بنك أسئلة المتتاليات

دورة 2021

مع الحلول

بنك أسئلة المتتاليات

دورة 2021

مع الحلول

إعداد :

أ وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038

أ زياد داوود سلمية 0936834286

أ أحمد الشيخ عيسى الرقة 0998024183

م . مروان بجور حمص 0930170828

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 1 :

لتكن لدينا المتتالية $u_n = 3n+1$ والمطلوب :

❶ أثبت أن المتتالية حسابية ثم أوجد حدها الأول وأساسها

❷ احسب $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_8$

الحل : $u_{n+1} = 3(n+1)+1 = 3n+4 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 3n+4-3n-1 = 3$

فالمتتالية $u_n = 3n+1$ حسابية

$u_0 = 1 \quad , \quad r = 3 \quad , \quad u_3 = 3(3)+1 = 10 \quad , \quad u_8 = 3(8)+1 = 25$

عدد الحدود $n = 8-3+1 = 6$ بالتالي : $S = \frac{n}{2}(u_3+u_8) = \frac{6}{2}[10+25] = 105$

التمرين 2 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية حسابية تحقق $u_3 = -5 \,,\ u_{15} = 31$

عين $r \,, u_{25} \,, u_n$ بدلالة n ثم احسب $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{25}$

الحل :

$$u_m = u_n + (m-n)r \Rightarrow u_{15} = u_3 + (15-3)r \Rightarrow 31 = -5+12r$$

$$\Rightarrow \quad 12r = 36 \Rightarrow r = 3$$

$$u_{25} = u_{15} + 3(25-15) = 31+30 = 61$$

$$u_n = u_{15} + 3(n-15) = 31+3n-45 \Rightarrow u_n = 3n-14$$

عدد الحدود $n = 25-3+1 = 23$

$$S = \frac{n}{2}(u_3+u_{25}) = \frac{23}{2}[-5+61] = 23(28) = 644$$

التمرين 3 :

لتكن لدينا المتتالية $u_n = \frac{2}{3^n}$ والمطلوب

❶ أثبت أن المتتالية هندسية ثم أوجد أساسها و حدها الأول

❷ احسب $S_1 = u_1 + \cdots + u_4$, $S_2 = u_2 + u_4 + \cdots + u_{10}$

الحل :

$$u_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} \Longrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2}{3^{n+1}}}{\frac{2}{3^n}} = \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{3^n}{3\times 3^n} = \frac{1}{3} \Longrightarrow$$

المتتالية $u_n = \frac{2}{3^n}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$ و $u_0 = 2$ و $u_1 = \frac{2}{3}$ و $n = 4 - 1 + 1 = 4$

$$S_1 = u_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^4}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{1-\frac{1}{81}}{\frac{2}{3}}\right) = \frac{80}{81}$$

نلاحظ ان S_2 هو مجموع حدود متوالية لمتتالية هندسية جديدة

نفرض المتتالية $u_{2n} = v_n$ فيكون

$$S_2 = v_1 + v_2 + \cdots + v_5\,, \qquad S_2 = v_1 \times \frac{1-q'^n}{1-q'}$$

$$v_1 = u_2 = \frac{2}{3^2} = \frac{2}{9}\ , v_2 = u_4 == \frac{2}{3^4} = \frac{2}{81}$$

$$q' = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{81}\times\frac{9}{2} = \frac{1}{9}$$

$$S_2 = \frac{2}{9}\frac{\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{\frac{8}{9}}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)$$

طريقة ثانية

نلاحظ ان S_2 هو مجموع حدود متوالية لمتتالية هندسية جديدة اساسها $q' = q^2 = \frac{1}{9}$ وعدد حدودها

$n = \frac{10-2+2}{2} = 5$ وبالتالي $S_2 = u_2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{1-\frac{1}{9}}\right) = \frac{2}{9}\left(\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^5}{\frac{8}{9}}\right) = \frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{9}\right)^5\right)$

التمرين 4 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $u_3 = 6$ و $u_6 = 48$ عين أساساها q وعين u_n بدلالة n

ثم احسب $S = u_2 + u_3 + \cdots + u_9$

الحل :

$$u_m = u_n\,.\,q^{m-n} \Longrightarrow u_6 = u_3.\,q^{6-3} \Longrightarrow 48 = 6(q^3) \Longrightarrow q^3 = 8 \Longrightarrow q = 2$$

$$u_n = u_3.\,q^{n-3} \Longrightarrow u_n = 6(2^{n-3}) = 6(2^n)(2^{-3}) = \frac{6}{8}(2^n) \Longrightarrow u_n = \frac{3}{4}(2^n)$$

$u_2 = \frac{3}{4}(2^2) = 3$, عدد الحدود $n = 9 - 2 + 1 = 8$

$$S = u_2\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 3\times\frac{1-2^8}{1-2} = -3(1-256) = 765$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 5 : دورة 2018 الثانية

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية فيها $q = 2$ $u_0 = 1$ احسب u_3 ثم أحسب المجموع
$S = u_3 + u_4 + u_5 + u_6 + u_7$

الحل :

$$u_m = u_n \cdot q^{m-n} \Rightarrow u_3 = u_0 . q^{3-0} \Rightarrow u_3 = 1(2)^3 \Rightarrow u_3 = 8$$

عدد الحدود $n = 5$

$$S = u_3\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 8 \times \frac{1-2^5}{1-2} = -8(1-32) = 248$$

التمرين 6 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق : $u_n = \frac{n-1}{n}$ والمطلوب :

❶ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماما.

❷ أثبت أن $0 \leq u_n < 1$ ثم استنتج تقارب المتتالية واحسب نهايتها

❸ جد عددا طبيعيا n_0 يجعل $u_n \in]\,0.99\,,1.01\,[$ عند كل n أكبر تماما من n_0

الحل :

❶ $u_{n+1} = \frac{n}{n+1} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+1} - \frac{n-1}{n} = \frac{n^2-n^2+1}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$ والمتتالية متزايدة تماما

❷ $n \geq 1 \Rightarrow n-1 \geq 0 \Rightarrow \frac{n-1}{n} \geq 0 \Rightarrow u_n \geq 0$ ، $u_n - 1 = \frac{n-1}{n} - 1 = \frac{-1}{n} < 0 \Rightarrow u_n < 1$

بالتالي $0 \leq u_n < 1$ بما أن المتتالية متزايدة ومحدودة من الاعلى فهي متقاربة

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1$$

❸ $|u_n - 1| < 0.01 \Rightarrow \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{n-1-n}{n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow \left|\frac{-1}{n}\right| < \frac{1}{100} \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{100} \Rightarrow n > 100$$

وبالتالي يمكن ان نختار $n_0 \geq 100$ يجعل $u_n \in]\,0.99\,,1.01\,[$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 7 : دورة 2019 الثانية

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي: $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ و المطلوب:

❶ أدرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❷ أثبت أنّ العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$ ثم حدد عدداً طبيعياً n_0 يحقق أياً كان $n \geq n_0$ كان u_n في المجال $]1.9, 2.1[$

الحل :

❶ بفرض $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ حيث $u_n = f(n)$

$f'(x) = \frac{2x+2-2x+1}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

❷ $u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1-2n-2}{n+1} = \frac{-3}{n+1} < 0 \Rightarrow u_n < 2$

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 2$

$$|u_n - 2| < 0.1 \Rightarrow \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| < \frac{1}{10} \Rightarrow \left|\frac{-3}{n+1}\right| < \frac{1}{10}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{n+1}{3} > 10 \Rightarrow n+1 > 30 \Rightarrow n > 29$$

وبالتالي يمكن ان نختار $n_0 \geq 29$ يجعل $u_n \in]\,0.99\,,1.01\,[$

التمرين 8 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ معرفة وفق $u_n = \frac{n^3}{n!}$

❶ أحسب حدودها الثلاثة الأولى

❷ أثبت أن $n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$ أيا يكن $n \geq 4$

❸ استنتج نهاية $(u_n)_{n\geq 1}$

الحل :

❶ $u_n = \frac{n^3}{n!} \Rightarrow u_1 = 1\,, u_2 = 4\,, u_3 = \frac{9}{2}$

❷ لنفرض القضية $E(n): n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$

لنبرهن صحة $E(4)$ $\quad 4! \geq 4\times 3\times 2\times 1$ والقضية صحيحة

لنفرض صحة $E(n): n! \geq n(n-1)(n-2)(n-3)$

و لنبرهن صحة $E(n+1): (n+1)! \geq (n+1)(n)(n-1)(n-2)$

$$(n+1)! = (n+1)\times n! \Rightarrow (n+1)! \geq (n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$$
$$\geq (n+1)n(n-1)(n-2)$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 4$

❸ $u_n = \frac{n^3}{n!} \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n^3}{n(n-1)(n-2)(n-3)}\right) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ بالتالي حسب الاحاطة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية | زياد داوود 0936834268 سلمية | أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة | مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 9 :

ليكن عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

❶ أوجد عددين حقيقيين b و a يحققان عند كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1}$

❷ ليكن، في حالة عدد طبيعي n ،

$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. عبّر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

الحل :

$$①\, u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{a}{2n-1} + \frac{b}{2n+1} = \frac{(2a+2b)n+a-b}{(2n-1)(2n+1)}$$

بما أنّ المقامات متساوية، بمطابقة البسوط:

$$\begin{aligned} a-b&=1 \\ a+b&=0 \end{aligned} \quad a = \frac{1}{2} \quad \& \quad b = -\frac{1}{2} \Rightarrow u_n = \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n$$

$$= -\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ -\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \ -\frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n+2}$$

$$S_n = -\frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n = -\frac{1}{2} + 0 = -\frac{1}{2}$$

التمرين 10 :

a, b, c ثلاث حدود متعاقبة في متتالية هندسية متزايدة تحقق :

$a + 3b + 2c = 30$ ، $a + b + c = 14$ أوجد كل من a, b, c

الحل :

