ملخص النهايات limits

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$$

<u>حل النهايات infinity (المالانهاية):</u>

الناتج	الطريقة	حالات المالانهاية
الناتج يكون عدد ثابت.	$\frac{\text{معامل اكبر اس}}{\text{معامل اكبر اس}}$	**درجة البسط = درجة المقام.**
∞	--------	**درجة البسط > درجة المقام.**
0	---------	**درجة المقام > درجة البسط**

1-عندما تكون درجة البسط مساوية لدرجة المقام:

طريقة الحل:

نقسم معامل x ذات الدرجة الأكبر في البسط / معامل x ذي الدرجة الأكبر في المقام

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{3x^2+2x-5}\right)$$

طريقة الحل:

درجة المقام = درجة البسط = 2

لذا نقسم معاملات x^2 في البسط و المقام على بعضهما:

X^2 = 1 , 3x^2 = 3 → $\frac{1}{3}$

مثال اخر: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{2x+3}\right)$

درجة البسط = درجة المقام = 1

نقسم معاملات x في البسط والمقام:

X = 1 , 2x = 2 → $\frac{1}{2}$

2- عندما تكون درجة البسط اكبر من درجة المقام: البسط > المقام

طريقة الحل: يكون الحل دائما: ∞ او ∞- (على حسب x والدرجة)

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{3\mathrm{x}-5}\right)$$

طريقة الحل:

درجة البسط = 2 اما درجة المقام = 1 البسط > المقام

لذا يكون الناتج ∞ .

حالات $-\infty$ ←x و درجة البسط > درجة المقام:

- عندما تكون $-\infty$ ← x ويكون اس x عدد زوجي يكون الناتج : ∞
- عندما تكون $-\infty$ ← x ويكون اس x عدد فردي يكون الناتج: $-\infty$
  (يستخدم القانون عندما تكون المعادلة خطية بدون مقام **فقط بسط**).
- عند وجود بسط ومقام و $-\infty$ ← x و درجة البسط > درجة المقام:
  نطرح درجة البسط – درجة المقام:
  فان كان الناتج عدد زوجي = ∞ , وان كان عدد فردي = $-\infty$

الحالة	الطريقة والناتج
اس البسط فردي $-\infty$ ←x .	الناتج = $-\infty$
اس البسط زوجي $-\infty$ ←x	الناتج = ∞
عند وجود بسط ومقام لكن درجة البسط اكبر من درجة المقام و $-\infty$ ← x	الطريقة: نطرح درجة البسط – درجة المقام. الناتج عدد زوجي اذا الناتج = ∞ الناتج عدد فردي اذا الناتج = $-\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^2-5)$$

اس x = 2 (عدد زوجي . $-\infty$ ← x) : الناتج = ∞

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}(x^3+3x+5)$$

$-\infty$ = الناتج : (عدد فردي) 3 = x اس , x → $-\infty$

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3+5}{x+4}\right)$$

درجة البسط > درجة المقام, $x\to-\infty$ درجة البسط - درجة المقام : $1-3=2$ (عدد زوجي) لذا الناتج = ∞

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4+5x^2}{x^2}\right)$$

درجة البسط > درجة المقام, $x\to-\infty$ درجة البسط – درجة المقام (2 = 4-2) الناتج عدد زوجي لذا الناتج = ∞.

3- درجة المقام اكبر من درجة البسط:

طريقة الحل:

دائما الحل يكون = 0 .

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+x^3+4x}{x^5+5x^2+20}\right)$$

درجة المقام = 5 , درجة البسط = 4 :

درجة المقام > درجة البسط , اذا الناتج = *0* .

مثال:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{5x^2+3+x^4}{3x^2+x^7+20}\right)$$

درجة البسط = 4 , درجة المقام = 7 :

درجة المقام > درجة البسط , اذا الناتج = 0.

