّا :** كرّر العملية التي نفذتها في الفرع **a** لرسم صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين p, n، وصورة $\triangle MNP$ الناتجة عن انعكاسين متعاقبين حول المستقيمين الرأسيين q, r.



c) **جدوليًّا :** انسخ الجدول الآتي وأكمله.

المسافة بين المستقيمين الرأسيين (cm)		المسافة بين النقاط المتناظرة (cm)	
ℓ, m	2.2	A و A''، B و B''، C و C''	4.4
n, p	2.8	D و D''، E و E''، F و F''	5.6
q, r	1.4	M و M''، N و N''، P و P''	2.8

d) **لفظيًّا :** صِفْ نتيجة الانعكاسين حول المستقيمين الرأسيين باستعمال الإزاحة.

يمكن وصف تركيب انعكاسين حول مستقيمين رأسيين باعتباره إزاحة أفقية مسافتها مثلا المسافة بين المستقيمين الرأسيين، واتجاهها عمودي عليهما.

مسائل مهارات التفكير العليا:

21) تبرير: أُجريت إزاحةٌ لشكل ما، وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 3, y + 8)$، ثم إزاحةٌ أخرى للصورة الناتجة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y - 8)$. من دون استعمال الرسم، حدِّد مكان الشكل النهائي وبرِّر إجابتك.

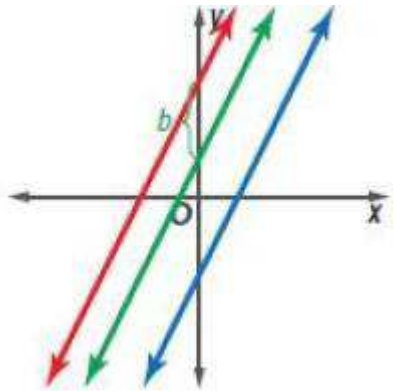
المكان النهائي: (x, y)

الازاحة $(x-3, y+8)$ **ثم** $(x+3, y-8)$ **هي نفسها الإزاحة**

$(x-3+3, y+8-8)$

22) تحدٍّ: أُزيح المستقيم $y = mx + b$ وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x + a, y + b)$. اكتب معادلة صورته الناتجة عن هذه الإزاحة. ما مقطع المحور y للمستقيم الجديد؟

عند إزاحة المستقيم $y = mx + b$ **وفق القاعدة المذكورة :**



اولاً: مقطع المحور y الجديد عند $b - ma$.

الآن المستقيم $y = m(x-a) + b$

يزاح b وحدات رأسياً.

في هذه الحالة، $b = -4$

هذا يشكل المعادلة $y = m(x-a) + b + b$

أو $y = m(x-a) + 2b$

بعد الإزاحة الأولى، المقطع y عند $b - ma$

الآن يجب أن يكون عند $2b - ma$

$$2b - ma = 2(-4) - 2(-5)$$
$$= -8 + 10$$
$$= 2$$

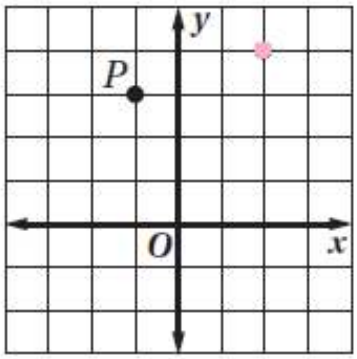
$y = m(x-a) + 2b$; $2b$

23) **اكتب:** تذكر من الدرس السابق أن النقطة الثابتة هي النقطة التي تنطبق صورتها عليها. هل توجد نقاط ثابتة في الإزاحة؟ وضح أسباب وجودها أو أسباب عدم وجودها.

لا، لأنه يجب أن تتحرك النقطة حتى تتم الإزاحة، ويبقي الشكل محافظاً على هيئته. فلا يمكن أن تبقي أي نقطة ثابتة في الإزاحة. إذا بقيت أي نقطة ثابتة عندئذ تكون الصورة هي الشكل الأصلي نفسه.

تدريب على اختبار

24) أوجد صورة النقطة P الناتجة عن الإزاحة: $(x, y) \rightarrow (x + 3, y + 1)$.



A $(0, 6)$ **B** $(0, 3)$

C $(2, -4)$ **D** $(2, 4)$

الاختيار الصحيح: **D** $(2, 4)$

25) يحتوي كيس على 5 كرات حمراء وكرتين زرقاوين و 4 كرات بيضاء وكرة واحدة صفراء. إذا سُحب من الكيس كرتان على التوالي من دون إرجاع، فما احتمال سحب كرتين بيضاوين؟

A $\frac{1}{66}$ **B** $\frac{1}{11}$ **C** $\frac{1}{9}$ **D** $\frac{5}{33}$

$$P(A \,\&\, B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \,\&\, B) = \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11}$$

$$= \frac{1}{11}$$

الاختيار الصحيح: **B** $\frac{1}{11}$

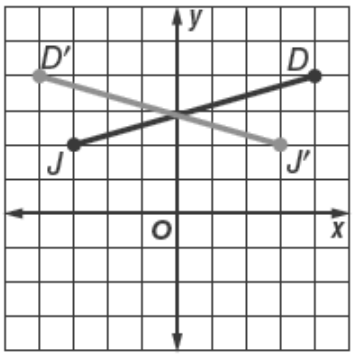
26) **إجابة قصيرة:** ما قاعدة الإزاحة التي تنقل النقطة $A(3, -5)$ إلى النقطة $A'(-2, -8)$؟

$$(x, y)(x - 5, y - 3)$$

مراجعة تراكمية

مثِّل كل شكل مما يأتي بيانيًّا، ثم ارسم صورته بالانعكاس المحدد.

27 $\overline{DJ}$ التي إحداثيات طرفَيها $D(4, 4), J(-3, 2)$ ، بالانعكاس حول المحور y .

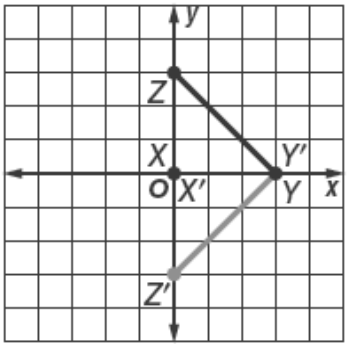


$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$D(4, 4) \rightarrow D'(-4, 4)$$

$$J(-3, 2) \rightarrow J'(3, 2)$$

28 $\triangle XYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $X(0, 0), Y(3, 0), Z(0, 3)$ ، بالانعكاس حول المحور x .



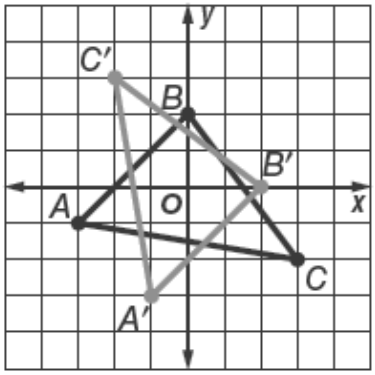
$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$X(0, 0) \rightarrow X'(0, 0)$$

$$Y(3, 0) \rightarrow Y'(3, 0)$$

$$Z(0, 3) \rightarrow Z'(0, -3)$$

29 $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-3, -1), B(0, 2), C(3, -2)$ ، بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



$$(x, y) \rightarrow (y, x)$$

$$A(-3, -1) \rightarrow A'(-1, -3)$$

$$B(0, 2) \rightarrow B'(2, 0)$$

$$C(3, -2) \rightarrow C'(-2, 3)$$

(30) الملاحة الجوية : كان ارتفاع طائرة 3 km فوق سطح البحر عندما بدأت بالارتفاع بزاوية 3.5° ، إذا بقيت هذه الزاوية ثابتةً، فكم كيلو مترًا يكون ارتفاعها فوق سطح البحر بعد طيرانها مسافة 50 km؟

نفرض أن x ارتفاع الطائرة بعد طيران 50 km من نقطة الارتفاع.

$$\sin 3.5^\circ = \frac{x}{50}$$

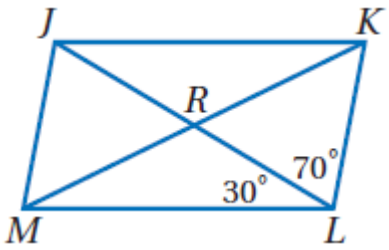
$$50 \sin 3.5^\circ = x$$

$$3.1 \approx x$$

الطائرة تكون على ارتفاع 3km فوق سطح البحر عند بدأ الارتفاع.

لهذا، بعد 50km ستكون حوالي $3 + 3.1 = 6.1$ km فوق مستوى البحر.

أوجد كلًّا من القياسات الآتية مستعملًا $\square JKLM$ المجاور.



(31) $m\angle MJK$

$\because \angle MJK \cong \angle MLK$

$\therefore \angle MLK = 30 + 70 = 100$

$\therefore m\angle MLK = 100^\circ$

$\therefore m\angle MJK = 100^\circ$

(32) $m\angle JML$

$360 = m\angle JML + 100 + m\angle LKJ + 100$

$360 = m\angle JML + 200 + m\angle LKJ$

$160 = m\angle JML + m\angle LKJ$

$160 = 2m\angle JML$

$80 = m\angle JML$

(33 $m\angle JKL$

$360 = m\angle JML + 100 + m\angle LKJ + 100$

$360 = m\angle JML + 200 + m\angle LKJ$

$160 = m\angle JML + m\angle LKJ$

$160 = 2m\angle LKJ$

$80 = m\angle LKJ$

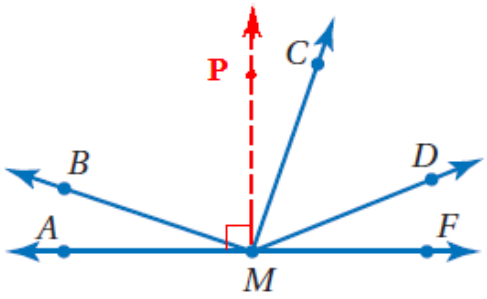
(34 $m\angle KJL$

الزاويتين $\angle JLM$ و $\angle KJL$ متناظرتين ، و حسب مسلمة الزاوية المتناظرة،

$m\angle KJL = 30^\circ$

استعد للدرس اللاحق

صنّف كلًّا من الزوايا الآتية إلى قائمةٍ أو حادةٍ أو منفرجةٍ، ثم استعمل المنقلة لقياس الزاوية إلى أقرب درجةٍ.



(35 $\angle AMC$

باستخدام المنقلة ارسم خط عمودي على النقطة M مثل $\angle AMP$ تمثل زاوية قائمة.

واضح أن الزاوية $\angle AMC > \angle AMP$

$\angle AMC > 90^\circ$

زاوية منفرجة

بقياس الزاوية بالمنقلة نجد ان $m\angle AMC = 110^\circ$

(36 $\angle FMD$

واضح أن الزاوية $\angle FMD < \angle FMP$

$\angle FMD < 90^\circ$

زاوية حادة

بقياس الزاوية بالمنقلة نجد ان $m\angle FMD = 20^\circ$

(37 $\angle BMD$

الزاوية منفرجة وباستعمال المنقلة نجد أن

$\mathbf{m\angle BMD = 140^\circ}$

(38 $\angle CMB$

الزاوية قائمة وباستعمال المنقلة نجد أن

$\mathbf{m\angle BMD = 90^\circ}$

معمل الهندسة :

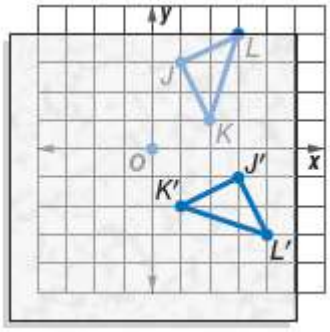
الدوران Rotations

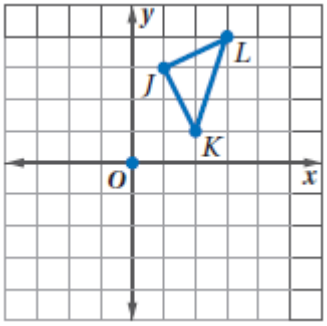
استكشاف 7-3

تمارين

1) انسخ $\triangle JKL$ الموضح في الشكل المجاور الذي إحداثيات رؤوسه هي: $J(1, 3)$,$K(2, 1)$,$L(3, 4)$ في قطعة من الورق الشفاف ثم أجب عما يأتي:

a) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير كل رأس بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟





$J'(3, -1)$, $K'(1, -2)$, $L'(4, -3)$

b) استعمل الورق الشفاف والمنقلة لتدوير $\triangle JKL$ بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل. ما إحداثيات رؤوس صورة المثلث الناتجة عن الدوران؟

$J''(-1, -3)$, $K''(-2, -1)$, $L''(-3, -4)$

c) استعمل صيغة المسافة بين نقطتين؛ لإيجاد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من النقاط J, K, L.
ثم أوجد المسافة بين نقطة الأصل وكلٍّ من رؤوس المثلثين $J''K''L''$, $J'K'L'$.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$OJ = \sqrt{(1-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$OK = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$
$$OL = \sqrt{(3-0)^2 + (4-0)^2} = 5$$
$$OJ' = \sqrt{(3-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$OK' = \sqrt{(1-0)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$$
$$OL' = \sqrt{(4-0)^2 + (-3-0)^2} = 5$$
$$OJ'' = \sqrt{(-1-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{10}$$
$$OK'' = \sqrt{(-2-0)^2 + (-1-0)^2} = \sqrt{5}$$
$$OL'' = \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5$$

$$OJ = OJ' = OJ'' = \sqrt{10}$$
$$OK = OK' = OK'' = \sqrt{5}$$
$$OL = OL' = OL'' = 5$$

2) **اكتب:** إذا تم تدوير النقطة (4, 2) في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل بزاويةٍ 90°، وبزاوية 180°، فما التغيير الذي يطرأ على الإحداثي x وعلى الإحداثي y؟

يتبدل الإحداثيان x, y عند تدوير النقطة بزاوية 90° وتتغير إشارة الإحداثي x.
وعند التدوير بزاوية 180° تتغير إشارة كلا الإحداثيين.

3) **تخمين:** ما إحداثيًّا صورة النقطة (x, y) الناتجة عن دوران بزاوية 270° في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل؟

$$(-y , x)$$

4) **تخمين:** اكتب تخمينًا حول المسافة بين مركز الدوران P، والرؤوس المتناظرة للشكلين $ABCD$, $A'B'C'D'$.

بعد كل نقطة عن مركز الدوران يساوي بعد صورتها عنه.

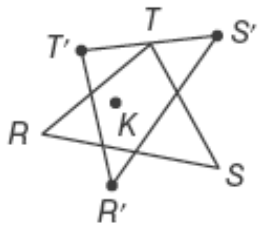
الدوران

7-3

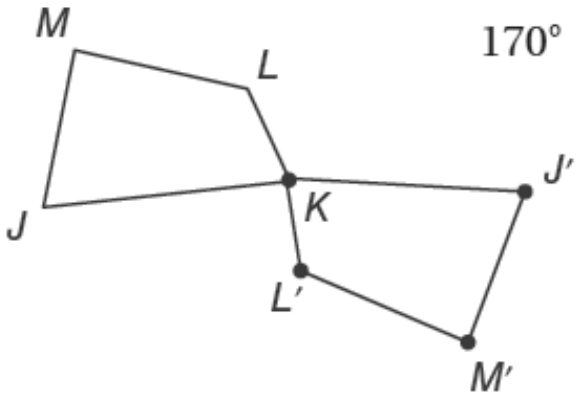
تحقق

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كل من السؤالين الآتيين:

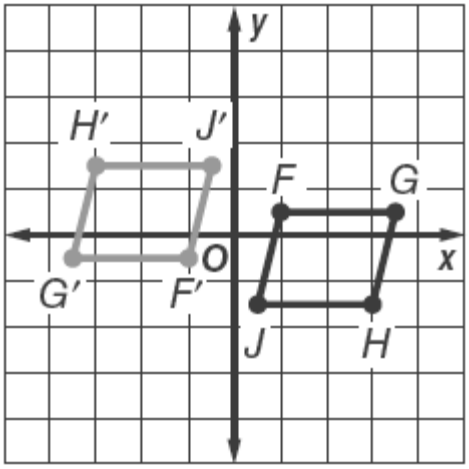
1A) $65°$



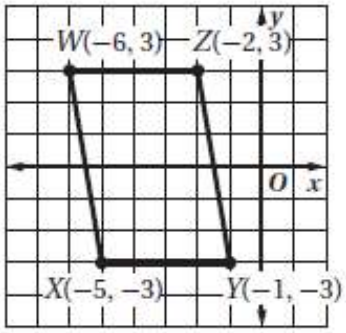
1B) $170°$



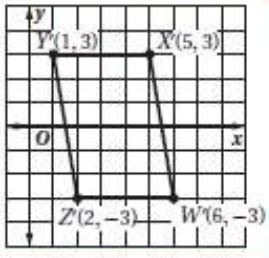
2) إحداثيات رؤوس متوازي الأضلاع $FGHJ$ هي: $J(1, -3), H(6, -3),$ $F(2, 1), G(7, 1)$. مثِّل بيانيًّا $FGHJ$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



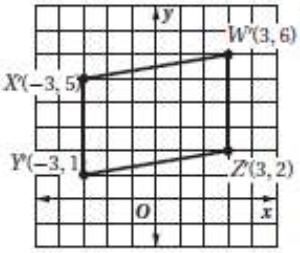
3) تمّ تدوير متوازي الأضلاع $WXYZ$ في الشكل المجاور بزاوية $180°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، أيُّ الأشكال الآتية يمثل صورة متوازي الأضلاع الناتجة عن الدوران؟



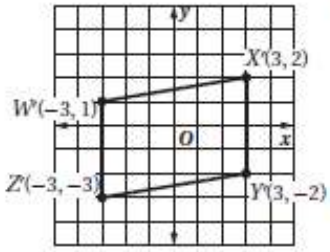
C



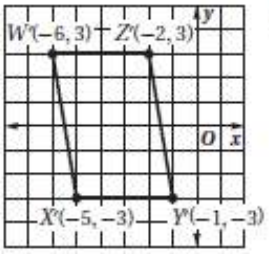
A



D

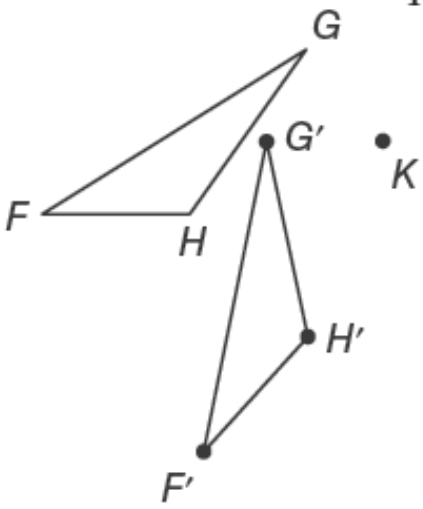


B

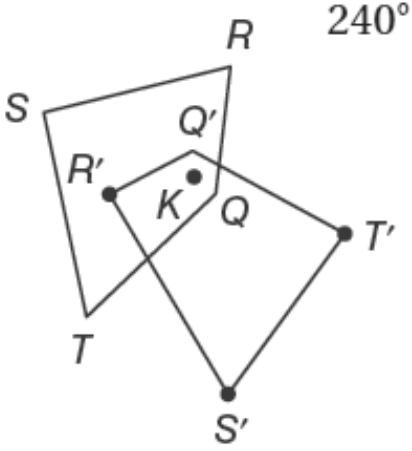


استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

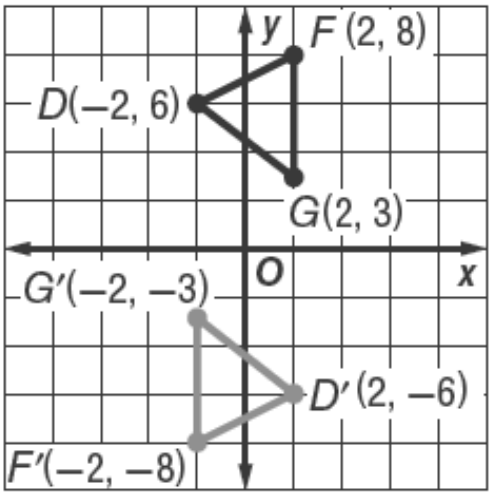
1) $45°$



2) $240°$

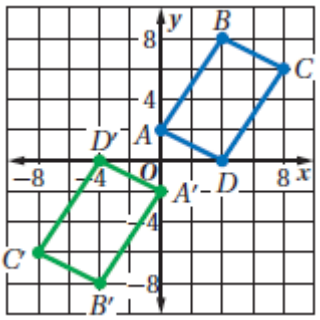


3) إحداثيات رؤوس المثلث DFG هي: $D(-2, 6)$, $F(2, 8)$, $G(2, 3)$، مثّل بيانيًّا $\triangle DFG$ وصورته الناتجة عن دوران بزاوية $270°$ حول نقطة الأصل .



4) **اختيار من متعدد :** الشكل المجاور يبيّن الشكل الرباعي $ABCD$ وصورته $A'B'C'D'$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل.

ما قياس زاوية الدوران؟



A $90°$ **B** $180°$

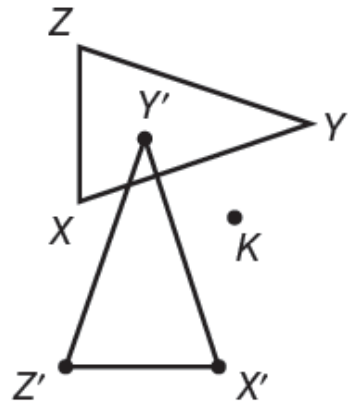
C $270°$ **D** $360°$

الاختيار الصحيح: B $180°$

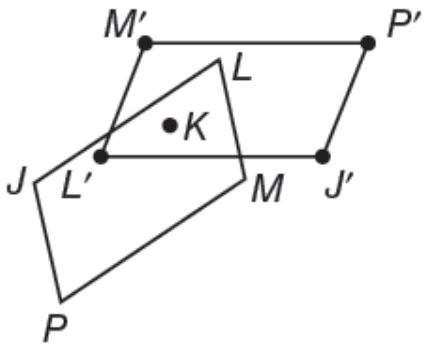
تدرب وحل المسائل:

استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة K بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

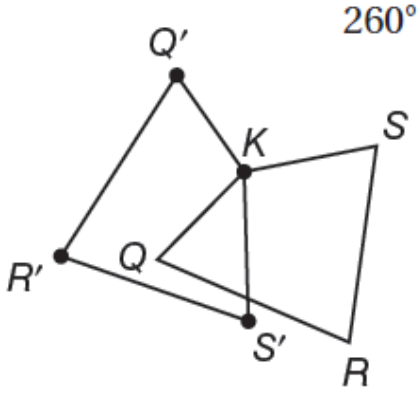
5) $90°$



6) $145°$

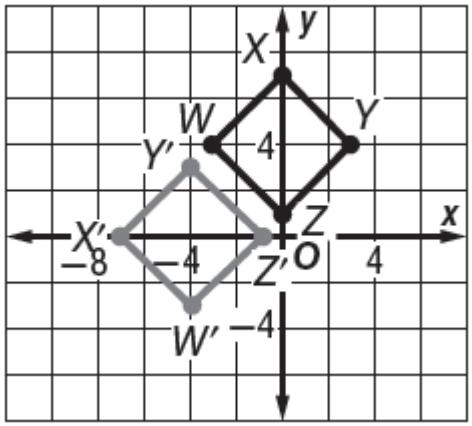


7) $260°$



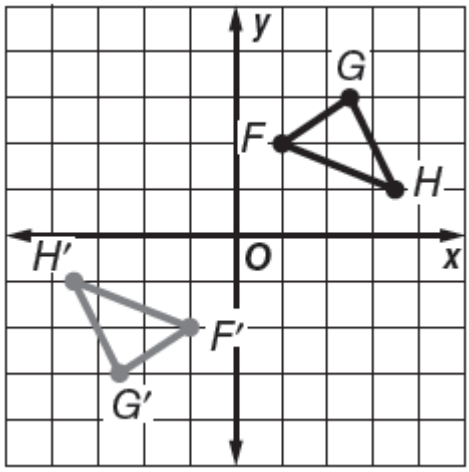
مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ ممَّا يأتي:

8) المعين $WXYZ$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Y(3, 4), Z(0, 1)$,
$W(-3, 4), X(0, 7)$ ، $90°$



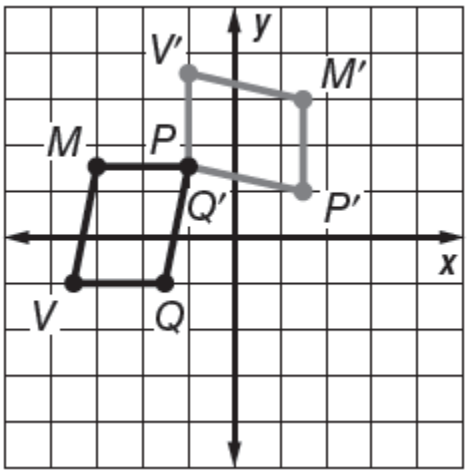
$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$
$$(-3, 4) \rightarrow (-4, -3)$$
$$(0, 7) \rightarrow (-7, 0)$$
$$(3, 4) \rightarrow (-4, 3)$$
$$(0, 1) \rightarrow (-1, 0)$$

9) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(2, 4), G(5, 6), H(7, 2)$ ، $180°$



$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$(2, 4) \rightarrow (-2, -4)$$
$$(5, 6) \rightarrow (-5, -6)$$
$$(7, 2) \rightarrow (-7, -2)$$

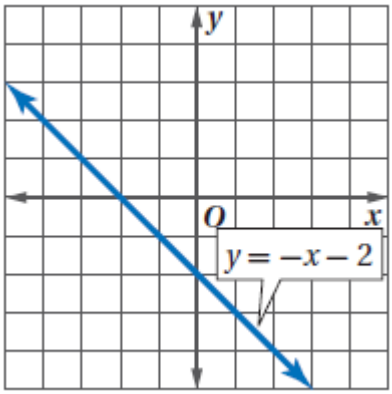
10) متوازي الأضلاع $MPQV$ الذي إحداثيات رؤوسه: $V(-7,-2), Q(-3,-2),$ $M(-6,3), P(-2,3)$، $270°$.



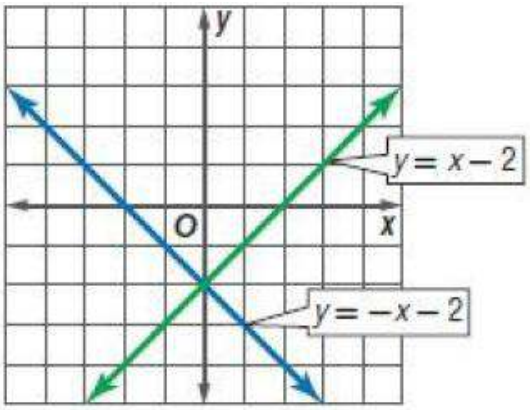
$$\begin{aligned}(x,\ y) &\rightarrow (-y,\ x)\\ (-6,\ 3) &\rightarrow (3,\ 6)\\ (-2,\ 3) &\rightarrow (3,\ 2)\\ (-3,\ -2) &\rightarrow (-2,\ 3)\\ (-7,\ -2) &\rightarrow (-2,\ 7)\end{aligned}$$

جبر: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = -x - 2$ الناتجة عن دوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحددة في كلٍّ من الأسئلة الآتية، ثم صِفِ العلاقة بين المستقيم الأصلي وصورته.