بما أن a, b, c ثلاث حدود متعاقبة في متتالية هندسية فإن : $b^2 = ac$ وبالتالي :

$$a+b+c = 14 \ (1) \qquad a+3b+2c = 30 \ (2) \qquad b^2 = ac \ (3)$$

بطرح (1) من (2) نجد : $2b + c = 16 \Rightarrow c = -2b + 16$

نضرب (1) بـ (-2) ثم نجمعها مع (2) نجد : $-a + b = 2 \Rightarrow a = b - 2$

نعوض في المعادلة (3) نجد :

$$b^2 = (b-2)(-2b+16) \Rightarrow b^2 = -2b^2 + 16b + 4b - 32 \Rightarrow$$

$$3b^2 - 20b + 32 = 0 \Rightarrow \Delta = 400 - 4\times 3\times(32) = 400 - 384$$

$$\Rightarrow \Delta = 16 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 4 \Rightarrow b_1 = \frac{20+4}{2\times 3} = \frac{24}{6} = 4 \Rightarrow a = 2\,, \quad c = 8$$

$$b_2 = \frac{20-4}{2\times 3} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3} \quad , \quad c = \frac{32}{3}$$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 11 :

a,b,c ثلاث حدود متعاقبة في متتالية هندسية أساسها q $(a\neq 0)$ أحسب q :

إذا علمت أن $\frac{c}{18}$, $\frac{b}{4}$, a ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية

الحل :

بما أن a,b,c ثلاث حدود متعاقبة في متتالية هندسية أساسها q فإن : $b=aq \quad ,c=aq^2$

بما أن $\frac{c}{18}$, $\frac{b}{4}$, a ثلاث حدود متعاقبة من متتالية حسابية فإن :

$$a+\frac{c}{18}=2\left(\frac{b}{4}\right)\Rightarrow 18a+c-9b=0\Rightarrow 18a+aq^2-9aq=0\Rightarrow$$
$$q^2-9q+18=0\Rightarrow (q-6)(q-3)=0\Rightarrow q=6\,,q=3$$

التمرين 12 : دورة 2017 الثانية (معدل)

❶ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$

a . أثبت أنّ $u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

b . أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة

c . أثبت أن $0\leq u_n\leq 1$ واستنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها

❷ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ معرّفة عند كل $n\geq 1$ وفق

$$v_n=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

a . استفدْ من عبارة u_n بصيغتيها الواردتين لاستنتاج عبارة بسيطة للحد v_n بدلالة n

b . استنتج قيمة المجموع $S=\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

c . استنتج نهاية المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$

الحل :

❶

a . نضرب ونقسّم بالمرافق:

$$u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

b . $$u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\quad\Rightarrow u_{n+1}=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}\quad\Rightarrow$$
$$\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}>\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\Rightarrow u_{n+1}<u_n$$

والمتتالية متناقصة

c . $$\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\geq 0\Rightarrow u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\geq 0\qquad ①$$

② $n \geq 0 \Rightarrow n+1 \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{n+1}+\sqrt{n} \geq 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq 1$

من ① و ② نجد $0 \leq u_n \leq 1$

المتتالية متناقصة ومحدودة من الادنى فهي متقاربة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$

❷ a.

$$v_n = 1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

$$v_n = 1 + \sqrt{2} - 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n-1} - \sqrt{n-2} + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} \Rightarrow v_n = \sqrt{n}$$

b. بالمقارنة بين صيغة v_n و صيغة S ومن الصيغة الأخيرة للحد v_n نجد

$$S = \left(1 + \frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}\right) - 1 = \sqrt{100} - 1 = 9$$

c. و أنّ : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

التمرين 13 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_n = \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n$

❶ جد عدداً طبيعياً n_0 يحقق $u_n \geq 9^n$ عندما $n > n_0$

❷ استنتج نهاية u_n

الحل :

$$u_n \geq 9^n \Rightarrow \left(\frac{n}{2} - 1\right)^n \geq 9^n \Rightarrow \frac{n}{2} - 1 \geq 9 \Rightarrow \frac{n}{2} \geq 10 \Rightarrow n \geq 20$$

لدينا $u_n \geq 9^n$ وبما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} 9^n = +\infty$ فإنه حسب المقارنة $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

التمرين 14 : دورة 2018 الأولى

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفتان وفق:

$u_n = 5 - \frac{1}{n}$ ، $v_n = 5 + \frac{1}{n^2}$ والمطلوب :

❶ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

❷ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة .

❸ هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ ، $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

الحل :

❶ بفرض $f(x) = 5 - \frac{1}{x}$ حيث $u_n = f(n)$ بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

❷ بفرض $g(x) = 5 + \frac{1}{x^2}$ حيث $v_n = g(n)$ بالتالي $g'(x) = -\frac{2}{x^3} < 0$

والتابع متناقص تماما وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما

❸ $\lim\limits_{x\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$

والمتتاليتان متجاورتان

التمرين 15 : النموذج الوزاري الخامس

التمرين الأوّل:

لتكن المتتالية $u_n = 4n + 1$ أثبت أن المتتالية حسابية وعين أساسها وأحسب $u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$

الحل:

$$u_{n+1} = 4n + 5 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 4$$

وهي متتالية حسابيّة أساسها $r = 4$ وحدّها الأوّل $u_0 = 1$

حد $n = 10 - 0 + 1 = 11$ $\qquad S = \frac{n(a+l)}{2}$

$$l = u_{10} = 41 \quad \& \quad a = u_0 = 1$$

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{10} = \frac{11.(1+41)}{2} = 11 \times 21 = 231$$

التمرين الثاني:

لتكن المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و$(y_n)_{n\geq0}$ المعرّفتين وفق

$$y_n = \frac{4n+1}{n+2} \quad \text{و} \quad x_n = \frac{4n+5}{n+1}$$

أثبت أنّ المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و$(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

الحل:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{4n+9}{n+2} - \frac{4n+5}{n+1} = \frac{(4n^2+13n+9) - (4n^2+13n+10)}{(n+1)(n+2)}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$ و x_n متتالية متناقصة

$$y_{n+1} - y_n = \frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+1}{n+2}$$

$$= \frac{(4n^2+13n+10) - (4n^2+13n+3)}{(n+2)(n+3)}$$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{7}{(n+1)(n+2)} > 0$$ و y_n متتالية متزايدة

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4n+5}{n+3} - \frac{4n+5}{n+1}\right) = 4 - 4 = 0$$

و المتتاليتين $(x_n)_{n\geq0}$ و $(y_n)_{n\geq0}$ متجاورتان.

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية
زياد داوود 0936834268 سلمية
أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة
مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 16 : النموذج الوزاري الثاني 2020

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$ المعرفتين وفق العلاقتين : $u_n = -\frac{1}{n}$ و $v_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

❶ ادرس اطراد كل من $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$.

❷ أثبت أن المتتاليتان $(u_n)_{\geq 1}$ و $(v_n)_{\geq 1}$ متجاورتان

الحل :

❶ بفرض $f(x) = -\frac{1}{x}$ حيث $u_n = f(n)$ بالتالي $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

والتابع متزايد تماما وبالتالي فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

❷ بفرض $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ حيث $v_n = g(n)$ بالتالي

$$g'(x) = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = -\frac{x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad : x \in [1\,,+\infty[$$

والتابع متناقص تماما على $]1\,,+\infty[$ وبالتالي فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة تماما

❸ $$\lim_{x\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{n}\right) = 0 + 0 = 0$$

والمتتاليتان متجاورتان

التمرين 17 :

أثبت أن 4^n+5 مضاعف للعدد 3 و $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعدد7

الحل :

4^n+5 مضاعف للعدد 3

لتكن الخاصّة $E(n)$ وهي العدد 4^n+5 مضاعفاً للعدد 3 أي $E(n): 4^n+5=3k$

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ : $4^0+5=6=3(2)$ مضاعف للعدد 3

لنفرض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $E(n): 4^n+5=3k$

ونثبت صحّة $E(n+1)$: أي $4^{n+1}+5$ مضاعف للعدد 3

$$4^{n+1}+5=4\times 4^n+5=4(3k-5)+5$$

$$=12k-20+5=12k-15 \Longrightarrow 4^{n+1}+5=3(4k-5)$$

إذن $4^{n+1}+5$ مضاعف للعدد 3 و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n

$3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعف للعد د7

لتكن الخاصّة $E(n)$ وهي العدد $3^{2n+1}+2^{n+2}$ مضاعفاً للعدد 7 أي

$$E(n): 3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$$

الخاصة $E(0)$ صحيحة لأنّ : $3^1+2^2=3+4=7(1)$ مضاعف للعدد 3

لنفرض أن $E(n)$ صحيحة أي يوجد عدد طبيعي k بحيث $E(n): 3^{2n+1}+2^{n+2}=7k$

ونثبت صحّة $E(n+1)$: أي $3^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعفاً للعدد 7

$$3^{2n+3}+2^{n+3}= 3^2\times 3^{2n+1}+2\times 2^{n+2}=3^2\times(7k-2^{n+2})+2\times 2^{n+2}$$

$$=7\times 9k-9\times 2^{n+2}+2\times 2^{n+2}=7\times 9k-7\times 2^{n+2}=7(9k-2^{n+2})$$

إذن $3^{2n+3}+2^{n+3}$ مضاعف للعدد 7 و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة أيا كان العدد الطبيعي n

وسيم فاطمة 0936497038 اللاذقية
زياد داوود 0936834268 سلمية
أحمد الشيخ عيسى 0988024183 الرقة
مروان بجور 0930170828 حمص

التمرين 18 :

أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_0 = 2$, $u_{n+1} = u_n - 3$ حسابية

ثم عين أساسها واحسب u_2, u_1 ثم أدرس اطرادها

الحل :

$u_{n+1} = u_n - 3 \Longrightarrow u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ فالمتتالية حسابية أساسها $r = -3$

$u_1 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$, $u_2 = u_1 - 3 = -1 - 3 = -4$

