((الاشعة في الفراغ))

١- نقول عن الاشعة $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ انها **مرتبطة خطياً** اذا استطعنا كتابة العبارة :

$$\vec{u} = \propto \vec{v} + \beta\,\vec{w}$$

$$\{(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) \neq (\boldsymbol{O},\boldsymbol{O})\ \&\ \vec{v}\ \neq \lambda\vec{w}\}$$

((يفيد الارتباط الخطي لثلاث اشعة)) في

*-اثبات وقوع نقاط في مستو واحد

*- وقوع اشعة في مستو واحد

*- توازي مستقيم يمثله شعاع مع مستو مفروض

٢- في معلم متجانس $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ يكون :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x_B - x_A} \\ \boldsymbol{y_B - y_A} \\ \boldsymbol{z_B - z_A} \end{pmatrix}$$

٣- $\boldsymbol{AB = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}$

٤- $\boldsymbol{P} = \left(\frac{\boldsymbol{x_B+x_A}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{y_B+y_A}}{\boldsymbol{2}},\frac{\boldsymbol{z_B+z_A}}{\boldsymbol{2}}\right)$

٥- نسمي G **مركز ابعاد متناسبة** في الفراغ للنقاط (A,α)و(B,β)و$(C,\gamma)(D,\delta)$ اذا:

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta \neq 0$$

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

يفيد مركز الابعاد المتناسبة في :

*- اثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة : يجب ان نثبت ان احداها مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين.

*- اثبات وقوع اربع نقاط في مستو واحد : يجب ان نثبت ان احداها مركز ابعاد متناسبة لباقي النقاط .

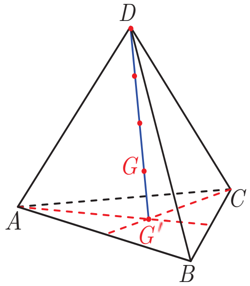
*- اثبات تقاطع مستقيمات في نقطة يجب ان نثبت ان المستقيمات جميعا تشترك بنقطة واحدة هي مركز الابعاد المتناسبة .

مركز ثقل رباعي الوجوه :

ليكن $ABCD$ **رباعي وجوه، وليكن** G **مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط** $A,1$ **و** $B,1$ **و** $C,1$ **و** $D,1$

تُسمّى النقطة G **مركز ثقل رباعي الوجوه** $ABCD$.

$$\overrightarrow{G'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{G'D}$$



٦- في معلم متجانس لدينا :

$$G\begin{pmatrix} x_G = \dfrac{\alpha.x_A+\beta.x_B+\gamma.x_C+\delta.x_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ y_G = \dfrac{\alpha.y_A+\beta.y_B+\gamma.y_C+\delta.y_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \\ z_G = \dfrac{\alpha.z_A+\beta.z_B+\gamma.z_C+\delta.z_D}{\alpha+\beta+\gamma+\delta} \end{pmatrix}$$

٧- معادلة **الكرة** مركزها M_0 نصف قطرها R

$$\boldsymbol{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2}$$

معادلة الأسطوانة

محورها $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{k}})$	محورها $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$	محورها $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{\imath}})$
$x^2+y^2=r^2$	$x^2+z^2=r^2$	$y^2+z^2=r^2$
$z_1 \leq z \leq z_2$	$y_1 \leq y \leq y_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
y_1,y_2 راقمي مركزي القاعدتين	y_1,y_2 ترتيبي مركزي القاعدتين	x_1,x_2 فاصلتي مركزي القاعدتين

معادلة المخروط رأسه $\boldsymbol{O}$

محوره $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{k}})$	محوره $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{\jmath}})$	محوره $(\boldsymbol{O},\vec{\boldsymbol{\imath}})$
$y^2+x^2-\frac{r^2}{h^2}z^2=0$	$x^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}y^2=0$	$y^2+z^2-\frac{r^2}{h^2}x^2=0$
$0 \leq z \leq z_1$	$0 \leq y \leq y_1$	$0 \leq x \leq x_1$
r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع z_1 راقم قاعدة المخروط	r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع y_1 ترتيب قاعدة المخروط	r نصف قطر قاعدة المخروط h الارتفاع x_1 فاصلة قاعدة المخروط