امثلة من التجميعات:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^4+2x^2-1}{3x^3-2x-2}\right)\quad -1$$

درجة البسط = 4 , درجة المقام = 3 . درجة البسط > درجة المقام : اذا الناتج = ∞

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{100}{x^2-5}\right)\quad -2$$

درجة البسط = 0 (أي عدد ثابت درجته = 0) , درجة المقام = 2 .

درجة البسط < درجة المقام : اذا الناتج = 0.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^2+x-100}{2x^2-5x}\right)\quad -3$$

درجة البسط = 2 , درجة المقام = 2 . درجة البسط = درجة المقام :

قسمة معامل x^2 البسط على المقام:

2x^2 = 2 , 7x^2 = 7 . $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{7x^2+x-100}{2x^2-5x}\right) = \frac{7}{2}$

$\lim_{x\to-\infty} x^3 - x^2 + x - 11$ -4

درجة البسط = 3 , درجة المقام = 0 (المقام = 1 لكن لا يكتب).

درجة البسط > درجة المقام. $X \to -\infty$. اكبر اس x = 3 (عدد فردي).

قاعدة: عندما تكون $-\infty \to x$ ويكون اس x عدد فردي يكون الناتج: $-\infty$

اذا الناتج = $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4+2x^2-1}{x^3-2x-2}\right)$$ -5

درجة البسط = 4 , درجة المقام = 3 . $X \to -\infty$.

درجة البسط – درجة المقام -> 4 – 3 = 1 (عدد فردي). لذا الناتج = $-\infty$

- **حل النهايات غير المنتهية limits infinity عند وجود جذر:**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+20}\right)$$

طريقة الحل:

1-ناخذ x فقط مع معاملاتها (x البسط نأخذها مع الجذر) تصبح:

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

2- نحذف تربيع x مع الجذر (ونجعل x تحت القيمة المطلقة absolute value) لان الجذر عدد زوجي والاس عدد زوجي :

$$\frac{|x|}{x}$$

3-نعوض x بالنهايات لنجد الناتج:

$$\frac{|\infty|}{\infty}=1$$

مثال اخر:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+20}\right)$$

1-ناخذ x فقط مع معاملاتها (x البسط نأخذها مع الجذر) تصبح:

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x}$$

2- نحذف تربيع x مع الجذر (ونجعل x تحت القيمة المطلقة absolute value):

$$\frac{|x|}{x}$$

3- نعوض المعادلة ب $-\infty$ لنجد الناتج:

$$\frac{|-\infty|}{-\infty} \rightarrow \frac{\infty}{-\infty} = -1$$

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+7}{\sqrt{9x^2+20}}\right)$$

1-ناخذ x مع معاملاتها فقط (x المقام مع الجذر):

$$\frac{3x}{\sqrt{9x^2}}$$

2-نحذف الجذر مع التربيع (مع جذر9 ووضع x داخل قيمة مطلقة absolute value):

$$\frac{3x}{|3x|}$$

3- نعوض x بالانهايات لتصبح:

$$\frac{3\infty}{|3\infty|} \rightarrow \frac{3\infty}{3\infty} = \frac{3}{3} = 1$$

مثال من التجميعات:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2-16}}{8-2x}\right)$$

1-ناخذ x مع معاملاتها فقط (x البسط مع الجذر):

$$\frac{\sqrt{x^2}}{-2x}$$

2-نحذف الجذر مع التربيع (مع وضع x تحت القيمة المطلقة لان الجذر عدد زوجي واس x عدد زوجي):

$$\frac{|x|}{-2x}$$

3-نعوض x بالنهايات السالبة:

$$\frac{|-\infty|}{-2(-\infty)} \rightarrow \frac{\infty}{-2(-\infty)} = \frac{1}{2}$$

التعويض المباشر في النهايات Limits:

- نستخدم التعويض المباشر في النهايات عندما تكون:
1- X → constant عدد حقيقي.
2- عند التعويض **لا تساوي** النهاية 0 (اذا كانت قابلة للتحليل) او تكون غير معرف undefined.

