دورة 2017 الأولى — 60 درجة

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_0 = 1$ ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n - 2$.

و لتكن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $v_n = u_n + 3$.

1) أثبت أنّ $(v_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة ، و أوجد أساسها .

2) اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم عبارة u_n بدلالة n .

3) ليكن في حالة عدد طبيعي n : $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ ، عبّر عن S_n بدلالة n ، و استنتج نهاية المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

الحل :

(1

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 3 = \frac{1}{3}u_n - 2 + 3$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1 = \frac{1}{3}(u_n + 3)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

فالمتتالية v_n هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{3}$.

(2

$$v_n = v_0 q^n$$
$$v_0 = u_0 + 3 = 1 + 3 = 4$$
$$v_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$u_n = v_n - 3 \quad \rightarrow \quad u_n = 4\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3$$

(3

S_n مجموع حدود متوالية من متتالية هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{3}$

$$a = v_0 = 4$$

عدد الحدود : $n - 0 + 1 = n + 1$

$$s_n = a\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 4\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 2\left(3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = 2(3 - 0) = 6$$

حيث :

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0 \quad ; \quad \left|q = \frac{1}{3}\right| < 1$$

دورة 2017 الثانية — 60 درجة

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق ما يأتي : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

2) أثبت أنّ $0 \leq u_n \leq 1$ و استنتج أنها متقاربة و احسب نهايتها .

الحل :

1) ليكن f التابع المعرّف على المجال $[0,+\infty[$ وفق :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

اشتقاقي f على المجال $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \leq 0$$

التابع f متناقص على المجال $[0,+\infty[$

فالمتتالية u_n متناقصة .

طريقة 2 :
$$u_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$
$$= \frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n} - \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+2}}{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \leq 0$$

فالمتتالية u_n متناقصة .

طريقة 3 : حدود المتتالية u_n موجبة تماماً و عليه فإنّ :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}\leq 1$$

فالمتتالية u_n متناقصة .

(2

$$0\leq\ u_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq 1$$

المتتالية u_n متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد صفر فهي متقاربة .

$$\lim_{n\to\infty} u_n\ =\ \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}})=0$$

دورة 2018 الأولى — 60 درجة

ليكن لدينا المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ المعرّفتان وفق : $u_n=5-\frac{1}{n}$, $v_n=5+\frac{1}{n^2}$ **و المطلوب :**

1) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متزايدة .
2) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq 1}$ متناقصة .
3) هل المتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان ؟ علل إجابتك .

الحل :

(1

$$u_{n+1}-u_n=5-\frac{1}{n+1}-\left(5-\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}\geq 0$$

فالمتتالية u_n متزايدة .

(2

$$v_{n+1}-v_n=5+\frac{1}{(n+1)^2}-\left(5+\frac{1}{n^2}\right)$$
$$=\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{n^2}$$
$$=\frac{-2n-1}{n^2(n+1)^2}\leq 0$$

فالمتتالية v_n متناقصة .

(3

$\begin{cases} u_n & \text{متزايدة} \\ v_n & \text{متناقصة}\end{cases}$ الشرط الأوّل محقق .

$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}\right)=5$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n=\lim_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n^2}\right)=5$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n=\lim_{n\to\infty} v_n=5$$

الشرط الثاني محقّق .

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 1}$, $(v_n)_{n\geq 1}$ متجاورتان .

دورة 2018 الثانية — 40 درجة

$(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية هندسيّة أساسها $q=2$ و فيها $u_0=1$ ، **و المطلوب :**

احسب u_3 ثم احسب المجموع $S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$.

الحل :

$$u_3=u_0q^3=1\times 2^3=8$$

$$S=u_3+u_4+u_5+u_6+u_7$$

المجموع S هو مجموع حدود متوالية من متتالية هندسيّة أساسها $q=2$

$$a=u_3=8$$

عدد الحدود : $n=7-3+1=5$

$$S=a\frac{1-q^n}{1-q}=8\frac{1-2^5}{1-2}=-8(1-32)=31\times 8$$

$$S=248$$

دورة 2019 الأولى — 60 درجة

لتكن المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n}$ و **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2) أثبت أنّ S_n تكتب بالشكل $S_n = \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$ ، ثم استنتج عنصراً راجحاً على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ و بيّن أنّها متقاربة .

الحل :

1)

$$S_{n+1} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} = S_n + \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{3^{n+1}} > 0$$

فالمتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2)

$$S_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q} = (1)\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

$$= \frac{1}{2}(3 - \frac{1}{3^n})$$

$$S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{3}{2}$$

و عليه فإنّ $M = \frac{3}{2}$ عنصر راجح على المتتالية $(S_n)_{n\geq 0}$.