تحديد مجموعة نقاط في الفراغ

كرة مركزها A نصف قطرها r	$\Vert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\Vert = \boldsymbol{r}$
كرة مركزها A نصف قطرها AB	$\Vert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\Vert$
المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$	$\Vert\overrightarrow{\boldsymbol{MA}}\Vert = \Vert\overrightarrow{\boldsymbol{MB}}\Vert$

الجداء السلمي في الفراغ :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta$
$\vec{u}.\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$

يكون الشعاعان $\vec{u},\vec{v}$ متعامدان إذا وفقط إذا كان الجداء السلمي لهما معدوم

معادلة المستوى :

يمر من نقطة معلومة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

$$ax+by+cz+d=0$$

❖ الوضع النسبي لمستويين :

المستويان إما :

★ متوازيان ★ منطبقان ★ متقاطعان في فصل مشترك

- إذا كان شعاعي الناظم للمستويين مرتبطين خطياً عندها يكون المستويان متوازيان أو منطبقان .

إذا أعطيت المعادلة العامة للمستويين :

$$\mathcal{P}_1 : a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$$

$$\mathcal{P}_2 : a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$$

- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان متوازيين .
- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان منطبقين .
- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2}\neq\frac{b_1}{b_2}\neq\frac{c_1}{c_2}$ (أي نسبتين منهما) كان المستويان متقاطعين في فصل مشترك يمكن إيجاده كما مر معنا سابقاً صفحة
- إذا كان $\vec{n}_{p_1}.\vec{n}_{p_2}=0$ كان المستويان متعامدان

الوضع النسبي لثلاثة مستويات :

المستويات الثلاثة هي إما :

★ تتقاطع بنقطة واحدة ★ لها فصل مشترك واحد ★ متوازية

لدراسة الوضع النسبي لها : نحل جملة المعادلات الثلاث للمستويات حلاً مشتركاً وهي :

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 & L_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 & L_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 & L_3 \end{cases}$$

❖ بُعد نقطة عن مستوى :

يُعطى بُعد النقطة $A(x_0,y_0,z_0)$ عن المستوي $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : ax+by+cz+d=0$$

بالعلاقة : $$Dis(A,\mathcal{P}) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

❖ المستقيم:

بفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم المار من النقطة $\Leftarrow A(x_A,y_A,z_A)$

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \Rightarrow (x-x_A,y-y_A,z-z_A) = t(a,b,c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}$$

ندعو الجملة السابقة بالتمثيل الوسيطي للمستقيم d.

ملاحظة **1** : إذا كان $t\in[0,1]$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل قطعة مستقيمة.

ملاحظة **2** : إذا كان $t\in[0,+\infty[$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل نصف مستقيم .

المستقيمان في الفراغ إما :

★ متوازيين (منطبقين) ★ متقاطعين ★ متخالفين

متى يكون المستقيمان متقاطعان ؟ إذا كان :

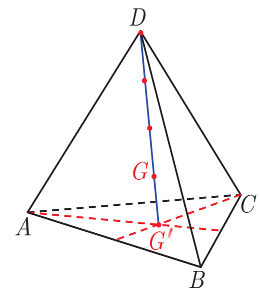
★ شعاعي توجيههما غير مرتبطين خطياً ★ يقعان في مستوٍ واحد .

متى يكون المستقيمان متخالفان ؟ إذا كان :

★ شعاعي توجيههما غير مرتبطين خطياً ★ لا يقعان في مستوٍ واحد .