11) $90°$



$$\begin{aligned}(x,\ y) &\rightarrow (-y,\ x)\\ (0,\ -2) &\rightarrow (2,\ 0)\\ (-2,\ 0) &\rightarrow (0,\ -2)\end{aligned}$$



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{0-(-2)}{-2-0}$$

$$m = \frac{2}{-2} = -1$$

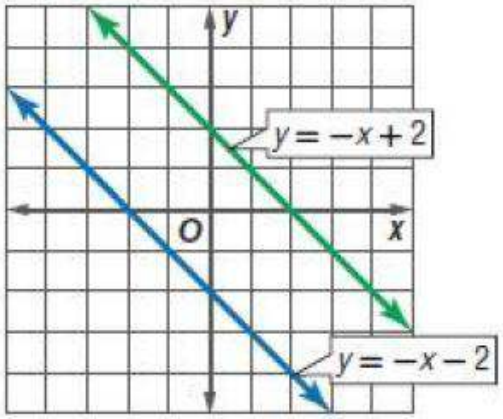
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y + 2 = (-1)(x - 0)$$

$$y = -x - 2$$

حيث أن حاصل ضرب الميلين = -1، فهما متعامدين

(12 $180°$

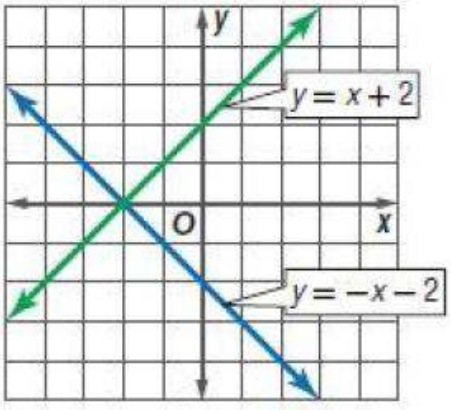


$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$(0, -2) \rightarrow (0, 2)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (2, 0)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{0-2}{2-0}$$
$$m = -\frac{2}{2} = -1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = -1(x - 0)$$
$$y = -x + 2$$

حيث أن الميلين متساويان، فهما متوازيان

(13 $270°$



$$(x, y) \rightarrow (y, -x)$$
$$(0, -2) \rightarrow (-2, 0)$$
$$(-2, 0) \rightarrow (0, 2)$$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{0-2}{-2-0}$$
$$m = \frac{-2}{-2} = 1$$
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 2 = 1(x - 0)$$
$$y = x + 2$$

حيث أن حاصل ضرب الميلين = -1 ، فهما متعامدين

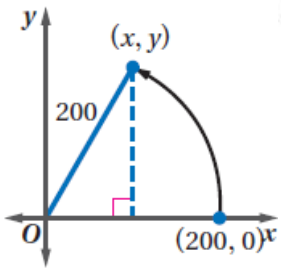
14) $360°$

عند الدوران 360° حول نقطة الأصل احداثيات (x, y) لا تتغير ،

ويكونا على استقامة واحدة

$y = -x - 2$

18) سباق الدراجات: يشارك سليمان وعبد الله في سباق دراجات على مسار دائري الشكل نصف قطره 200 ft



a) إذا بدأ السباق من النقطة (200, 0) وأتمَّ الاثنان دورة واحدة في 30 ثانيةً، فما إحداثيات موقعهما بعد 5 ثوانٍ؟

نفرض أن زاوية الدوران x في خمس ثواني

$$\frac{360^\circ}{30} = \frac{x^\circ}{5}$$

$$30x = 1800$$

$$x = 60^\circ$$

$$\sin 60^\circ = \frac{y}{200}$$

$$y = 200 \sin 60^\circ$$

$$y \approx 173.2$$

$$\cos 60^\circ = \frac{x}{200}$$

$$x = 200 \cos 60^\circ$$

$$x = 100$$

الاحداثيات: $(100, 173.2)$

b) افترض أن السباق يتكون من 50 دورةً، وأن سليمان استمر بالسرعة نفسها. إذا أنهى عبد الله مسافة السباق في 26.2 دقيقةً، فمن الفائز؟

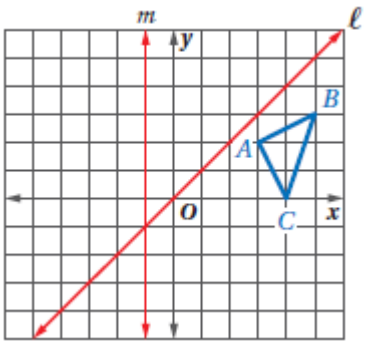
الدورة الواحدة تستغرق 30 ثانية، 50 دورة تستغرق $50 \times 30 = 1500$ ثانية

$$\frac{1500}{60} = 25$$

$25 < 26.2$ ، لذا الفائز هو سليمان

19) تمثيلات متعددة:

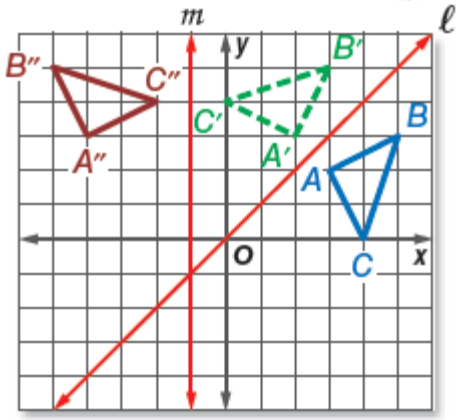
في هذه المسألة ستستقصي الانعكاس حول مستقيمين متقاطعين.



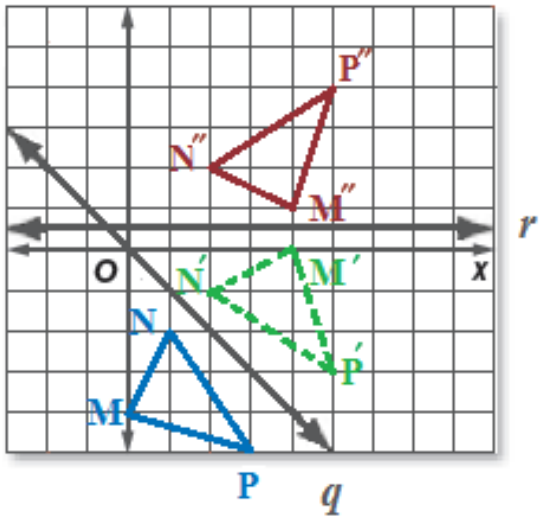
a) هندسيًّا: في المستوى الإحداثي المجاور، رسم $\triangle ABC$ والمستقيمان المتقاطعان ℓ, m.

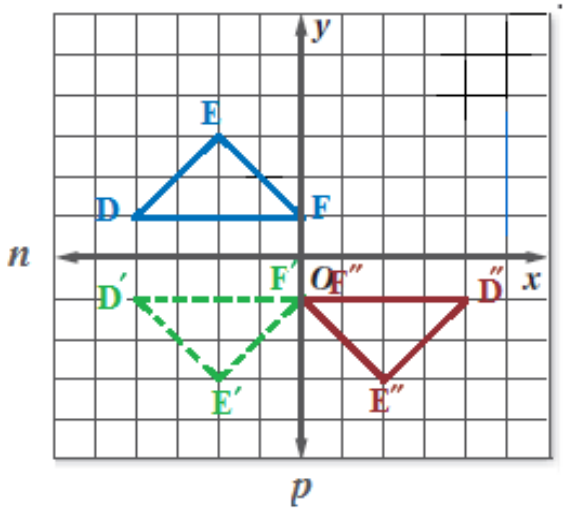
ارسم صورة $\triangle ABC$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم ℓ.

وسمّها $\triangle A'B'C'$، ثم ارسم صورة $\triangle A'B'C'$ الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m. وسمّها $\triangle A''B''C''$.



b) هندسيًّا: كرِّر العملية السابقة مرتين في رُبعين مختلفين، سمّ المثلث الثاني DEF، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين p, n. وسمّ المثلث الثالث MNP، وارسم صورته الناتجة عن الانعكاس حول المستقيمين المتقاطعين q, r.





c) **جدوليًّا :** قِسْ زاوية الدوران لكل مثلثٍ حول نقطة تقاطع المستقيمين، وانسخ الجدول الآتي وأكمله.

قياس زاوية الدوران بين الشكلين		قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين	
$\triangle ABC, \triangle A''B''C''$	90°	ℓ, m	45°
$\triangle DEF, \triangle D''E''F''$	180°	n, p	90°
$\triangle MNP, \triangle M''N''P''$	90°	q, r	45°

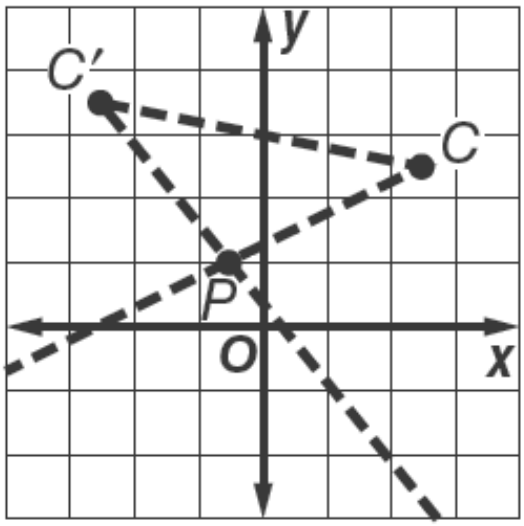
d) **لفظيًّا :** اكتب تخمينًا حول قياس زاوية الدوران الذي تحصل عليه عند إجراء انعكاسين متعاقبين للشكل حول مستقيمين متقاطعين.

قياس زاوية الدوران حول نقطة تقاطع المستقيمين يساوي مثلي قياس الزاوية بين المستقيمين المتقاطعين.

مسائل مهارات التفكير العليا:

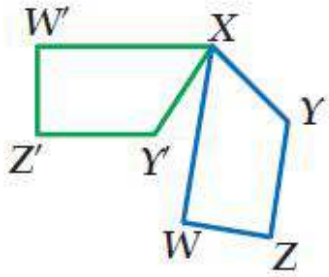
20) **تحدٍّ:** إحداثيًّا النقطة C هما $C(5, 5)$، وإحداثيًّا صورتها الناتجة عن دوران بزاوية $100°$ حول نقطة معينة هما $C'(-5, 7.5)$، أوجد إحداثيَّي مركز الدوران. وضّح إجابتك.

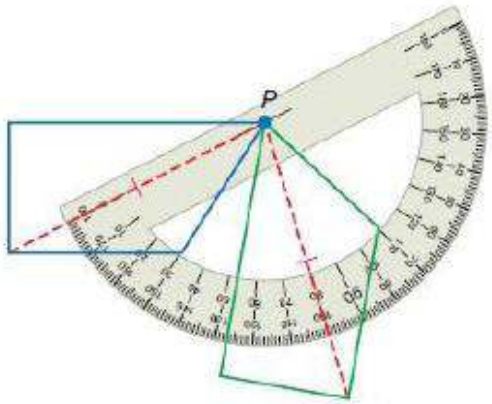
$(-1,2)$، بما أن $CC'P$ متطابق الضلعين وزاوية رأسه تساوي زاوية الدوران، فإن كل من $m\angle PCC'$ و $m\angle PC'C$ يساوي 40° لأن زاويتي القاعدة في المثلث المتطابق الضلعين متطابقتان. وعندما ترسم زاوية قياسها 40° عند الرأس C وزاوية قياسها 40° عند الرأس C' يتقاطع الشعاعان اللذان يكونان هاتين الزاويتين عند مركز الدوران أي عند النقطة $(-1,2)$.

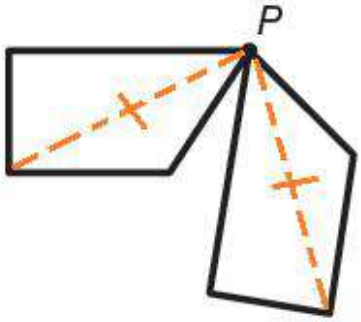


يظهر فى كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن دوران حول النقطة P، انسخ في دفترك كلًّا من الشكلين وحدِّد موقع النقطة P ، ثم أوجد قياس زاوية الدوران.

(21

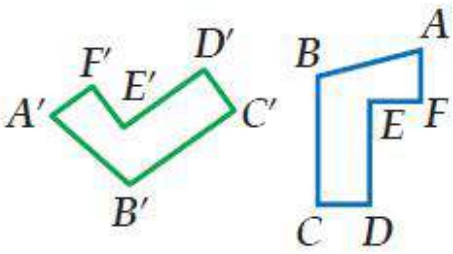


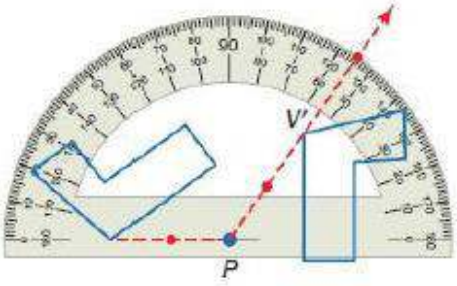


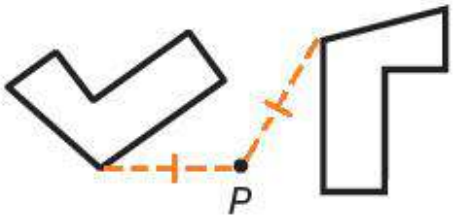


زاوية الدوران: 80°

(22

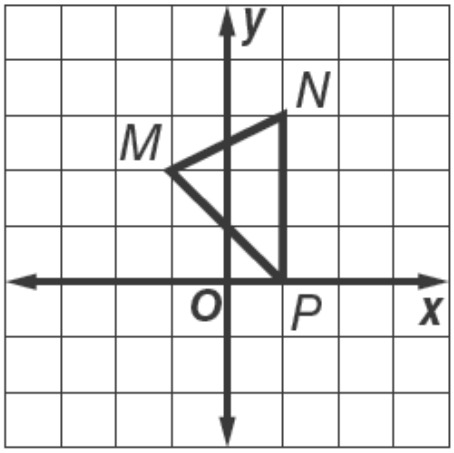






زاوية الدوران: 125°

23) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا في المستوى الإحداثي، وصف دورانًا زاويته لا تساوي الصفر، وتنطبق فيه الصورة والشكل الأصلي أحدهما على الآخر.



دوران 360°، يعيد الشكل إلى وضعه الأصلي، دوران 360° عبارة عن دوران 180° مرتين.
مثلاً النقطة N (1, 3) بدوران 180° تنقل النقطة N إلى (−1, −3)، ثم بدوران 180° مرة أخرى تنقل النقطة N إلى *وضعها الأصلي* (1, 3)

24) **تبرير:** هل يكافئ انعكاس شكل حول المحور x دورانًا حول نقطة الأصل للشكل نفسه بزاوية 180° ؟ وضح إجابتك.

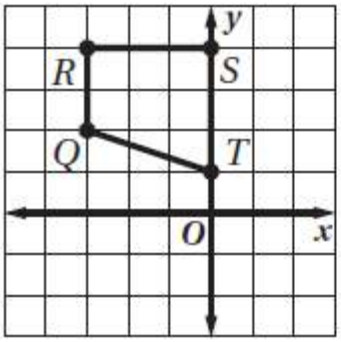
لا، إجابة ممكنة: عندما يعكس الشكل حول المحور X يبقي الإحداثي X ثابتاً وتتغير إشارة الإحداثي Y وعندما يتم تدوير الشكل نفسه بزاوية 180° حول نقطة الأصل تتغير إشارتا الإحداثيين $x > y$. لذا فإن هذين التحويلين غير متكافئين.

25) **اكتب:** هل تبقى نقاط ثابتة في الدوران دائمًا أو أحيانًا أو لا تبقى أي نقاطٍ ثابتةٍ أبدًا؟

تبقي نقاط ثابتة أحياناً، إجابة ممكنة: عندما يتم تدوير الشكل حول نقطة من الشكل نفسه تبقي هذه النقطة التي تمثل مركز الدوران ثابتة. وأما إذا تم تدوير الشكل حول نقطة ليست واقعة عليه فلن يبقي نقاط ثابتة نتيجة الدوران.

تدريب على اختبار

26) ما الدوران الذي يُجرى على شبه المنحرف $QRST$ لينقل الرأس R إلى $R'(4, 3)$؟



A $270°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

B $185°$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول النقطة T.

C $180°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

D $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل.

$R(-3, 4)$

$270°: (-3, 4) \rightarrow (3, 4)$

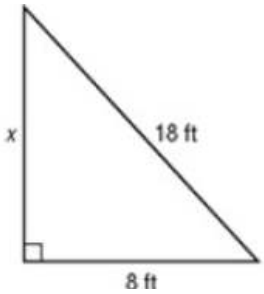
$185°: (-3, 4) \rightarrow$ بين $(4, -1)$ و $(3, -2)$

$180°: (-3, 4) \rightarrow (3, -4)$

$90°: (-3, 4) \rightarrow (4, 3)$

الاختيار الصحيح: D $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل

27) يرتكز سُلّم طوله 18 ft على حائط رأسي وأرض أفقية، إذا كان أسفل السلم يبعد 8 ft عن الحائط، فما ارتفاع رأس السلم عن الأرض مقربًا إلى أقرب عُشر قدم؟



A 10.0 ft **C** 19.7 ft

B 16.1 ft **D** 26.0 ft

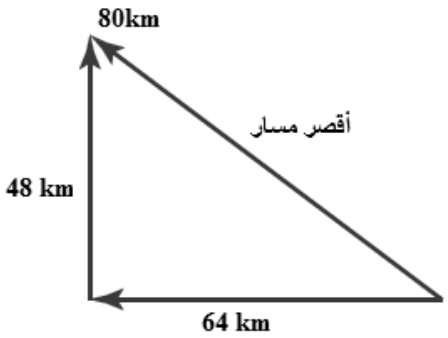
$x = \sqrt{(18)^2 - 8^2} \approx 16.1$

الاختيار الصحيح: B 16.1 ft.

مراجعة تراكمية

28) براكين: تحركت سُحُب من الغبار والغازات المنبعثة من بركان مسافة 64 km غربًا و48 km شمالًا.
ارسم شكلًا يوضح الإزاحة التي وقعت على حُبيبات الغبار، ثم أوجد طول أقصر مسار ينقل الغبار إلى الموقع نفسه.

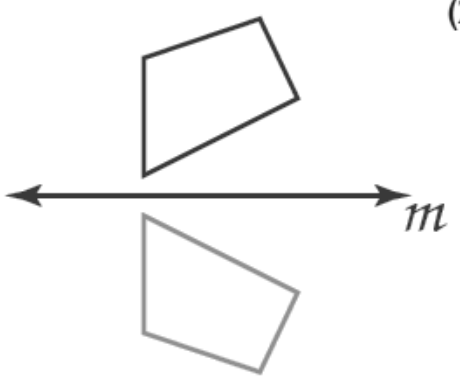
لإيجاد طول أقصر مسار نستخدم نظرية فيثاغورث



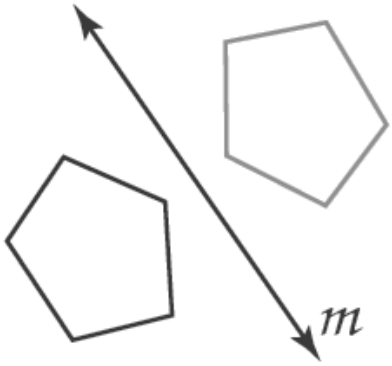
$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 48^2 + 64^2$$
$$c^2 = 2304 + 4096$$
$$c^2 = 6400$$
$$c = \sqrt{6400}$$
$$c = 80 \text{ km}$$

ارسم صورة المضلع الناتجة عن الانعكاس حول المستقيم m في كلٍّ ممَّا يأتي:

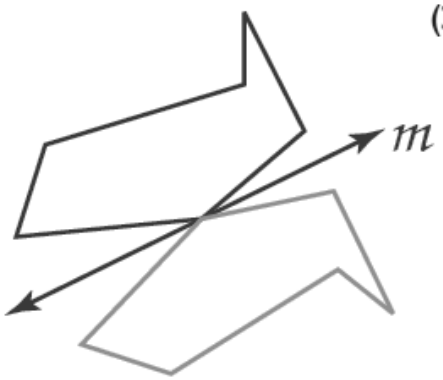
(29



(30



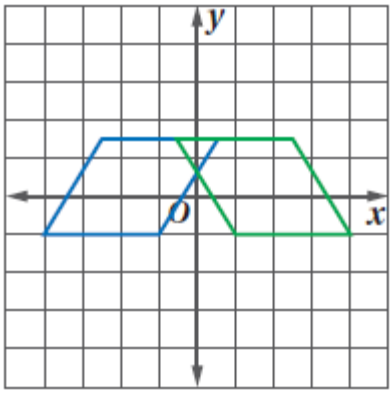
(31



استعد للدرس اللاحق

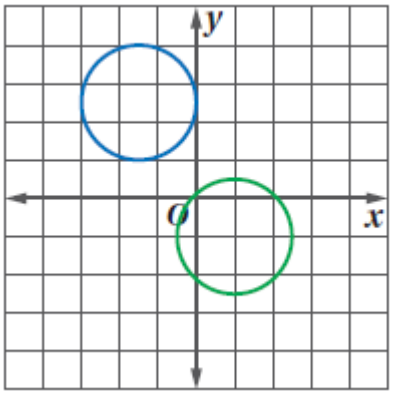
صنِّف التحويل المبيَّن في كلٍّ من الأشكال الآتية إلى انعكاس أو إزاحة أو دوران.

(32



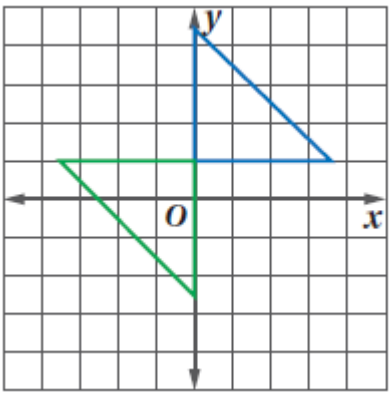
انعكاس

(33



إزاحة

(34



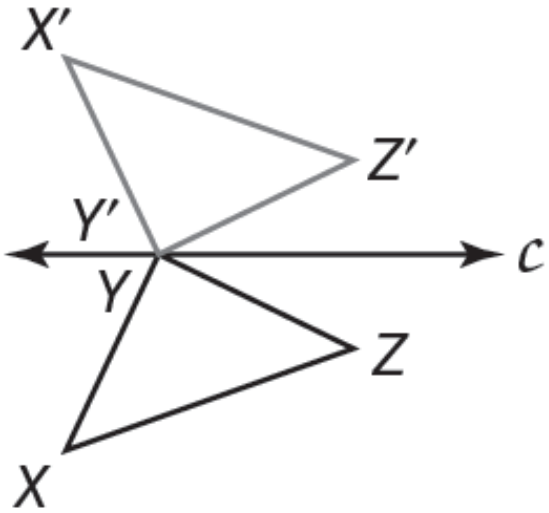
دوران أو انعكاس

اختبار منتصف الفصل

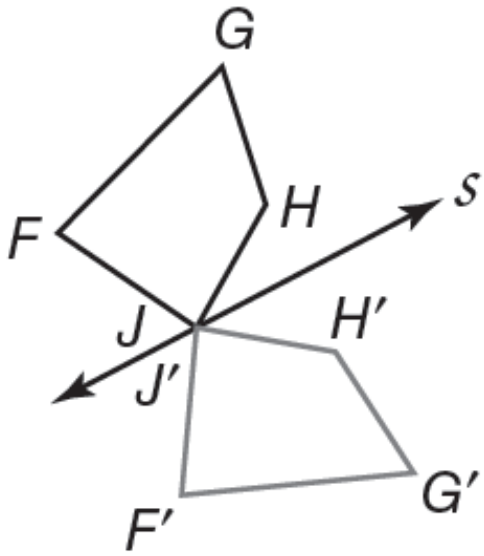
*

ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المعطى.

(1

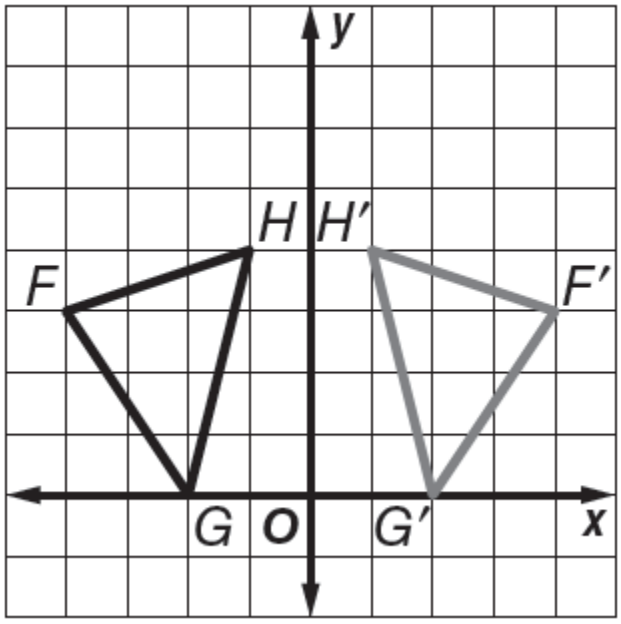


(2

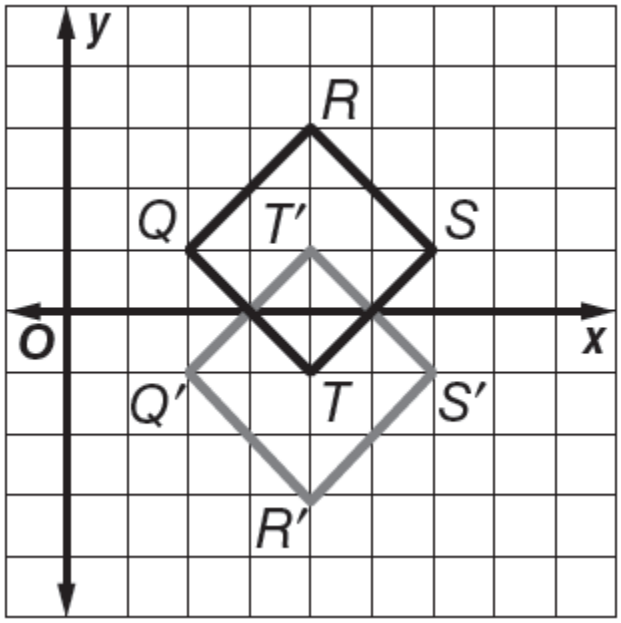


مثل كلًّا من الشكلين الآتيين بيانيًّا، ثم ارسم صورة كلٍّ منهما بالانعكاس المحدد:

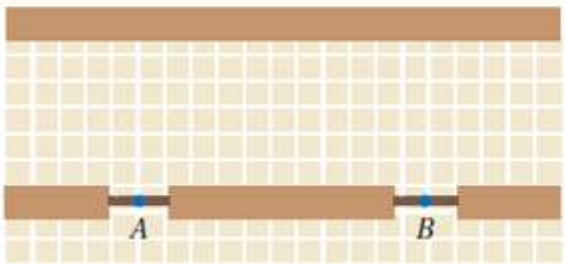
3) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه: $F(-4, 3), G(-2, 0), H(-1, 4)$، بالانعكاس حول المحور y.

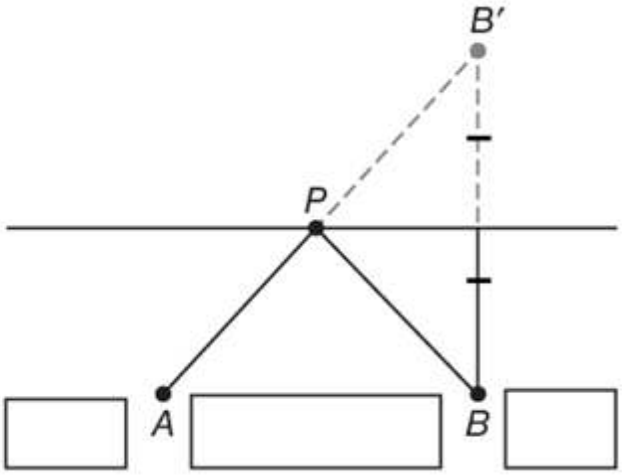


4) المعين $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $Q(2, 1), R(4, 3), S(6, 1), T(4, -1)$، بالانعكاس حول المحور x.



5) **احتفالات:** وضع المشرفون على احتفال المدرسة طاولة قرب الحائط المقابل للمدخلين A, B لقاعة الاحتفال؛ لتقديم بعض الحلوى للحضور بعد نهاية الاحتفال. حدّد موقع النقطة P التي تمثل موقع الطاولة، بحيث يسير الأشخاص الذين يعبرون من المدخل A أو المدخل B المسافة نفسها حتى يصلوا إلى الطاولة مستخدمًا الانعكاس.



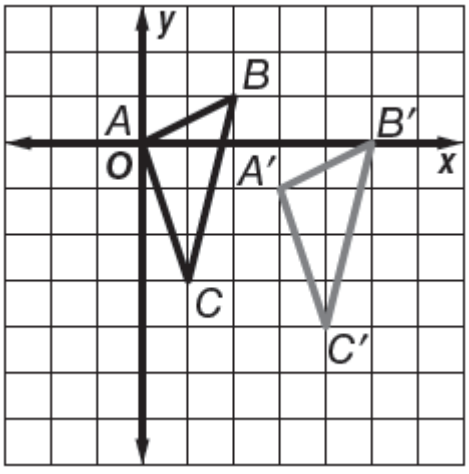


ارسم $\overline{BB'}$ بحيث B' صورة النقطة B بالانعكاس حول الحائط، ثم أصل AB' فيكون $AP + PB'$ أقل ما يمكن

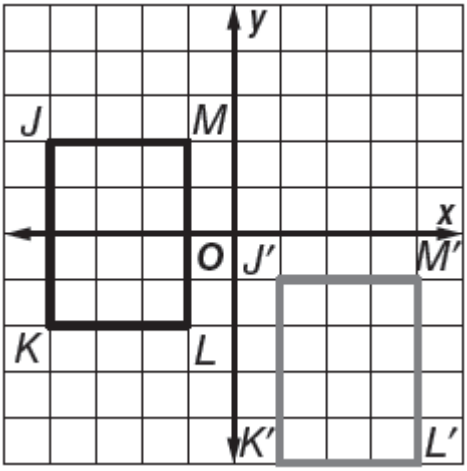
مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

6) $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه:

$A(0, 0), B(2, 1), C(1, -3)$، إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل.

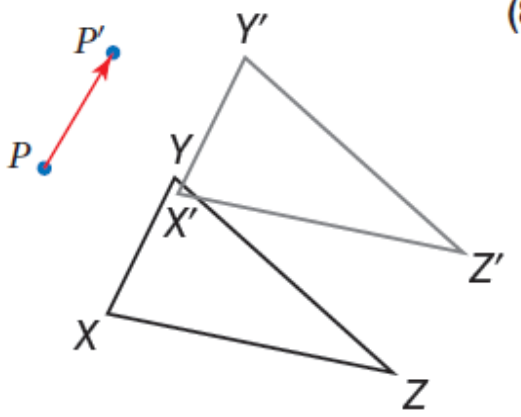


7) المستطيل $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$J(-4, 2), K(-4, -2), L(-1, -2), M(-1, 2)$،
إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أسفل.

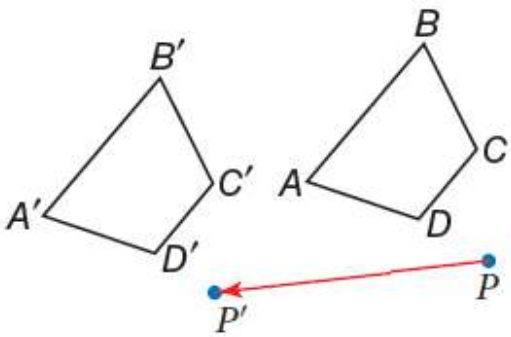


ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل النقطة P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين.