بما أن $u_{n+1} - u_n = -3 < 0$ فالمتتالية متناقصة

التمرين 19 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $u_n = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1}$ أثبت أن $1 \leq u_n \leq 3$

أيا كان العدد الطبيعي n

الحل :

$$u_n - 1 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 1 = \frac{n^2+n+1-n^2+n-1}{n^2-n+1} = \frac{2n}{n^2-n+1} \geq 0$$

$$u_n - 3 = \frac{n^2+n+1}{n^2-n+1} - 3 = \frac{n^2+n+1-3n^2+3n-3}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{-2n^2+4n-2}{n^2-n+1}$$

$$= \frac{-2(n^2-2n+1)}{n^2-n+1} \Longrightarrow = \frac{-2(n-1)^2}{n^2-n+1} \leq 0$$

وبالتالي $1 \leq u_n \leq 3$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 20 :

جد نهاية المتتاليتين : $u_n = \frac{2n+(-1)^n}{3n}$ $\quad v_n = \frac{n!-2}{n!}$

الحل :

$$u_n = \frac{2n + (-1)^n}{3n}$$

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow 2n - 1 \leq 2n + (-1)^n \leq 2n + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{2n-1}{3n} \leq \frac{2n + (-1)^n}{3n} \leq \frac{2n+1}{3n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n} = \frac{2}{3}$$

وبالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n} = \frac{2}{3}$

$$v_n = \frac{n! - 2}{n!} = 1 - \frac{2}{n!}$$

$$n! \geq n \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \geq \frac{-2}{n!} \geq \frac{-2}{n} \Rightarrow$$

$$1 \geq 1 - \frac{2}{n!} \geq 1 - \frac{2}{n} \Rightarrow$$

$$\lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{n} = 1$$

وبالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{2}{n!} = 1$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 21 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق $n \geq 1$ $:u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$

أولا : في حالة $u_0 = 1$

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$ ، أيّاً كان العدد الطبيعي n

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً ❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

ثانيا : في حالة $u_0 = 2cos\theta$ و θ عدداً حقيقياً من المجال $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

❶ احسب u_1 ❷أثبت بالتدريج أنّ $u_n = 2\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

الحل :

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{2+x}$ المتزايد تماما لأن : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2+x}} > 0$

❶ لنثبت صحّة الخاصّة $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ عند كل $n \geq 0$

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$.

نفرض أنّ $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$

ونبرهن صحّة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض لدينا $0 \leq u_n \leq 2$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$f(0) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow \sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$ والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ تكون المتتالية u_n متزايدة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} > u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

بفرض الخاصّة $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$

نلاحظ أنّ $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $\sqrt{3} = u_1 > u_0 = 1$

نفرض صحّة $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحّة : $E(n+1) \;:\; u_{n+2} > u_{n+1}$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2+u_{n+1}} > \sqrt{2+u_n} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

❸ المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell) = \ell$ بالتالي :

$$\sqrt{2+\ell} = \ell \Rightarrow 2+\ell = \ell^2 \Rightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Rightarrow (\ell-2)(\ell+1) = 0 \Rightarrow$$

$\ell = -1$, $\ell = 2$ المتتالية متزايدة وحدها الأول 1

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 2$

ثانيا : ❶ $u_0 = 2cos\theta$, $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$: $n \in \mathbb{N}$

$$u_1 = \sqrt{2+u_0} = \sqrt{2+2cos\theta} = \sqrt{2(1+cos\theta)} = \sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}} = 2cos\frac{\theta}{2}$$

❷ نفرض الخاصية $E(n): u_n = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

لنبرهن صحّة $E(0)$

و الخاصة صحيحة $\ell_1 = u_0 = 2cos\theta$, $\ell_2 = 2cos\frac{\theta}{2^0} = 2cos\theta \Rightarrow \ell_1 = \ell_2$

نفرض صحة القضية $E(n): u_n = 2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

و لنبرهن صحّة $E(n+1): u_{n+1} = 2cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \Rightarrow u_{n+1} = \sqrt{2+2\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} = \sqrt{2\left(1+\ cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)\right)}$$

$$= \sqrt{2\left(2cos^2\left(\frac{\theta}{2\times2^n}\right)\right)} = \sqrt{4\,cos^2\frac{\theta}{2^{n+1}}} = 2\,cos\frac{\theta}{2^{n+1}}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$

وسيم فاطمة
اللاذقية 0936497038
زياد داوود
سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى
الرقة 0988024183
مروان بجور
حمص 0930170828

التمرين 22 : الاختبار 1

أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجيّاً بالعلاقات : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$

متزايدة تماماً.

الحل:

لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

المتزايد تماما لأن : $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} > 0$ والتابع f متزايد تماما على المجال $]0\,,+\infty[$

بفرض القضية $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة القضية $E(0)$ $1 = u_1 > u_0 = 0$ والقضية $E(0)$ صحيحة

نفرض صحّة $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$

ونبرهن صحّة : $E(n+1) \;:\; u_{n+2} > u_{n+1}$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

طريقة ثانية لإثبات صحة $\mathrm{E}(n+1)$:

نفرض صحّة $E(n) \;:\; u_{n+1} > u_n$ ونبرهن صحّة : $E(n+1) \;:\; u_{n+2} > u_{n+1}$.

$$u_{n+1} > u_n \Rightarrow u_{n+1}^2 > u_n^2 \Rightarrow 1+u_{n+1}^2 > 1+u_n^2 \Rightarrow \sqrt{1+u_{n+1}^2} > \sqrt{1+u_n^2}$$

بالتالي $u_{n+2} > u_{n+1}$ والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 23 : النموذج الوزاري الرابع

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة تدريجياً بالشكل $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$ و $u_0 = e^3$

$(v_n)_{n\geq0}$ متتالية معرّفة بالشكل $v_n = ln(u_n) - 2$ والمطلوب:

❶ أثبت أنّ v_n هندسيّة وعيّن q و v_0.

❷ اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج u_n بدلالة n.

❸ أثبت أنّ: $\lim_{n\to+\infty} u_n = e^2$

الحل:

❶ $v_{n+1} = ln(u_{n+1}) - 2 = ln(e.\sqrt{u_n}) - 2 = lne + ln\sqrt{u_n} - 2$

$= \frac{1}{2}ln(u_n) - 1 = \frac{1}{2}[ln(u_n) - 2] = \frac{1}{2}v_n$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدّها الأوّل $v_0 = ln(u_0) - 2 = 3 - 2 = 1$

❷ $v_n = v_0.q^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

❸ $v_n + 2 = ln(u_n) \implies u_n = e^{v_n+2} = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}$

$\lim_{x\to+\infty} ln(u_n) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{\left(\frac{1}{2}\right)^n+2}\right) = e^{0+2} = e^2$

التمرين 24 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة تدريجياً بالشكل $u_0 = 1$: $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$

و المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالشكل $t_n = ln(u_n) - ln\,2$ والمطلوب:

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 2$

❷ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

❹ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية و أوجد حدها العام احسب نهايتها

الحل : لنشكل التابع $f(x) = \sqrt{2x}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} > 0$ و التابع متزايد تماما

❶ لنثبت صحّة الخاصّة $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ عند كل $n \geq 0$

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $0 \leq u_0 = 1 \leq 2$.

نفرض أنّ $E(n): 0 \leq u_n \leq 2$ صحيحة

ونبرهن صحّة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 2$

من الفرض لدينا $0 \leq u_n \leq 2$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 2$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ تكون المتتالية u_n متزايدة تماما ، إذا تحقّق الشرط $u_{n+1} > u_n$ فلنبرهنها بالتدريج

بفرض الخاصّة $u_{n+1} > u_n$: $E(n)$

نلاحظ أنّ $E(n)$ صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $\sqrt{2} = u_1 > u_0 = 1$

نفرض صحّة $u_{n+1} > u_n$: $E(n)$ ونبرهن صحّة : $u_{n+2} > u_{n+1}$: $E(n+1)$.

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \sqrt{2u_{n+1}} > \sqrt{2u_n} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

❸ المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة

نهاية المتتالية هو حل المعادلة $f(\ell)=\ell$ بالتالي :

$$\sqrt{2\ell}=\ell \Rightarrow 2\ell=\ell^2 \Rightarrow \ell^2-2\ell=0 \Rightarrow \ell(\ell-2)=0 \Rightarrow$$

$\ell=0$, $\ell=2$ بما أن المتتالية متزايدة وحدها الأول 1 فإن $\lim\limits_{n\to\infty} u_n=2$

❹

$$t_n=ln(u_n)-ln\,2 \Rightarrow t_{n+1}=ln(u_{n+1})-ln\,2=ln\left(\sqrt{2u_n}\right)-ln\,2 \Rightarrow$$

$$t_{n+1}=\frac{1}{2}ln(2u_n)-ln\,2=\frac{1}{2}(ln(2u_n)-2\,ln\,2)$$

$$=\frac{1}{2}(ln(u_n)+ln(2)-2\,ln\,2)$$

$$t_{n+1}=\frac{1}{2}(ln(u_n)-ln\,2) \Rightarrow t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n$$

فالمتتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{2}$ وحدها الأول

$$t_0=ln(u_0)-ln\,2=ln(1)-ln\,2=-ln\,2$$

حدها العام $t_n=t_0q^n=-ln\,2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ وبما أن $|q|=\frac{1}{2}<1$

فإن $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ بالتالي $\lim\limits_{n\to\infty} t_n=0$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 25 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0 = \frac{3}{2}$, $u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n}$

❶ أثبت أن التابع $g(x) = \frac{2x-1}{x}$ متزايد تماماً واستنتج أن $1 < u_n \leq \frac{3}{2}$

❷ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ التابع g معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}^*$ و مشتقه $g'(x) = \frac{2x-2x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$ فالتابع g متزايد تماماً

لنضع $E(n): 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ ولدينا $u_{n+1} = g(u_n)$

لنبرهن صحة $E(0)$ $1 < u_0 = \frac{3}{2} \leq \frac{3}{2}$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$

لنبرهن صحة $E(n+1):\ 1 \leq u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

من الفرض $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$ وبما أن g متزايد تماماً فإن

$g(1) < g(u_n) \leq g\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة $1 < \frac{2u_n - 1}{u_n} \leq \frac{4}{3} \leq \frac{3}{2} \Rightarrow 1 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}$

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ لنضع $E(n): u_{n+1} < u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1 = \frac{4}{3} < u_0 = \frac{3}{2}$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1} < u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1):\ u_{n+2} < u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} < u_n$ وبما أن g متزايد تماماً فإن $g(u_{n+1}) < g(u_n) \Rightarrow$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة $\frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} < \frac{2u_n - 1}{u_n} \Rightarrow u_{n+2} < u_{n+1}$

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة ومحدودة من الأدنى بالعدد 1 فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

ولإيجاد النهاية , هي حل المعادلة $g(\ell) = \ell$

$$\frac{2\ell - 1}{\ell} = \ell \Rightarrow \ell^2 = 2\ell - 1 \Rightarrow \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \Rightarrow (\ell - 1)^2 = 0 \Rightarrow \ell = 1$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة من العدد 1 أي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 26 : النموذج الوزاري السادس

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة كما يأتي : $u_0 = 0$ و $u_{n+1} = \frac{2u_n+1}{u_n+2}$

المطلوب :

❶ أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$.