خواص المجسمات الفراغية

رباعي الوجوه



١- $D-ABC$ رباعي وجوه و ليكن G مركز الابعاد المتناسبة لرؤوسه مزودة بالاثقال (1) و ليكن K مركز ثقل المثلث BCD و I منتصف $[AB]$ و J منتصف $[CD]$

٢- نسمي القطعة المستقيمة التي تصل الرأس بمركز ثقل الوجه المقابل بـ المتوسط

٣- تلتقي المتوسطات في نقطة واحدة G تسمى مركز ثقل رباعي الوجوه

4- G تقع في منتصف المستقيمات الواصلة بين منتصفات الاحرف المتقابلة في رباعي الوجوه

رباعي الوجوه المنتظم

١- هو مجسم له أربعة وجوه كل منها هو مثلث متساوي الاضلاع و جميع اوجهه طبوقة

٢- نسمي كل حرفين لا يشتركان برأس متقابلين

٣- كل حرفين متقابلين متعامدين

٤- المستقيم الواصل بين أي حرفين متقابلين عمودي على كل منهما

٥- الارتفاع النازل من أي من الرؤوس الى الوجه المقابل عمودي على القاعدة

٦- المسقط القائم لأي رأس على الوجه المقابل ينطبق على مركز ثقل المثلث

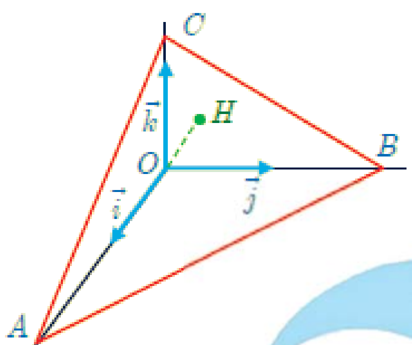
٧- الارتفاع في رباعي الوجوه كل مستقيم يصل بين أي رأس و مركز ثقل الوجه المقابل له

٨- مركز رباعي الوجوه المنتظم O مركز الابعاد المتناسبة لرؤوسه و قد اسند اليها الاثقال ذاتها

٩- مركز رباعي الوجوه المنتظم O منتصف $[IJ]$

١٠- مركز رباعي الوجوه المنتظم O متساوية البعد عن جميع رؤوسه

رباعي الوجوه ثلاثي الزوايا القائمة



$O-ABC$ رباعي وجوه ثلاثي الزوايا القائمة رأسه O و فيه :

$OA=a\,,OB=b\,,OC=c$

لتكن H نقطة تلاقي ارتفاعات المثلث مختلف الاضلاع ABC

١- ان H هي المسقط القائم للرأس O على مستوي القاعدة ABC

٢- $(AB)\perp(OCH)$

٣- المسقط القائم لكل من C و O هو K ارتفاع المثلث OAB المتعلق بالرأس O

٤- $\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right)$

٥- طول الارتفاع المتعلق بالرأس O في رباعي الوجوه $OH=h$

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

Ammar Kaddoury

الاشعة في الفراغ

المدرس : عمـــار قدوري

❖ الارتباط الخطي لشعاعين :

فرض أن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ شعاعين غير صفريين عندئذٍ نقول عن $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$

نهما مرتبطان خطياً إذا نتج أحدهما عن الآخر بضربه بعدد حقيقي ، أي :

$k \in \mathcal{R} \qquad \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{CD}$ وهذا يعني هندسياً أن المستقيمين

$(AB),(CD)$ متوازيان أو منطبقان .

يُفيد الارتباط الخطي في :

- إثبات توازي مستقيمين أو نفي توازيهما .
- إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة .

❖ الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

- نقول عن الأشعة $\vec{u}\,,\vec{v}\,,\vec{w}$ أنها مرتبطة خطياً إذا تحقق :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} \qquad a,b \in \mathcal{R}$$

- وندعو $\vec{u}\,,\vec{v}$ شعاعي توجيه المستوي المحدد بهما .
- *ملاحظة :* إذا كان $\vec{u}\,,\vec{v}$ مرتبطان خطياً وغير صفريين فهما مرتبطان خطياً مع أي شعاع ثالث .
- *تذكر :* الشعاع الصفري $\vec{0}$ مرتبط خطياً مع أي شعاع آخر .

❖ نتائج الارتباط الخطي لثلاثة أشعة:

- الأشعة الثلاثة المرتبطة خطياً تحدد مستوٍ .

قع النقاط A,B,C,D في مستوٍ واحد إذا كانت

لأشعة $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطياً ، وهذا يُكافئ وجود عددين

$\mathcal{R} \ni x,y$ يحققان: $\overrightarrow{AD} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$

❖ المعلم في الفراغ :

- بفرض الأشعة الثلاثة $\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}$ ثلاثة أشعة غير مرتبطة خطياً و

o نقطة من الفراغ عندها ندعو $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ معلماً في الفراغ

، وتدعى $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أساس أشعة الفراغ .