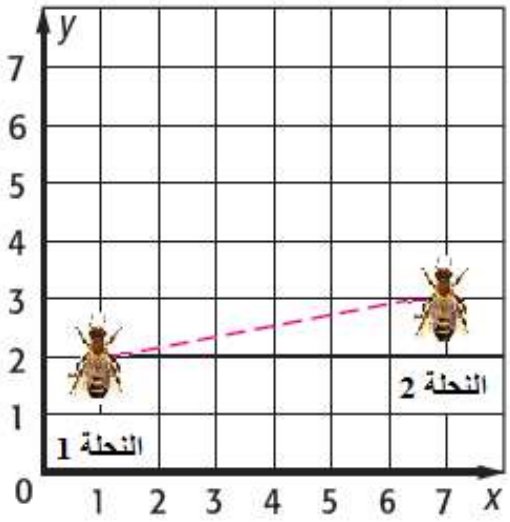
8)



9)



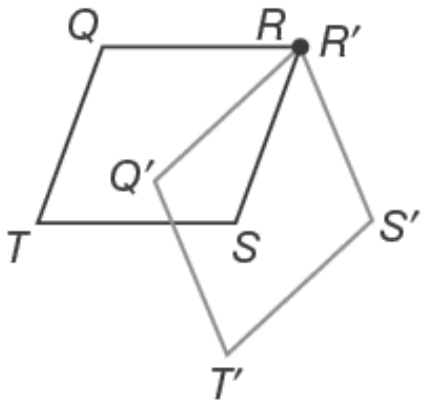
10) قصص مصورة: يكتب سامي قصة مصورة وهو يستعمل ورق الرسم البياني؛ ليتأكد من أن قياسات الأشكال التي يرسمها دقيقة. إذا رسم مستوى إحداثيًّا ونحلتين كما في الشكل المجاور، فما الإزاحة التي تنقل النحلة 1 إلى موقع النحلة 2؟



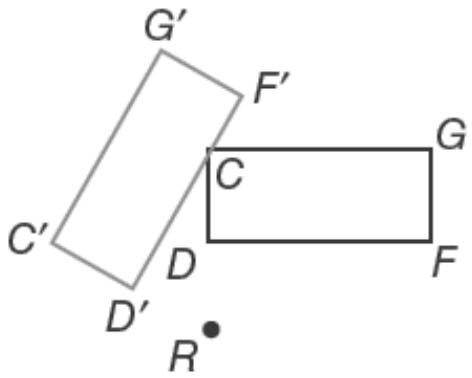
6-وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أعلى

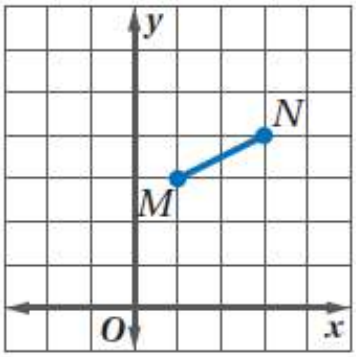
استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة R بالزاوية المحددة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

11) $45°$



12) $60°$





13) اختيار من متعدد: ما صورة النقطة M الناتجة عن الدوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل؟

A $(-3, 1)$ **C** $(-1, -3)$

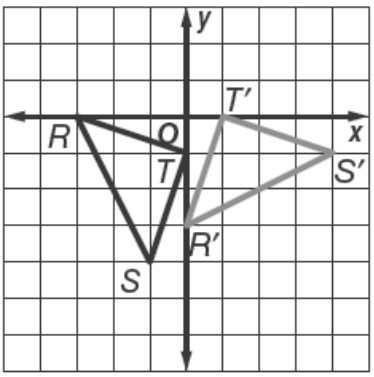
B $(-3, -1)$ **D** $(3, 1)$

الاختيار الصحيح: A $(-3, 1)$

مثّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران حول نقطة الأصل بالزاوية المحدّدة في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

14) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه:

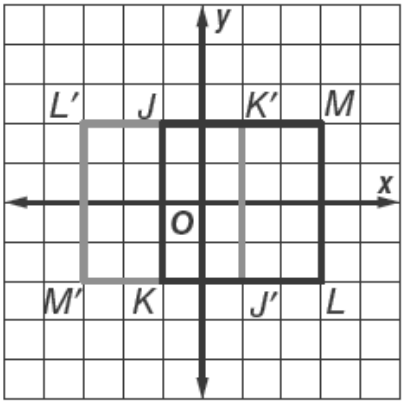
$R(-3, 0), S(-1, -4), T(0, -1)$، وزاوية دورانه $90°$



15) المربع $JKLM$ الذي إحداثيات رؤوسه:

$J(-1, 2), K(-1, -2), L(3, -2), M(3, 2)$،

وزاوية دورانه $180°$



7-4 استكشاف: معمل المحاسبة البيانية: تركيب التحويلات الهندسية

تحليل النتائج:

1) ما العلاقة بين الشكل الأصلي والشكل النهائي؟

الشكلان متطابقان ولهما الاتجاه نفسه.

2) ما التحويل الهندسي الذي يمكن استعماله للحصول على الشكل النهائي؟

الإزاحة

3) ماذا يحدث إذا حركت المستقيم m؟ وماذا يحدث إذا حركت المستقيم r؟

إذا حركت المستقيم m، فستتحرك صورتا الشكل بالانعكاس، أما إذا حركت المستقيم r، فستتحرك الصورة النهائية فقط.

4) **خمّن:** إذا أُجرِي انعكاس لهذا الشكل حول مستقيم ثالثٍ، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل للحصول على الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

بما أنه سيكون اتجاه الشكل عكس اتجاهه الأصلي فيمكن استعمال انعكاس أو دوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

5) كرّر هذا النشاط مع مستقيمين متعامدين. ما التحويل الهندسي الذي يمكن أن يُستعمل للحصول على الشكل النهائي؟

يمكن استعمال دوران بزاوية 180° حول نقطة التقاطع لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد.

6) **خمّن:** إذا أجريت انعكاسًا للشكل الناتج في السؤال 5 حول مستقيم ثالثٍ يعامد المستقيم الثاني، فما التحويل الهندسي الواحد الذي يمكن أن يستعمل لإنتاج الشكل النهائي؟ وضّح إجابتك.

سوف يتطلب الأمر أن تستعمل الدوران لإنتاج الشكل النهائي بتحويل هندسي واحد لأن اتجاه الشكل النهائي لن يكون مماثلاً لاتجاه الشكل الأصلي.

تركيب التحويلات الهندسية

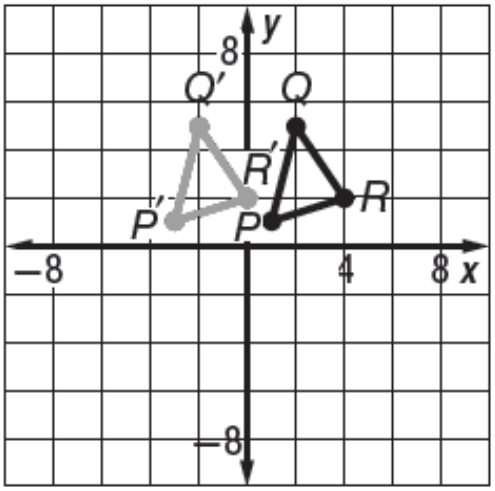
7-4

تحقق

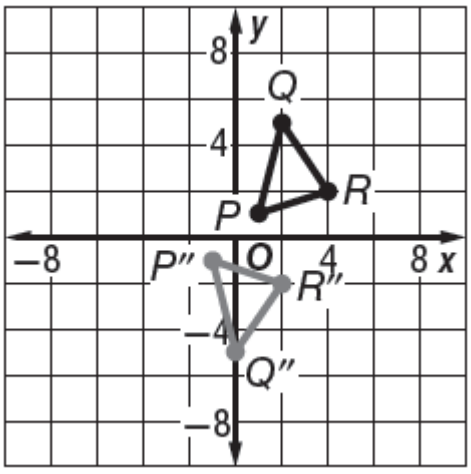
إحداثيات رؤوس المثلث PQR هي: $P(1, 1), Q(2, 5), R(4, 2)$ ، مثِّل بيانيًّا $\triangle PQR$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1A) إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار، ثم انعكاس حول المحور x .

الازاحة

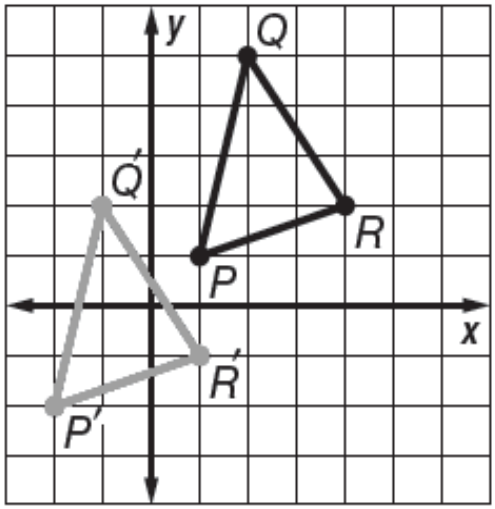


الدوران

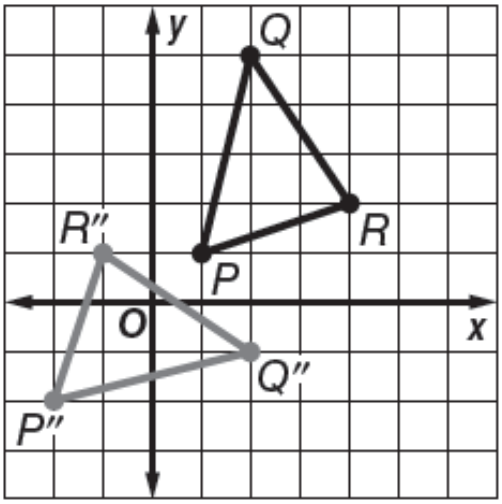


1B) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى أسفل و3 وحدات إلى اليسار، ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$.

الازاحة

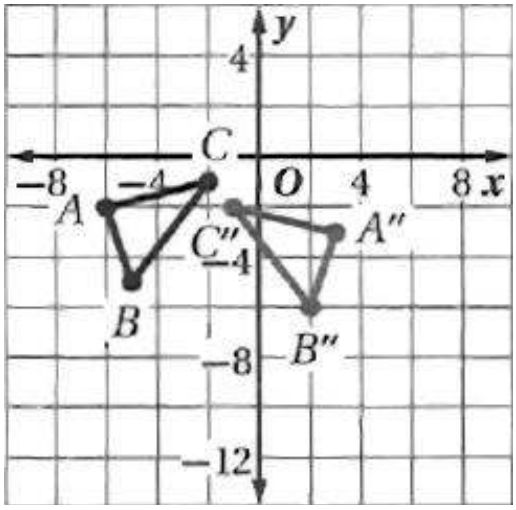


الدوران

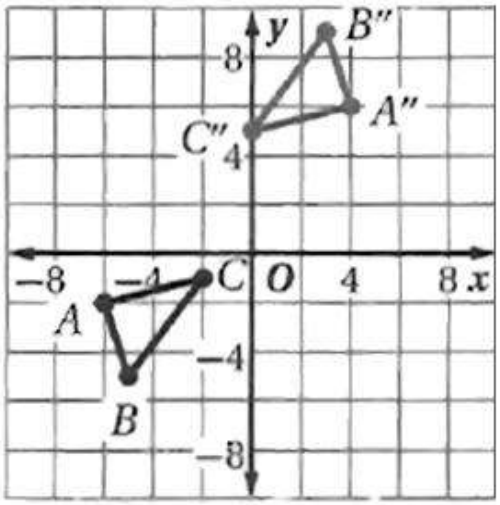


إحداثيات رؤوس المثلث ABC هي: $A(-6, -2), B(-5, -5), C(-2, -1)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ وصورته الناتجة عن تركيب التحويلين الهندسيين بالترتيب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

2A) إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y.

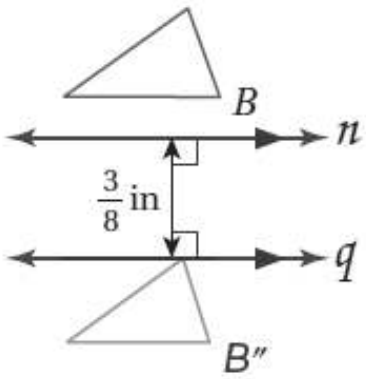


2B) دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل، ثم إزاحة مقدارها وحدتين إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

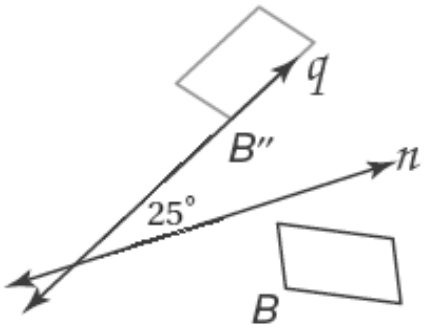


ارسم صورة الشكل B الناتجة عن انعكاس حول المستقيم n ثم حول المستقيم q، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل B إلى B'' .

(3A



(3B

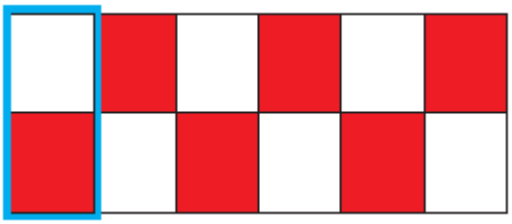


4) **سجاد :** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين النمط في كل مِّمَّا يأتي:

(A

تركيب انعكاس وإزاحة

(B



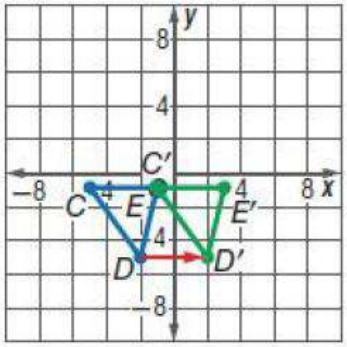
تركيب انعكاس وإزاحة

إحداثيات رؤوس المثلث CDE هي: $C(-5,-1), D(-2,-5), E(-1,-1)$،
مثِّل بيانيًّا $\triangle CDE$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين، ثم انعكاس حول المحور x

الازاحة:

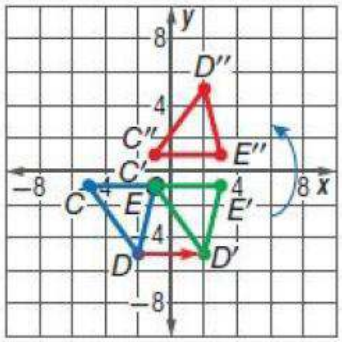
$$(x,\ y)\rightarrow(x+4,\ y)$$



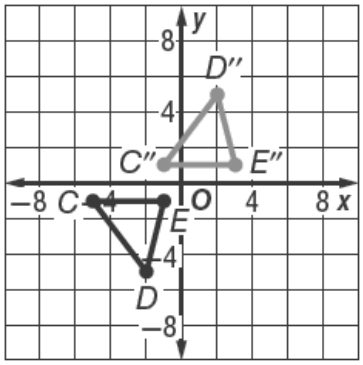
$$C(-5,-1)\rightarrow C'(-1,-1)$$
$$D(-2,-5)\rightarrow D'(2,-5)$$
$$E(-1,-1)\rightarrow E'(3,-1)$$

الانعكاس:

$$(x,\ y)\rightarrow(x,-y)$$

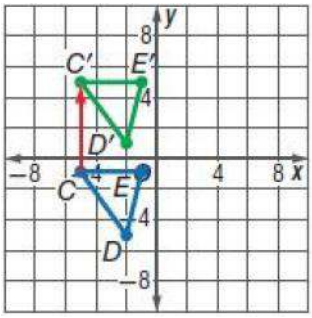


$$C'(-1,-1)\rightarrow C''(-1,1)$$
$$D'(2,-5)\rightarrow D''(2,5)$$
$$E'(3,-1)\rightarrow E''(3,1)$$



2) إزاحة مقدارها 6 وحدات إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y

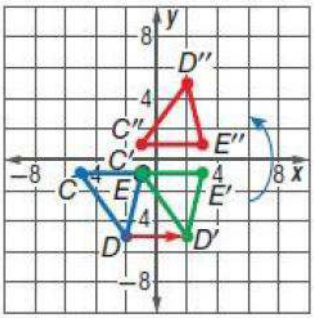
الازاحة:



$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ y+6)$$

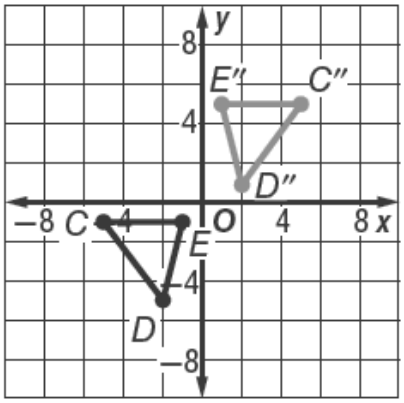
$$C(-5,-1) \rightarrow C'(-5,5)$$
$$D(-2,-5) \rightarrow D'(-2,1)$$
$$E(-1,-1) \rightarrow E'(-1,5)$$

الانعكاس:

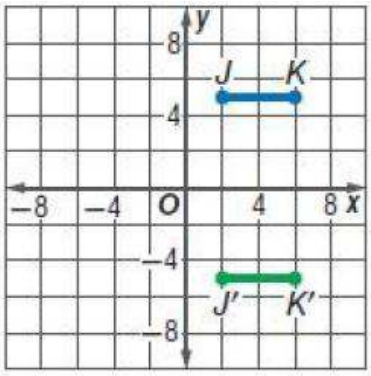


$$(x,\ y) \rightarrow (-x,\ y)$$

$$C'(-5,5) \rightarrow C''(5,5)$$
$$D'(-2,1) \rightarrow D''(2,1)$$
$$E'(-1,5) \rightarrow E''(1,5)$$



3) إحداثيات طرفَي $\overline{JK}$ هما $J(2, 5), K(6, 5)$، مثِّل بيانيًّا $\overline{JK}$ وصورتها الناتجة عن انعكاس حول المحور x، ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

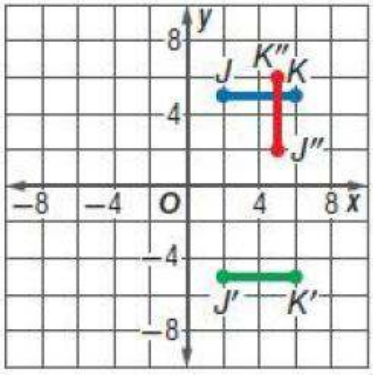


الانعكاس حول المحور x

$$(x, y) \rightarrow (x, -y)$$

$$J(2, 5) \rightarrow J'(2, -5)$$

$$K(6, 5) \rightarrow K'(6, -5)$$

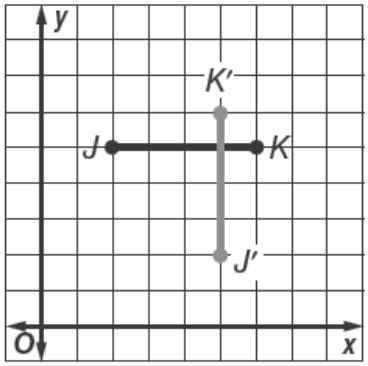


الدوران $90°$ حول نقطة الأصل

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

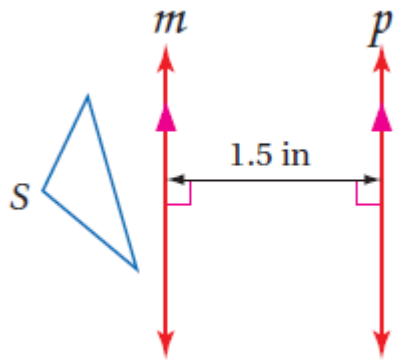
$$J'(2, -5) \rightarrow J''(5, 2)$$

$$K'(6, -5) \rightarrow K''(5, 6)$$

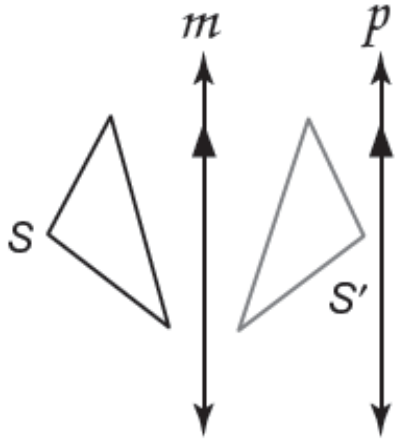


ارسم صورة الشكل S الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p، ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل S إلى S''.

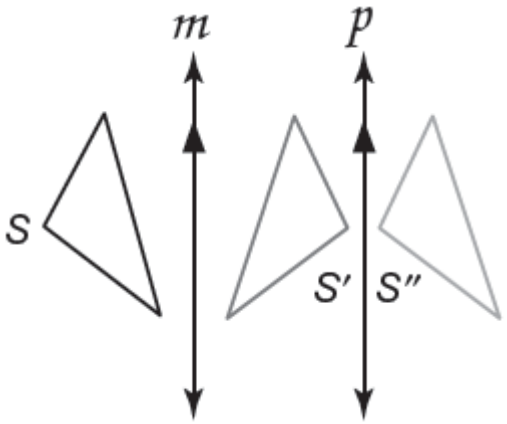
(4



الانعكاس الأول حول المستقيم m



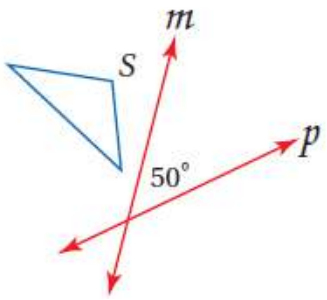
الانعكاس الثاني حول المستقيم p



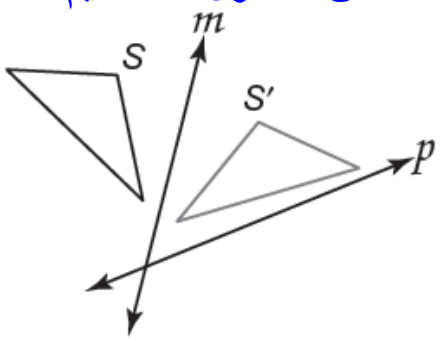
نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.2 يكون مكافئ للإزاحة الافقية لليمين

$$2 \times 1.5 = 3 \text{ in.}$$

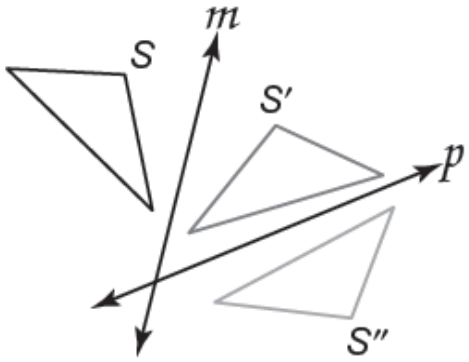
(5



انعكاس S حول المستقيم m



انعكاس S حول المستقيم p



نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.3 يكون مكافئ للدوران في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة تقاطع المستقيمين m,l

6) **أنماط البلاط:** صنع راشدٌ نمطًا من بلاطٍ على شكل مثلث متطابق الضلعين، صِفِ التحويل الهندسي المركّب الذي يمكن استعماله لتكوين هذا النمط.

أنماط البلاط: انعكاس وإزاحة

تدرب وحل المسائل:

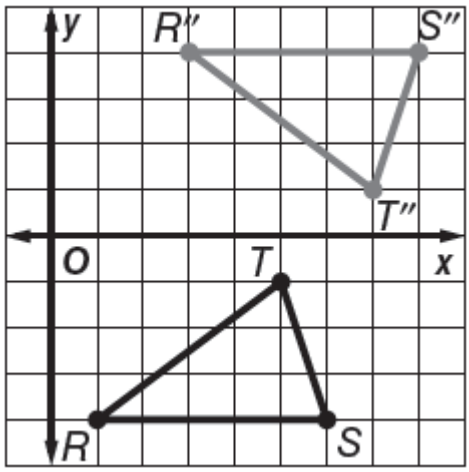
مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

7) $\triangle RST$ الذي إحداثيات رؤوسه: $R(1, -4), S(6, -4), T(5, -1)$، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين ثم انعكاس حول المحور x

الازاحة:

$$(x,\ y) \rightarrow (x+2,\ y)$$

$$R(1, -4) \rightarrow R'(3, -4)$$
$$S(6, -4) \rightarrow S'(8, -4)$$
$$T(5, -1) \rightarrow T'(7, -1)$$



الانعكاس:

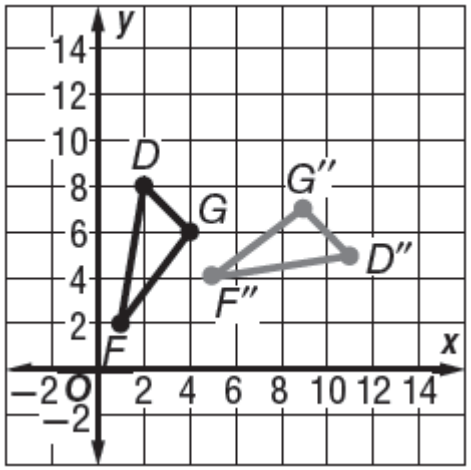
$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ -y)$$

$$R'(3, -4) \rightarrow R''(3, 4)$$
$$S'(8, -4) \rightarrow S''(8, 4)$$
$$T'(7, -1) \rightarrow T''(7, 1)$$

8) $\triangle DFG$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(2, 8), F(1, 2), G(4, 6)$،
إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليمين و3 وحدات إلى أعلى،
ثم انعكاس حول المستقيم $y = x$

الازاحة:

$$(x,\ y) \rightarrow (x+3,\ y+3)$$



$$D(2, 8) \rightarrow D'(5, 11)$$
$$F(1, 2) \rightarrow F'(4, 5)$$
$$G(4, 6) \rightarrow G'(7, 9)$$

الانعكاس:

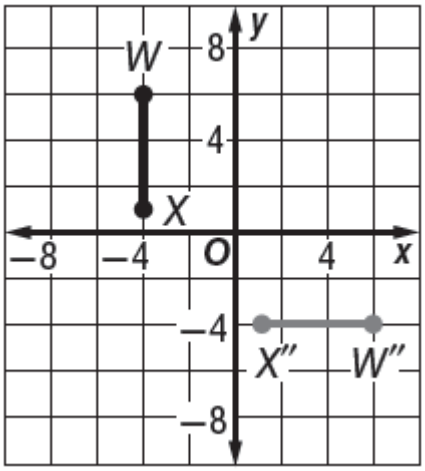
$$(x,\ y) \rightarrow (y,\ x)$$
$$D'(5, 11) \rightarrow D''(11, 5)$$
$$F'(4, 5) \rightarrow F''(5, 4)$$
$$G'(7, 9) \rightarrow G''(9, 7)$$

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل المركّب المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي:

9) $\overline{WX}$، حيث $W(-4, 6), X(-4, 1)$، انعكاس حول المحور x
ثم دوران بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل.

الانعكاس:

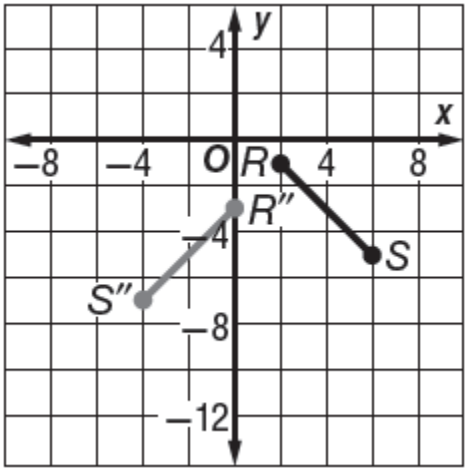
$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ -y)$$
$$W(-4, 6) \rightarrow W'(-4, -6)$$
$$X(-4, 1) \rightarrow X'(-4, -1)$$



الدوران:

$$(x,\ y) \rightarrow (-y,\ x)$$
$$W'(-4, -6) \rightarrow W''(6, -4)$$
$$X'(-4, -1) \rightarrow X''(1, -4)$$

10 $\overline{RS}$ ، حيث $R(2, -1), S(6, -5)$ ، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار ووحدتان إلى أسفل، ثم انعكاس حول المحور y



الازاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x-2, y-2)$$

$$R(2, -1) \rightarrow R'(0, -3)$$

$$S(6, -5) \rightarrow S'(4, -7)$$

الانعكاس:

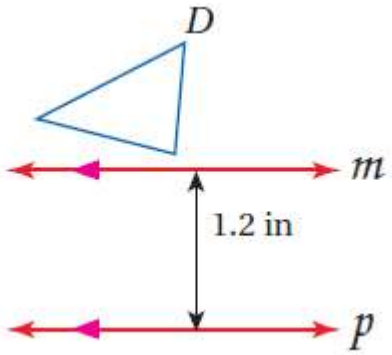
$$(x, y) \rightarrow (-x, y)$$

$$R'(0, -3) \rightarrow R''(0, -3)$$

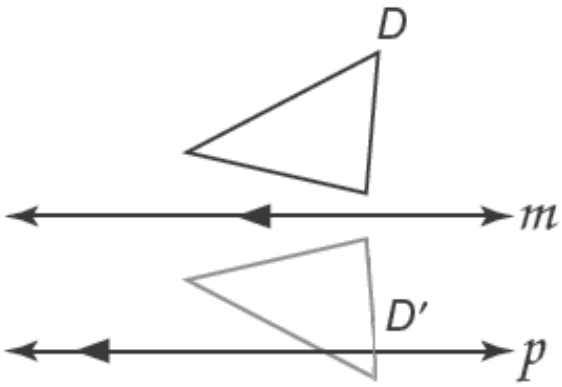
$$S'(4, -7) \rightarrow S''(-4, -7)$$

ارسم صورة الشكل D الناتجة عن انعكاس حول المستقيم m ثم حول المستقيم p. ثم صِفْ تحويلًا هندسيًّا واحدًا ينقل D إلى D''.