المتتالية S_n متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد $M = \frac{3}{2}$ فهي متقاربة .

دورة 2019 الثانية — 60 درجة

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_n = \frac{2n-1}{n+1}$ و **المطلوب :**

1) ادرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

2) أثبت أنّ العدد 2 راجح على $(u_n)_{n\geq 0}$.

3) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ، ثم جد عدداً طبيعيّاً n_0 يحقّق أيّاً كان $n > n_0$ كان u_n في المجال $]1.9\ ,\ 2.1[$.

الحل :

1)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+2-1}{n+2} - \frac{2n-1}{n+1}$$

$$= \frac{(2n+1)(n+1) - (2n-1)(n+2)}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{3}{(n+1)(n+2)} > 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً .

2)

$$u_n - 2 = \frac{2n-1}{n+1} - 2 = \frac{2n-1-2n-2}{n+1}$$

$$= \frac{-3}{n+1} < 0$$

$$u_n - 2 < 0 \quad \rightarrow \quad u_n < 2$$

فالعدد 2 راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$.

3)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} (\frac{2n}{n}) = 2$$

$$1.9 < u_n < 2.1$$

$$1.9 < 2 - \frac{3}{n+1} < 2.1$$

$$-0.1 < -\frac{3}{n+1} < 0.1$$

$$\frac{3}{n+1} < \frac{1}{10} \quad \rightarrow \quad 30 < n+1 \quad \rightarrow \quad 29 < n$$

و بالتالي $n_0 = 29$ أو أي عدد طبيعي أكبر منه .

دورة 2020 الأولى — 80 درجة

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجية : $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + \frac{2}{u_n}$ عند كل $n \geq 0$ ، و **المطلوب** :

1) أثبت أنّ التابع $f(x) = \frac{x}{2} + \frac{2}{x}$ متزايد تماماً على المجال $[2, +\infty[$.

2) أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ أيّاً كان العدد الطبيعي n .

3) استنتج أنّ المتتالية متقاربة ، و احسب نهايتها .

الحل :

1) f اشتقاقي على المجال $[2,+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{x^2} = \frac{x^2-4}{2x^2} = \frac{(x-2)(x+2)}{2x^2}$$

$f'(x) \geq 0$ على المجال $[2,+\infty[$ ، و لا ينعدم على أي مجال جزئي منه

فالتابع f متزايد تماماً على المجال $[2,+\infty[$.

(2

$$E(n) : 2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

لنثبت صحّة $E(0)$:

$$2 \leq u_1 \leq u_0$$

$$u_1 = \frac{3}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6}$$

$$2 \leq \frac{13}{6} \leq 3$$

$E(0)$ محققة .

نفرض صحّة $E(n)$ أي نفرض أنّ

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

و نبرهن صحّة $E(n+1)$:

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

بما أنّ $f(x)$ متزايد تماماً على المجال $[2,+\infty[$ فإنّ :

$$f(2) \leq f(u_{n+1}) \leq f(u_n)$$

$$2 \leq u_{n+2} \leq u_{n+1}$$

$E(n+1)$ محققة . فالقضيّة صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

(3

وجدنا أنّ :

$$2 \leq u_{n+1} \leq u_n$$

أي إنّ المتتالية u_n متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة

نهايتها l هي حل المعادلة $f(x) = x$:

$$f(x) = x \rightarrow \frac{x}{2} + \frac{2}{x} = x \rightarrow \frac{2}{x} = \frac{x}{2}$$

$$x^2 = 4$$

$x_1 = -2$ مرفوض

$x_2 = 2$ مقبول

أي إنّ : $\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$

دورة 2020 الثانية — 80 درجة

لتكن المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ المعرّفة وفق : $u_n = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n}$. **المطلوب** :

1) أثبت أنّ $n \leq 2^n$ أيّاً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

2) استنتج أنّ $\frac{2}{e-2}$ عنصر راجح على المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$.

3) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 1}$ متقاربة .

الحل :

(1

$$E(n) : n \leq 2^n$$

$E(1)$ محققة لأنّ : $1 \leq 2^1$

نفرض صحّة $E(n)$ و نبرهن صحة $E(n+1)$:

$$n \leq 2^n$$
$$2n \leq 2.2^n$$
$$n+1 \leq n+n \leq 2^{n+1}$$
$$n+1 \leq 2^{n+1}$$

$E(n+1)$ محقّقة . فالقضيّة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 1$.