❷ أثبت أنّ $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة.

❸ علّل تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ واحسب نهايتها.

الحل: ❶ لنفرض التابع $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{2x+4-2x-1}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2} > 0$ فالتابع f متزايد تماماً

لنضع $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ ❷

لنضع $E(n): u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1 = \frac{1}{2} > u_0 = 0$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_{n+1} > u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1)$: $u_{n+2} > u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$ فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الاعلى فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

ولإيجاد النهاية , هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$\frac{2\ell+1}{\ell+2} = \ell \Rightarrow \ell^2 + 2\ell = 2\ell + 1 \Rightarrow \ell^2 = 1 \Rightarrow \ell = 1 \ , \ \ell = -1$$

المتتالية متزايدة وحدها الأول 0

لا يمكن لمتتالية حدودها موجبة أن تكون نهايتها سالبة بالتالي $\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$

التمرين 27 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعرفة كما يلي : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{4}$

❶ لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة كمايلي $v_n = u_n - 2$

a) أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية يُطلب إيجاد أساسها وحدها الأول .

b) أوجد عبارة v_n بدلالة n واستنتج عبارة u_n بدلالة n .واحسب نهايتها

❷ احسب المجموع $S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

الحل :

❶

a) لدينا $v_n = u_n - 2$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{3u_n+2}{4} - 2 = \frac{3u_n+2-8}{4} = \frac{3u_n-6}{4} = \frac{3(u_n-2)}{4} = \frac{3}{4}v_n$$

ومنه $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول. $v_0 = u_0 - 2 = -1$

b)

$$v_n = v_0 q^n = -1\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$u_n = v_n + 2 \Rightarrow u_n = -1\left(\frac{3}{4}\right)^n + 2$$

$$-1 < \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} u_n = 0 + 2 = 2$$

❷

$$S = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = -1\,\frac{1-(\frac{3}{4})^{n+1}}{1-\frac{3}{4}} = -4(\,1 - (\frac{3}{4})^{n+1}) = 4((\frac{3}{4})^{n+1} - 1)$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 28 :

لتكن المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ ، $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين وفق :

$u_0 = 3$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1}$ و $t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

❶ أثبت أن $u_n > 0$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ أثبت أن المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ نفرض الخاصّة $E(n): u_n > 0$

نبرهن صحة الخاصة $E(0)$ و الخاصة صحيحة $u_0 = 3 > 0$

نفرض صحة الخاصة $E(n): u_n > 0$ ونبرهن صحّة الخاصة $E(n+1): u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي $u_{n+1} = \frac{2}{u_n+1} > 0$

لأنّها قسمة عددين موجبين تماماً وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

و الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$

❷

$$t_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Rightarrow t_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{2}{u_n+1}-1}{\frac{2}{u_n+1}+2} = \frac{\frac{2-u_n-1}{u_n+1}}{\frac{2+2u_n+2}{u_n+1}} = \frac{1-u_n}{2u_n+4} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{u_n-1}{u_n+2}\right) \Rightarrow$$

$t_{n+1} = \frac{-1}{2} t_n$ فالمتتالية هندسية أساسها $q = \frac{-1}{2}$

بما أن $-1 < q = \frac{-1}{2} < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$

❸ بما أن $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ بالتالي

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n-1}{u_n+2} = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - 1) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} u_n = 1$$

والمتتالية متقاربة ونهايتها 1

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 29 : النموذج الوزاري الأول 2020

لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً وفق: $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n}$ من أجل كل n من $\mathbb{N}$.

❶ أثبت بالتدريج أن $u_n > 0$ أياً كان العدد الطبيعي n.

❷ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة $v_n = \frac{1}{u_n}$ متتالية حسابية,

ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n

❸ ليكن S_n المجموع المعرف بالشكل $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$

اكتب S_n بدلالة n واستنتج $\lim_{n\to\infty} S_n$

الحل :

❶ نفرض الخاصة $E(n) : u_n > 0$

لنبرهن صحة $E(0)$: ان $u_0 = 2 > 0$ والخاصة محقّقة

نفرض صحة الخاصة $E(n) : u_n > 0$

ولنبرهن صحة الخاصة $E(n+1) : u_{n+1} > 0$

من الفرض $u_n > 0$ وبالتالي : $u_{n+1} = \frac{u_n}{1+4u_n} > 0$

لأنّها قسمة عددين موجبين تماماً وبالتالي الخاصة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد ان الخاصة $u_n > 0$ صحيحة ايا كان n من $\mathbb{N}$

❷ نلاحظ أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة على النحو:

$$v_n = \frac{1}{u_n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1+4u_n}{u_n} = \frac{1}{u_n} + 4 \Rightarrow v_{n+1} = v_n + 4 \Rightarrow$$

$v_{n+1} - v_n = 4$ وبالتالي v_n متتالية حسابيّة أساسها $r = 4$ و $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$

وبالتالي : $v_n = v_0 + nr = \frac{1}{2} + 4n = \frac{8n+1}{2}$, $u_n = \frac{1}{v_n} \Rightarrow u_n = \frac{2}{8n+1}$

❸ $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = \frac{n+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{8n+1}{2}\right) = \frac{(n+1)(8n+2)}{4}$

$$S_n = \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{4}(8n^2 + 10n + 2) = +\infty$$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

التمرين 30 : النموذج الوزاري الثالث

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجيّة $u_0 = \frac{1}{2}$ و $u_{n+1} = \frac{u_n}{2-u_n}$

❶ أثبت أنّ $0 < u_n < 1$ أيّاً كان $n \in \mathbb{N}$

❷ نعرّف $(v_n)_{n\geq 0}$ حيث: $v_n = \frac{1}{u_n} - 1$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة واستنتج v_n بدلالة n.

❸ اكتب u_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل:

❶ لنفرض التابع $f(x) = \frac{x}{2-x}$ بحيث $u_{n+1} = f(u_n)$

بالتالي $f'(x) = \frac{2-x+x}{(2-x)^2} = \frac{2}{(2-x)^2} > 0$ فالتابع f متزايد تماماً

لنضع $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$

لنبرهن صحة $E(0)$: $0 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 0 \leq u_n \leq 1$ ولنبرهن صحة $E(n+1): 0 \leq u_{n+1} \leq 1$

من الفرض $0 \leq u_n \leq 1$ وبما أن f متزايد تماماً فإن

$$f(0) < f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ $v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = \frac{2-u_n}{u_n} - 1 = \frac{2-2u_n}{u_n} = 2\left(\frac{1-u_n}{u_n}\right) = 2\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) = 2v_n$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $q = 2$ و $v_0 = 2 - 1 = 1$ بالتالي $v_n = v_0 q^n = 2^n$

❸ $v_n = \frac{1}{u_n} - 1 \Rightarrow u_n = \frac{1}{v_n+1} = \frac{1}{2^n+1} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2^n+1} = 0$

التمرين 31 :

لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ وفق $u_n = ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

❶ جد نهاية هذه المتتالية.

❷ نضع $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$.

a . أثبت أنّ $S_n = ln(n+1)$

b . ما نهاية $(S_n)_{n\geq 1}$.

الحل :

❶ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = ln1 = 0$

❷ a. $S_n = ln\left(\frac{2}{1}\right) + ln\left(\frac{3}{2}\right) + ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \Rightarrow$

$$S_n = ln\left(\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right) \times \ldots \times \left(\frac{n+1}{n}\right)\right) = ln(n+1)$$

b. وبما أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty}(n+1) = +\infty$ استنتجنا أنّ $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

التمرين 32 : دورة 2017 الأولى

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق : $u_0 = 1$: $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $v_n = u_n + 3$

❶ أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ هندسية و أوجد أساسها .

❷ اكتب عبارة v_n بدلالة n ثُمَّ عبارة u_n بدلالة n .

❸ ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ،
عبر عن S_n بدلالة n واستنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$

الحل :

❶ $$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3 = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3) = \frac{1}{3}v_n$$

فالمتتالية v_n هندسيّة أساسها $\frac{1}{3}$

❷ $$q = \frac{1}{3}\ , v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4 \Rightarrow v_n = v_0 q^n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{4}{3^n}$$

ومن ثمّ $v_n = u_n + 3 \Rightarrow u_n = v_n - 3 \ \Rightarrow \ u_n = \frac{4}{3^n} - 3$

❸ $$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n = 4\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = 4 \times \frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$S_n = 6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \ , -1 < \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n =$$

$$0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(6 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = 6 - 0 = 6$$

التمرين 33 : النموذج الوزاري الأول

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 4$ و $x_{n+1} = \frac{3}{4}x_n + 2$ في حالة $n \geq 0$.

نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n - 8$.أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

واكتب y_n بدلالة n. واحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n$

الحل:

$$y_{n+1} = x_{n+1} - 8 = \frac{3}{4}x_n + 2 - 8 = \frac{3}{4}x_n - 6 = \frac{3}{4}(x_n - 8) = \frac{3}{4}y_n$$

وهي متتالية هندسيّة أساسها $\frac{3}{4}$ وحدّها الأوّل $y_0 = x_0 - 8 = -4$ وبالتالي :

$$y_n = y_0 . q^n = -4.\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

ولأنّ $-1 < q < 1$ فإنّ : $\lim\limits_{x\to+\infty} y_n = -4 \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$

التمرين 34 : النموذج الوزاري الثاني

لتكن $(x_n)_{n\geq 0}$ المتتالية المعطاة وفق $x_0 = 5$ و $x_{n+1} = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}$.

❶ احسب x_1 , x_2 , x_3 ثمّ ادرس اطّراد المتتالية.

❷ نعرّف $(y_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة $y_n = x_n + 4$ أثبت أنّ $(y_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة.

❸ اكتب y_n بدلالة n ثمّ احسب $y_2 + y_3 + \cdots + y_{10}$ بدلالة قوّة للعدد: $\frac{6}{5}$

الحل:

$$1.\ x_1 = \frac{6}{5}x_0 + \frac{4}{5} = \frac{6}{5}(5) + \frac{4}{5} = \frac{34}{5}$$

$$x_2 = \frac{6}{5}\left(\frac{34}{5}\right) + \frac{4}{5} = \frac{204}{25} + \frac{20}{25} = \frac{224}{25}$$

$$x_3 = \frac{6}{5}\left(\frac{224}{25}\right) + \frac{4}{5} = \frac{1344}{125} + \frac{100}{125} = \frac{1444}{125}$$

يتبيّن لنا أنّ المتتالية متزايدة. نرمز الخاصّيّة $E(n)$ هي صحيحة من أجل $n = 0$.

نفرض صحّة $E(n)$ أي أنّ $x_{n+1} - x_n \geq 0$

ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي نبرهن أنّ $x_{n+2} - x_{n+1} \geq 0$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = \frac{6}{5}x_{n+1} + \frac{4}{5} - \left(\frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5}\right) = \frac{6}{5}(x_{n+1} - x_n) \geq 0$$

والمتتالية متزايدة.

$$y_{n+1} = x_{n+1} + 4 = \frac{6}{5}x_n + \frac{4}{5} + 4 = \frac{6}{5}(x_n + 4) = \frac{6}{5}y_n$$

والمتتالية y_n هندسيّة.

$$3.\quad q = \frac{6}{5} \qquad y_0 = 9 \qquad , \qquad y_n = y_0 . q^n = 9\left(\frac{6}{5}\right)^n$$

أساسها $\frac{6}{5}$ وحدّها الأوّل $y_0 = 9$

$$y_2 + y_3 + \cdots + y_{10} = y_2\frac{1-q^9}{1-q} = 9\left(\frac{6}{5}\right)^2\frac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^9}{1-\frac{6}{5}} = -45\left(\frac{6}{5}\right)^2\left[1 - \left(\frac{6}{5}\right)^9\right]$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 35 :

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرّفة وفق $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{3}u_n^2 + 2u_n$

❶ أثبت أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❷ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً.

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة واحسب نهايتها

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = -\frac{2}{3}x + 2$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{2}{3}x + 2 = 0 \Rightarrow -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $]-\infty, 3]$

لنضع $E(n)\colon u_n \leq 3$ لنبرهن صحة $E(0)$. $u_0 = \frac{1}{2} \leq 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n)\colon u_n \leq 3$ لنبرهن صحة $E(n+1) : u_{n+1} \leq 3$

بما أن f متزايد تماما عندما $x \leq 3$ و لدينا من الفرض $u_n \leq 3$ فإن

$f(u_n) \leq f(3) \Rightarrow u_{n+1} \leq 3$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ لنضع $E(n)\colon u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $u_1 = \frac{11}{12} > u_0 = \frac{1}{2}$ إذاً $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n)\colon u_{n+1} > u_n$ و لنبرهن صحة $E(n+1) : u_{n+2} > u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً

❸ مما سبق وجدنا أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

من المساواة $u_{n+1} = f(u_n)$ و استمرار التابع f , النهاية هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$-\frac{1}{3}\ell^2 + 2\ell = \ell \Rightarrow -\frac{1}{3}\ell^2 + \ell = 0 \Rightarrow \ell^2 - 3\ell = 0 \Rightarrow \ell(\ell - 3) = 0 \Rightarrow$$

$\ell = 3$, $\ell = 0$ وبما أن المتتالية متزايدة وحدها الأول $\frac{1}{2}$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$

التمرين 36 :

المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ معرّفة وفق : $u_0 = \frac{3}{2}$ وعند كل $n \in \mathbb{N}$ ، $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $1 \leq u_n \leq 2$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ أثبت أنّ $u_{n+1} - u_n = (u_n - 2)(u_n - 1)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❸ استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة , هل هي متقاربة

الحل :

❶ لنفرض التابع $f(x) = x^2 - 2x + 2$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

f معرف واشتقاقي على $\mathbb{R}$ و مشتقه $f'(x) = 2x - 2$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	$-\infty$ 1 $+\infty$
اشارة $f'(x)$	$-$ 0 $+$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[1 , +\infty[$

لنضع $E(n): 1 \leq u_n \leq 2$

لنبرهن صحة $E(0)$. $1 \leq u_0 = \frac{3}{2} \leq 2$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 1 \leq u_n \leq 2$ لنبرهن صحة $E(n+1): 1 \leq u_{n+1} \leq 2$

بما أن f متزايد تماما عندما $x \geq 1$ و لدينا من الفرض $1 \leq u_n \leq 2$ فإن

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❷ $u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 2 - u_n = u_n^2 - 3u_n + 2 = (u_n - 2)(u_n - 1)$

❸ $1 \leq u_n \leq 2 \Rightarrow (u_n - 2)(u_n - 1) \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} - u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$

والمتتالية متناقصة وبما أنها محدودة من الادنى فهي متقاربة

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 37 :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$

❶ أدرس اطراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❷ أثبت بالتدريج أن $u_n = (n+1)^2$

الحل :

❶ $u_{n+1} = u_n + 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} - u_n = 2n + 3 > 0 \ : n \geq 0$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

لنضع $E(n): u_n = (n+1)^2$

لنبرهن صحة $E(0)$ $1 = u_0 = (0+1)^2 = 1$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): u_n = (n+1)^2$

لنبرهن صحة $E(n+1): u_{n+1} = (n+2)^2$

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 3 = (n+1)^2 + 2n + 3$$
$$= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 \Rightarrow$$
$$u_{n+1} = n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

التمرين 38 :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة وفق $u_0 = 1$ و $u_{n+1} = 2u_n + 3n^2 + n$

❶ عيّن كثير حدود من الدرجة الثانية P بحيث يجعل المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العام $t_n = P(n)$ تحقق العلاقة $t_{n+1} = 2t_n + 3n^2 + n$ أيّاً كانت n

❷ أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ التي حدّها العام $v_n = u_n - t_n$ هي متتالية هندسيّة

❸ عبر عن v_n و u_n بدلالة n

الحل : بفرض كثير حدود من الدرجة الثانية P هو : $t_n = P(n) = an^2 + bn + c$ وبالتالي

$$t_{n+1} = P(n+1)$$

$$2t_n + 3n^2 + n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c$$

$$2(an^2 + bn + c) + 3n^2 + n = a(n^2 + 2n + 1) + b(n+1) + c$$

$$(2a+3)n^2 + (2b+1)n + 2c = an^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$$

بالمطابقة نجد :

$$2a + 3 = a \Rightarrow a = -3$$

$$2b + 1 = 2a + b \Rightarrow b = 2a - 1 \Rightarrow b = 2(-3) - 1 \Rightarrow b = -7$$

$$2c = a + b + c$$

$$\Rightarrow c = a + b \Rightarrow c = -3 - 7 \Rightarrow c = -10$$

وبالتالي $t_n = P(n) = -3n^2 - 7n - 10$

❷

$$v_n = u_n - t_n \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} \Rightarrow$$

$$v_{n+1} = 2u_n + 3n^2 + n - (2t_n + 3n^2 + n)$$

$$= 2(u_n - t_n) = 2v_n$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $q = 2$

❸

$$q = 2 \qquad v_0 = u_0 - t_0 = 1 + 10 = 11$$

$$\Rightarrow v_n = v_0 q^n = 11(2)^n$$

$$u_n = v_n + t_n = 11(2)^n - 3n^2 - 7n - 10$$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 39 :

نتأمّل متتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_0 = 1\,, u_1 = 4$ و $(n \geq 1)$ $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$

❶ لتكن $(v_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 3

❷ لتكن $(w_n)_{n\geq 0}$ المتتالية $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ أثبت أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 2

❸ عبّر عن v_n و w_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n

الحل :

❶ $v_n = u_{n+1} - 2u_n$ عندئذ في حالة $n \geq 1$ يكون :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - 2u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 2u_{n+1} = 3u_{n+1} - 6u_n \Longrightarrow$$

$$v_{n+1} = 3(u_{n+1} - 2u_n) \Longrightarrow v_{n+1} = 3v_n$$

وهكذا نجد أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 3

3. $w_n = u_{n+1} - 3u_n$ عندئذ في حالة $n \geq 1$ يكون :

$$w_{n+1} = u_{n+2} - 3u_{n+1} = 5u_{n+1} - 6u_n - 3u_{n+1} = 2u_{n+1} - 6u_n \Longrightarrow$$

$$w_{n+1} = 2(u_{n+1} - 3u_n) \Longrightarrow w_{n+1} = 2w_n$$

وهكذا نجد أنّ $(w_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها 2

4. لدينا $v_0 = u_1 - 2u_0 = 4 - 2 = 2$ وبالتالي : $v_n = v_0 q^n \Longrightarrow v_n = 2 \times 3^n$