- أي نقطة M من الفراغ المنسوب إلى المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

تملك ثلاثية (x,y,z) وحيدة تحقق العلاقة :

$\overrightarrow{oM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ وندعو الثلاثية

(x,y,z) إحداثيات النقطة M في المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$

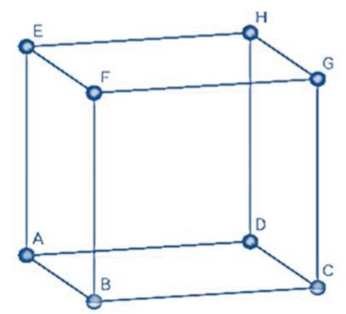
- **وتدعى:** x فاصلة النقطة M , y ترتيب النقطة M , z راقم النقطة M (علوها)

❖ المعلم المتجانس :

- ندعو المعلم $(o,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ أنه معلم متجانس إذا تحقق :
- الأشعة $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ متعامدة مثنى مثنى .
- $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$

❖ إيجاد إحداثيات مكعب باستخدام معلم متجانس :

باستخدام المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$:



$$\begin{cases} A(0,0,0) & B(1,0,0) \\ C(1,1,0) & D(0,1,0) \\ E(0,0,1) & H(0,1,1) \\ F(1,0,1) & G(1,1,1) \end{cases} \qquad (1)$$

- وذلك إذا كان طول حرف المكعب يُساوي 1 .
- إذا كان طول حرف المكعب يُساوي a يصبح المعلم

$\left(A,\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{a}\overrightarrow{AD},\frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$ تُصبح الإحداثيات :

$$\begin{cases} A(0,0,0) & B(a,0,0) \\ C(a,a,0) & D(0,a,0) \\ E(0,0,a) & H(0,a,a) \\ F(a,0,a) & G(a,a,a) \end{cases} \qquad (2)$$

ملاحظة 1 : إذا كان الشكل متوازي سطوح أو متوازي مستطيلات وأخذنا المعلم $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ تبقى الإحداثيات كما في (1) . ويعد في هذه الحالة المعلم غير متجانس

❖ **ملاحظة2:** بفرض أبعاد متوازي السطوح (a,b,c) وأردنا أخذ معلم متجانس عندها يؤخذ المعلم كمايلي :

$$\left(A,\frac{1}{a}\overrightarrow{AB},\frac{1}{b}\overrightarrow{AD},\frac{1}{c}\overrightarrow{AE}\right)$$

❖ الحساب باستخدام الإحداثيات :

- بفرض لدينا الشعاعان $\vec{u}(x,y,z),\ \vec{v}(\acute{x},\acute{y},\acute{z})$ عندئذٍ :
- $(k\,\vec{u})(kx,ky,kz)$
- $(\vec{u}+\vec{v})(x+\acute{x},y+\acute{y},z+\acute{z})$
- بفرض $A(x_A,y_A,z_A)\ ,B(x_B,y_B,z_B)$ عندئذٍ :
- مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A)$
- إحداثيات M منتصف $[AB]$:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{2}\ ,\quad y_M=\frac{y_A+y_B}{2}\ ,\quad z_M=\frac{z_A+z_B}{2}$$

- إحداثيات G مركز ثقل المثلث ABC :

$$x_G=\frac{x_A+x_B+x_C}{3}\ ,\quad y_G=\frac{y_A+y_B+y_C}{3}\ ,\quad z_G=\frac{z_A+z_B+z_C}{3}$$

- إذا كان $\vec{u},\vec{v}$ مرتبطان خطياً :

$$\frac{x}{\acute{x}}=\frac{y}{\acute{y}}=\frac{z}{\acute{z}}=k \qquad k\in\mathcal{R}$$

- في المعلم المتجانس حصراً :