(2

$$n \leq 2^n$$
$$\frac{n}{e^n} \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n$$
$$u_n \leq \left(\frac{2}{e}\right)^1 + \left(\frac{2}{e}\right)^2 + \left(\frac{2}{e}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{e}\right)^n$$

$$u_n \leq \frac{2}{e}\frac{1-\left(\frac{2}{e}\right)^n}{1-\frac{2}{e}}$$

$$u_n \leq \frac{2}{e-2}\left(1-\left(\frac{2}{e}\right)^n\right) \leq \frac{2}{e-2}$$

$$u_n \leq \frac{2}{e-2}$$

فالعدد $M = \frac{2}{e-2}$ راجح على المتتالية u_n .

3) لندرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$:

$$u_{n+1} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^2} + \frac{3}{e^3} + \cdots + \frac{n}{e^n} + \frac{n+1}{e^{n+1}}$$

$$u_{n+1} = u_n + \frac{n+1}{e^{n+1}} \rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{n+1}{e^{n+1}} \geq 0$$

المتتالية u_n متزايدة ، و هي محدودة من الأعلى بالعدد $\frac{2}{e-2}$ فهي متقاربة .

دورة 2021 الأولى — 70 درجة

لتكن لدينا المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرّفة بالعلاقة التدريجيّة : $u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 3$

و لنعرف المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ وفق $v_n = u_n + 6$. **المطلوب :**

1) أثبت أنّ المتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسيّة ، عيّن أساسها و احسب v_0 ، ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2) نعرّف المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ وفق : $w_n = \ln(v_n)$ ، أثبت أنّ المتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حسابيّة و احسب w_0 ثم احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5$.

الحل :

(1

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 + 6$$
$$= \frac{1}{2}u_n + 3 = \frac{1}{2}(u_n + 6)$$
$$v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq0}$ هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدّها الأوّل :

$$v_0 = u_0 + 6 = 8$$
$$v_n = v_0 q^n = 8\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(2

$$w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln(\frac{1}{2}v_n) = \ln(v_n) - \ln 2$$
$$w_{n+1} = w_n - \ln 2$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq0}$ حسابيّة أساسها $r = -\ln 2$

$$w_0 = \ln(v_0) = \ln 8 = 3\ln 2$$
$$w_5 = w_0 + 5r = 3\ln 2 - 5\ln 2 = -2\ln 2$$
$$S = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{6}{2}(3\ln 2 - 2\ln 2)$$
$$S = 3\ln 2$$

دورة 2021 الثانية	70 درجة

نتأمل المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق : $u_0 = \frac{5}{2}$ و أياً كان العدد الطبيعي n : $u_{n+1} = (u_n - 2)^2 + 2$. **المطلوب** :

1) أثبت بالتدريج أنّ $2 \leq u_n \leq 3$ أياً كان العدد الطبيعي n .

2) أثبت أنّ المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة .

3) استنتج تقارب المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ و جد $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

الحل :

1)

$$E(n) : 2 \leq u_n \leq 3$$

$E(0)$ محقّقة لأنّ :

$$2 \leq u_0 = \frac{5}{2} \leq 3$$

نفرض صحّة $E(n)$ و نبرهن صحّة $E(n+1)$:

$$2 \leq u_n \leq 3$$

$$0 \leq u_n - 2 \leq 1$$

$$0 \leq (u_n - 2)^2 \leq 1$$

$$2 \leq (u_n - 2)^2 + 2 \leq 3$$

$$2 \leq u_{n+1} \leq 3$$

$E(n+1)$ محقّقة . فالقضيّة $E(n)$ صحيحة أياً كان العدد الطبيعي $n \geq 0$.

2)

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (u_n - 2)^2 + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 4u_n + 4 + 2 - u_n \\ &= u_n^2 - 5u_n + 6 = (u_n - 2)(u_n - 3) \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

فالمتتالية u_n متناقصة .

3) المتتالية u_n متناقصة و محدودة من الأدنى بالعدد 2 فهي متقاربة .

لإيجاد نهايتها نحل المعادلة $f(x) = x$ حيث

$$f(x) = (x-2)^2 + 2$$

$$(x-2)^2 + 2 = x \quad \leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 + 2 = x$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) = 0$$

إما $x = 3$ (مرفوض ؛ لأنّ المتتالية متناقصة)

أو $x = 2$ مقبول

أي إنّ :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 2$$

إلى هنا نصل وإياكم إلى نهاية أسئلة الدورات المتعلقة ببحثي المتتاليات ونهاية متتالية

نرجو أن تكونوا قد استفدتم منه على أكمل صورة

لا تنسوا مشاركة الملف مع أصدقائكم لتعم الفائدة ♥

ولمتابعة حلول أسئلة الدورات وغيرها اشتركوا بقناتنا على تطبيق تلغرام

BAC MATHS