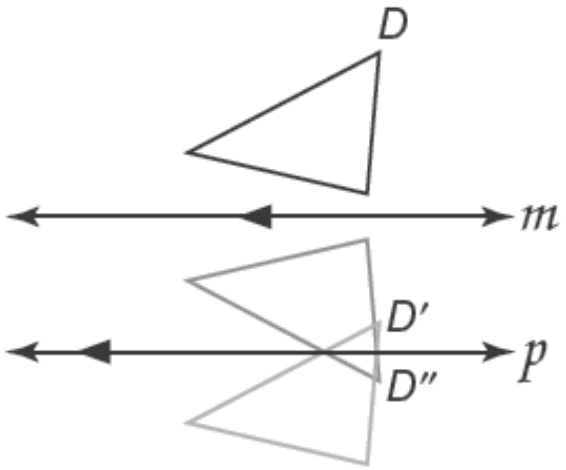
11



انعكاس D حول المستقيم m

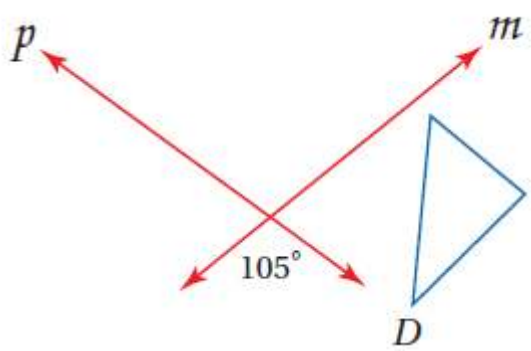


انعكاس D' حول المستقيم p

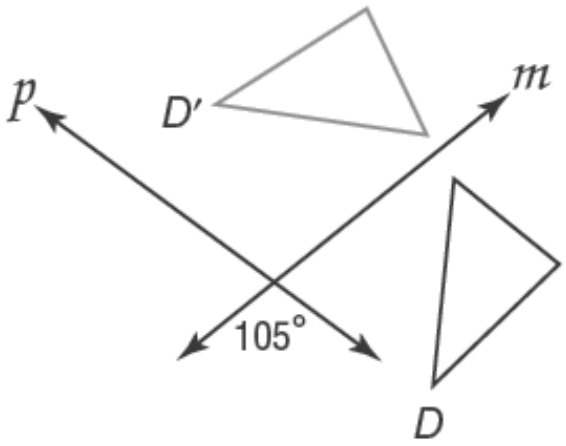


نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.2 يكون مكافئ للإزاحة الرأسية للأسفل $2 \times 1.2 = 2.4$ in.

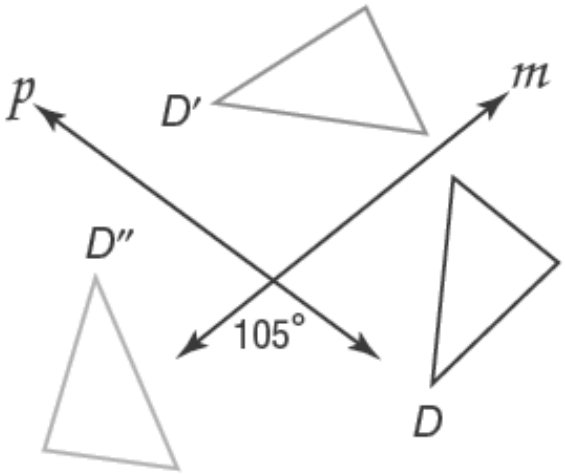
(12



الانعكاس D حول المستقيم m



انعكاس D' حول المستقيم p



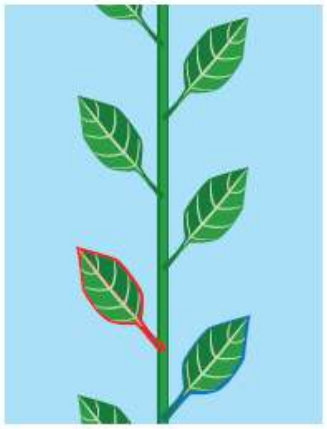
نلاحظ بعد الانعكاسين وبتطبيق النظرية 9.3 يكون مكافئ

للدوران $2\times105^\circ = 210^\circ$ في عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة تقاطع

المستقيمين m, p

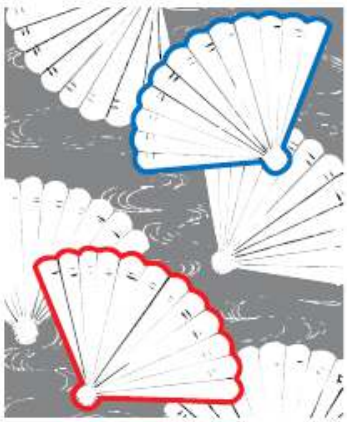
صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتكوين نمط الأقمشة في كلٍّ ممَّا يأتي:

(13



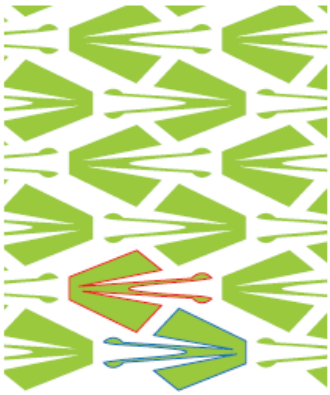
الإزاحة

(14



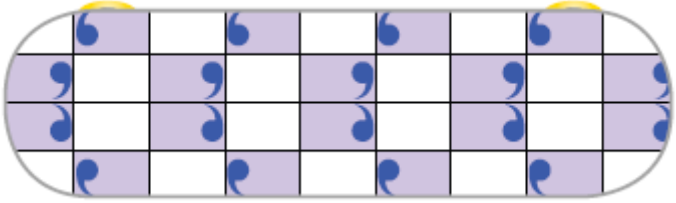
انعكاس و ازاحة

(15



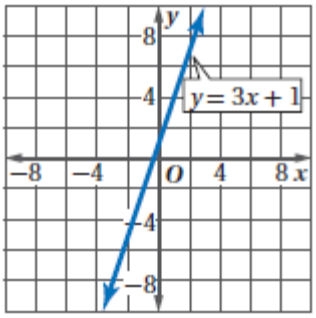
دوران

16) **زلّاجات:** رسم صالح على زلاجته نمطًا، ما التحويل الهندسي المركب الذي استعمله صالح لرسم هذا النمط؟



ازاحتان

جبر: مثّل بيانيًّا صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد:



17) دوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل انعكاس حول المحور x

بتعريف نقطتين على المستقيم $y = 3x + 1$

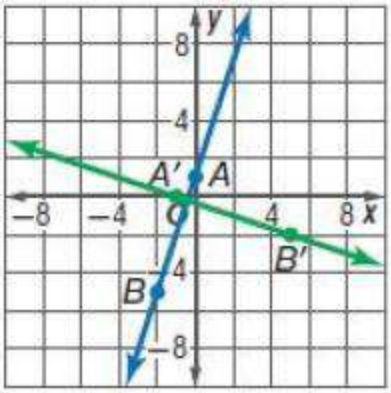
بفرض النقطة A $(0, 1)$ و النقطة B $(-2, -5)$

الدوران حول نقطة الأصل

$$(x, y) \rightarrow (-y, x)$$

$$A(0, 1) \rightarrow A'(-1, 0)$$

$$B(-2, -5) \rightarrow B'(5, -2)$$



إيجاد المعادلة باستخدام النقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{-2 - 0}{5 - (-1)}$$

$$m = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = -\frac{1}{3}[x - (-1)]$$

$$y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

انعكاس المستقيم حول المحور x

$$(x,\ y) \rightarrow (x,\ -y)$$

$$A'(-1,\ 0) \rightarrow A''(-1,\ 0)$$

$$B'(5,\ -2) \rightarrow B''(5,\ 2)$$

إيجاد المعادلة باستخدام النقطتين

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

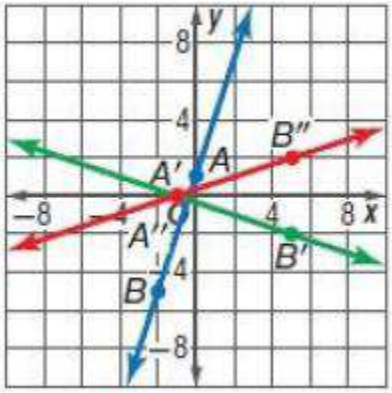
$$m = \frac{2-0}{5-(-1)}$$

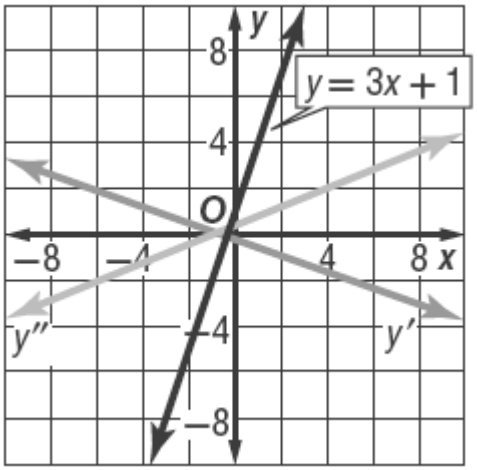
$$m = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

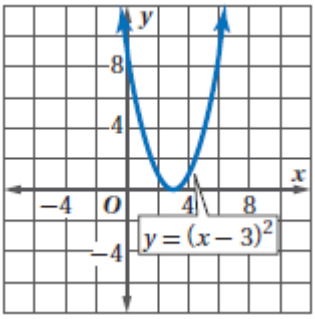
$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{1}{3}\left[x - (-1)\right]$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$$







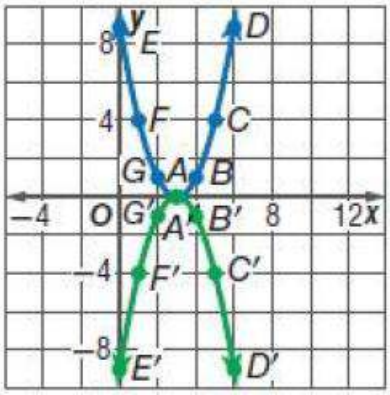
18) انعكاس حول المحور x انعكاس حول المحور y

باختيار عدة نقاط على منحنى الدالة التربيعية

مثل $y=(x-3)^2$

$A(3,0), B(4,1), C(5,4), D(6,9), E(0,9), F((1,4), G(2,1)$

الانعكاس حول المحور x



$(x,y) \Rightarrow (x,\ -y)$

$A(3,\ 0) \Rightarrow A'(3,\ 0)$

$B(4,\ 1) \Rightarrow B'(4,\ -1)$

$C(5,\ 4) \Rightarrow C''(4,\ -5)$

$D(6,\ 9) \Rightarrow D'(6,\ -9)$

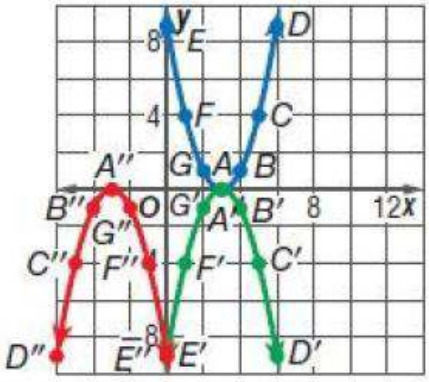
$E(0,\ 9) \Rightarrow E'(0,\ -9)$

$F(1,\ 4) \Rightarrow F'(1,\ -4)$

$G(2,\ 1) \Rightarrow G'(2,\ -1)$

المعادلة التربيعية بعد الانعكاس $y=-(x-3)^2$

انعكاس حول المحور y



$(x,y) \Rightarrow (-x,y)$

$A'(3,\ 0) \Rightarrow A''(-3,\ 0)$

$B'(4,\ -1) \Rightarrow B''(-4,\ -1)$

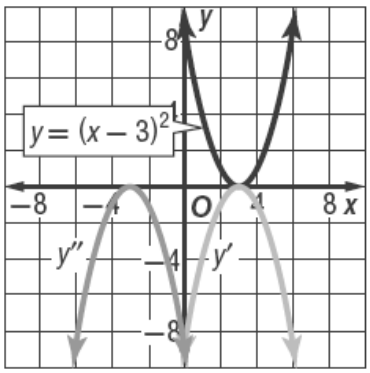
$C''(5,\ -4) \Rightarrow C'''(-4,\ -5)$

$D'(6,\ -9) \Rightarrow D''(-6,\ -9)$

$E'(0,\ -9) \Rightarrow E''(-0,\ -9)$

$F'(1,\ -4) \Rightarrow F''(-1,\ -4)$

$G'(2,\ -1) \Rightarrow G''(-2,\ -1)$



المعادلة التربيعية بعد الانعكاس $y=-(x+3)^2$

19) أوجد إحداثيات رؤوس $\triangle A''B''C''$ الناتج عن انعكاس حول المحور x ثم دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل للمثلث $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $A(-3, 1), B(-2, 3), C(-1, 0)$.

الانعكاس حول المحور x

$$(x, y) \Rightarrow (x, -y)$$
$$A(-3, 1) \Rightarrow A'(-3, -1)$$
$$B(-2, 3) \Rightarrow B'(-2, -3)$$
$$C(-1, 0) \Rightarrow C''(-1, 0)$$

لدوران النقطة $180°$ في اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل

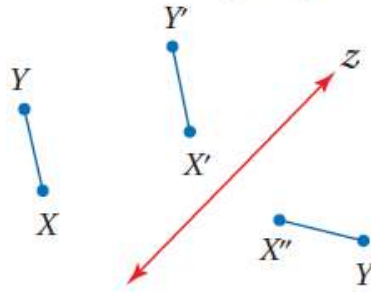
$$(x, y) \Rightarrow (-x, -y)$$
$$A'(-3, -1) \Rightarrow A''(3, 1)$$
$$B'(-2, -3) \Rightarrow B''(2, 3)$$
$$C''(-1, 0) \Rightarrow C''(1, 0)$$

الإجابة: $A''(3, 1)$, $B''(2, 3)$, $C''(1, 0)$

20) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للحالة الآتية من نظرية 7.1 تركيب تحويلات التطابق.

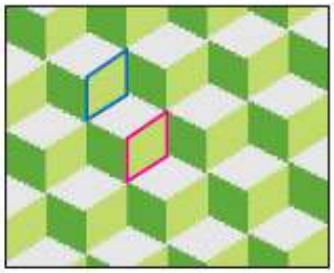
المعطيات: تنقل الإزاحة بمقدار a وحدةً إلى اليمين و b وحدةً إلى أعلى النقطة X إلى X' والنقطة Y إلى Y'.
وينقل الانعكاس حول المستقيم z النقطة X' إلى X'' والنقطة Y' إلى Y''.

المطلوب: $\overline{XY} \cong \overline{X''Y''}$



تعلم أن الإزاحة بمقدار a وحدة إلى اليمين و b وحدة إلى الأعلى تنقل X إلى X' وتنقل Y إلى Y'. ومن تعريف الإزاحة نعلم أن النقطتين X و Y تحركتا المسافة نفسها بالاتجاه نفسه ولذلك فإن، $XY = X'Y'$ كما نعلم أن الانعكاس حول المستقيم z ينقل X' إلى X'' وينقل Y' إلى Y'' . وباستعمال تعريف انعكاس، فإن X' و X'' على بعدين متساويين من المستقيم z، وكذلك Y' و Y'' على بعدين متساويين من المستقيم z. إذن $X'Y' = X''Y''$.
ومن خاصية التعدي للتطابق ينتج أن $XY = X''Y''$.

21) **حياكة:** تحيك خولة منديلًا باستعمال النمط الظاهر في الشكل المجاور، صف تركيب التحويلات الهندسية الذي تستعمله خولة لإنشاء هذا النمط.



تركيب انعكاسين

آثار الأقدام: استعن بمعلومات الربط مع الحياة، وصِفِ التحويل المركّب من إزاحة وانعكاس الذي يمكن استعماله للتنبؤ بموقع أثر القدم اللاحق في كلّ من السؤالين الآتيين:

الربط مع الحياة

طول خطوة الحيوان يساوي المسافة بين أثري قدمٍ متتاليين. فمتوسط طول خطوة طائر الحبش **11 in** تقريبًا، ومتوسط طول خطوة البطة **5 in** تقريبًا.

22) طائر الحبش

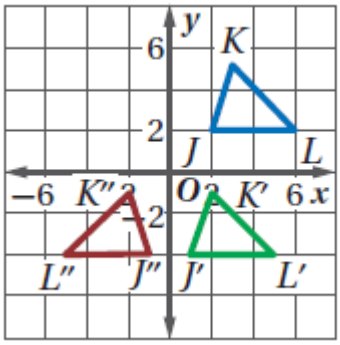
إزاحة بمقدار 5.5 وحدات إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى.

23) البطة

إزاحة بمقدار 2.5 وحدة إلى اليمين وانعكاس حول المستقيم الذي يفصل الآثار اليمنى عن اليسرى

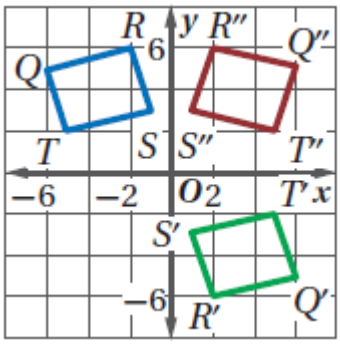
صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل الأزرق إلى البني في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

24)



إزاحة وفق القاعدة $(x, y) \rightarrow (x-1, y-6)$ وانعكاس حول المحور y.

25)



دوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل وانعكاس حول المحور x.

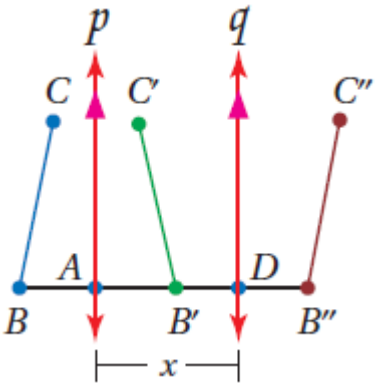
26) **برهان:** اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.2

المعطيات: ينقل الانعكاس حول المستقيم p القطعة $\overline{BC}$ إلى $\overline{B'C'}$،
وينقل الانعكاس حول المستقيم q القطعة $\overline{B'C'}$ إلى $\overline{B''C''}$.

$p \parallel q, AD = x$.

المطلوب: a) $\overline{BB''} \perp p$, $\overline{BB''} \perp q$

b) $\overline{BB''} = 2x$



العبارات (المبررات):

1) ينقل الانعكاس حول المستقيم p النقطة B إلى B'؛ وينقل الانعكاس حول المستقيم q النقطة B' إلى B''؛ وبما أن $p \parallel q$؛ فإن $\overleftrightarrow{BB'}$ يعامد كلًّا من المستقيمين p, q أي أن B, B', B'' واقعة على استقامة واحدة. ومن تعريف الانعكاس نعلم أن A نقطة منتصف $\overline{BB'}$ و $\overline{B'B''}$، إذن $\overline{BA} \cong \overline{AB'}$; $\overline{B'D} \cong \overline{DB''}$ أي أن $BA = AB'; B'D = DB''$

حسب تعريف التطابق، ولكن $BB'' = BA + AB' + B'D + DB''$

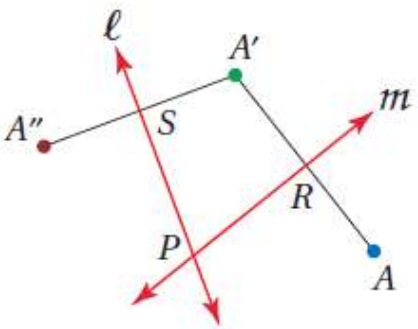
حسب مسلمة جمع القطع المستقيمة. وبالتعويض

$$BB'' = AB' + AB' + B'D + B'D$$

$$BB'' = 2\,AB' + 2\,B'D$$

$$BB'' = 2(AB' + B'D)$$

وبما أن $AB' + B'D = x$ فإن $BB'' = 2x$



27) برهان: اكتب برهانًا حرًّا للنظرية 7.3

المعطيات: يتقاطع المستقيمان ℓ , m في النقطة P.

A نقطة لا تقع على أيٍّ من المستقيمين ℓ أو m.

المطلوب: **a)** إذا أُجري انعكاس للنقطة A حول المستقيم m، ثم أُجري انعكاس لصورتها حول المستقيم ℓ، فإن A'' تكون صورة A بدورانٍ حول النقطة P.

b) $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$

البرهان: نعلم أن المستقيمين ℓ و m يتقاطعان في النقطة P. وأن النقطة A لا تقع على أي من المستقيمين ℓ أو m. عيّن A' صورة النقطة A بانعكاس حول المستقيم m وعيّن A'' صورة A' بانعكاس حول المستقيم ℓ. ومن تعريف الانعكاس يكون المستقيم m العمود المنصف للقطعة $\overline{AA'}$ عند النقطة R، ويكون المستقيم ℓ العمود المنصف للقطعة $\overline{A'A''}$ عند النقطة S. $\overline{AR} \cong \overline{A'R}$ و $\overline{A'S} \cong \overline{A''S}$ من تعريف العمود المنصف، وبما أنه يوجد مستقيم واحد يمر بأي نقطتين فيمكن أن ترسم القطع المساعدة $\overline{AP}, \overline{A'P}, \overline{A''P}$ وإن الزوايا $\angle ARP, \angle A'SP, \angle A'RP$ و $\angle A''SP$ زوايا قائمة من تعريف العمود المنصف. وكذلك $\overline{RP} \cong \overline{RP}$ و $\overline{SP} \cong \overline{SP}$ حسب خاصية الانعكاس. إذن. $\triangle ARP \cong \triangle A'RP$ و $\triangle A'SP \cong \triangle A''SP$ حسب مسلمة التطابق SAS. ولأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة فإن $\overline{A'P} \cong \overline{A''P}$, $\overline{AP} \cong \overline{A'P}$ ولذلك $\overline{AP} \cong \overline{A''P}$ حسب خاصية التعدي. ومن تعريف الدوران فإن A'' هي صورة A بدوران مركزه P.

وكذلك $\angle A'PR \cong \angle APR$ و $\angle A''PS \cong \angle A'PS$ لأن العناصر المتناظرة في المثلثين المتطابقين تكون متطابقة. ومن تعريف التطابق يكون $m\angle A'PS = m\angle A''PS, m\angle APR = m\angle A'PR$ لكن

$$m\angle APA'' = m\angle APR + m\angle A'PR + m\angle A'PS + m\angle A''PS$$

و $m\angle SPR = m\angle A'PS + m\angle A'PR$ حسب مسلّمة جمع الزوايا إذن

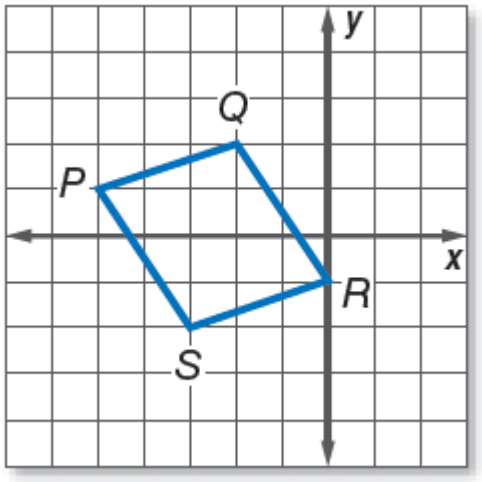
$$m\angle APA'' = m\angle A'PS + m\angle A'PS + m\angle A'PR + m\angle A'PR$$

بالتعويض وهذا يعني أن $m\angle APA'' = 2(m\angle A'PR + m\angle A'PS)$.

بالتعويض ينتج أن $m\angle APA'' = 2(m\angle SPR)$.

مسائل مهارات التفكير العليا:

28) تحدٍّ: إذا أُزيح الشكل $PQRS$ بمقدار 3 وحدات إلى اليمين ووحدتين إلى أسفل، ثم عُكست الصورة حول المستقيم $y=-1$، وبعد ذلك تم تدوير الصورة الجديدة بزاوية $90°$ حول نقطة الأصل، فما إحداثيات رؤوس الشكل الناتج $P'''Q'''R'''S'''$؟



الازاحة

$$(x,y)\Rightarrow(x+3,y-2)$$

$$P(-5,1)\Rightarrow P'(-2,-1)$$

$$Q(-2,2)\Rightarrow Q'(1,0)$$

$$R(0,-1)\Rightarrow R'(3,-3)$$

$$S(-3,-2)\Rightarrow S'(0,-4)$$

الانعكاس عند $y=-1$

$$P'(-2,-1)\Rightarrow P''(-2,-1)$$

$$Q'(1,0)\Rightarrow Q''(1,-2)$$

$$R'(3,-3)\Rightarrow R''(3,1)$$

$$S'(0,-4)\Rightarrow S''(0,2)$$

الدوران $90°$ حول نقطة الأصل

$$(x,y)\Rightarrow(-y,x)$$

$$P''(-2,-1)\Rightarrow P'''(1,-2)$$

$$Q''(1,-2)\Rightarrow Q'''(2,1)$$

$$R''(3,1)\Rightarrow R'''(-1,3)$$

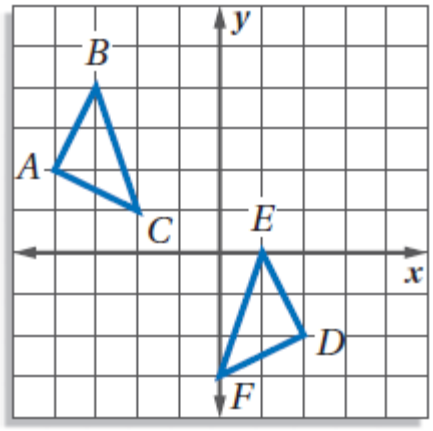
$$S''(0,2)\Rightarrow S'''(-2,0)$$

$$P'''(1,-2)\ ,\ Q'''(2,1)\ ,\ R'''(-1,3)\ ,\ S'''(-2,0)$$

29) **تبرير:** إذا أُجري انعكاسان متعاقبان بشكل ما؛ أحدهما حول المستقيم $y = x$، والآخر حول المحور x، فهل يؤثر ترتيب الانعكاسين في الصورة الناتجة؟ اشرح إجابتك.

نعم، إذا أجري انعكاس في المحور X للقطعة المستقيمة التي إحداثيات طرفيها (a, b) , (c, d) فإن إحداثيات طرفي صورتها هي (-b, a) , (-d, c). وأما إذا أجري الانعكاس في المستقيم y = x ، أولاً فإن إحداثيات طرفي الصورة الأولى (b, a) , (d, c). وإذا أجري لهذه الصورة انعكاس في المحور x فإن إحداثيات طرفي الصورة النهائية هي (b, -a) , (d, -c) وهما مختلفان عن النتيجة النهائية في الحالة الأولى.

30) **مسألة مفتوحة:** صِفْ تحويلًا هندسيًّا مركبًا يمكن استعماله لتحويل $\triangle ABC$ إلى $\triangle DEF$ في الشكل المجاور.



يمكن إجراء إزاحة للمثلث ABC مقدارها 4 وحدات للأسفل ثم انعكاس للصورة حول المستقيم x = –1 لتكوين DEF.

31) **تبرير:** إذا أُخضع شكلٌ ما لدورانين، فهل لترتيب الدورانين تأثير في موقع الصورة الناتجة دائمًا، أو أحيانًا، أو ليس له تأثير أبدًا؟

أحياناً، إجابة ممكنة: عندما يجرى دورانان على شكل ما، فليس لترتيبهما تأثير عندما يكون للدورانين المركز نفسه.

32) **اكتب:** هل تبقى أي نقاط ثابتةً في التحويلات الهندسية المركبة؟ وضّح إجابتك.

لا توجد نقاط ثابتة في الإزاحة تحرك جميع النقاط. قد توجد في بعض التحويلات الهندسية المركبة نقطا ثابتة عند تدويره مرتين، أو انعكاسه مرتين.