إذا كان $\vec{u}(x,y,z) \Longleftarrow$

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

- نقاط المحور ox تكون إحداثياتها بالشكل (a.0.0)
- نقاط المحور oy تكون إحداثياتها بالشكل (0.a.0)
- نقاط المحور oz تكون إحداثياتها بالشكل (0.0.a)

❖ الجداء السُلمي لشعاعين :

تُعطى عبارة الجداء السُلمي للشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ بإحدى العبارات التالية :

- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right)$
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|\cos\theta$ حيث θ هي الزاوية الموجهة بين $\vec{u},\vec{v}$.
- $\vec{u}.\vec{v}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{\acute{C}\acute{D}}$ حيث $(\acute{C}\acute{D})$ هو المسقط القائم لـ (CD) على (AB) .
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ حيث H هي المسقط القائم لـ C على (AB) .

❖ خواص الجداء السلمي :

$\star\ \vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

$\star\ (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$

$\star\ \vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

❖ ماذا يفيد الجداء السلمي ؟

1) ***علاقة الكاشي***

$$\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

2) ***مبرهنة المتوسط :*** $b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$

3) ***في متوازي الأضلاع :*** مجموع مربعات أطوال أضلاع متوازي الأضلاع يُساوي مجموع مربعي طولا قطريه .

4) ***إيجاد الزاوية بين شعاعين :*** وذلك بالاعتماد على

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}.\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$$

5) تعامد شعاعين : يكون الشعاعان $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}$ متعامدان إذا وفقط

إذا كان الجداء السلمي لهما معدوم .

❖ المستوى :

هو مجموعة النقاط M التي تحقق: $\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v}$ $\quad a, b \in \mathcal{R}$

ندعو الشعاعين $\vec{u},\vec{v}$ شعاعي توجيه المستوي .

❖ معادلة المستوى :

فرض لدينا الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ فإن معادلة المستوي في الفراغ تُعطى العلاقة :

$ax + by + cz + d = 0$ ويدعى الشعاع $\vec{n}(a,b,c)$ الشعاع الناظم على المستوي .

❖ حالات تعيين المستوى :

1) يمر من نقطة معلومة $A(x_0,y_0,z_0)$ ويقبل شعاع ناظم $\vec{n}(a,b,c)$

طريقة 1 :

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$$

نشر المعادلة نحصل على معادلة المستوي .

طريقة 2 :

ن المعادلة العامة للمستوي $ax + by + cz + d = 0$

بالتعويض في إحداثيات النقطة نحصل على قيمة d .

2) يمر من نقطة معلومة ويوازي مستو معلوم:

للمستويين المتوازيين الناظم نفسه ، وبمعرفة الناظم والنقطة نعود للحالة (1) .

3) معادلة مستو مار بثلاث نقاط A,B,C :

نوجد $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ ونتأكد أنهما غير مرتبطين خطياً

طريقة 1 :

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم المستوي :

$$\vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \qquad (1) \leftarrow$$
$$\vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \qquad (2) \leftarrow$$

نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a,b,c .

- نفرض قيمة لـ c ولتكن 1 مثلاً .
- نعوض في المعادلتين ونحسب a,b .
- نعود إلى الحالة (1).

طريقة 2 :

- بفرض $M(x,y,z)$ تنتمي إلى المستوي المفروض .
- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ $\quad \overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$
- نحصل على ثلاث معادلات بمجهولين α,β .
- من معادلتين نحسب α,β بدلالة x,y,z .
- نعوض في المعادلة الثالثة فنحصل على معادلة المستوي المطلوب .

طريقة 3 :

- من المعادلة العامة للمستوي $ax + by + cz + d = 0$
- نعوض إحداثيات النقاط الثلاث فنحصل على ثلاث معادلات بأربع مجاهيل هي a,b,c,d .
- نفرض قيمة لـ d ولتكن 1 مثلاً ونعوضها في باقي المعادلات .
- بحل جملة المعادلات الثلاث نحصل على باقي الثوابت .