ولدينا $w_0 = u_1 - 3u_0 = 4 - 3 = 1$ و بالتالي : $w_n = 2^n$

$$v_n = u_{n+1} - 2u_n$$

$$w_n = u_{n+1} - 3u_n$$

وبالطرح نجد : $v_n - w_n = u_n$ وبالتالي :

$$u_n = v_n - w_n \Longrightarrow u_n = 2 \times 3^n - 2^n$$

وسيم فاطمة — اللاذقية 0936497038
زياد داوود — سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى — الرقة 0988024183
مروان بجور — حمص 0930170828

التمرين 40 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ التي تحقق : $u_0 = s$ ، $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4}(u_n - 3)$

❶ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أن $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$ أيّاً يكن $n \in \mathbb{N}$

❷ استنتج نهاية u_n

❸ من أجل $u_0 = 4$ عين عدداً طبيعياً N يحقق $u_n \in]3 - 10^{-3}, 3 + 10^{-3}[$ عند كل $n \geq N$

الحل :

❶ لنفرض القضية $E(n):\ 0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$

لنبرهن صحة القضية $E(0)$

$0 \leq u_0 - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^0 (u_0 - 3) \Rightarrow 0 \leq u_0 - 3 \leq (u_0 - 3)$ والقضية صحيحة

نفرض صحّة القضية $E(n)$ عند $n \geq 1$ ونبرهن صحّة

$$E(n+1):\ 0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - 3)$$

لدينا من نص المسألة $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4}(u_n - 3)$

و من الفرض $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$

ومنه $0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3)$ وبالتالي :

$0 \leq u_{n+1} - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} (u_0 - 3)$ و القضية $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد أن القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}$

❷ بما أن $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) = 0$

بالتالي حسب الاحاطة يكون $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n - 3 = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} u_n = 3$

❸ $3 - 10^{-3} \leq u_n \leq 3 + 10^{-3} \Rightarrow -10^{-3} \leq u_n - 3 \leq 10^{-3}$

و $0 \leq u_n - 3 \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$ بالتالي

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n = 10^{-3} \Rightarrow n \ln\frac{3}{4} = -3 \ln 10 \Rightarrow n = \frac{-3 \ln 10}{\ln\frac{3}{4}} \Rightarrow N \geq \frac{-3 \ln 10}{\ln\frac{3}{4}}$$

طريقة ثانية : لدينا $u_0 - 3 = 4 - 3 = 1$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{30} = \left(\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{10} = \left(\frac{27}{64}\right)^{10} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024} \leq \frac{1}{1000}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) \leq (4-3)\frac{1}{1000} \Rightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^n (u_0 - 3) \leq \frac{1}{1000}$$

$0 \leq u_n - 3 \leq \frac{1}{1000} \Rightarrow 3 - \frac{1}{1000} \leq u_n \leq 3 + \frac{1}{1000}$ بالتالي $N \geq 30$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 41 :

لتكن لدينا المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفتين تدريجيا وفق :

$v_0 = 1$ و $s_0 = 12$ $v_{n+1} = \frac{v_n+2u_n}{3}$ و $u_{n+1} = \frac{v_n+3u_n}{4}$ والمطلوب :

❶ أثبت أن المتتالية $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ هندسية واحسب نهايتها

❷ أثبت أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

❸ أثبت أن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $w_n = 3v_n + 8u_n$ ثابتة ثم عين قيمتها الثابتة

❹ استنتج النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$

الحل :

❶ $(u_{n+1} - v_{n+1}) = \frac{v_n+3u_n}{4} - \frac{v_n+2u_n}{3}$

$= \frac{3v_n+9u_n-4v_n-8u_n}{12} = \frac{u_n-v_n}{12} = \frac{1}{12}(u_n - v_n)$

وبالتالي فالمتتالية $(u_n - v_n)_{n\geq 0}$ هندسية أساسها $q = \frac{1}{12}$

وبما أن $-1 \leq \frac{1}{12} \leq 1$ فالمتتالية متقاربة و $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}(u_n - v_n) = 0$

❷ (إن $u_0 - v_0 = 12 - 1 = 11$ وبالتالي نستنتج أن $u_n - v_n > 0$ أيا يكن n)

$$v_{n+1} - v_n = \frac{v_n + 2u_n}{3} - v_n = \frac{v_n + 2u_n - 3v_n}{3} = \frac{2(u_n - v_n)}{3} = \frac{2}{3}(u_n - v_n) > 0$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{v_n+3u_n}{4} - u_n = \frac{v_n+3u_n-4u_n}{4} = \frac{(v_n-u_n)}{4} = \frac{-1}{4}(u_n - v_n) < 0$$

وبالتالي $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما و $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماما و $\lim\limits_{x\rightarrow+\infty}(u_n - v_n) = 0$

ومنه نجد أن المتتاليتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

❸ عند كل n يكون

$$w_{n+1} - w_n = 3v_{n+1} + 8u_{n+1} - 3v_n - 8u_n = 3(v_{n+1} - v_n) + 8(u_{n+1} - u_n) \Rightarrow$$
$$w_{n+1} - w_n = 2(u_n - v_n) - 2(u_n - v_n) = 0$$

ومنه $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية ثابتة وقيمتها الثابتة

$$w_n = w_0 = 3t_0 + 8u_0 = 3(1) + 8(12) = 99$$

❹ بفرض النهاية المشتركة للمتتاليتين المتجاورتين $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(u_n)_{n\geq 0}$ هي ℓ

$$\lim_{x\rightarrow+\infty} u_n = \lim_{x\rightarrow+\infty}(3v_n + 8u_n) = 3\ell + 8\ell = 11\ell$$
$$\Rightarrow 11\ell = 99 \Rightarrow \ell = 9$$

التمرين 42 : دورة 2020 الأولى

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بالعلاقة التدريجية: $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \geq 0$.

❶ أثبت أن التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على $[2, +\infty[$.

❷ أثبت بالتدريج أن $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أياً كان العدد الطبيعي n.

استنتج أن المتتالية متقاربة , واحسب نهايتها.

الحل :

❶ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ معرف واشتقاقي على $[2, +\infty[$

و مشتقه $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \notin [2, +\infty[\,, \quad x = 2$$

بالتالي $f'(x) = 0$ على المجال $[2, +\infty[$

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$

❷ لنفرض القضية $E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$ $\quad 2 \leq u_1 = \frac{13}{6} \leq u_0 = 3$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

لنبرهن صحة $E(n+1): \quad 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

من الفرض $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$

وبما أن f متزايد تماماً فإن $f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n) \Rightarrow \; 2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

❸ من العلاقة $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ نجد :

$u_{n+1} \leq u_n$ فالمتتالية متناقصة و $2 \leq u_n$ فالمتتالية محدودة من الادنى فالمتتالية متقاربة

ونهايتها هي حل المعادلة $f(\ell) = \ell$

$$\frac{\ell}{2} + \frac{2}{\ell} = \ell \Rightarrow \frac{\ell^2 + 4}{2\ell} = \ell \Rightarrow \ell^2 + 4 = 2\ell^2 \Rightarrow \ell^2 = 4 \Rightarrow \ell = 2 \;, \ell = -2$$

بما أن المتتالية متناقصة وحدها الاول 3 و $2 \leq u_n$ وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$

التمرين 43 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة عند $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة عند $n \geq 1$ وفق : $v_n = u_{2n} - u_n$

❶ اثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

❷ اثبت أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

❸ اثبت $v_n \geq \frac{1}{2}$

❹ أثبت مستعملا البرهان بالتدريج أنّ $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ أيا كان $n \geq 1$

❺ هل للمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ نهاية حقيقية

الحل :

❶ أثبات أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

$$u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

❷
$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + + \cdots + \frac{1}{n}$$
$$u_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n}$$
$$v_n = u_{2n} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n} \Longrightarrow v_{n+1} = \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + .. + \frac{1}{2(n+1)}$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2n(2n+1)(n+1)} > 0$$

والمتتالية متزايدة تماماً أيّاً كان $n \geq 1$.

❸
$$v_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + .. + \frac{1}{2n}$$

نلاحظ أنّ هذا المجموع هو مجموع n حدّاً متناقصاً أصغرها $\frac{1}{2n}$ وبالتالي هذا المجموع أكبر من أصغر حدودها مضروبا بعدد الحدود وبالتالي : $v_n \geq n \times \frac{1}{2n} \Longrightarrow v_n \geq \frac{1}{2}$

❹ نفرض $E(n)$ الخاصّة $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ ، أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$

الخاصّة صحيحة من أجل $n = 1$ لأنّ : $u_{2^1} = u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \geq \frac{1}{2}$

لنفترض صحة الخاصة $E(n)$. عندئذٍ ونبرهن صحّة $E(n+1)$ أي : $u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$

من الطلب ❸ وجدنا أن $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2}$ وبما أن 2^nعدد طبيعي فإن :

$$u_{2n} \geq u_n + \frac{1}{2} \Longrightarrow u_{2\times 2^n} \geq u_{2^n} + \frac{1}{2} \geq \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2} \Longrightarrow u_{2^{n+1}} \geq \frac{n+1}{2}$$

فالخاصّة $E(n)$ صحيحة من أجل $n+1$ فهي صحيحة أيّاً يكن العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❺ بما أن $u_{2^n} \geq \frac{n}{2}$ فهي غير محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة فهي متباعدة

أي أن $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ وبالتالي فليس للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ نهاية حقيقيّة

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038
زياد داوود سلمية 0936834268
أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183
مروان بجور حمص 0930170828

التمرين 44 : دورة 2019 الأولى

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$

❶ أثبت أن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماما

❷ أثبت أن S_n يكتب بالشكل وفق $S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$ ثم استنتج عنصر راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ وبين أنها متقاربة

الحل :

❶ $S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$

$$= S_n + \frac{1}{3^{n+1}} \Longrightarrow S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .

❷ نلاحظ أن S_n عبارة عن مجموع $n+1$ حد من متتالية هندسية

أساسها $\frac{1}{3}$ و حدها الأول 1

$$S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) = 1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\right) = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right)$$

$S_n = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\times 3^n} \leq \frac{3}{2}$ بالتالي $\frac{3}{2}$ عنصر راجحاً

المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

التمرين 45 : دورة 2020 الثانية

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة وفق: $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \cdots + \frac{n}{e^n}$. المطلوب:

❶ أثبت أن $n \leq 2^n$ أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

❷ استنتج أن $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

❸ أثبت أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة.

الحل :

❶ لتكن $E(n)$ الخاصّة $n \leq 2^n$.

من أجل $n = 1$ نجد $1 \leq 2^1 = 2$ الخاصّة محقّقة

نفرض صحّة $E(n): n \leq 2^n$ ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي $n+1 \leq 2^{n+1}$

$$n+1 \leq 2^n + 1 \leq 2^n\left(1+\frac{1}{2^n}\right) \leq 2^n(2) = 2^{n+1}$$

فالخاصة $E(n+1)$محقّقة وبالتالي $E(n)$ محقّقة أيّاً كان العدد الطبيعي n .

❷ بالاستفادة مما سبق نستبدل كل عدد n في بسط كل كسر بالقوة 2^n لنجد:

$$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \cdots + \frac{n}{e^n} \leq \frac{2^1}{e^1} + \frac{2^2}{e^2} + \frac{2^3}{e^3} + \frac{2^4}{e^4} + \cdots + \frac{2^n}{e^n}$$

$$u_n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^1 + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^3 + \left(\frac{2}{e}\right)^3 + .. + \left(\frac{2}{e}\right)^n \Rightarrow$$

نلاحظ أن الطرف الثاني عبارة عن مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{e}$ و حدها الأول $\frac{2}{e}$

$$u_n \leq \frac{2}{e} \times \left(\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}\right) \Rightarrow u_n \leq \frac{2}{e}\left(\frac{e}{e-2}\right)\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \Rightarrow u_n \leq \frac{e}{e-2} - \left(\frac{e}{e-2}\right)\left(\frac{2}{e}\right)^n \leq \frac{e}{e-2}$$

بالتالي $\frac{e}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية

❸ $$u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \frac{4}{e^4} + \cdots + \frac{n}{e^n} \Longrightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{n+1}{e^{n+1}} \Longrightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} > 0$$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى فهي متقاربة

التمرين 46 :

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة عند $n \geq 1$ وفق : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$

❶ اثبت مستعملا البرهان بالتدريج أنّ : $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$

❷ أستنتج أنّ العدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$

❸ أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة

الحل :

❶ لنضع $E(n)$ الخاصّة $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$ في حالة $n \geq 1$.

الخاصّة صحيحة من أجل $n = 1$ لأنّ $\frac{1}{1!} = 1 \leq \frac{1}{2^0}$.

نفرض صحّة الخاصيّة $E(n)$ عند $n \geq 1$

ونبرهن صحّة $E(n+1)$ أي أنّ : $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{2^n}$

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1).n!} = \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{2^{n-1}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

حيث : $\left(\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\right)$ و $\left(n \geq 1 \Rightarrow n+1 \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}\right)$

وبالتالي الخاصيّة $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد أن الخاصيّة $E(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

❷ استناداً إلى ما أثبتناه في الطلب الأوّل نكتب:

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \left(\frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right)$$

$$\leq 1 + \left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) \quad : \quad q = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن داخل القوس عبارة عن مجموع n حد من متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ و حدها الأول 1

$$u_n \leq 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 3 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3 \Rightarrow$$

فالعدد 3 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

❸ $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \Rightarrow u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة تماماً وهي محدودة من الأعلى بالعدد 3 فهي متقاربة

التمرين 47 :

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرفة عند كل $n \geq 1$ وفق $v_n = u_n + \frac{1}{n}$

❶ أثبت أن $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة

❷ أثبت أن $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيا يكن $n \geq 1$, استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة

❸ أثبت أن المتتاليتين (u_n)و(v_n) متجاورتان

الحل :

❶ $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

إذاً $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية متزايدة.

❷ a . نفرض القضية $E(n) :\ u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$ أيّاً يكن $n \geq 1$.

لنبرهن صحة القضية $E(1)$: $1 = u_1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$ والقضية صحيحة

نفرض صحّة القضية $E(n)$ ولنبرهن صحة القضية $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{(n+1)^2}\right) \Rightarrow u_{n+1} \leq 2 - \left(\frac{n^2 + 2n + 1 - n}{n(n+1)^2}\right)$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \left(\frac{n^2 + n + 1}{n(n+1)^2}\right) \leq 2 - \left(\frac{n^2 + n}{n(n+1)^2}\right) \Rightarrow$$

$$u_{n+1} \leq 2 - \left(\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}\right) \Rightarrow u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$$

و القضية $E(n+1)$ صحيحة

مما سبق نجد أن القضية $E(n)$ صحيحة من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$

المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 لأن $u_{n+1} \leq 2 - \frac{1}{n+1} \leq 2$ فهي متقاربة.

❸ $v_n = u_n + \frac{1}{n} \Rightarrow v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} \Rightarrow$

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{n+1} - u_n - \frac{1}{n} \Rightarrow$$

$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)^2} < 0 \Rightarrow$ إذاً $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية متناقصة

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n} = 0$$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان

التمرين 48 :

المتتاليتان (u_n) , (v_n) معرفتان من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بِـ :

$$v_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n} \quad \text{و} \quad u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$

أثبت أن المتتاليتين (u_n)و(v_n) متجاورتان .

الحل :

$$u_n = 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n+1}$$

$$\Rightarrow\ u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)} \geq 0$$

والمتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة.

طريقة ثانية :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+2}+2\sqrt{n+1}$$

$$= \frac{2n+3-2\sqrt{n^2+3n+2}}{\sqrt{n+1}}$$

$$u_{n+1}-u_n = \frac{(2n+3)^2-4(n^2+3n+2)}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{n^2+3n+2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}\left(2n+3+2\sqrt{n^2+3n+2}\right)} > 0$$

$$v_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}$$

$$v_{n+1}-v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\sqrt{n+1}+2\sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}-2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)} \leq 0$$

والمتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة.

$$v_n-u_n = 2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n} = 2\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n-u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$ **فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان.**

التمرين 49 : الاختبار 3

لتكن المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتان كما يأتي :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad \text{و} \quad v_n = u_n + \frac{1}{4n}$$

أثبت أنّ هاتين المتتاليتين متجاورتين.

الحل:

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} \Rightarrow u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$$

والمتتالية u_n متزايدة. تماما

$$v_{n+1} = u_{n+1} + \frac{1}{4n+4} \Rightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4n+4} - u_n - \frac{1}{4n}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} - \frac{1}{n(4n+4)} = \frac{1}{2n+2}\left(\frac{-1}{2n(2n+1)}\right) < 0$$

والمتتالية v_n متناقصة تماماً .

$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = 0$ **فالمتتاليتان u_n و v_n متجاورتان.**

التمرين 50 :

نتأمّل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المُعرّفة تدريجيّاً وفق $u_0 = 7$ و $u_{n+1} = 10u_n - 18$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

احسب u_1 و u_2 و u_3 و خمّن عبارة u_n بدلالة n ثمّ حدّد عبارة u_n بدلالة n

الحل :

$$u_1 = 10u_0 - 18 = 70 - 18 = 52$$
$$u_2 = 10u_1 - 18 = 520 - 18 = 502$$
$$u_3 = 10u_2 - 18 = 5020 - 18 = 5002$$

نلاحظ أنّ

$$u_1 = 50 + 2 = 5 \times 10^1 + 2$$
$$u_2 = 500 + 2 = 5 \times 100 + 2 = 5 \times 10^2 + 2$$
$$u_3 = 5000 + 2 = 5 \times 1000 + 2 = 5 \times 10^3 + 2$$

وبالتالي يمكن تخمين عبارة المتتالية بالعلاقة $u_n = 5(10)^n + 2$

ولنبرهن صحّة ذلك بالتدريج : نُرمّز القضيّة $E(n): u_n = 5(10)^n + 2$

$E(0) = u_0 = 5(10)^0 + 2 = 7$ **والخاصّيّة محقّقة من أجل** $n = 0$

$E(1) = u_1 = 5(10)^1 + 2 = 52$ **والخاصّيّة محقّقة من أجل** $n = 1$

نفترض أنّ $E(n)$ صحيحة، ولنبرهن صحّة $E(n+1)$ أي نبرهن أنّ :

$$E(n+1): u_{n+1} = 5(10)^{n+1} + 2$$

$$L_1 = u_{n+1} = 10u_n - 18 = 10(5(10)^n + 2) - 18 = 5(10)^{n+1} + 2 = L_2$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

التمرين 51 : الاختبار 4

نعرّف المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ كما يلي : $u_{n+1} = \frac{5u_n+4}{u_n+2}$ ، $u_0 = \frac{1}{2}$

وسيم فاطمة اللاذقية 0936497038 | زياد داوود سلمية 0936834268 | أحمد الشيخ عيسى الرقة 0988024183 | مروان بجور حمص 0930170828

❶ باستعمال الرسم ،

مثّل على محور الفواصل ودون حساب الحدود u_0, u_1, u_2, u_3.

❷ ضع تخميناً حول اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ وتقاربها.

❸ نعرّف المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ بالعلاقة: $v_n = \frac{u_n-4}{u_n+1}$

1 . بيّن أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة، وعيّن أساسها وحدّها الأوّل.