تدريب على اختبار

33) ما صورة النقطة $A(4, 1)$ الناتجة عن انعكاس حول المستقيم $y = x$ ؟

A $(1, -4)$ **C** $(-1, 4)$

B $(1, 4)$ **D** $(-1, -4)$

الاختيار الصحيح B $(1, 4)$

34) **إجابة قصيرة:** إحداثيات طرفَي $\overline{CD}$ هما $C(2, 4)$ و $D(8, 7)$، إذا أُزيحت هذه القطعة المستقيمة بمقدار 6 وحدات إلى اليسار ووحدتين إلى أعلى، ثم عكست الصورة حول المحور y، فما إحداثيات D''؟

الازاحة:

$$(x, y) \rightarrow (x - 6, y + 2)$$
$$D(8, 7) \rightarrow D'(2, 9)$$

الانعكاس حول المحور y

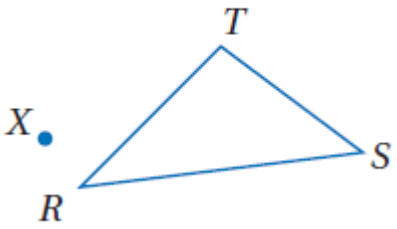
$$(x, y) \Rightarrow (-x, y)$$
$$D'(2, 9) \Rightarrow D''(-2, 9)$$

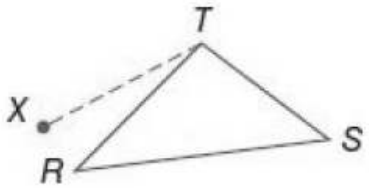
احداثيات النقطة $D''(-2, 9)$

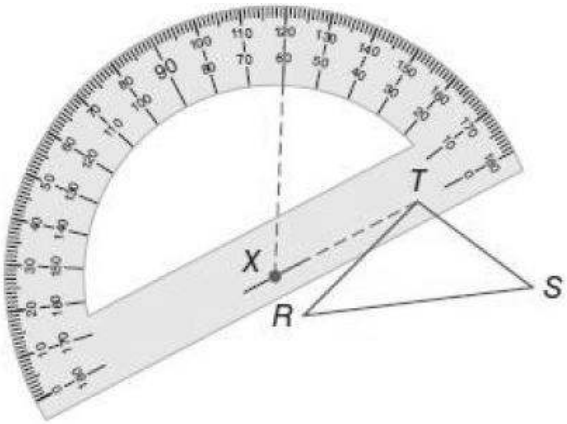
مراجعة تراكمية

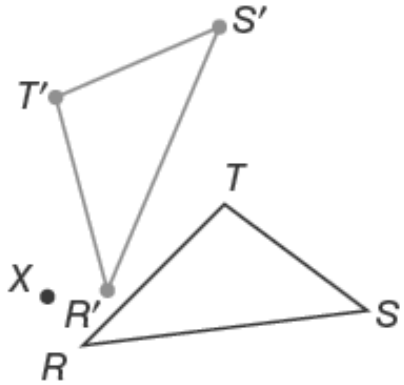
استعمل منقلةً ومسطرةً؛ لرسم صورة الشكل الناتجة عن الدوران حول النقطة X بالزاوية المبينة في كلٍّ ممَّا يأتي:

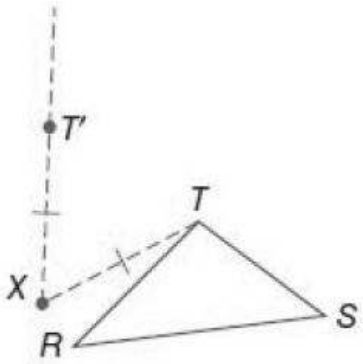
35) $60°$



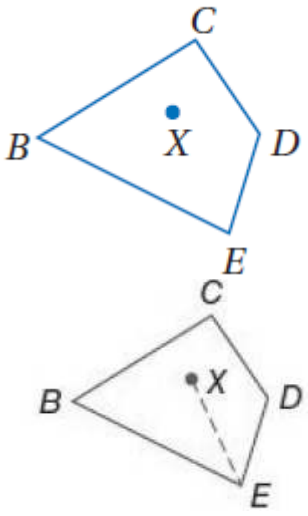


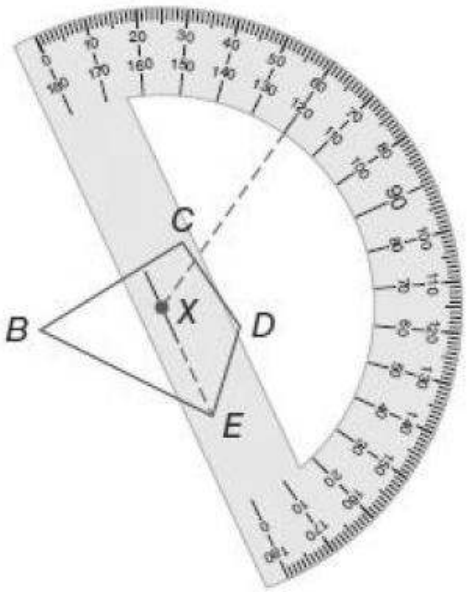


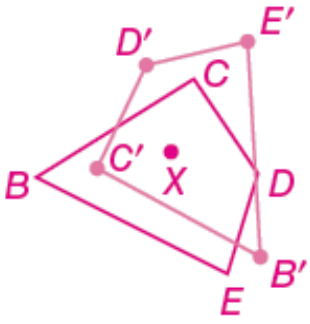


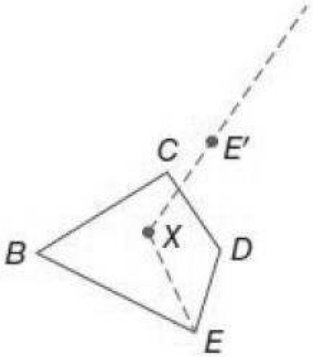


120° (36

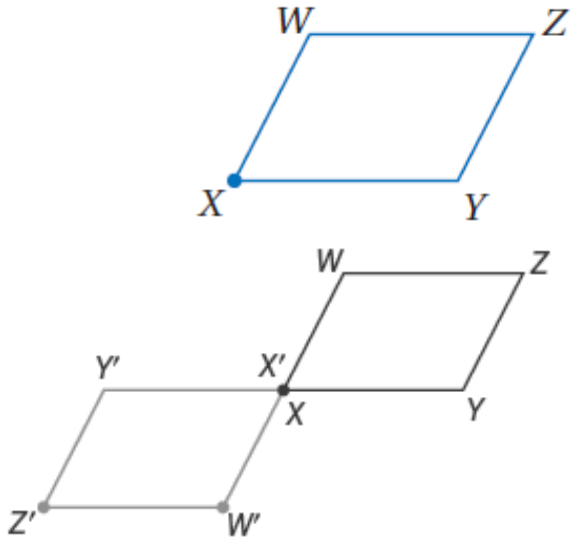






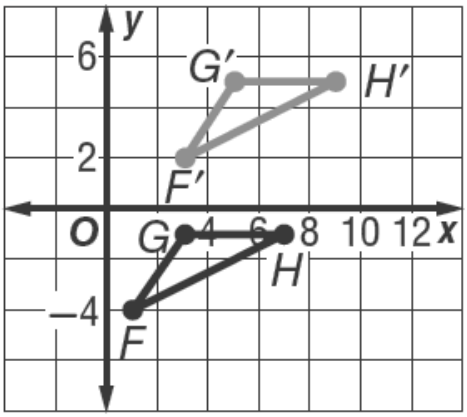


37) $180°$

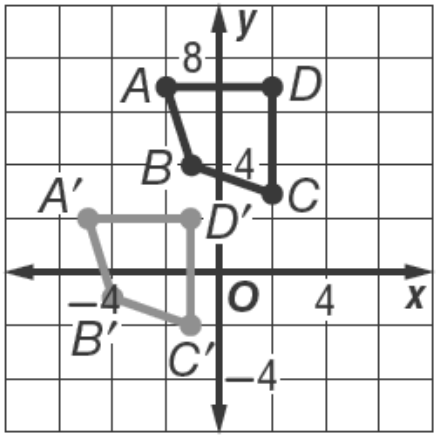


مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الإزاحة المحدّدة في كلٍّ ممَّا يأتي:

38) $\triangle FGH$ الذي إحداثيات رؤوسه هي: $F(1, -4), G(3, -1), H(7, -1)$ ؛ إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليمين و6 وحدات إلى أعلى.



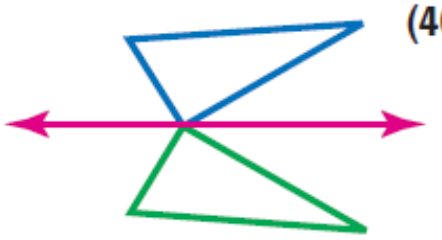
39) الشكل الرباعي $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه: $A(-2, 7), B(-1, 4), C(2, 3), D(2, 7)$ ؛ إزاحة مقدارها 3 وحدات إلى اليسار و5 وحدات إلى أسفل.



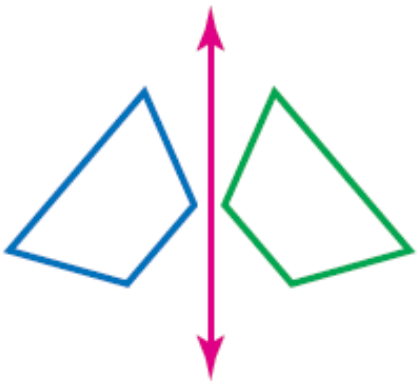
استعد للدرس اللاحق

يبيِّن كل من الأشكال الآتية الأصل والصورة الناتجة عن انعكاسٍ حول مستقيمٍ ما، ارسم محور الانعكاس.

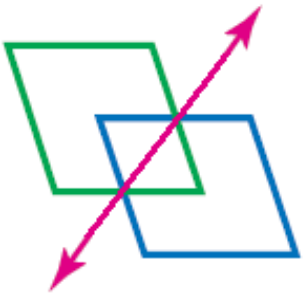
40)



41)



42)



7-4 توسع: معمل الهندسة: التبليط

تمارين

حدّد ما إذا كان استعمال أيٍّ من المضلعات المنتظمة الآتية لتكوين تبليط في المستوى ممكنًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا".

1) مثلث

نعم، إن قياس الزاوية الداخلية للمثلث المتطابق الأضلاع °60، وهو من عوامل العدد 360.

2) مضلع خماسي

لا، إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للخماسي المنتظم °108، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

3) مضلع له 16 ضلعًا

لا، إجابة ممكنة: قياس الزاوية الداخلية للمضلع ذي 16 ضلعاً يساوي °157.5، وهذا ليس من عوامل العدد 360.

حدّد ما إذا كان كلٌّ من الأنماط الآتية تبليطًا أم لا. اكتب "نعم" أو "لا"، وإن كان كذلك فصنّفه إلى منتظمٍ أو شبه منتظمٍ أو غير منتظم، وإلى متسق أو غير متسق.

(4

لا

(5

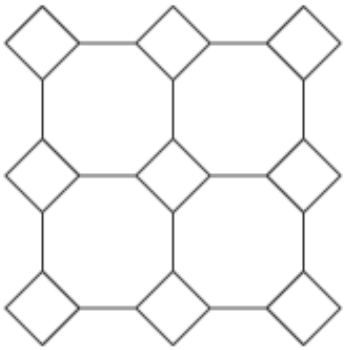
نعم، غير منتظم، غير متسق

(6

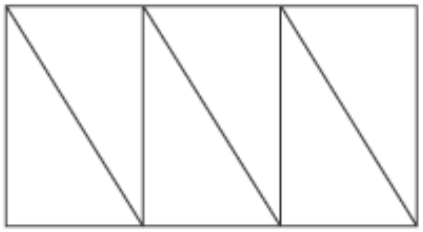
نعم، منتظم، متسق

ارسم نمط تبليط باستعمال الشكل (أو الأشكال) الآتي:

7) مضلع ثماني منتظم ومربع



8) مثلث قائم الزاوية



9) شبه منحرف ومتوازي أضلاع

7-5 التماثل

تحقق

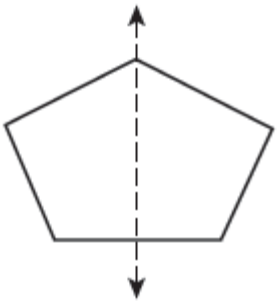
بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

(1A

لا

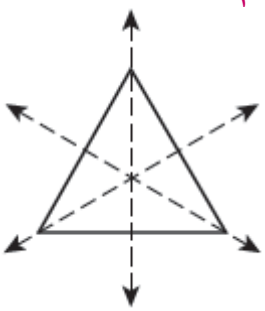
(1B

نعم، 1



(1C

نعم، 3



أزهار: بيِّن ما إذا كان يبدو لصورة الزهرة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

(2A

(2B

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى، أو متماثلًا حول محور، أو كلاهما، أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

(3A

كلاهما

(3B

غير ذلك

(3C

كلاهما

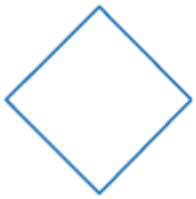
(3D

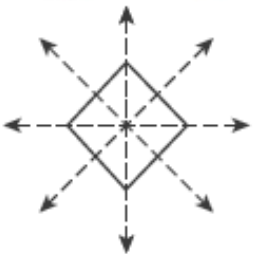
كلاهما

تأكد:

بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

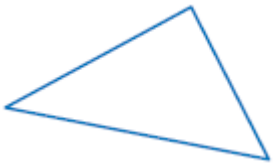
1)





نعم، 4

2)



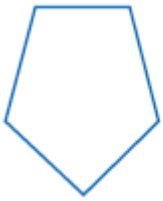
لا

3)

نعم ، 1

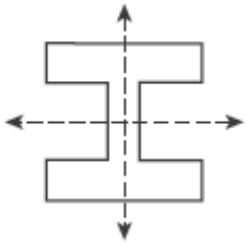
بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(4



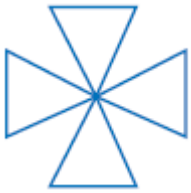
لا

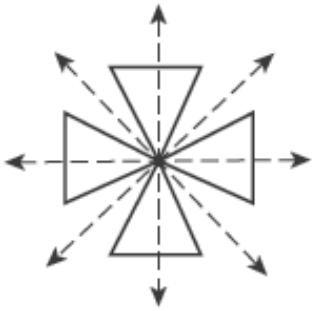
(5



نعم، 2، 180°

(6





نعم، 4، 90°

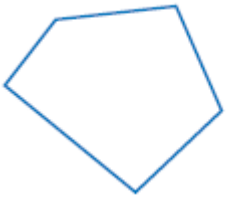
(7 بيِّن ما إذا كان الشكل المجاور متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

كلاهما.

تدرب وحل المسائل:

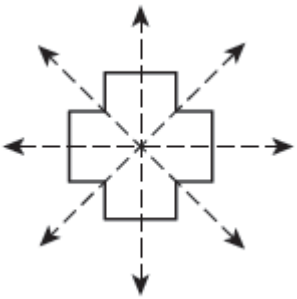
بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

8)



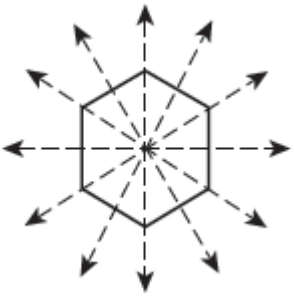
لا

9)



نعم، 4

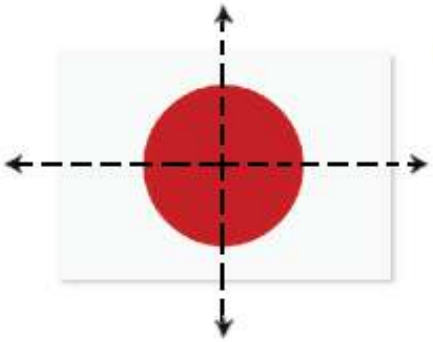
10)



نعم، 6

أعلام: بيِّن ما إذا كان للعلم محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها في كلٍّ مما يأتي:

(11

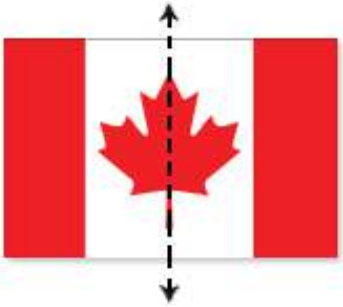


نعم، 2

(12

لا

(13



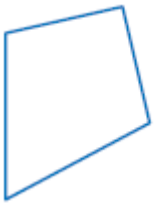
نعم، 2

بيِّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدّد رتبته ومقداره في كلٍّ مما يأتي:

(14

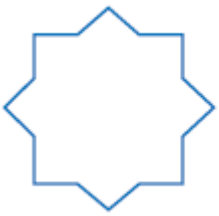
نعم، 2، 180°

(15



لا

(16



نعم، 8، 45°

إطارات: بيِّن ما إذا كان لصورة غطاء إطار السيارة تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فحدد رتبة التماثل ومقداره .

(17

نعم، 7، 51.4°

(18

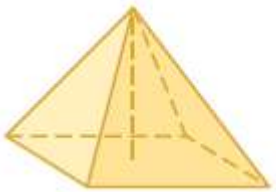
نعم، 6، 60°

(19

نعم، 10، 36°

بيِّن ما إذا كان الشكل متماثلًا حول مستوى أو متماثلًا حول محور أو كلاهما أو غير ذلك في كلٍّ ممَّا يأتي:

(20

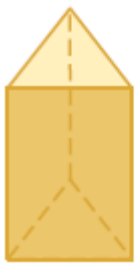


كلاهما

(21

غير ذلك

(22



كلاهما

عبوات: حدّد عدد مستويات التماثل الأفقية، ومستويات التماثل الرأسية لكلٍّ من العلب الآتية:

(23

لا يوجد مستويات تماثل أفقية، وهناك عدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

(24

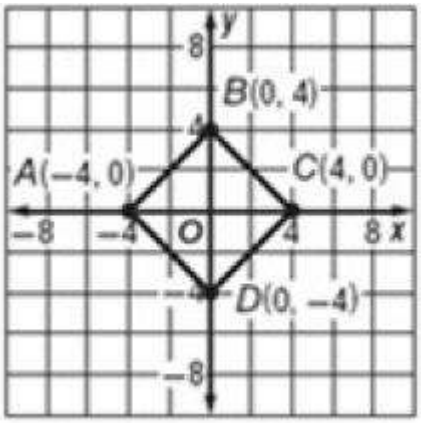
لا يوجد مستويات تماثل أفقية، مستوى تماثل رأسي واحد.

(25

مستوى تماثل أفقي واحد وعدد لا نهائي من مستويات التماثل الرأسية.

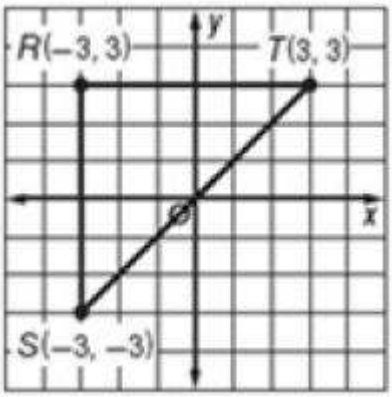
هندسة إحداثية : حدّد ما إذا كان للشكل المعطاة إحداثيات رؤوسه في كلٍّ من الأسئلة الآتية تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا.

(26 $A(-4, 0), B(0, 4), C(4, 0), D(0, -4)$



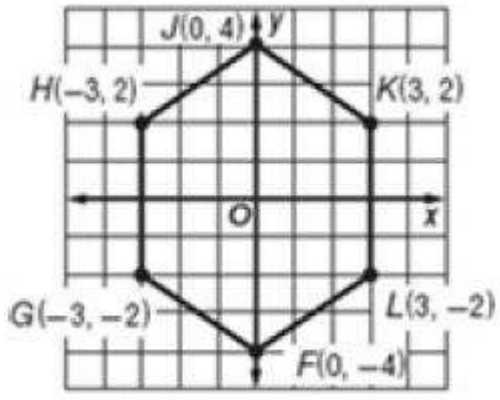
له محور تماثل وتماثل دوراني.

(27 $R(-3, 3), S(-3, -3), T(3, 3)$



له محور تماثل.

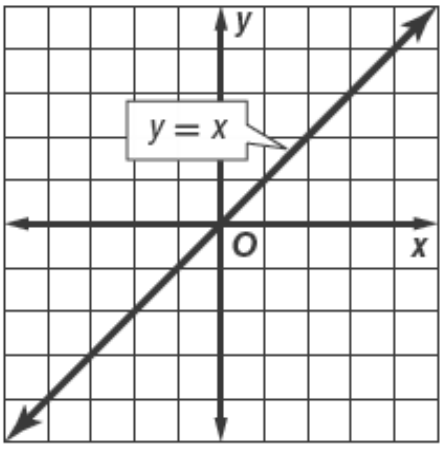
(28 $F(0, -4), G(-3, -2), H(-3, 2), J(0, 4), K(3, 2), L(3, -2)$



له محور تماثل وتماثل دوراني.

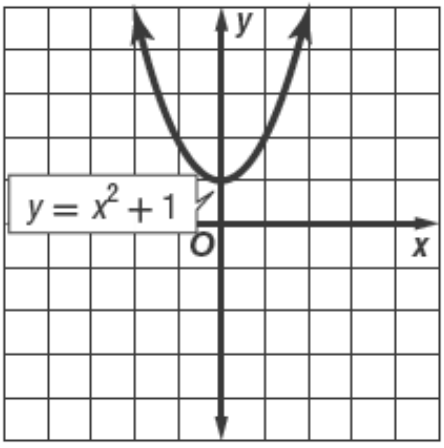
جبر: مثِّل بيانيًّا كلًّا من الدوال الآتية، وحدّد ما إذا كان لتمثيلها البياني تماثل حول محور و/أو تماثل دوراني أم لا. وإذا كان كذلك، فحدّد رتبة التماثل ومقداره، واكتب معادلة كل محور تماثل.

(29 $y = x$



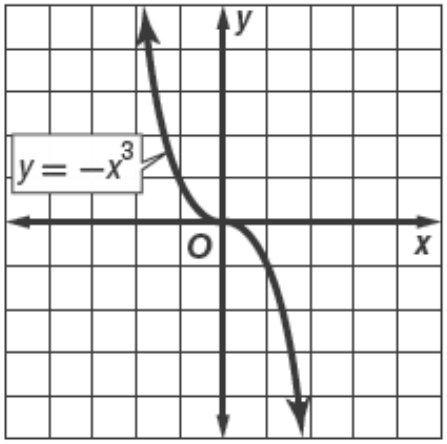
تماثل دوراني، 2، 36° وتماثل حول المستقيم $y = -x$

(30 $y = x^2 + 1$



تماثل حول مستقيم، $x = 0$

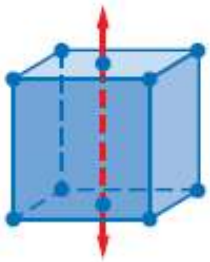
31) $y = -x^3$



تماثل دوراني، 2، 180°

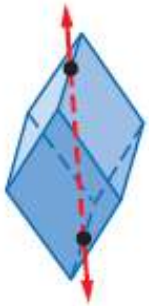
حدِّد ما إذا كانت البلورة متماثلةً حول مستوى أو متماثلة حول محور في كلٍّ ممَّا يأتي:

32) مكعب



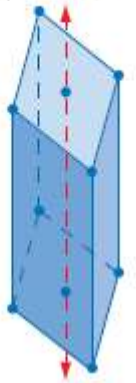
متماثل حول مستوى وحول محور، 90°

33) مجسم ذو ستة أوجه كل منها معين



متماثل حول مستوى وحول محور، 180°

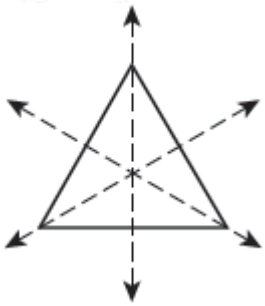
34) منشور قائم قاعدته معين



متماثل حول مستوى وحول محور، 180°

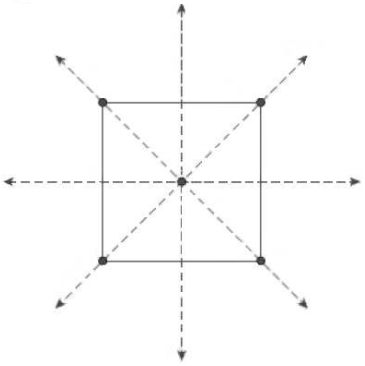
35) **تمثيلات متعددة:** في هذه المسألة ستستقصي التماثل الدوراني في المضلعات المنتظمة.

a) **هندسيًّا:** ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع، وحدّد رتبة تماثله.

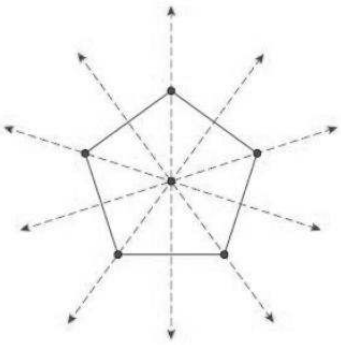


رتبة التماثل = 3

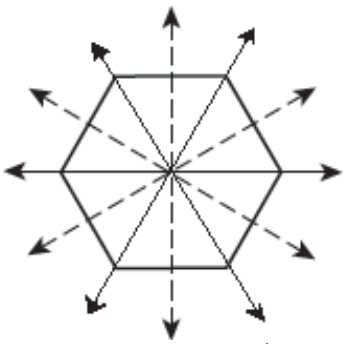
b) **هندسيًّا:** كرّر العملية في الفرع a على مربعٍ ومضلعٍ خماسيٍّ منتظمٍ ومضلعٍ سداسيٍّ منتظمٍ.



رتبة التماثل = 4



رتبة التماثل = 5



رتبة التماثل = 6

c) **جدوليًا:** نظِّم جدولًا يبين رتبة التماثل لكلٍّ من هذه المضلعات.

المضلع	عدد الأضلاع	رتبة التماثل
مثلث	3	3
مربع	4	4
خماسي	5	5
سداسي	6	6

d) **لفظيًا:** ضع تخمينًا حول رتبة التماثل لمضلع منتظم.

رتبة التماثل المضلع المنتظم تساوي عدد أضلاعه.

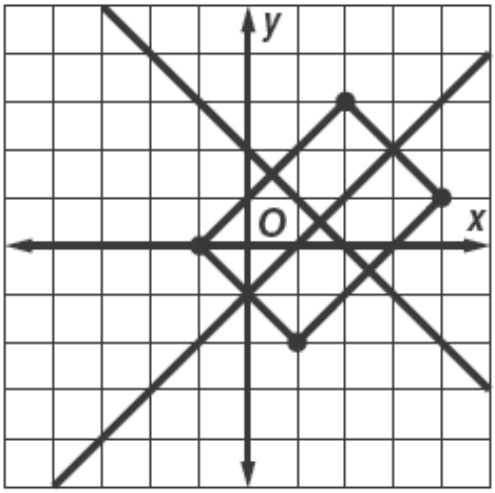
مسائل مهارات التفكير العليا:

36) اكتشف الخطأ: يقول جمال: إن للشكل A تماثلًا حول محور فقط، في حين يقول ناصر: إن للشكل A تماثلًا دورانيًّا فقط. فهل أيٌّ منهما على صواب؟ برر إجابتك.

الشكل A

لم تكن إجابة أي منهما صحيحة:
للشكل A تماثل حور محور وتماثل دوراني معاً.

37) تحدٍّ: يوجد لشكل رباعي في المستوى الإحداثي محورا تماثل فقط هما: $y = -x + 2$, $y = x - 1$. مثل محوري التماثل بيانيًا ثم أوجد مجموعة من الإحداثيات الممكنة لرؤوس هذا الشكل ومثله بيانيًا.



(-1, 0) , (2, 3) , (4, 1) , (1, -2)

38) **مسألة مفتوحة:** ارسم شكلًا له محور تماثل، ولكن ليس له تماثل دوراني. اشرح إجابتك .

المثلث المتطابق الضلعين متماثل حول المستقيم المرسوم من الرأس إلى منتصف القاعدة وليس له تماثل دوراني لأنه لا ينطبق على نفسه عند تدويره بزاوية بين 0° و 360° حول أي نقطة.

39) **اكتب:** بيِّن أوجه الشبه وأوجه الاختلاف بين التماثل حول محور والتماثل الدوراني.

في كلا النوعين من التماثل حول مستقيم والدوراني ينطبق الشكل على نفسه، ففي التماثل حول مستقيم ينطبق الشمل على نفسه بالانعكاس حول المحور. وفي التماثل الدوراني ينطبق الشكل على نفسه من خلال دوران حول مركز التماثل. ويمكن أن يكون للشكل نفسه تماثل خطي وتماثل دوراني.

تدريب على اختبار

40) **إجابة قصيرة:** ما عدد محاور التماثل التي يمكن رسمها في صورة علم مملكة البحرين؟

محور تماثل واحد

41) ما رتبة التماثل للشكل الآتي؟

رتبة الشكل 8

مراجعة تراكمية

إحداثيات رؤوس المثلث JKL هي: $J(1,5), K(3,1), L(5,7)$، مثِّل بيانيًّا $\triangle JKL$ وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

42) إزاحة مقدارها 7 وحدات إلى اليسار ووحدة واحدة إلى أسفل ثم انعكاس حول المحور x.

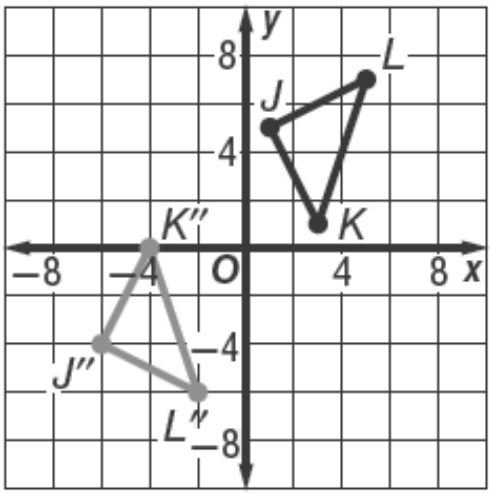
الازاحة:

$(x,y) \rightarrow (x-7, y-1)$

$J(1,5) \rightarrow J'(-6,4)$

$K(3,1) \rightarrow K'(-4,0)$

$L(5,7) \rightarrow L'(-2,6)$



الانعكاس حول محور x

$(x,y) \rightarrow (x,-y)$

$J'(-6,4) \rightarrow J''(-6,-4)$

$K'(-4,0) \rightarrow K''(-4,0)$

$L'(-2,6) \rightarrow L''(-2,-6)$

43) إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور y.