مثال:

$$\lim_{x\to 3}(x^3+x+5)$$

- نلاحظ عند التعويض:

1-لا وجود للمقام (أي انها ليست غير معرفة undefined).

$$3^3+3+5=35$$

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{2+x}{x+5}\right)$$

- عند التعويض:

المقام لا يساوي 0 (أي انها معرفة *defined*)

البسط يساوي *0* (لكن لا يمكن التحليل) . لذا نستخدم التعويض:

$$\frac{2-2}{-2+5}=\frac{0}{3}=0$$

مثال من التجميعات:

$$\lim_{x\to 5}(x^3+x-6)$$

- عند التعويض:

المقام لا يساوي *0* .

لا يمكن التحليل : (لذا نعوض):

$$5^3+5-6=124$$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3-1}{x-1}\right)$$

- عند التعويض:

المقام لا يساوي 0 (أي انها معرفة defined).

لا تساوي 0 (مع انه يمكن التحليل لكن بما انها لا تساوي 0 اذا التعويض اسهل):

$$\frac{(-2)^3-1}{(-2)-1}=\frac{-8-1}{-2-1}=\frac{-9}{-3}=3$$

(عندما يكون العدد سالب مرفوع لاس فردي يكون الناتج بالسالب).

حالات undefined form والتحليل:

- حالات undefined form وهي التي يكون فيها المقام = 0
- في حالات undefined form نبحث عن طرق تحليل لتبسيط المعادلة ونجعل المقام لا يساوي 0.

حالات التحليل	الطريقة
طرق تحليل معادلات الدرجة الثانية	$(x-y)^2=(x^2-2xy+x^2)$ $x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ $(x+y)^2=(x^2+2xy+y^2)$ 4- x^2+bx+c نبحث عن عددين مضروبهما = c , مجموعهما = b.
تحليل معادلات الدرجة الثالثة	$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$ $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$ $(x-y)^3=(x-y)(x^2-2xy+y^2)$
الضرب في المرافق	للتخلص من الجذور (طرح بين جذرين عادة) في البسط او المقام: $\frac{\sqrt{x+a}-\sqrt{x-b}}{x+c}$ المرافق: $\frac{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b}}$ (نعكس إشارات ما بين الجذور) وبعد الضرب تصبح: $\frac{x+a-(x-b)}{(x+c)(\sqrt{x+a}+\sqrt{x-b})}$ نلاحظ في البسط فقط تم فك الجذور.
عامل مشترك	تستخدم فقط عند عدم وجود بقية طرق التحليل, لذا نبحث عن عامل مشترك للاختصار مع المقام او البسط: مثال: $\frac{x^2+2x}{x}$ ناخذ x عامل مشترك في البسط (لنختصرها مع المقام):

$\frac{x(x+2)}{x}$ نحذف x مع بعضهما لتصبح المعادلة الجديدة X + 2	

- **تحليل معادلات الدرجة الثانية في النهايات limits:**

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2-x-2}{x-2}\right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 اي انها غير معرفة *Undefined*.

لذا نستخدم تحلي معادلة الدرجة الثانية :

$$\frac{x^2-x-2}{x-2}$$

1-للتحليل نبحث عن عددين مضروبهما = -2 ومجموعهما = -1

(يمكن التحليل باستخدام الالة مود 5 , 3 -> نعكس إشارات الحلول مع إضافة x)

$$\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)}$$

2-نختصر x-2 مع بعضهما لتصبح المعادلة:

$$(x+1)$$

3-نستخدم التعويض x→2 :

2 + 1 = 3

مثال:

$$\lim_{x\to -3}\left(\frac{x^2-9}{x+3}\right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 , لذا نستخدم التحليل:

1-نلاحظ ان البسط على شكل x^2-y^2 عند التحليل تصبح (x-y)(x+y):

$$\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}$$

2-نختصر x+3 مع بعضهما لتصبح المعادلة:

X – 3

3-نعوض في المعادلة $x \rightarrow -3$:

(-3) – 3 = -6

مثال:

$$\lim_{x\to -4}\left(\frac{x^2+8x+16}{x+4}\right)$$

عند التعويض:

نجد ان المقام = *0*

لذا نستخدم التحليل:

1-نلاحظ البسط على شكل $x^2+2xy+y^2$ والتي يكون فكها (x+y)(x+y) :

$$\frac{(x+4)(x+4)}{(x+4)}$$

2-نختصر x+4 مع بعضهما لتصبح:

X + 4

3-نعوض مباشرة $x \rightarrow -4$:

(-4)+4 = 0

<u>مثال من التجميعات:</u>

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)$$

عند التعويض:

نلاحظ ان المقام = 0 لذا نحتاج للتحليل:

1-البسط على شكل (x^2-y^2) يكون فكها (x-y)(x+y):

$$\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)}$$

2-نختصر x-1 مع بعضهما:

X + 1

3-نعوض مباشرة $x \rightarrow 1$:

(1) + 1 = 2

- تحليل معادلات الدرجة الثالثة في النهايات Limits:

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x^3-64}{x-4}\right)$$

عند التعويض:

نجد ان المقام = 0 (يعني undefined form) لذا نستخدم التحليل:

1-نلاحظ ان البسط على شكل $x^3 - y^3$ --> $(x-y)(x^2+xy+y^2)$:

$$\frac{x^3-4^3}{x-4} \rightarrow \frac{(x-4)(x^2+4x+4^2)}{(x-4)}$$

2-نختصر x – 4 تصبح المعادلة:

$$(x^2+4x+4^2)$$

3-نعوض في المعادلة $x \rightarrow 4$:

$$(4)^2+4(4)+4^2 \rightarrow 16+16+16=48$$

مثال:

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x+2}{x(x^3+8)}\right)$$

عند التعويض:

المقام لا يساوي 0 لكن البسط = 0 وفي حالة كان الناتج 0 عند التعويض ويمكن التحليل فاننا **نستخدم التحليل:**

1- المقام على شكل $x^3 + y^3$ --> $(x+y)(x^2-xy+y^2)$

$$\frac{x+2}{x(x^3+2^3)} \rightarrow \frac{x+2}{x(x+2)(x^2-2x+2^2)}$$

2- نختصر x+2:

$$\frac{1}{x(x^2-2x+4)}$$

3-نعوض مباشرة في المعادلة x → -2 :

$$\frac{1}{-2((-2)^2-2(-2)+4} \to \frac{1}{-2(12)} = \frac{1}{-24}$$

مثال من التجميعات:

$$\lim_{x\to-2}\left(\frac{2+x}{2x(x^3+8)}\right)$$

عند التعويض:

المقام لا يساوي 0 لكن البسط = 0 وبما انه يمكن التحليل فنستخدمه:

1-نجد ان المقام على شكل x^3+y^3 --> $(x+y)(x^2-xy+y^2)$:

$$\frac{2+x}{2x\,(x^3+2^3)} \to \frac{2+x}{2x(x+2)(x^2-2x+2^2)}$$

2-نختصر x+2 لتصبح المعادلة:

$$\frac{1}{2x(x^2-2x+4)}$$

3-نعوض مباشرة في المعادلة $\mathrm{x}\to-2$:

$$\frac{1}{2(-2)((-2)^2-2(-2)+4} \to \frac{1}{-4(12)} = \frac{1}{-48}$$

- **الضرب بالمرافق conjugate عند وجود الجذور:**

نستخدم طريقة الضرب بالمرافق عند:

1- عند وجود الجذور 2- المقام = 0 (او عند عدم القدرة لحلها).