2 . اكتب عبارة v_n بدلالة n ثمّ استنتج عبارة u_n بدلالة n،

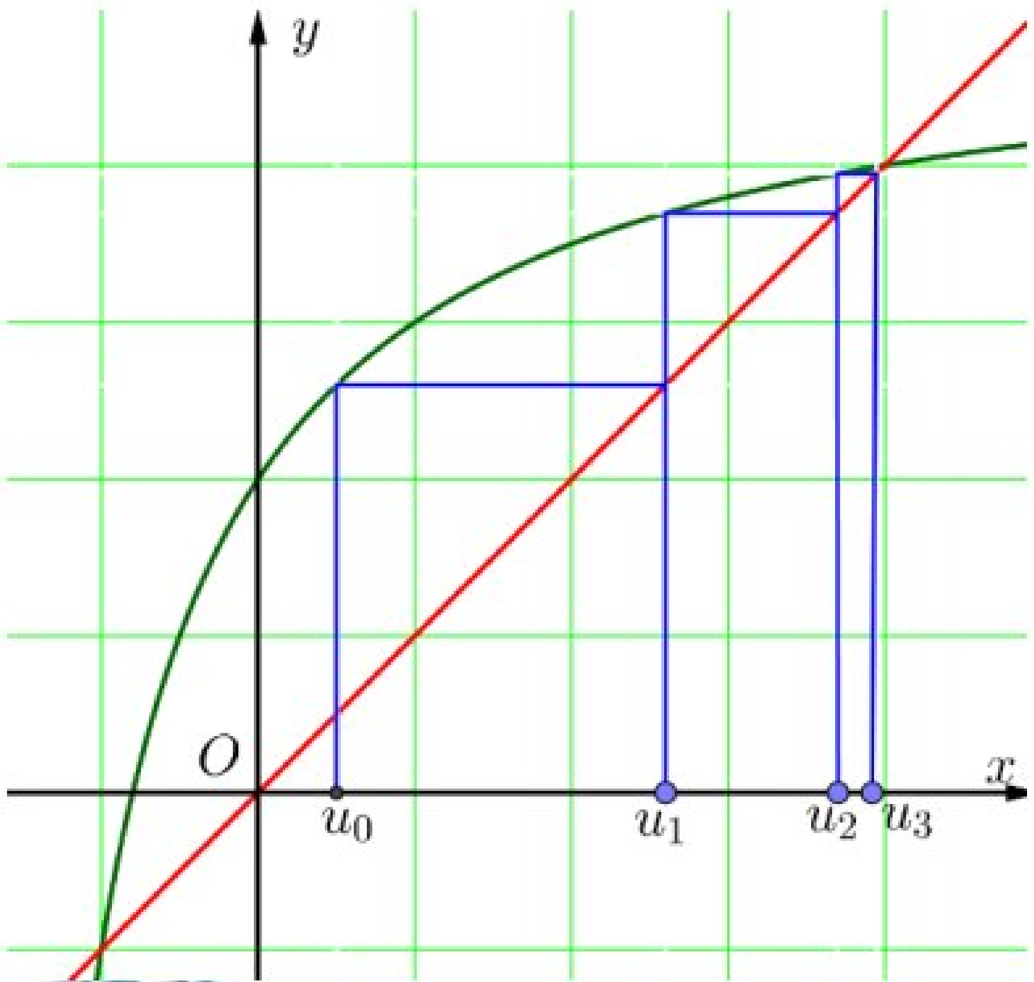
وعيّن نهاية المتتالية u_n.

الحل:

❷ نتوقّع من الشكل أنّ المتتالية متزايدة

بفرض $f(x) = \frac{5x+4}{x+2}$ حيث $u_{n+1} = f(u_n)$

$$f'(x) = \frac{5(x+2)-(5x+4)}{(x+2)^2} = \frac{5x+10-5x-4}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2} > 0$$



والتابع متزايد تماما

ونفرض القضية $E(n):\ u_{n+1} > u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$: $\frac{13}{5} = u_1 > u_0 = \frac{1}{2}$ و العلاقة صحيحة

نفرض صحّة $E(n)$ ونبرهن صحّة $E(n+1):\quad u_{n+2} > u_{n+1}$

من الفرض $u_{n+1} > u_n$ وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(u_{n+1}) > f(u_n) \Rightarrow \frac{5u_{n+1}+4}{u_{n+1}+2} > \frac{5u_n+4}{u_n+2} \Rightarrow u_{n+2} > u_{n+1}$$

و العلاقة $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق العلاقة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

والمتتالية u_n متزايدة، ولنبرهن أنّها محدودة من الأعلى.

نرمز القضيّة: $E(n): -1 \leq u_n \leq 4$

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

نلاحظ أنّ الخاصّة صحيحة من أجل $n = 0$ لأنّ $-1 \leq u_0 = \frac{1}{2} \leq 4$.

نفرض صحة $E(n)$ ولنبرهن صحّة $E(n+1) : -1 \leq u_{n+1} \leq 4$

من الفرض لدينا $-1 \leq u_n \leq 4$ وبالتالي وبما أن f متزايد تماما فإن :

$$f(-1) \leq f(u_n) \leq f(4) \Rightarrow -1 \leq u_{n+1} \leq 4$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضية $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 0$

المتتالية متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بـ 4 فهي متقاربة و نهايتها تساوي 4

❸ .1 $v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 4}{u_{n+1} + 1} = \frac{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} - 4}{\frac{5u_n + 4}{u_n + 2} + 1} = \frac{u_n - 4}{6(u_n + 1)} = \frac{1}{6}\left(\frac{u_n - 4}{u_n + 1}\right) = \frac{1}{6} v_n$$

و v_n متتالية هندسيّة أساسها $\frac{1}{6} < 1$ وحدّها الأوّل : $v_0 = \frac{u_0 - 4}{u_0 + 1} = \frac{-7}{3}$

.2 $v_n = v_0 . q^n = -\frac{7}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1} \Rightarrow v_n(u_n + 1) = u_n - 4 \Rightarrow u_n(v_n - 1) = -v_n - 4$$

$u_n = \frac{-v_n - 4}{v_n - 1}$ وبما أنّ $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ فإنّ : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 4$

التمرين 52 : النموذج الوزاري الثالث 2020

وسيم فاطمة | زياد داوود | أحمد الشيخ عيسى | مروان بجور
اللاذقية 0936497038 | سلمية 0936834268 | الرقة 0988024183 | حمص 0930170828

ليكن C_f الخط البياني للتابع f المعرف على $]0, +\infty[$ وفق $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$, والمطلوب:

❶ ادرس تغيرات f ونظم جدولاً بها.

❷ أثبت أن المستقيم d الذي معادلته $y = \frac{1}{2}x$ مقارب مائل للخط C_f, ثم ادرس الوضع النسبي.

❸ حل المعادلة $f(x) = x$

❹ لتكن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية معرفة تدريجياً بالشكل: $u_0 = 4$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ عند كل $n \in \mathbb{N}$ والمطلوب :

(a) احسب u_1 و u_2

(b) استنتج من تزايد التابع f على المجال $]2, +\infty[$ صحة الخاصة
$E(n): 2 < u_{n+1} < u_n \quad : n \in \mathbb{N}$

(c) استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متقاربة, واحسب نهايتها

(d) ارسم مقاربات C_f وارسم المستقيم $\Delta: y = x$ ثم ارسم C_f ومثل الحدود الأولى للمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ على الرسم نفسه

الحل :

❶ التابع $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ معرف واشتقاقي على $]0, +\infty[$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x}{2} + \frac{2}{x}\right) = +\infty$$

و مشتقه $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2}$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \notin]0, +\infty[\ , \quad x = 2 \Rightarrow f(2) = 2$$

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

❷ $f(x) - \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x} - \frac{1}{2}x = \frac{2}{x} \Rightarrow \lim_{x\to +\infty}\left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x\right)\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{2}{x} = 0$

بالتالي المستقيم $y = \frac{1}{2}x$ مقارب للخط C في جوار $+\infty$

$f(x) - \left(\frac{1}{2}x\right) = \frac{2}{x} > 0 \ ; x \in \ ]0, +\infty[$ **والخط C يقع فوق المقارب**

❸

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{x}{2}+\frac{2}{x}=x \Rightarrow \frac{x^2+4}{2x}=x \Rightarrow x^2+4=2x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2\ ,x=-2$$

❹

$$u_0=4 \quad , \quad u_1=\frac{4}{2}+\frac{2}{4}=\frac{5}{2} \quad , \quad u_2=\frac{\frac{5}{2}}{2}+\frac{2}{\frac{5}{2}}=\frac{5}{4}+\frac{4}{5}=\frac{41}{20}\ (a)$$

(b) لنفرض القضية $E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$

لنبرهن صحة $E(0)$. $2 \le u_1=\frac{5}{2} \le u_0=4$ والقضية $E(0)$ صحيحة

لنفرض صحة $E(n): 2 \le u_{n+1} \le u_n$ لنبرهن صحة $E(n+1):\ 2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$

وبما أن f متزايد تماماً عندما $x \ge 2$ و من الفرض $2 \le u_{n+1} \le u_n$ فإن

$$f(2) \le f(u_{n+1}) \le f(u_n) \Rightarrow\ 2 \le u_{n+2} \le u_{n+1}$$

والقضية $E(n+1)$ صحيحة

وبالتالي مما سبق القضيّة $E(n)$ صحيحة من اجل كل عدد طبيعي $n \ge 0$

(c) من العلاقة $2 \le u_{n+1} \le u_n$ نجد :

$u_{n+1} \le u_n$ فالمتتالية متناقصة و $2 \le u_n$

فالمتتالية محدودة من الادنى فالمتتالية متقاربة ونهايتها هي حل المعادلة $f(\ell)=\ell$

فالمتتالية متناقصة وحدها الاول 4 و $2 \le u_n$ وبالتالي فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=2$

(d) الرسم