الازاحة:

$(x,y) \rightarrow (x+1, y+2)$

$J(1,5) \rightarrow J'(2,7)$

$K(3,1) \rightarrow K'(4,3)$

$L(5,7) \rightarrow L'(6,9)$

الانعكاس حول محور x

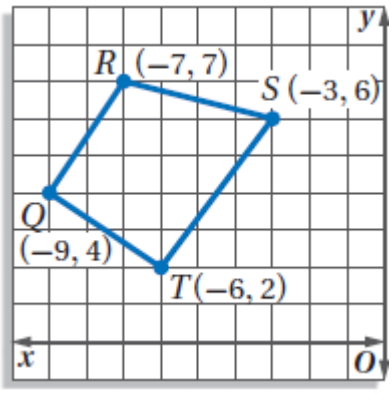
$(x,y) \rightarrow (-x,y)$

$J'(2,7) \rightarrow J''(-2,7)$

$K'(4,3) \rightarrow K''(-4,3)$

$L'(6,9) \rightarrow L''(-6,9)$

44) يبيِّن الشكل المجاور الشكل الرباعي $QRST$ في المستوى الإحداثي، ما صورة النقطة R الناتجة عن دوران الشكل بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل؟

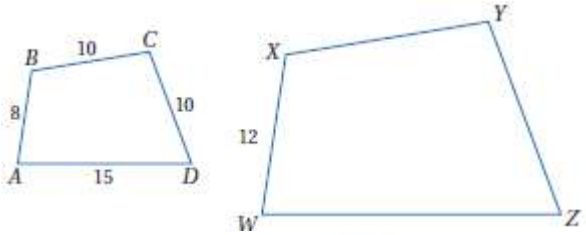


$$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$$
$$R(-7, 7) \rightarrow R'(7, -7)$$

صورة النقطة $R'(7, -7)$

استعد للدرس اللاحق

إذا كان $WXYZ \sim ABCD$ ، فأوجد كلًّا مما يلي:



45) معامل تشابه $ABCD$ إلى $WXYZ$

معامل التشابه $= \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

46) XY

$$XY = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

47) YZ

$$YZ = \frac{10 \times 12}{8} = 15$$

48) WZ

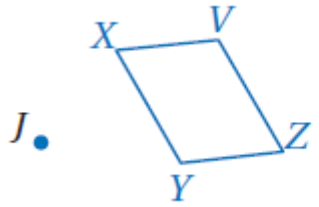
$$WZ = \frac{15 \times 12}{8} = 22.5$$

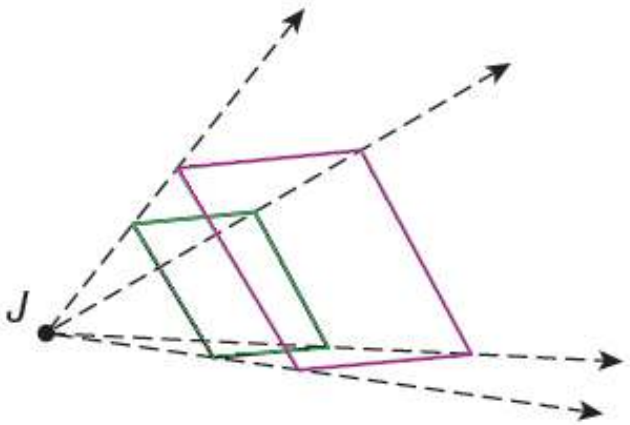
7-6 التمدد

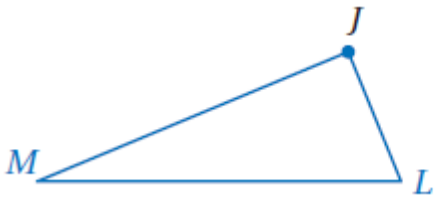
تحقق

استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن التمدد الذي مركزه النقطة J، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ ممّا يأتي:

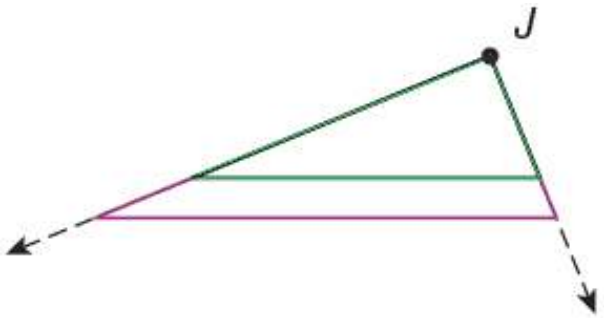
1A) $k = \frac{3}{2}$



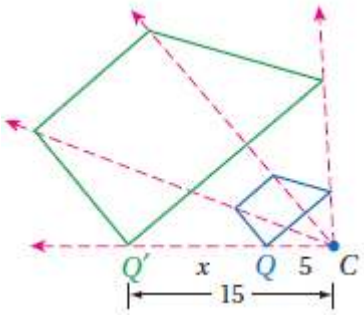




$k = 0.75$ (**1B**



2) حدِّد ما إذا كان التمدد من الشكل Q إلى Q' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد، وقيمة x.



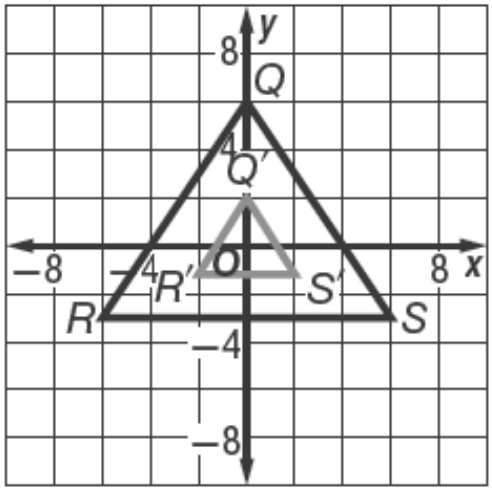
مقياس التمدد $= \frac{15}{5} = 3$

$x = 15 - 5 = 10$

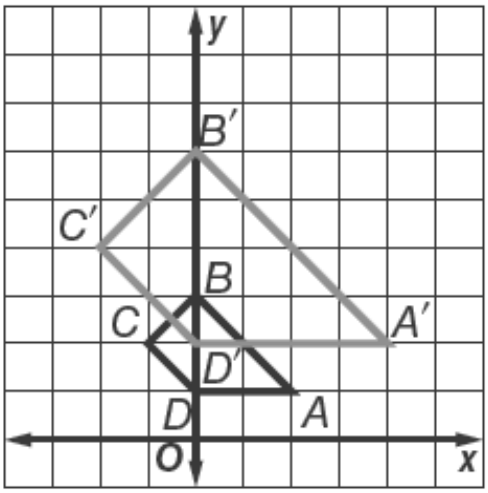
تكبير

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل، ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

3A $k=\frac{1}{3}$ ؛ $Q(0, 6), R(-6, -3), S(6, -3)$



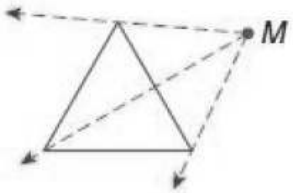
3B $k=2$ ؛ $A(2, 1), B(0, 3), C(-1, 2), D(0, 1)$



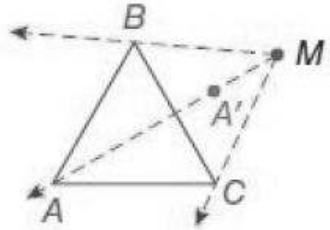
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة M ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

1) $k=\frac{1}{4}$

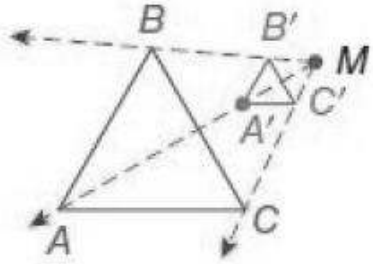
ارسم أنصاف مستقيمات من M تمر برؤوس المثلث



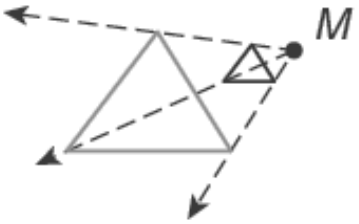
عين A' على $\overrightarrow{MA}$ بحيث يكون $MA'=\frac{1}{2}MA$



عين B' على $\overrightarrow{MB}$ و C' على $\overrightarrow{MC}$ بنفس الطريقة

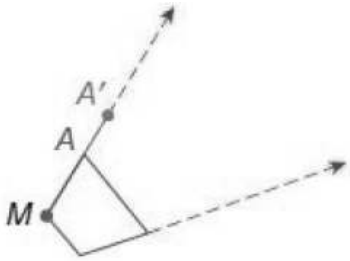


ارسم $\Delta A'B'C'$

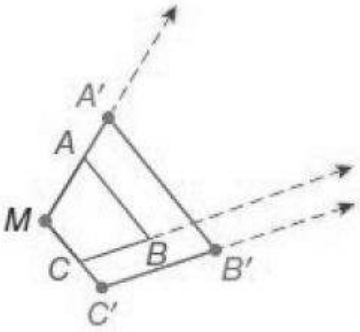


(2 $k = 2$

ارسم أنصاف مستقيمات من M

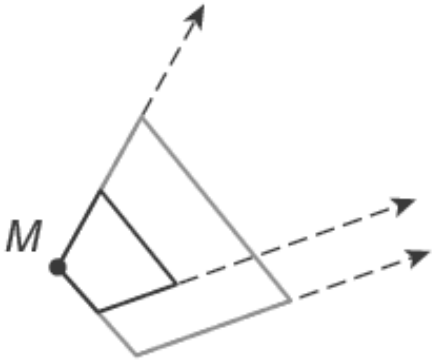


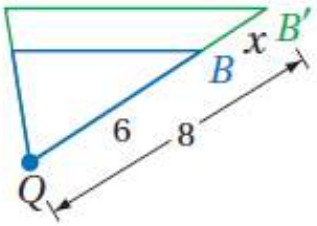
عين A' على $\overrightarrow{MA}$ بحيث يكون $MA' = 2MA$



عين B' على $\overrightarrow{MB}$ و C' على $\overrightarrow{MC}$ بنفس الطريقة

ارسم $A'B'C'M'$ □



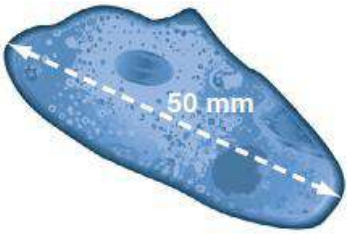


3) حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل B إلى الشكل B' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x.

معامل التكبير $= \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$

$x = 8 - 6 = 2$

تكبير



4) **أحياء:** طول مخلوق حيٍّ دقيق وحيد الخلية 200 ميكرون، ويظهر طوله تحت المجهر 50 mm، إذا كان 1000 ميكرون = 1 mm، فما قوة التكبير (معامل مقياس التمدد) المُستعملة؟ وضّح إجابتك.

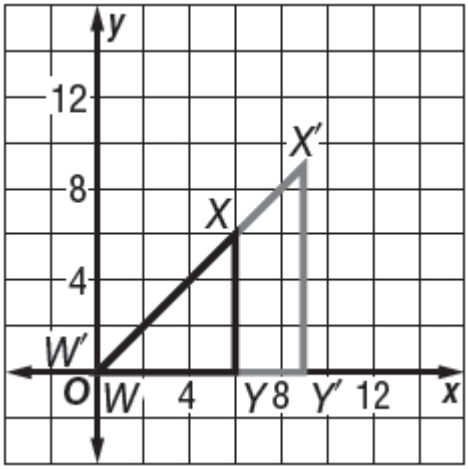
طول المخلوق بالملمتر $= \frac{200}{1000} = 0.2$ mm.

معامل مقياس التمدد $= \frac{50}{0.2} = 250$

قوة التكبير = 250 مرة

مثِّل المضلع المعطاة إحداثيات رؤوسه بيانيًّا، ثم مثِّل صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

5) $W(0, 0), X(6, 6), Y(6, 0)$؛ $k = 1.5$



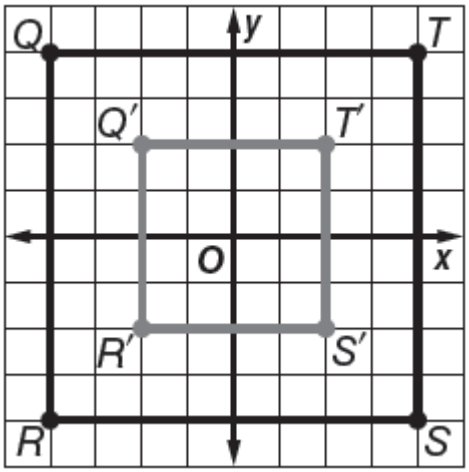
$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$

$W(0,0) \rightarrow W'(0,0)$

$X(6,6) \rightarrow X'(9,9)$

$Y(6,0) \rightarrow Y'(9,0)$

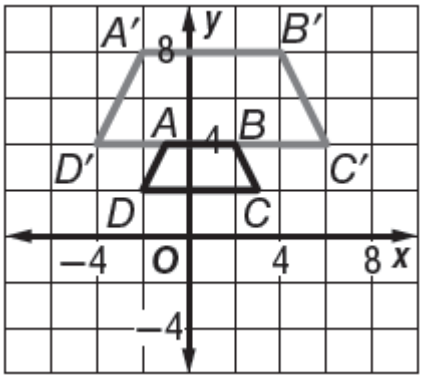
$k = \frac{1}{2}$ ؛ $Q(-4, 4), R(-4, -4), S(4, -4), T(4, 4)$ **(6**



$$(x, y) \to (kx, ky).$$

$$Q(-4,4) \to Q'(-2,2)$$
$$R(-4,-4) \to R'(-2,-2)$$
$$S(4,-4) \to S'(2,-2)$$
$$T(4,4) \to T'(2,2)$$

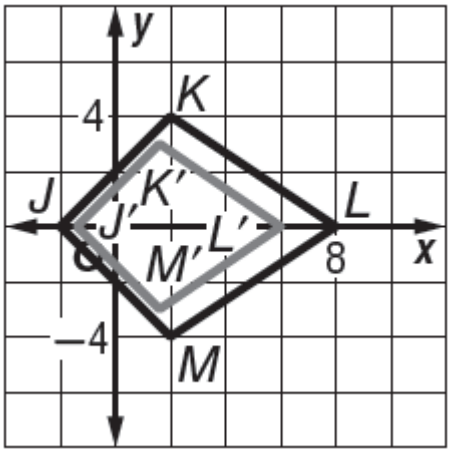
$k = 2$ ؛ $A(-1, 4), B(2, 4), C(3, 2), D(-2, 2)$ **(7**



$$(x, y) \to (kx, ky).$$

$$A(-1,4) \to A'(-2,8)$$
$$B(2,4) \to B'(4,8)$$
$$C(3,2) \to C'(6,4)$$
$$D(-2,2) \to D'(-4,4)$$

$k = \frac{3}{4}$ ؛ $J(-2, 0), K(2, 4), L(8, 0), M(2, -4)$ **(8**



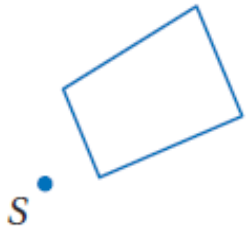
$$(x, y) \to (kx, ky).$$

$$J(-2,0) \to J'(-1.5,0)$$
$$K(2,4) \to K'(1.5,3)$$
$$L(8,0) \to L'(6,0)$$
$$M(2,-4) \to M'(1.5,-3)$$

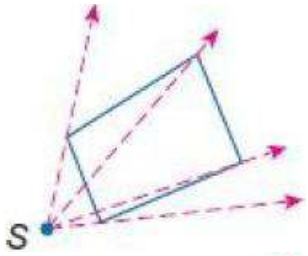
تدرب وحل المسائل:

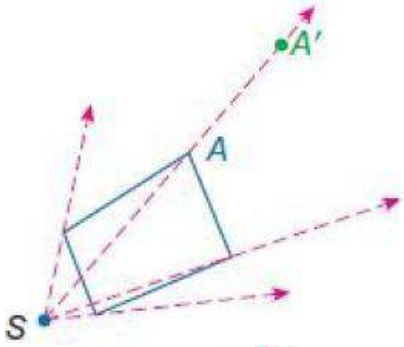
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه النقطة S ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

9) $k = \frac{5}{2}$

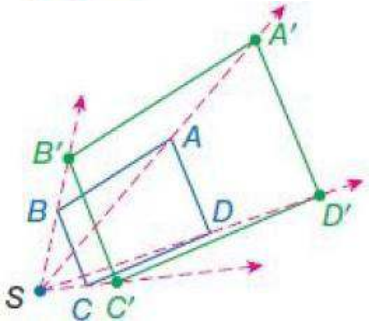


ارسم أنصاف مستقيمات من S



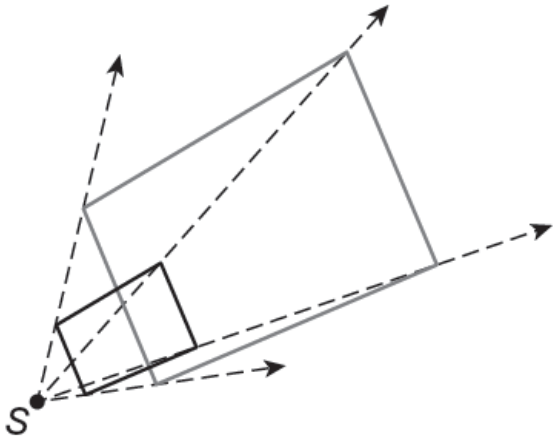


عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون $SA' = \frac{5}{2}SA$

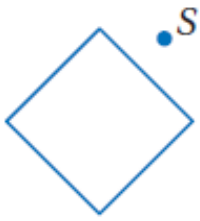


عين B' على $\overrightarrow{SB}$ و C' على $\overrightarrow{SC}$
و D' على $\overrightarrow{SD}$ بنفس الطريقة

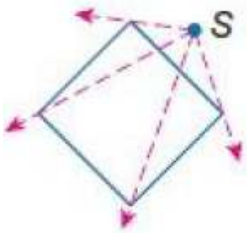
ارسم $A'B'C'D'$



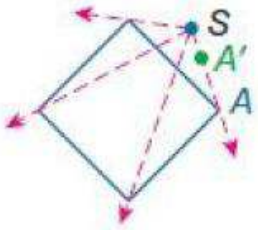
(10 $k=\frac{1}{3}$



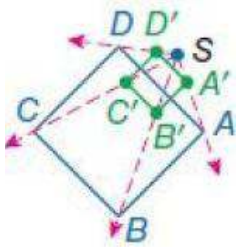
ارسم أنصاف مستقيمات من S



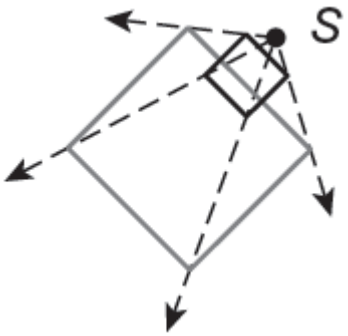
عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون $SA'=\frac{1}{3}SA$



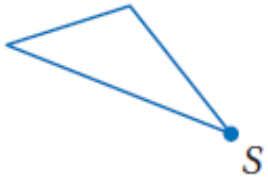
عين B' على $\overrightarrow{SB}$ و C' على $\overrightarrow{SC}$
و D' على $\overrightarrow{SD}$ بنفس الطريقة



ارسم $A'B'C'D'$

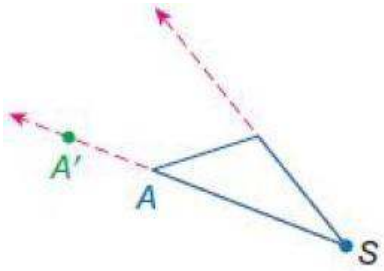


$k = 2.25$ (11

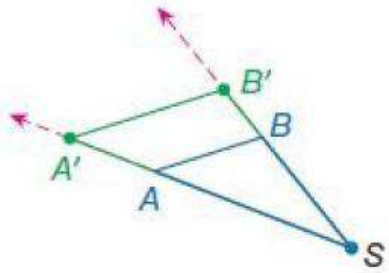


ارسم أنصاف مستقيمات من S

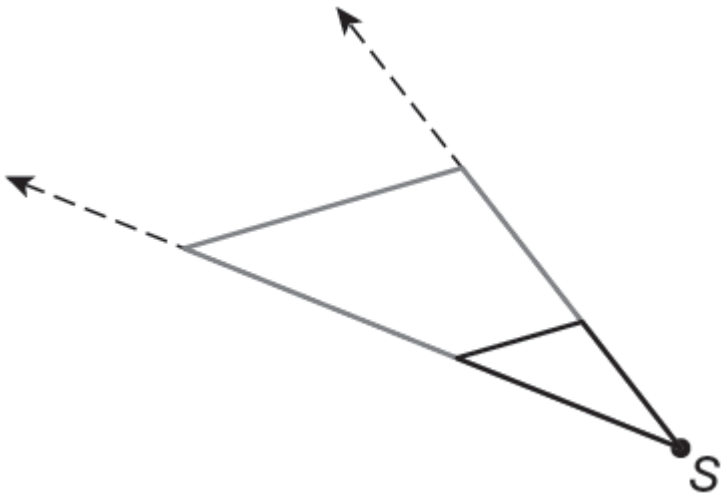
عين A' على $\overrightarrow{SA}$ بحيث يكون
$SA' = 2.25\ SA$



عين B' على $\overrightarrow{SB}$ بنفس الطريقة

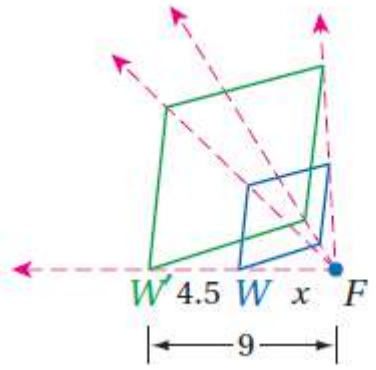


ارسم $A'B'C'D'$



حدّد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى الشكل W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامله وقيمة x .

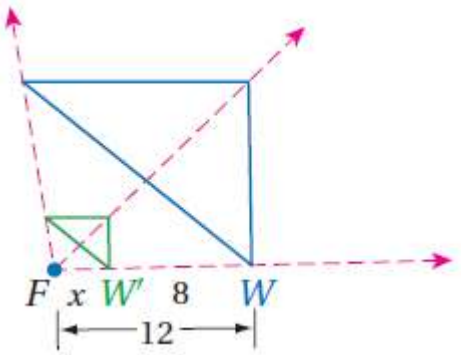
(12



معامل مقياس التمدد $= \frac{9}{4.5} = 2$

$x = 9 - 4.5 = 4.5$

(13



معامل مقياس التمدد $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$

$x = 12 - 8 = 4$

حشرات: طول كلٍّ من الحشرتين الآتيتين كما تُرى تحت المجهر مكتوب على الصورة. إذا علمت طول الحشرة الحقيقي، فأوجد قوة التكبير المُستعملة، ووضّح إجابتك.

(14

15 مرة، طول صورة الحشرة بالمليمترات هو 3.75×10 أو 37.5 mm.

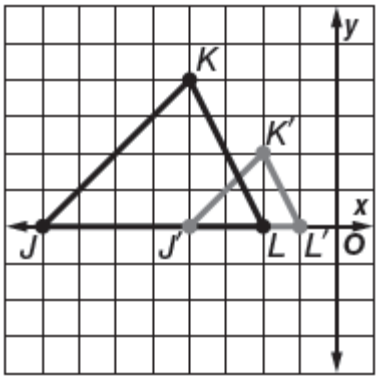
ومعامل التمدد يساوي $\frac{37.5}{2.5} = 15$

(15

96 مرة، طول صورة الحشرة بالمليمترات هو 4.8×10 أو 48 mm. ومعامل التمدد يساوي $\frac{48}{0.5} = 96$

مثِّل بيانيًّا المضلع وصورته الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله العدد k المحدد في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

(16 $k = 0.5$ ؛ $J(-8, 0), K(-4, 4), L(-2, 0)$



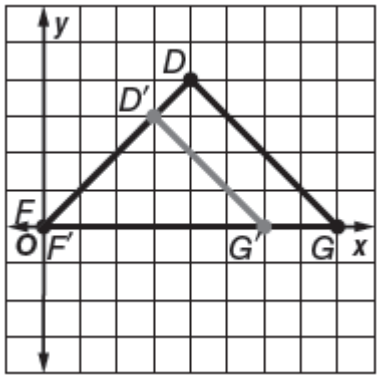
$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

$J(-8, 0) \rightarrow J'(-4, 0)$

$K(-4, 4) \rightarrow K'(-2, 2)$

$L(-2, 0) \rightarrow L'(-1, 0)$

(17 $k = 0.75$ ؛ $D(4, 4), F(0, 0), G(8, 0)$



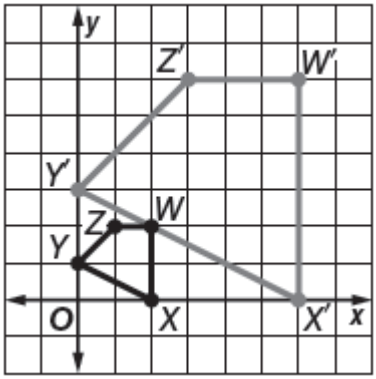
$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

$D(4, 4) \rightarrow D'(3, 3)$

$F(0, 0) \rightarrow F'(0, 0)$

$G(8, 0) \rightarrow G'(6, 0)$

(18 $k = 3$ ؛ $W(2, 2), X(2, 0), Y(0, 1), Z(1, 2)$



$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

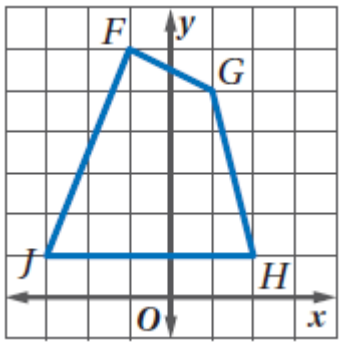
$W(2, 2) \rightarrow W'(6, 6)$

$X(2, 0) \rightarrow X'(6, 0)$

$Y(0, 1) \rightarrow Y'(0, 3)$

$Z(1, 2) \rightarrow Z'(3, 6)$

19) هندسة إحداثية: استعمل التمثيل البياني للمضلع $FGHJ$ للإجابة عمَّا يلي:



a) مثِّل بيانيًّا صورة $FGHJ$ الناتجة عن تمدد معامله $\frac{1}{2}$ ومركزه نقطة الأصل، ثم انعكاس حول المحور y.

صورة الشكل بعد التمدد

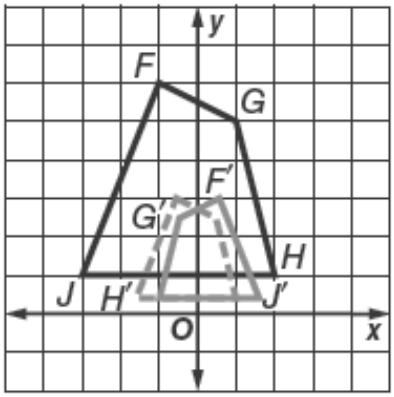
$$(x,y) \Rightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$$

$$F(-1,6) \Rightarrow F'\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$G(1,5) \Rightarrow G'\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$H(2,1) \Rightarrow H'\left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$J(-3,1) \Rightarrow J'\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$



الانعكاس حول المحور y

$$(x,y) \Rightarrow (-x,y)$$

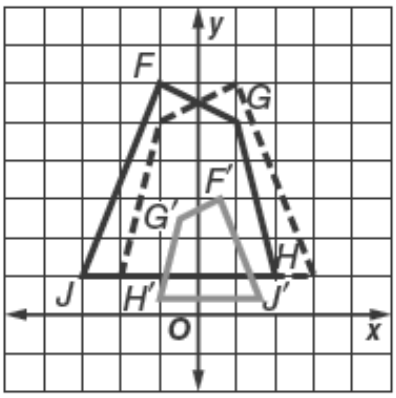
$$F'\left(-\frac{1}{2}, 3\right) \Rightarrow F''\left(\frac{1}{2}, 3\right)$$

$$G'\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \Rightarrow G''\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$$

$$H'\left(1, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow H''\left(-1, \frac{1}{2}\right)$$

$$J'\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow J''\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

b) نفّذ التحويل المركب في الفرع **a** بعكس الترتيب.



$$(x,y) \Rightarrow (-x,y)$$
$$F(-1,6) \Rightarrow F'(1,6)$$
$$G(1,5) \Rightarrow G'(-1,5)$$
$$H(2,1) \Rightarrow H'(-2,1)$$
$$J(-3,1) \Rightarrow J'(3,1)$$

$$(x,y) \Rightarrow \left(\tfrac{1}{2}x, \tfrac{1}{2}y\right)$$
$$F'(1,6) \Rightarrow F''\left(\tfrac{1}{2}, 3\right)$$
$$G'(-1,5) \Rightarrow G''\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{5}{2}\right)$$
$$H'(-2,1) \Rightarrow H''\left(-1, \tfrac{1}{2}\right)$$
$$J'(3,1) \Rightarrow J''\left(\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

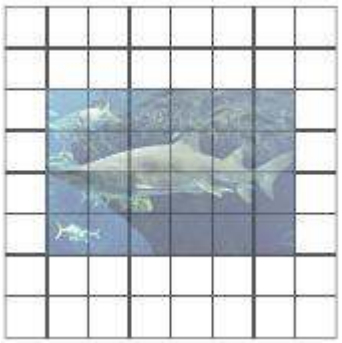
c) هل يؤثر ترتيب التحويلين الهندسيين هنا في الصورة النهائية؟

لا، احداثيات الصورة النهائية هي نفسها بغض النظر أي التحويلات بدأ أولاً

d) هل يؤثر ترتيب تركيب التمدد والانعكاس في الصورة النهائية دائمًا أو أحيانًا أو أنه لا يؤثر عليها أبدًا؟

أحياناً، لا يكون لترتيب تركيب التمدد الذي مركزه نقطة الأصل والانعكاس أهمية إذا كان محور الانعكاس يحتوي نقطة الأصل إي إذا كانت معادلته على الصورة: y = mx.

20) رسم: يرسم سليمان صورةً باستعمال طريقة المربعات، فيضع شبكة إحداثية شفافة طول وحدتها $\frac{1}{4}$ cm فوق صورة أبعادها $4\text{ cm} \times 6\text{ cm}$، ويضع شبكةً أخرى طول وحدتها $\frac{1}{2}$ cm على ورقة رسم أبعادها $8\text{ cm} \times 12\text{ cm}$، ثم يرسم ما يحويه كل مربع من الصورة في المربع المناظر له على ورقة الرسم.



a) ما معامل مقياس هذا التمدد؟

معامل مقياس التمدد 1 : 2

b) ما طول وحدة الشبكة التي يتعيَّن عليه استعمالها لرسم صورة قياسها 10 أمثال قياس الصورة الأصلية؟

بضرب المقياس في 10

$$\frac{1}{4} \times 10 = 2.5$$

تحتاج الى شبكة قياس طول وحدتها 2.5 cm.

c) كم تكون مساحة الرسم الناتج عن صورة أبعادها 5 cm x 7 cm عند استعمال شبكة وحدتها 2 cm على لوحة الرسم؟

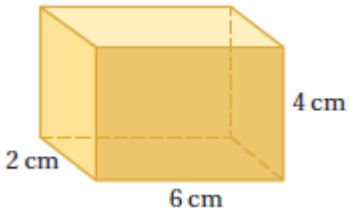
عند استعمال شبكة وحدتها 2cm. ستكون 8 مرات اكبر من الصورة الأصلية.