المرافق هو نفس الجذرين لكن نعكس الإشارة ما بينهما (من طرح الى جمع) ونضربه في البسط والمقام:

مثال:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2}\right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 (undefined form) مع وجود الجذور لذا نستخدم التحليل:

1-نجد المرافق للجذر ونضربه في المعادلة الاصلية (المرافق يكون نفس الجذر لكن نغير الإشارة ما بين الجذرين ونضربه في البسط والمقام):

$$\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{2-x^2}}{x^2} * \frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2}}$$

2-عند الضرب الجذور ببعضها فاننا فقط نحذف الجذور ويبقى البسط كما هو بدون جذور:

$$\frac{x^2+2-(2-x^2)}{x^2(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2})} \to \frac{x^2+2-2+x^2}{x^2(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2})}$$
$$= \frac{2x^2}{x^2(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2})}$$

3-نختصر x^2 البسط مع المقام:

$$\frac{2}{(\sqrt{x^2+2}+\sqrt{2-x^2})}$$

4-نعوض في المعادلة x → 0 :

$$\frac{2}{(\sqrt{0^2+2}+\sqrt{2-0^2})} = \frac{2}{(\sqrt{2}+\ \sqrt{2})}$$

5-نكمل الحل بشكل عادي:

$$\frac{2}{2(\sqrt{2})} \to \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6-(اختياري) نستخدم المرافق لكي لا نجعل الجذر في المقام:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} * \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \to \frac{\sqrt{2}}{2}$$

مثال من المراجعة Revision:

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x^2} \right)$$

عند التعويض:

نجد ان المقام = 0 ولوجود الجذور نستخدم الضرب في المرافق Conjugate:

1-نضرب في المرافق (وهو نفس الجذور لكن نعكس الإشارة بينهما):

$$\frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x^2} * \frac{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3}}{\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3}}$$

2-عند ضرب الجذور ببعضها فاننا نحذف الجذور فقط وتبقى المعادلة كما هي (في البسط):

$$\frac{x^2+3-3}{x^2(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3})} \to \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3})}$$

3-نختصر x^2 البسط مع المقام لتصبح المعادلة:

$$\frac{1}{(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{3})}$$

4-نعوض مباشرة في المعادلة x→0:

$$\frac{1}{(\sqrt{0^2+3} + \sqrt{3})} \to \frac{1}{(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

5-(اختياري) نضرب في المرافق كي لا نجعل الجذر في المقام:

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} * \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2 * 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

امثلة في التجميعات:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sqrt{16+h} - \sqrt{16}}{h} \right)$$

عند التعويض:

نجد ان المقام = 0 ولوجود الجذور فاننا نضرب بالمرافق:

1-نضرب البسط والمقام في المرافق (نفس الجذور لكن بعكس الإشارة):

$$\frac{\sqrt{16+h}-\sqrt{16}}{h} * \frac{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}}{\sqrt{16+h}+\sqrt{16}}$$

2-عند ضرب الجذور ببعضها (في البسط) فقط نحذف الجذور وتبقى المعادلة كما هي:

$$\frac{16+h-16}{h(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})} \to \frac{h}{h(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}$$

3-نختصر h مع بعضها لتصبح المعادلة:

$$\frac{1}{(\sqrt{16+h}+\sqrt{16})}$$

4-نعوض في المعادلة 0 → h :

$$\frac{1}{(\sqrt{16+0}+\sqrt{16})} \to \frac{1}{(\sqrt{16}+\sqrt{16})} = \frac{1}{4+4} = \frac{1}{8}$$

حالات Doesn't exist والتي لا يمكن تحليلها:

الناتج	الحالة
∞ or doesn't exist	$\frac{1}{0}$
0	$\frac{1}{\infty}$
Doesn't exist	∞ و $-\infty$
Doesn’t exist	$\lim x^{+} \;=/ Lim x^{-}$ لا يتساويان
∞	$\frac{a}{0.000000001}$
−∞	$\frac{a}{-0.0000000001}$

- عندما يكون المقام = 0 ولا يمكن تحليلها اذا نقول ان النهاية غير موجودة Doesn't exist.
- عندما لا تتساوى $\lim x^{+}$ مع $Lim x^{-}$ فان النهاية غير موجودة doesn't exist (حالات القيمة المطلقة Absolute value).
- عندما نريد التعويض بعدد في النهاية فاننا نعوض بعدد اصغر منه وعدد اكبر منه (اصغر واكبر بفرق بسيط جدا 0.0000001) لتكون الحالات:

$$\lim_{x \to a^{+}} \left(\frac{b}{x-a}\right)$$	∞
$$\lim_{x \to a^{-}} \left(\frac{b}{x-a}\right)$$	$-\infty$
$$\lim_{x \to -a^{+}} \left(\frac{b}{x+a}\right)$$	$-\infty$
$$\lim_{x \to -a^{-}} \left(\frac{b}{x+a}\right)$$ **a:constant** **حيث a عدد حقيقي وليس متغير.**	∞

الحالة	التعويض
1^{-}	0.999999999
1^{+}	1.000000001

مثال:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{5}{x+3}\right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 , ولا يمكن التحليل, مباشرة نقول انها غير موجودة Doesn't exist.

تحديد اتجاهها:

نحدد ما اذا كانت ∞ او$-\infty$ بالتعويض مره بعدد اقل من 3- (-3^{-}) ومره بعدد اكثر من 3- (-3^{+}) لنجد انها:

$$\lim x \to -3^{+} \frac{5}{(-2.999999)+3} = \frac{5}{0.000001} = \infty$$

$$\lim x \to -3^{-} = \frac{5}{(-3.00000001)+3} = \frac{5}{-0.00000001} = -\infty$$

وبما ان $\lim -3^{+}$ لا تتساوى مع $\lim -3^{+}$ اذا هي غير موجودة doesn’t exist ولا يمكن تحديد اتجاهها.

مثال:

$$\lim x \to 4 \frac{3+x}{x-4}$$

عند التعويض:

المقام = 0 ولا يمكن التحليل لذا فان النهاية غير موجودة *Doesn't exist*.

نحدد الاتجاه :

في الجهة الموجبة ناخذ عدد اكبر من 4 بفرق بسيط جدا (4.0000001):

$$\lim x \to 4^{+} \frac{3+4}{(4.0000001)-4} = \frac{3+4}{0.00000001} = \infty$$

في الجهة السالبة نعوض بعدد اصغر من 4 بفرق بسيط جدا (3.999999):

$$\lim x \to 4^{-} \frac{3+4}{(3.999999999)-4} = \frac{3+4}{-0.00000001} = -\infty$$

لا يهم البسط في حالات النهاية غير الموجودة Doesn't exist

مثال من التجميعات:

$$\lim x \to 5^{-} \frac{1}{5-x}$$

عند التعويض:

المقام = 0 ولا يمكن التحليل. لذا النهاية غير موجودة Doesn't exist .

لكن حدد الاتجاه في هذا السؤال لذا نبحث عن النهاية عندما تكون 5^- :

$$\lim x \to 5^- \frac{1}{5-(4.99999999)} = \frac{1}{0.000000001} = \infty$$

- **القيمة المطلقة في البسط Absolute value:**

الحالة	الناتج
عندما يكون المقام لا يساوي 0	التعويض المباشر في المعادلة والنهاية موجودة وهي رقم ثابت.
عندما يكون المقام = 0 ولا يمكن التحليل.	لا نهتم للقيمة المطلقة فقط المهم المقام
عندما يكون المقام = 0 ويمكن التحليل.	نستخدم التحليل أولا. ومن ثم نغير الإشارة ونرى هل $\lim x^+ = \lim x^-$

مثال:

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{|x-8|}{x+5}\right)$$

عند التعويض نجد ان المقام لا يساوي 0 .