و هنا تكون الأبعاد الجديدة $5 \times 8 = 40$ و $7 \times 8 = 56$

المساحة $= 40 \times 56 =$ 2240 cm^2.

21) **تغيير الأبعاد:** يمكن إجراء تمددٍ على الأشكال الثلاثية الأبعاد أيضًا.

a) أوجد مساحة سطح المنشور المجاور وحجمه.



مساحة السطح $= 2(lb + bh)$

$= 2(6 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 6)$

$= 2(44) = 2(12 + 8 + 24)$

$= 88\ cm^2$

الحجم $= lbh$

$= 6 \cdot 2 \cdot 4$

$= 48\ cm^3$

b) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله 2، وأوجد حجمه.

عند تمدد الشكل بمعامل تمدد 2، مساحة السطح بعد التمدد يكون 2^2 أو 4 أمثال مساحة السطح الاصلية، و الحجم 2^3 أو 8 أمثال حجم الشكل الأصلي.

مساحة السطح بعد التمدد $= 88 \times 4 = 352\ cm^2$

الحجم بعد التمدد $= 48 \times 8 = 384\ cm^3$

c) أوجد مساحة سطح المنشور الناتج عن تمددٍ معامله $\frac{1}{2}$، وأوجد حجمه.

عند تمدد الشكل بمعامل تمدد $\frac{1}{2}$، مساحة السطح بعد التمدد يكون $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ أو $\frac{1}{4}$ أمثال مساحة السطح الاصلية، و الحجم $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ أو $\frac{1}{8}$ أمثال حجم الشكل الأصلي.

مساحة السطح بعد التمدد $= 88 \times \frac{1}{4} = 22\ cm^2$

الحجم بعد التمدد $= 48 \times \frac{1}{8} = 6\ cm^3$

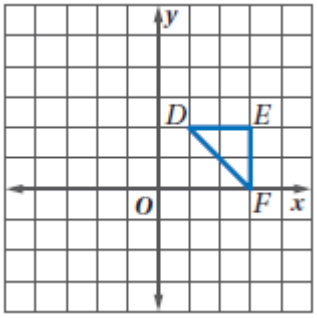
d) أوجد نسبة مساحة سطح المنشور الناتج عن كل تمدد إلى مساحة سطح المنشور الأصلي، ثم أوجد نسبة حجم المنشور الناتج عن كل تمددٍ إلى حجم المنشور الأصلي.

مساحة السطح 4 أمثال المساحة الأصلية عندما يكون معامل التمدد 2 وتساوي $\frac{1}{4}$ المساحة الأصلية إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$. حجم المنشور الجديد 8 أمثال حجم المنشور الأصلي عندما يكون معامل التمدد 2 ويساوي $\frac{1}{8}$ الحجم الأصلي إذا كان معامل التمدد $\frac{1}{2}$.

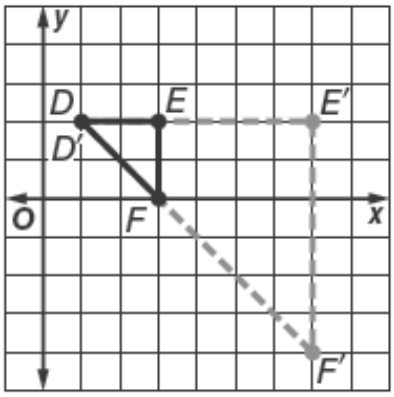
e) ضع تخمينًا حول أثر التمددٍ ذي المعامل الموجب في مساحة سطح المنشور وفي حجمه.

تضرب مساحة سطح الشكل الأصلي في r^2 . ويضرب حجم الشكل الأصلي في r^3 .

22) هندسة إحداثية: استعمل التمثيل البياني المجاور للإجابة عمّا يأتي:



a) مثّل بيانيًّا صورة $\triangle DEF$ الناتجة عن تمدد مركزه النقطة D ومعامله 3



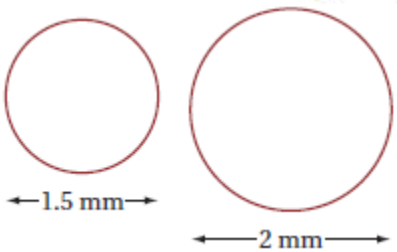
b) عبّر عن هذا التمدد بتركيب تحويلين هندسيين، أحدهما تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3

تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 3، إزاحة مقدارها وحدتان إلى اليسار و 4 وحدات إلى الأسفل.

23) **صحة:** استعمل فقرة الربط مع الحياة المجاورة للإجابة عن السؤالين الآتيين:

a) ينفخ الطبيب بالون القسطرة في الشريان التاجي للمريض مكبرًا البالون كما يتضح في الشكل المجاور.

أوجد معامل هذا التمدد.



معامل التمدد $= \frac{2}{1.5} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$

b) أوجد مساحة المقطع العرضي للبالون قبل النفخ وبعده .

قبل النفخ

نصف القطر $= \frac{1.5}{2} = 0.75$

مساحة الدائرة $= \pi r^2$

$= \pi(0.75)^2$

≈ 1.77

بعد النفخ

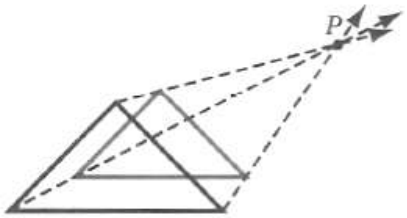
نصف القطر $= \frac{2}{2} = 1$

مساحة الدائرة $= = \pi(1)^2$

$\approx 3.14\ mm^2$

أُعطي في كلٍّ من السؤالين الآتيين الشكل الأصلي وصورته الناتجة عن تمدد مركزه النقطة P، عيّن موقع النقطة P، وأجد معامل مقياس التمدد

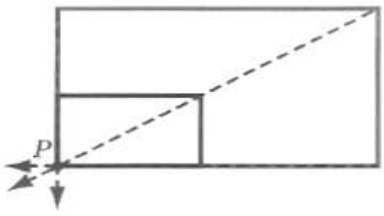
(24



أمد خطاً بين الرؤوس للصورة الاصلية و
الصورة بعد التمدد و يتلاقيا في النقطة p
الصورة بعد التمدد أصغر من الصورة الأصلية لذا
التمدد تصغير

معامل مقياس التمدد $= \frac{4}{5}$

(25



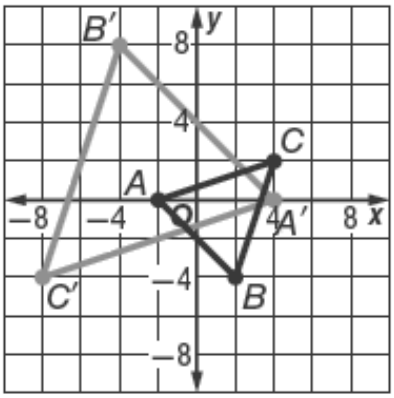
أمد خطاً بين الرؤوس للصورة الاصلية و
الصورة بعد التمدد و يتلاقيا في النقطة p
الصورة بعد التمدد أكبر من الصورة الأصلية لذا
التمدد تكبير

معامل مقياس التمدد $= \frac{11}{5}$

26) تمثيلات متعددة: في هذه المسألة ستستقصي التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

a) هندسيًّا: مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه $A(-2, 0)$,$B(2, -4)$, $C(4, 2)$. ثم ارسم صورته الناتجة عن تمددٍ مركزه نقط الأصل ومعامله -2.

$(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

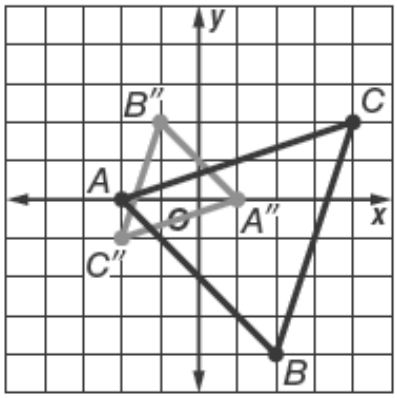


$A(-2,0) \rightarrow A'(4,0)$

$B(2,-4) \rightarrow B'(-4,8)$

$C(4,2) \rightarrow C'(-8,-4)$

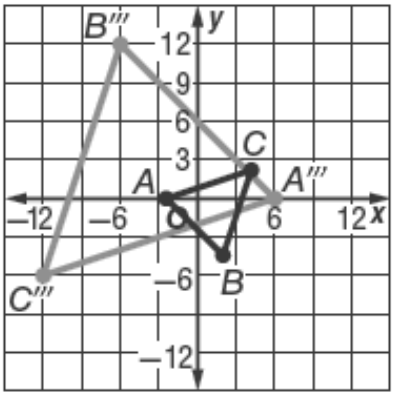
b) هندسيًّا: ارسم صورة المثلث الناتجة عن تمدد معامله $-\frac{1}{2}$ ، وآخر معامله -3



$A(-2,0) \rightarrow A''(1,0)$

$B(2,-4) \rightarrow B''(-1,2)$

$C(4,2) \rightarrow C''(-2,-1)$



$A(-2,0) \rightarrow A'''(6,0)$

$B(2,-4) \rightarrow B'''(-6,12)$

$C(4,2) \rightarrow C'''(-12,-6)$

c) **جدوليًّا:** اكتب إحداثيات صورة المثلث الناتجة عن كل تمدد في جدول.

الإحداثيات			
C	B	A	معامل التمدد
(−8, −4)	(−4, 8)	(4, 0)	−2
(−2, −1)	(−1, 2)	(1, 0)	$-\frac{1}{2}$
(−12, −6)	(−6, 12)	(6, 0)	−3

d) **لفظيًّا:** ضع تخمينًا حول قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب.

يضرب كل إحداثي في معامل التمدد السالب.

e) **تحليليًّا:** اكتب قاعدة التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله $-k$.

$$(x, y)(-kx, -ky)$$

f) **لفظيًّا:** عبّر عن التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله سالب بتحويل هندسي مركب.

يمكن وصف التمدد الذي مركزه نقطة الأصل ومعامله k– بأنه تركيب تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله k ودوران بزاوية 180° حول نقطة الأصل.

مسائل مهارات التفكير العليا:

27) اكتشف الخطأ: يحاول كلٌّ من متعب وسعود أن يصف تأثير القيمة السالبة لمعامل مقياس التمدد في صورة الشكل الرباعي $WXYZ$، فأيهما تفسيره صحيح؟ اشرح تبريرك.

سعود، لأن متعب استعمل معامل تمدد موجباً.

28) تحدَّ: أوجد معادلة صورة المستقيم $y = 4x - 2$ الناتجة عن تمدد مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5

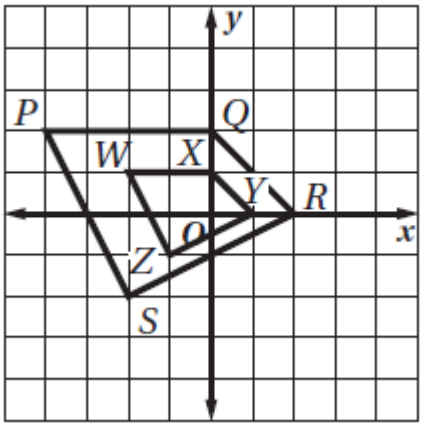
$$y = 4x - 3$$

29) اكتب: هل تحفظ التحويلات الهندسية جميعها التوازي والاستقامة ؟ اشرح إجابتك .

نعم، تتكون أشكال متطابقة نتيجة الانعكاس والإزاحة والدوران، مما يعني أن جميع الأضلاع المتوازية قبل التحويل الهندسي تبقي متوازية بعده، وأن النقاط الواقعة على استقامة واحدة قبل التحويل الهندسي تبقي على استقامة واحدة بعده. كما يحفظ التمدد التوازي والاستقامة لأن الأشكال الناتجة تكون مشابهة للأصل أي ان لها الشكل نفسه ولكن بنسب مختلفة.

تدريب على اختبار

32) ما معامل مقياس التمدد من الشكل $PQRS$ إلى الشكل $WXYZ$؟



الشكل WXYZ أصغر من الشكل PQRS

التمدد تصغير

المسافة بين النقطتين $Y(1,0)$ @$Z(-1,-1)$

$$YZ=\sqrt{(1+2)^2+(0+1)^2}=\sqrt{5}$$

المسافة بين النقطتين $R(2,0)$ @$S(-2,-2)$

$$RS=\sqrt{(2+2)^2+(0+2)^2}=2\sqrt{5}$$

معامل مقياس التمدد $\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$

33) يرسم توفيق نسخةً من لوحة فنية معروضة في متحف فني. إذا كان عرض اللوحة 3 ft، وطولها 6 ft، وقرر أن يستعمل معامل مقياس تمدد قدره 0.25، فما أبعاد ورقة الرسم بالبوصات المناسبة لإنجاز رسمه؟

A) 4 in × 8 in

B) 8 in × 16 in

C) 6 in × 12 in

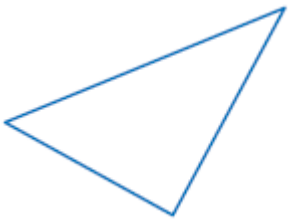
D) 10 in × 20 in

الاختيار الصحيح: D $10\text{in.}\times 20\text{in.}$

مراجعة تراكمية

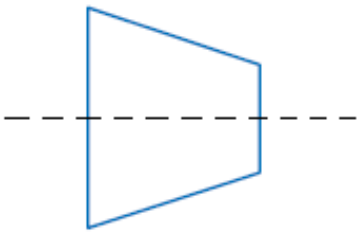
بيّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك فارسم محاور التماثل جميعها، وحدد عددها في كلٍّ ممَّا يأتي:

(34



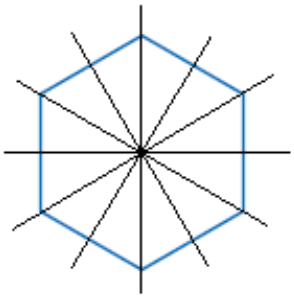
لا

(35



نعم، 1

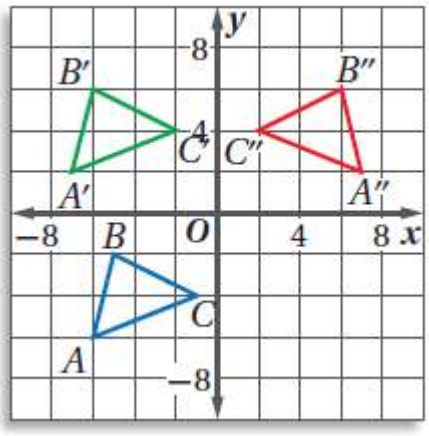
(36



نعم، 6

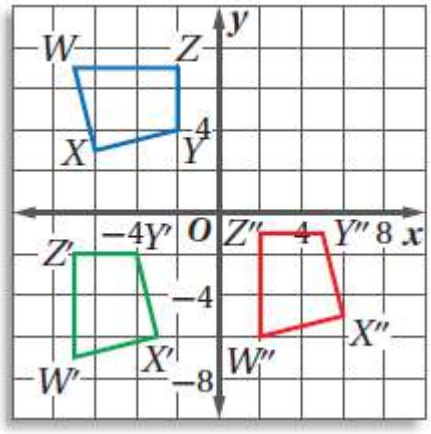
صِفِ التحويل الهندسي المركب الذي ينقل الشكل إلى صورته النهائية في كلٍّ من السؤالين الآتيين :

(37



إزاحة مقدارها وحدة واحدة إلى اليسار و8 وحدات إلى أعلى ثم انعكاس في المحور y.

(38



دوران بزاوية 90° حول نقطة الأصل وإزاحة مقدارها 9 وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأعلى.

استعد للدرس اللاحق

أوجد قيمة x في كلٍّ من الأسئلة الآتية:

39 $58.9 = 2x$

$\frac{58.9}{2} = \frac{2x}{2}$

$29.45 = x$

40 $\frac{108.6}{\pi} = x$

$\frac{108.6}{\pi} = x$

$34.57 \approx x$

41 $228.4 = \pi x$

$\frac{228.4}{\pi} = \frac{\pi x}{\pi}$

$72.7 \approx x$

42 $\frac{336.4}{x} = \pi$

$\frac{336.4}{\pi} = x$

$107.1 \approx x$

دليل الدراسة والمراجعة

اختبار المفردات

1) عند إجراء تحويل هندسي على شكل ما، ثم إجراء تحويل هندسي آخر على صورته، فإن هذه العملية تسمى (تحويلاً هندسيًّا مركبًا ، رتبة الدوران).

تحويلاً هندسياً مركباً

2) إذا طُوي شكل حول خطٍّ مستقيم، وانطبق نصفاه أحدهماعلى الآخر تمامًا، فإن خط الطي يسمى (محوِّر الانعكاس ، محور التماثل).

محور التماثل

3) التحويل الهندسي الذي يكبّر الشكل أو يصغّره بنسبة محددة هو (التمدد ، الدوران).

التمدد

4) يُطلق على عدد المرات التي ينطبق فيها الشكل على نفسه في أثناء تدويره من $0°$ إلى $360°$ اسم (مقدار التماثل ، رتبة التماثل).

رتبة التماثل

5) يبعد (محور الانعكاس ، مركز التمدد) المسافة نفسها عن كل نقطة في الشكل وصورتها.

محور الانعكاس

6) يكون الشكل (تحويلًا هندسيًّا مركبًا ، متماثلًا) إذا وجد انعكاس أو إزاحة أو دوران أو تركيب إزاحة وانعكاس ينتج عنه صورة منطبقة على الشكل نفسه.

متماثلاً

7) يمكن تمثيل (الإزاحة ، الدوران) بتركيب انعكاسين متتابعين حول مستقيمين متقاطعين.

الدوران

8) لتدوير نقطةٍ ما بزاوية ($90°$ ، $180°$) عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، اضرب الإحداثي y في -1، وبدّل الإحداثيين x , y.

90°

9) (التمدد ، الانعكاس) هو تحويل تطابق.

الانعكاس

10) يكون للشكل (محور تماثل ، تماثل دوراني) إذا كانت صورته الناتجة عن دوران حول مركزه بزاوية بين $0°$ و $360°$ هي الشكل نفسه.

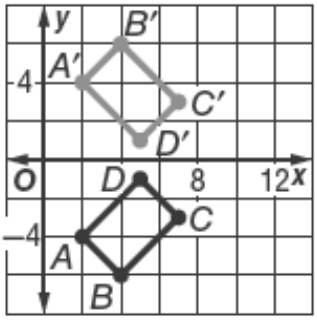
تماثل دوراني

مراجعة الدروس

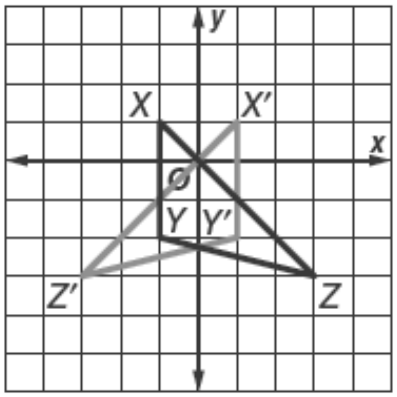
7-1 الانعكاس

مثِّل بيانيًّا كل شكل مما يأتي وصورته بالانعكاس المحدد.

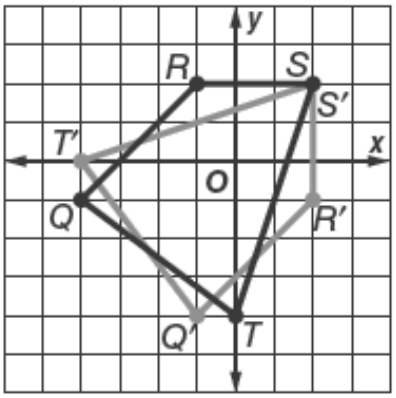
11) المستطيل $ABCD$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(2, -4), B(4, -6), C(7, -3), D(5, -1)$ ؛ الانعكاس حول المحور x .



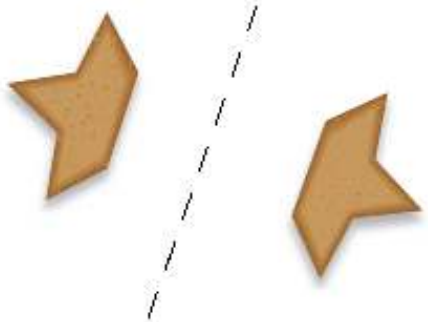
12) المثلث XYZ الذي إحداثيات رؤوسه:
$X(-1, 1), Y(-1, -2), Z(3, -3)$ ؛ الانعكاس حول المحور y .



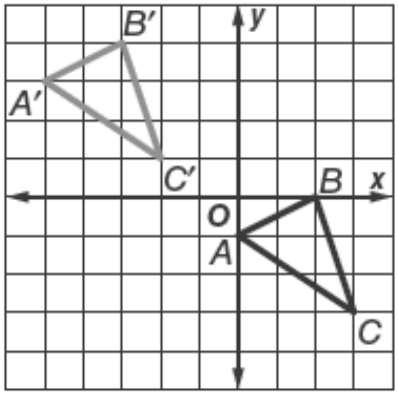
13) الشكل الرباعي $QRST$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$Q(-4, -1), R(-1, 2), S(2, 2), T(0, -4)$ ؛
بالانعكاس حول المستقيم $y = x$.



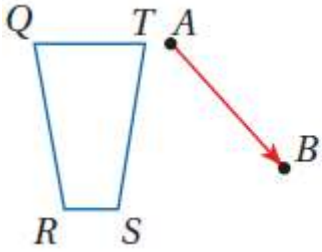
14) **فن:** يصنع عامر منحوتتين ليضعهما على جانبَي ممرٍّ في حديقة منزله، بحيث تكون إحداهما انعكاسًا للأخرى حول المستقيم الذي يقسم هذا الممر طوليًّا إلى نصفين. انسخ الشكل في دفترك، وارسم محور الانعكاس.

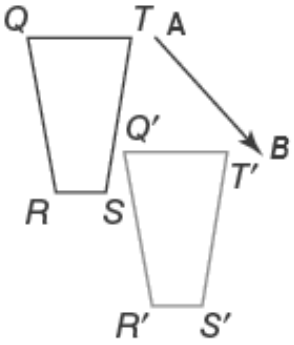


15) مثِّل بيانيًّا $\triangle ABC$ الذي إحداثيات رؤوسه:
$A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$، وارسم صورته الناتجة عن إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

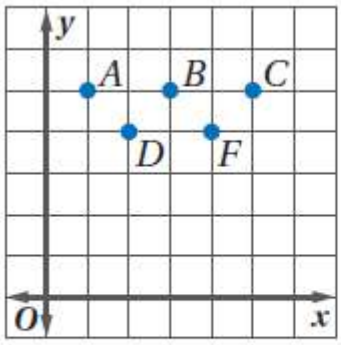


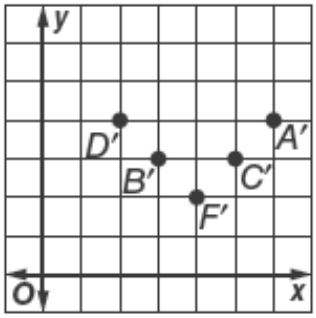
16) انقل إلى دفترك الشكل المجاور ثم ارسم صورة الشكل $QRST$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل A إلى B.





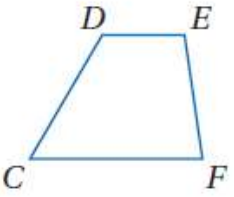
17) يمثل الشكل المجاور مواقع 5 لاعبين في ملعبٍ، تحرك كل من اللاعبين B, F, C وحدتين إلى أسفل، في حين تحرك اللاعب A خمس وحدات إلى اليمين ووحدة واحدة إلى أسفل. ارسم المواقع النهائية للاعبين .

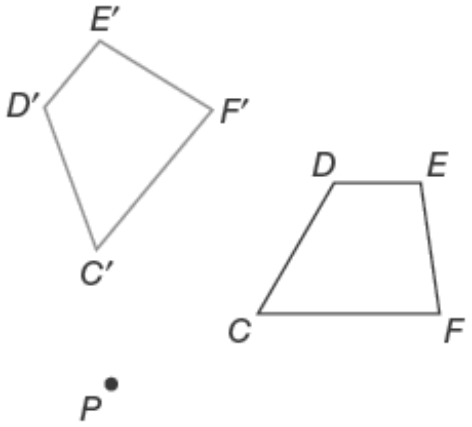




7-3 الدوران

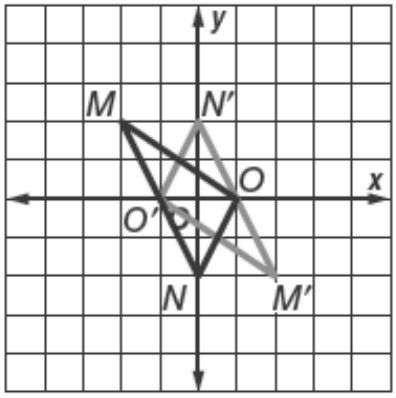
18) استعمل منقلةً ومسطرةً لرسم صورة $CDEF$ الناتجة عن دوران بزاوية $50°$ حول النقطة P.



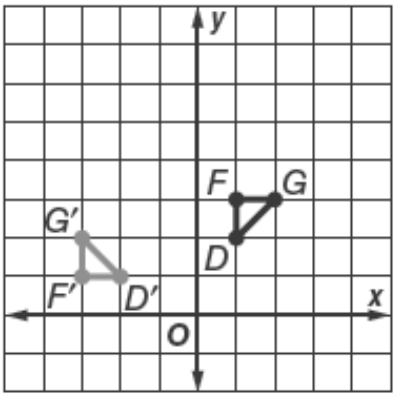


مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن الدوران بالزاوية المحددة حول نقطة الأصل في كلٍّ ممَّا يأتي:

19 $\triangle MNO$ الذي إحداثيات رؤوسه: $M(-2, 2), N(0, -2), O(1, 0)$؛ $180°$



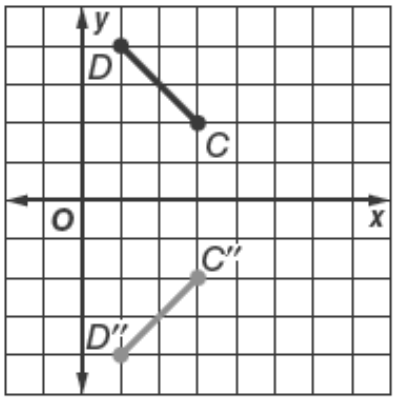
20 $\triangle DGF$ الذي إحداثيات رؤوسه: $D(1, 2), G(2, 3), F(1, 3)$؛ $90°$



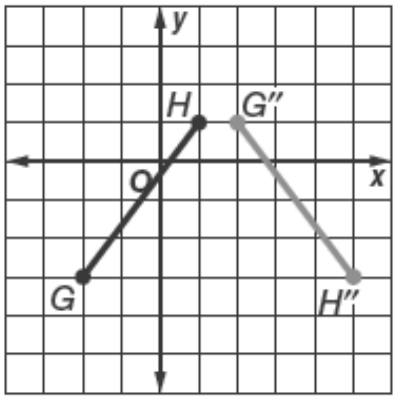
7-4 تركيب التحويلات الهندسية

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المركّب المحدد في كلٍّ ممَّا يأتي:

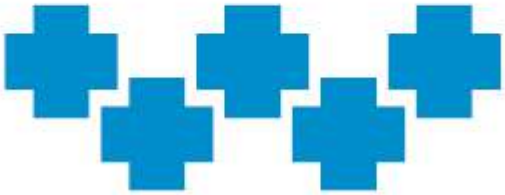
21) $\overline{CD}$ ، حيث $C(3, 2), D(1, 4)$ ، انعكاس حول المستقيم $y = x$، ثم دوران $270°$ حول نقطة الأصل.



22) $\overline{GH}$ ، حيث $H(1, 1), G(-2, -3)$ ، إزاحة مقدارها 4 وحدات إلى اليمين ووحدتان إلى أعلى، ثم انعكاس حول المحور x .



(23) **أنماط:** كوّن عبد السلام النمط الآتي لإطار لوحة، صِف تركيب التحويلات الهندسية الذي استعمله لتكوين هذا النمط.

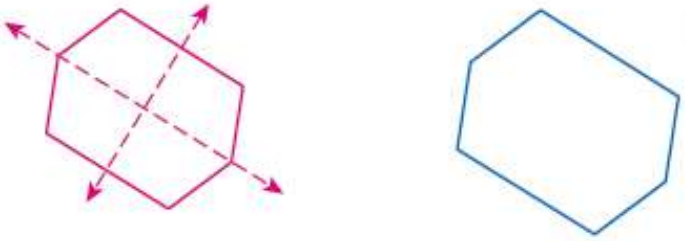


إزاحة إلى اليمين وإلى الاسفل ثم إزاحة للشكل الناتج إلى اليمين وإلى الأعلى.

7-5 التماثل

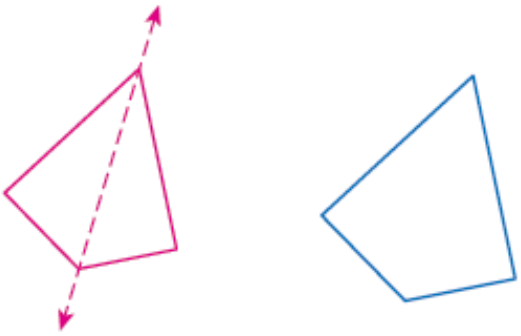
بيِّن ما إذا كان للشكل محور تماثل أم لا، وإذا كان كذلك، فارسم محاور التماثل جميعها، وحدّد عددها.