لذا يمكن حل المعادلة بالتعويض:

$$\frac{|4-8|}{4+5} \to \frac{|-4|}{9} = \frac{4}{9}$$

مثال:

$$\lim_{x\to4}\left(\frac{|x-6|}{x-4}\right)$$

عند التعويض نجد ان المقام = 0 ولا يمكن التحليل لذا:

فقط نحلل المقام الى + و - :

$$\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{|x-6|}{(4.00000001)-4} = \frac{|x-6|}{0.00000001} = \infty \right)$$

$$\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{|x-6|}{(3.9999999)-4} = \frac{|x-6|}{-0.000000001} = -\infty \right)$$

4^+ و 4^- لا يتساوون لذا النهاية لا يمكن تحديدها.

مثال:

$$\lim_{x \to 4} \left(\frac{|x-4|}{x-4} \right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 لكن يمكن التحليل: (بما انها قيمة مطلقة فاننا مره ناخذ القيمة المطلقة بالسالب ومره بالموجب):

$$\lim_{x \to 4^+} \left(\frac{|x-4|}{x-4} \right) \quad = \frac{(x-4)}{(x-4)} = 1$$

$$\lim_{x \to 4^-} \left(\frac{|x-4|}{x-4} \right) \quad = \frac{-(x-4)}{(x-4)} = -1$$

النهاية الموجبة 1^+ لا تساوي النهاية السالبة 1^-

لذا النهاية غير موجودة doesn't exist.

مثال من التجميعات:

$$\lim_{x \to -3} \left(\frac{|x+3|}{x^2+x-6} \right)$$

عند التعويض:

المقام = 0 ولكن يمكن التحليل (يمكن التحليل المقام معادلة الدرجة الثانية).

1-المقام على شكل $(x^2 + bx + c)$ عددين مجموعهما b ومضروبهما c (يمكن استخدام الحاسبة مود 5 , 3 نضيف الحلول مع x مع تغيير الإشارات):

$$\frac{|x+3|}{(x+3)(x-2)}$$

2-ناخذ البسط (القيمة المطلقة) مره بموجب ومره بسالب (نبدا بالموجب):

$$\frac{(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

3-نختصر x+3 مع بعضها:

$$\frac{1}{(x-2)}$$

4-نعوض في المعادلة 3- → x :

$$\frac{1}{-3-2} = \frac{1}{-5}$$

-ناخذ القيمة المطلقة بالسالب:

$$\frac{-(x+3)}{(x+3)(x-2)} \to \frac{-1}{(x-2)} = \frac{-1}{-3-2} = \frac{1}{5}$$

-نلاحظ ان -3^+ لا يتساوى مع -3^-

لذا فان النهاية غير موجودة Doesn't exist.

من التجميعات: .

$$\lim_{x\to1^-}\left(\frac{x^2-1}{|x-1|}\right)$$

عند التعويض نجد ان المقام = 0. لكن يمكن التحليل لذا:

1-البسط على شكل $x^2 - y^2$ يمكن فكها $(x-y)(x+y)$ تصبح المعادلة:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{|x-1|}$$

2-في السوال تم تحديد اتجاه النهاية Limit بالسالب $x \to 1^-$ لذا ناخذ القيمة المطلقة بالسالب:

$$\frac{(x-1)(x+1)}{-(x-1)}$$

3-نختصر x-1 مع بعضها لتصبح المعادلة:

$$\frac{(x+1)}{-1}$$

4-نعوض في المعادلة x→1:

$$-(1+1) = -2$$

نقاط الاتصال Continuous

- يجب ان يكونا الشرطين متساويين: f(x) = f(c)

$$f(x) = x + b \; for \; x \geq a$$

$$c \; for \; x < a$$

- يمكن إيجاد نقطة الاتصال بمساواة الشرطين مع تعويض x ب a:

$$c = x + b \to c = a + b$$

مثال:

$$f(x) = kx + 3\,, x \geq 1$$
$$4 \; for \; x < 1$$

اوجد النقطة التي تكون متصلة في كل مكان :

1-نساوي المعادلتين ببعضهما:

$$kx + 3 = 4$$

2-نعوض x ب 1:

1k+3=4

3-نحل المعادلة بشكل عادي:

$$k + 3 = 4 \rightarrow k = 4 - 3 \rightarrow k = 1$$

(هذه الفكرة الوحيدة الي شفتها في التجميعات لنقاط الاتصال).

مثال من المراجعة Revision:

$$f(x) = x + c \; if \; x < 2$$
$$cx^2 + 1 \; if \; x \geq 2$$

اوجد النقطة التي تكون فيها نقطة متصلة في كل مكان:

1-نساوي المعادلتين :

$$x + c = cx^2 + 1$$

2-نعوض x ب 2:

$$2 + c = c(2)^2 + 1$$

3-نحل المعادلة بشكل عادي:

$$2 + c = 4c + 1 \rightarrow 2 - 1 = 3c \rightarrow 1 = 3c, c = \frac{1}{3}$$

Solving limits by calculator طريقة حل النهايات بالحاسبة

التعويض في الالة	النهاية
نعوض بنفس الرقم	**X → constant** **عدد ثابت**
نعوض ب 9999999999 (لا يهم عدد 9 المهم انه عدد كبير جدا).	**x→ ∞**
نعوض ب 999999999-	**X → $-\infty$**
نعوض بعدد اقل من a بفرق بسيط جدا مثال: a=4 → a=3.9999999999	**X → a^-**
نعوض بعدد اكبر من a بفرق بسيط جدا مثال: a=4 → a=4.0000000001	**X → a^+**

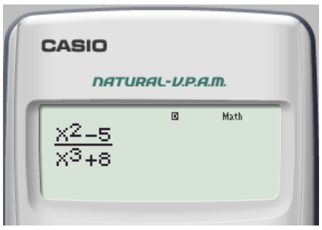
النواتج التي تظهر في الالة ودلالاتها:

الحل	الناتج في الالة
∞	**عدد كبير جدا** موجب: **مثال:** $9.938498 * 10^{33}$
$-\infty$	**عدد كبير جدا** سالب: $-5 * 10^{15}$
0	**عدد صغير جدا (اس 10 بالسالب):** **مثال:** $8.39593 * 10^{-20}$
العدد هو الحل.	**عدد صحيح.**
أي ان النهاية غير موجودة Doesn't exist.	**Math error**

مثال:

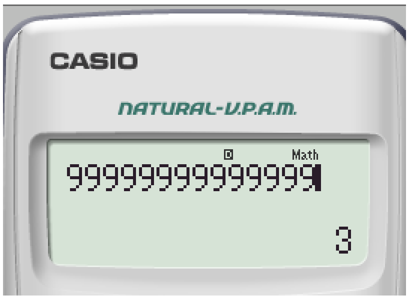
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-5}{x^3+8}\right)$$

1-نقوم بكتابة المعادلة كما هي في الالة:

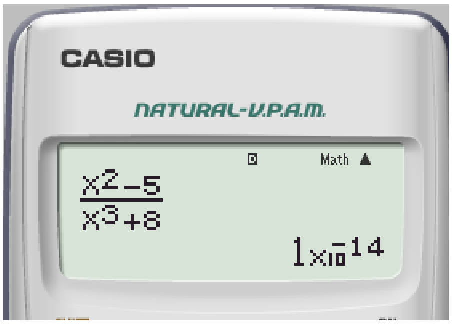


2-نقوم بالضغط على زر CALC:

3-تاتينا واجهة كما في الصورة نقوم بكتابة 999999999 (لان
: (x→∞



4-نقوم بالضغط على = :



5-كما نلاحظ العدد صغير جدا (أي ان اس 10 بالسالب) لذا الناتج = 0

لا املك الوقت لاضع جميع الأمثلة لكن يمكنكم التعويض كما هو مكتوب في الجدول والحل بنفس الطريقة.