(24



نعم، 2

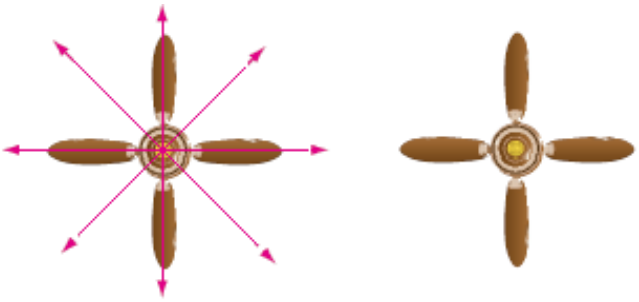
(25



نعم، 1

بيّن ما إذا كان للشكل تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيِّن مركز التماثل، وحدد رتبته ومقداره في كلٍّ ممَّا يأتي:

(26



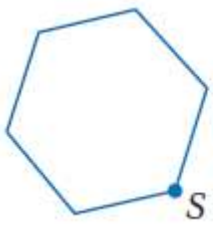
نعم، 90° , 4

(27

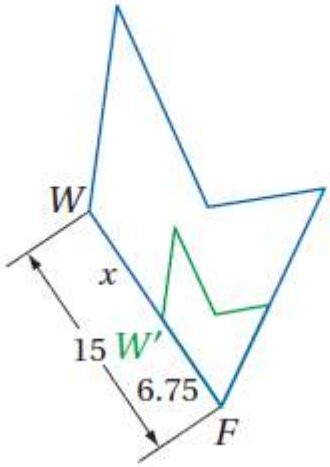
لا

7-6 التمدد

28) استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه S ومعامله $k = 1.25$.



29) حدد ما إذا كان التمدد من الشكل W إلى W' تكبيرًا أم تصغيرًا، ثم أوجد معامل مقياس التمدد وقيمة x.



تصغير، 0.45 , 8.25

30) **نوادٍ علمية :** استعمل أعضاء نادي الرياضيات جهاز العرض لرسم لوحة على الجدار، إذا كان عرض اللوحة الأصلية 6 in ، وعرض صورتها على الجدار 4 ft ، فما معامل التكبير؟

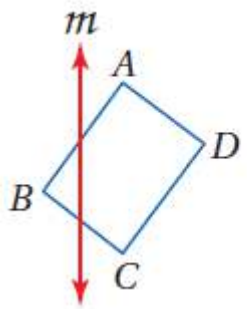
4 ft. = 48 in.

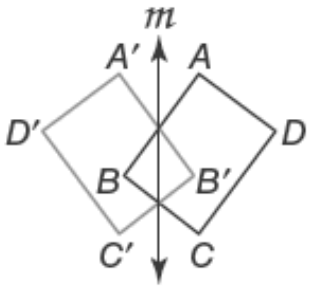
معامل التكبير $= \frac{48}{6} = 8$

* اختبار الفصل

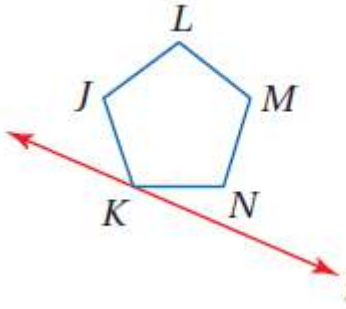
ارسم صورة كلٍّ من الشكلين الآتيين بالانعكاس حول المستقيم المُعطى:

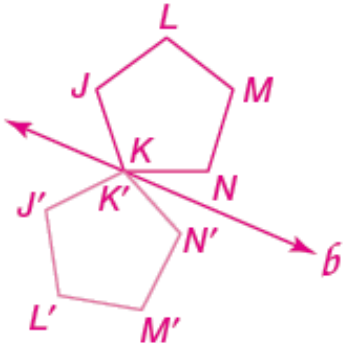
(1



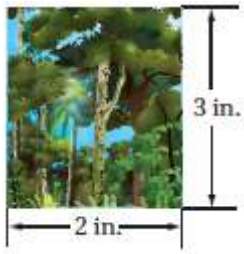


(2





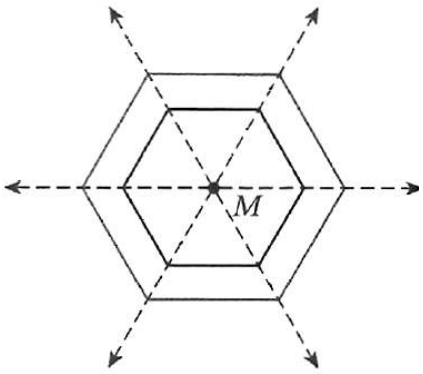
3) **حدائق:** يريد فؤاد أن يكبّر الصورة الآتية للحديقة؛ لتصبح أبعادها 4 in في 6 in ، مستعملًا آلة نسخ تكبر الصورة حتى 150% فقط وبنسب على شكل أعداد كلية، أوجد نسبتين على شكل عددين كليين يمكن استعمالهما لتكبير الصورة، بحيث تصبح أبعادها أقرب ما يمكن إلى 4 in في 6 in ، ولا تزيد عن ذلك.

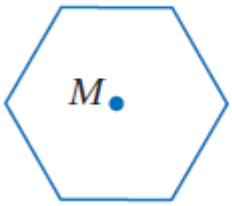


133% , 150%

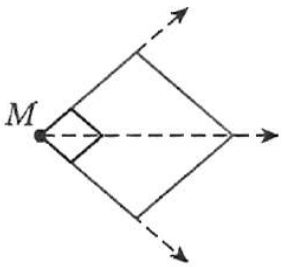
استعمل مسطرةً لرسم صورة الشكل الناتجة عن تمدد مركزه M ومعامله k المحدّد في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

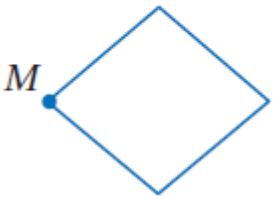
4) $k = 1.5$





5) $k = \frac{1}{3}$





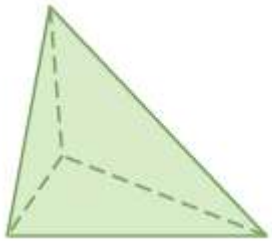
6) **مدينة الألعاب:** يركب أحمد في إحدى الألعاب التي تدور عكس اتجاه حركة عقارب الساعة حول مركزها $60°$ كل ثانيتين، فبعد كم ثانية يعود أحمد إلى النقطة التي انطلق منها؟

$$6 = \frac{360}{6}$$

$$2 \times 6 = 12 \text{ ثانية}$$

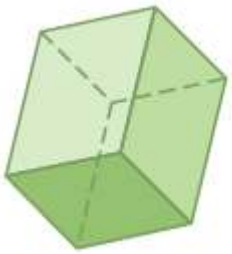
بيِّن ما إذا كان كلٌّ من الشكلين الآتيين متماثلًا حول مستوى أو حول محور أو كلاهما أو غير ذلك.

7)



غير ذلك

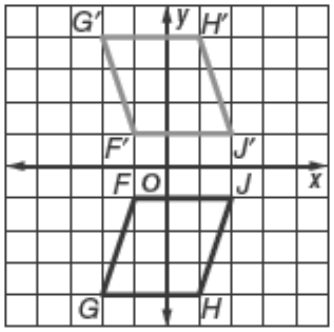
8)



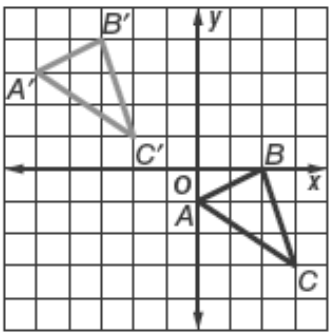
كلاهما

مثِّل بيانيًّا الشكل وصورته الناتجة عن التحويل الهندسي المحدّد في كلٍّ ممَّا يأتي

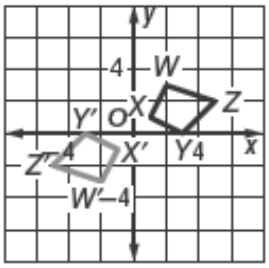
9) $\square FGHJ$ ، حيث: $F(-1, 4), G(4, 4), H(3, 1), J(-2, 1)$ ؛ انعكاس حول المحور x.



10) $\triangle ABC$ ، حيث: $A(0, -1), B(2, 0), C(3, -3)$ ؛ إزاحة مقدارها 5 وحدات إلى اليسار و4 وحدات إلى أعلى.

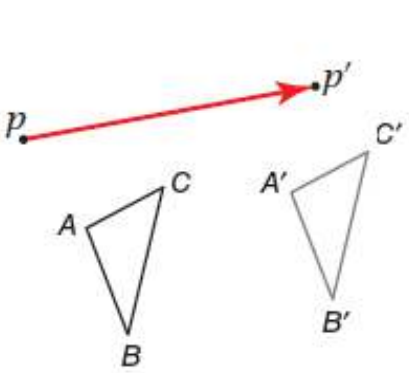


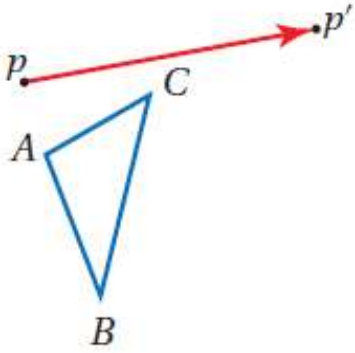
11) الشكل الرباعي $WXYZ$ ، حيث: $W(2,3), X(1,1), Y(3,0), Z(5,2)$؛ دوران بزاوية $180°$ حول نقطة الأصل.



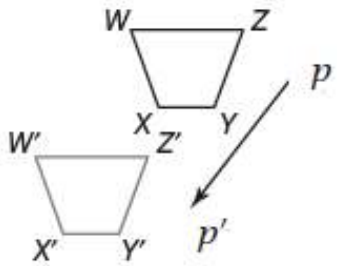
ارسم صورة الشكل الناتجة عن الإزاحة التي تنقل P إلى P' في كلٍّ من السؤالين الآتيين:

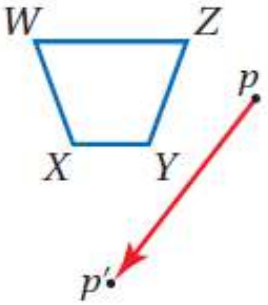
12)



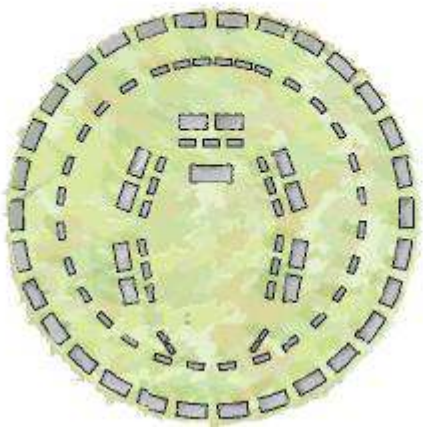


13)

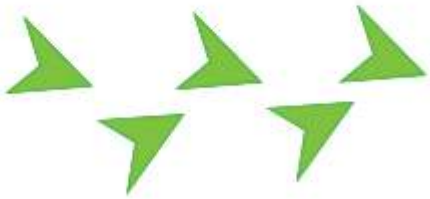




14) آثار: يبيّن الشكل الآتي مخطط موقع أثري، فما رتبة تماثل الحلقة الخارجية؟ وما مقداره؟



15) **اختيار من متعدد:** ما التحويل الهندسي أو تركيب التحويلات الهندسية الذي يمثِّله الشكل الآتي؟



A تمدد

B إزاحة ثم انعكاس

C دوران

D إزاحة

اختيار من متعدد: B إزاحة ثم انعكاس

الإعداد للاختبارات

*

تمارين ومسائل

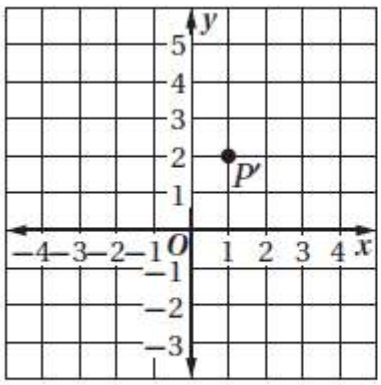
حُلّ كلًّا من المسائل الآتية، وبيّن خطوات الحل، وستصحح الإجابات وتحدد الدرجة المُستحقة باستعمال سُلَّم تقدير الإجابة القصيرة الوارد في الصفحة السابقة.

1) حطّت حشرة طائرة على شبكة إحداثية ثم قفزت عبر المحور x، ثم قفزت عبر المحور y على هيئة انعكاسين متعاقبين، ثم سارت 9 وحدات إلى اليمين و 4 وحدات إلى أسفل، فكان موقعها النهائي عند النقطة $(-1, 4)$، فما إحداثيات النقطة التي حطّت عليها الحشرة في البداية؟

أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

النهاية عند النقطة $(-1, 4)$ ، تحرك 4 وحدات صعودا و 9 وحدات يساراً الى النقطة $(-5, 3)$. انعكاس النقطة $(-5, 3)$ حول المحور الصادي هو $(5, 3)$. ثم انعكاسا للنقطة $(-3, 5)$. ولذلك، فإن الحشرة حطت في البداية على $(-3, 5)$

2) في الشبكة الإحداثية الآتية تظهر الصورة النهائية لنقطةٍ تم تدويرها بزاوية $90°$ في اتجاه حركة عقارب الساعة حول نقطة الأصل، ثم نُفّذ عليها تمدد معامله 2، ثم أُزيحت 7 وحدات إلى اليمين. ماذا كانت إحداثيات الموقع الأصلي لهذه النقطة؟



أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

إحداثيات النقطة P' هي $(1, 2)$.

تحرك 7 وحدات إلى اليسار، الإحداثيات هي $(-6, 2)$. تمدد بمعمل مقياسه $\frac{1}{2}$ ، الإحداثيات ه ي $(-3, 1)$. دوران النقطة $(-3, 1)$ $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل للحصول على الموقع الاول. لتدوير نقطة $90°$ عكس اتجاه عقارب الساعة حول نقطة الأصل، بضرب الاحداثي الصادي في -1 ثم مبادلة الاحداثيات السيني و الصادي. ولذلك، فإن وضع البداية هو $(-1, -3)$

3) إذا كانت $A''(2, -2), B''(-5, -4)$ إحداثيات طرفي $\overline{A''B''}$ تمثل الصورة النهائية لِـ $\overline{AB}$، بعد إجراء انعكاس لها حول المحور x، ثم إزاحة وفقًا للقاعدة: $(x, y) \rightarrow (x - 1, y + 2)$ فأيٌّ ممّا يأتي يمثل إحداثيَّي نقطة منتصف $\overline{AB}$.

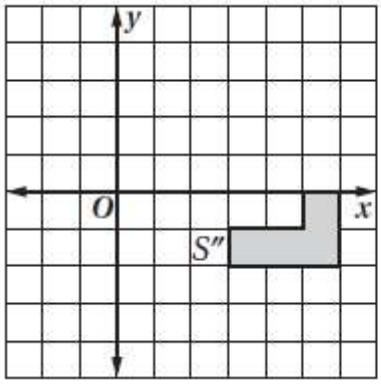
A $\left(\frac{-3}{2}, -3\right)$ C $\left(-\frac{1}{2}, -5\right)$

B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$ D $(-1, 0)$

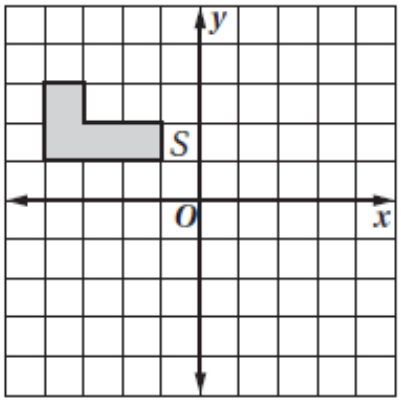
أبدأ من النتيجة النهائية، و اتبع الخطوات بترتيب عكسي

الإجابة الصحيحة: B $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$

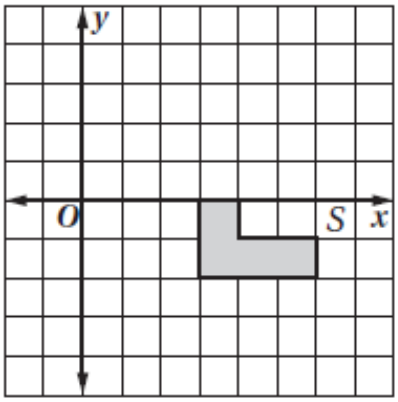
4) الشكل S'' يمثل الصورة النهائية الناتجة للشكل S، بعد إجراء التحويلات الهندسية التالية عليه: انعكاس حول المحور y، ثم انسحاب 3 وحدات إلى أسفل ووحدتين إلى اليمين.



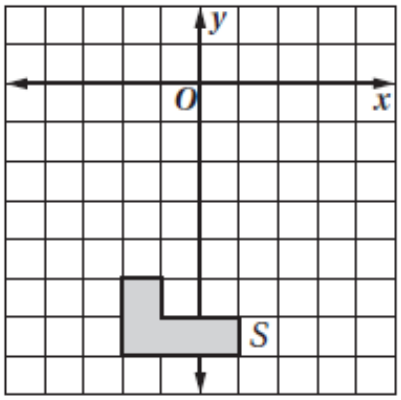
A



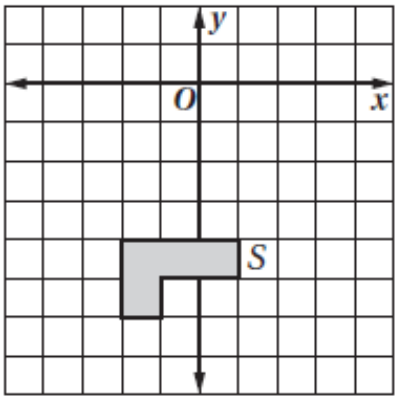
C



B



D



* اختبار تراكمي

أسئلة الاختيار من متعدد

اقرأ كل سؤالٍ ممَّا يأتي، ثم اكتب رمز الإجابة الصائبة:

1) إحداثيات النقطة N هي $(-3, 4)$، ما إحداثيات صورتها الناتجة عن الانعكاس حول المحور y ؟

A $N'(-3, 4)$

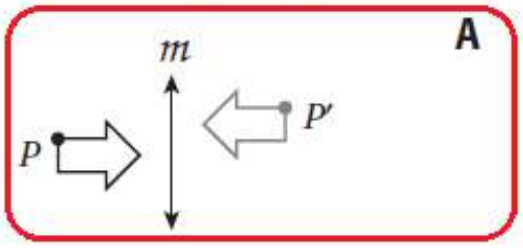
B $N'(-4, 3)$

C $N'(4, 3)$

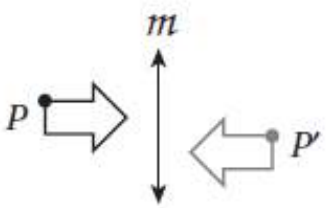
D $N'(-4, -3)$

2) أيُّ الأشكال الآتية يبيّن نتيجة انعكاس الشكل p حول المستقيم m ثم إزاحة إلى أعلى؟

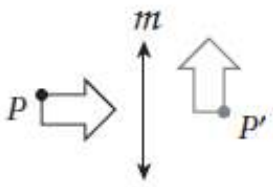
A



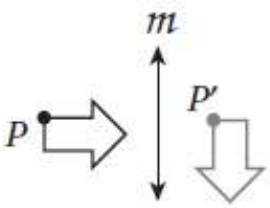
B



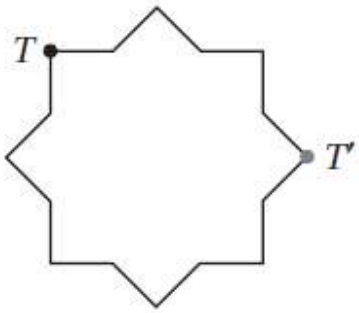
C



D



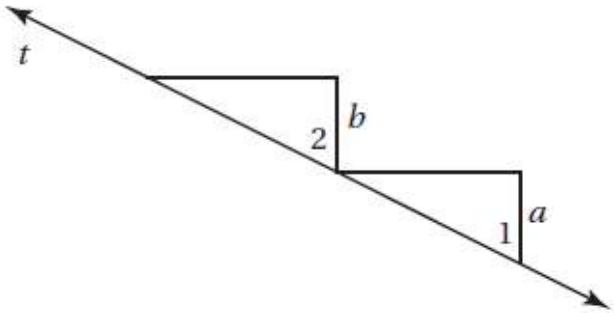
3) ما الزاوية التي تم تدوير الشكل الآتي بها حول مركز تماثله حتى تنتقل النقطة T إلى النقطة T' ؟



A $90°$ **C** $135°$

B $120°$ **D** $225°$

4) المعطيات: $a \parallel b$



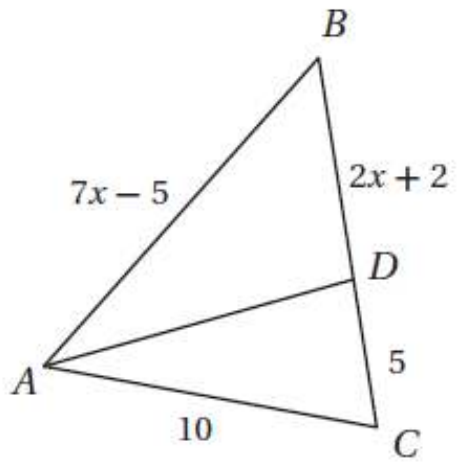
أيُّ العبارات الآتية تبرّر استنتاج أن $\angle 2 \cong \angle 1$؟

A إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين خارجيًّا متطابقتان .

B إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتبادلتين داخليًّا متطابقتان.

C إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزوايتين المتناظرتين متطابقتان .

D إذا كان $a \parallel b$ وقطعهما المستقيم t ، فإن الزاويتين المتقابلتين بالرأس متطابقتان .



5) في $\triangle ABC$، $\overline{AD}$ تنصف $\angle CAB$.
ماقيمة x ؟

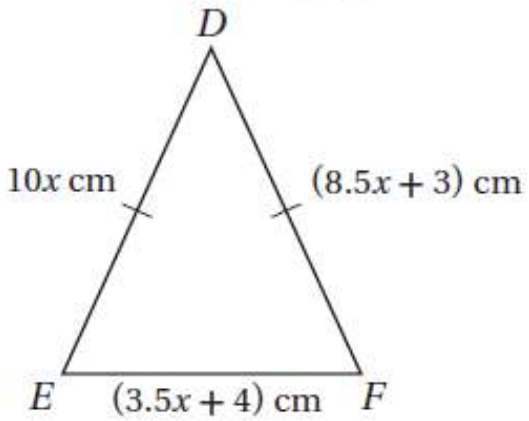
A 1.5

B 5

C 1.4

D 3

6) أيٌّ ممَّا يأتي هو طول ضلع في المثلث المتطابق الضلعين DEF؟



A 2 cm

B 8 cm

C 9 cm

D 11 cm

7) أي المضلعات الآتية فيه زوجان فقط من الأضلاع المتتالية المتطابقة؟

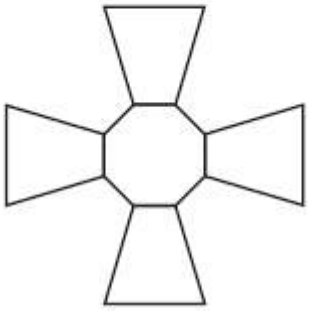
A شكل الطائرة الورقية　　**C** المعين

B متوازي الأضلاع　　**D** شبه المنحرف

أسئلة ذات إجابات قصيرة

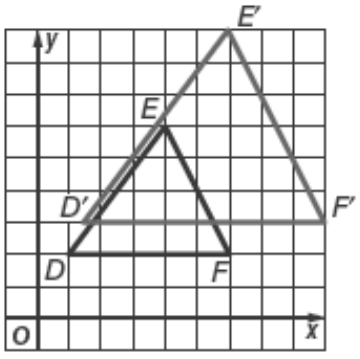
اكتب إجابتك في ورقة الإجابة.

8) بيّن ما إذا كان للشكل الآتي تماثل دوراني أم لا، وإذا كان كذلك، فعيّن مركز التماثل وحدد رتبته ومقداره .



نعم، الرتبة 4، المقدار 90

9) مثّل بيانيًّا الصورة الناتجة عن عمل تمدد للشكل الآتي مركزه نقطة الأصل ومعامله 1.5



10) أكمل العبارة الآتية:

"بحسب نظرية منصف الزاوية، إذا وقعت نقطة على منصف زاوية، فإنها ..... .

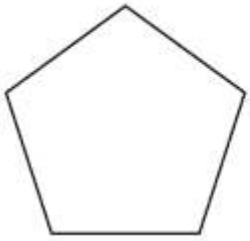
تكون على بعدين متساويين عن ضلعي الزاوية.

11) ما صورة النقطة $A(-4, 3)$ الناتجة عن الإزاحة التي تنقل $B(-1, -2)$ إلى $B'(4, -3)$ ؟

$$(x, y) \rightarrow (x+5, y-1)$$

$$A'(1, 2)$$

12) ما قياس الزاوية الداخلية للمضلع الخماسي المنتظم؟



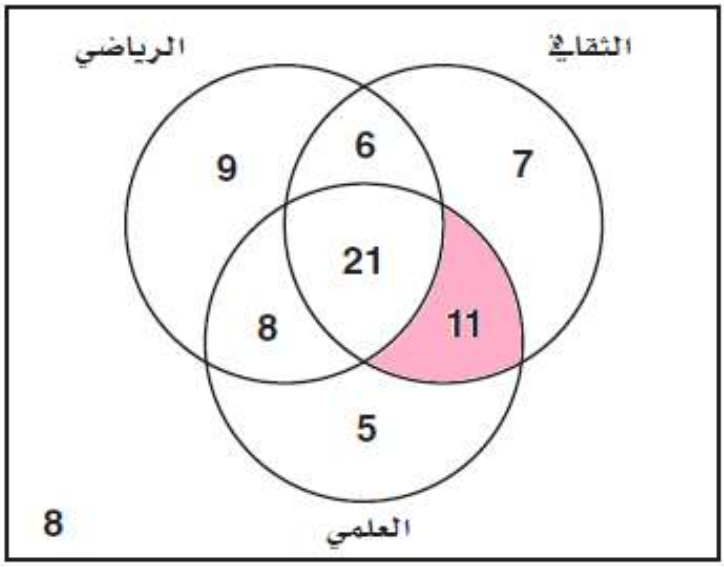
$$\frac{(n-2)\times 180}{n}$$

$$\frac{(5-2)\times 180}{5}$$

$$\frac{3\times \overset{36}{\cancel{180}}}{\cancel{5}}$$

قياس الزاوية $= 108^\circ$

13) سُئل 57 طالبًا عن النشاطات المدرسية التي يشاركون فيها، ومُثِّلت النتائج بشكل ڤـن الآتي:



ما عدد الطلاب الذين يشاركون في النشاطين (الثقافي والعلمي)، ولا يشاركون في النشاط الرياضي؟

11 طالب

أسئلة ذات إجابات مطولة

اكتب إجابتك في ورقة الإجابة مبينًا خطوات الحل.

14) يدرس أحمد الهندسة المعمارية، وقد رسم مخططًا لمتنزه رؤوسه: $Q(2, 2), R(-2, 4), S(-3, -3), T(3, -4)$، ولكنه لاحظ أن اتجاه رسمه غير صحيح، حيث ظهر الشمال في أسفل الرسم بدلًا من أن يكون في أعلى الرسم.

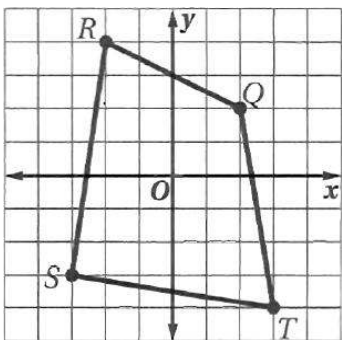
a) ما التحويل الذي يستطيع أحمد تطبيقه على مخططه ليجعل الشمال في أعلى الرسم؟

على أحمد أن يقوم بتدوير الشكل QRST بزاوية قياسها 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة ليصبح الشمال في الأعلى والمحافظة على اتجاه النقاط.

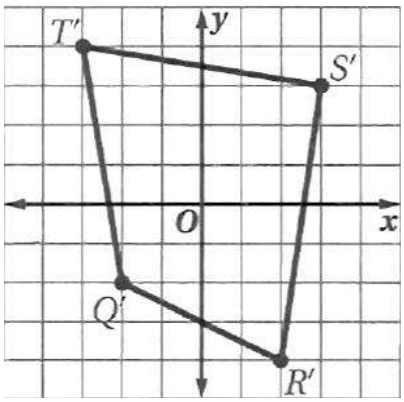
b) هل هذا هو التحويل الوحيد الذي يجعل الشمال في أعلى الرسم؟ وضح إجابتك.

سيضع الانعكاس الشمال أعلى الرسم لكنه سيغير اتجاه النقاط، لذا لا يصلح إلى الدوران.

c) ارسم الشكل الرباعي $QRST$، واكتب إحداثيات رؤوسه.



d) ارسم الصورة $Q'R'S'T'$ بعد التحويل، واكتب إحداثيات رؤوسها.



e) فسِّر كيف يمكن لأحمد أن يعرف إحداثيات رؤوس الصورة من دون استعمال المستوى الإحداثي.

لإيجاد إحداثي كل نقطة بعد دوران 180° عكس اتجاه حركة عقارب الساعة، يمكن استعمال القاعدة التالية:

$(x, y) \rightarrow (-x, -y)$، لذا، فالنقطة $Q(2, 2)$ تصبح $Q'(-2, -2)$، والنقطة $R(-2, 4)$ تصبح $R'(2, -4)$، والنقطة $S(-3, -3)$ تصبح $S'(3, 3)$، والنقطة $T(3, -4)$ تصبح $T'(-3, 4)$.