4) معادلة مستوٍ Q مار بنقطتين A, B و يُعامد مستوٍ $\mathcal{P}$:

- نأخذ $\overrightarrow{n_Q}(a, b, c)$ ناظم المستوي Q:

$$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0 \qquad (1)$$

- $$\overrightarrow{n_Q}.\overrightarrow{AB} = 0 \qquad (2)$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a, b, c نضع $c = 1$ مثلاً .
- فنحصل على معادلتين بمجهولين a, b بالحل المشترك نحصل على $\overrightarrow{n_Q}$ ، فنعود للحالة(1) .

5) معادلة مستوٍ يقبل $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعي توجيه ومار من نقطة معينة A:

طريقة 1 :

- بفرض $\vec{n}(a, b, c)$ الشعاع الناظم للمستوي المطلوب فيكون :

$$\begin{cases} \vec{n}.\vec{u} = 0 \\ \vec{n}.\vec{v} = 0 \end{cases}$$

- نحصل على معادلتين بثلاث مجاهيل هي a, b, c .
- نفرض قيمة لـ c مثلاً ونحل جملة المعادلتين ونحسب a, b ، نعود إلى الحالة (1) .

طريقة 2 : نفرض $\mathrm{M}(x, y, z)$ نقطة من المستوي .

- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AM}$ ونضع $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.
- نحصل على ثلاث معادلات ، من اثنتين منها نوجد α, β بدلالة الإحداثيات x, y, z .
- نعوض في المعادلة الثالثة فنحصل على المعادلة المطلوبة .

ملاحظة : هذه الحالة تشبه الحالة (ثالثاً) حيث نجعل $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ هما شعاعي توجيه المستوي .

6) معادلة مستوٍ يمر من نقطة A ويُعامد مستويين $\mathcal{P}, Q$:

طريقة 1 :

- نوجد $\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}}, \overrightarrow{n_Q}$
- بفرض $\vec{n}$ ناظم المستوي المطلوب عندئذٍ :

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{n_{\mathcal{P}}} = 0 & (1) \\ \vec{n}.\overrightarrow{n_Q} = 0 & (2) \end{cases}$$

- نحصل على معادلتين بثلاثة مجاهيل هي a, b, c إحداثيات $\vec{n}$.
- نفرض قيمة لـ c مثلاً ولتكن $c = 1$.
- بحل المعادلتين نوجد a, b ونعود للحالة(1).

طريقة 2 :

وتتمثل في إيجاد شعاع توجيه الفصل المشترك ويكون هو شعاع الناظم للمستوي المفروض ولإيجاده هناك طريقتان :

A) الحل المشترك لمعادلتي المستويين وإيجاد اثنين منها x, y بدلالة z ثم نفرض $z = t$ ونكتب التمثيل الوسيطي بدلالة t .

(سنتحدث عن هذه الطريقة لاحقاً في تتمات في إيجاد معادلة المستقيم)

B) نعطي قيمتين لأحد المجاهيل وليكن z .

- نحصل على معادلتين لكل قيمة .

- من حل المعادلتين نحصل على إحداثيات النقطة الأولى من أجل أول قيمة لـ z،نكرر العملية للقيمة الثانية لـ z

نحصل على إحداثيات النقطتين A, B من الفصل المشترك فيكون $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم المستوي المفروض .

7) المستوي المحوري لقطعة مستقيمة $[AB]$:

طريقة 1 :

- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{AB}$.
- يكون $\overrightarrow{AB}$ هو ناظم المستوي المفروض .
- نحسب إحداثيات النقطة M منتصف $[AB]$ كما مر معنا سابقاً بالعلاقات :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$$

$$z_M = \frac{z_A + z_B}{2}$$

- ونعود للحالة (1) .

طريقة 2 :

- بفرض $M(x, y, z)$ تنتمي إلى المستوي المفروض .
- $\|\overrightarrow{AM}\| = \|\overrightarrow{BM}\|$ ، بالتربيع و الاختزال نحصل على المعادلة المطلوبة .

❖ الوضع النسبي لمستويين :

المستويان إما :

★ متوازيان ★ منطبقان ★ متقاطعان في فصل مشترك

- إذا كان شعاعي الناظم للمستويين مرتبطين خطياً عندها يكون المستويان متوازيان أو منطبقان .

إذا أعطيت المعادلة العامة للمستويين :

$$\mathcal{P}_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$

$$\mathcal{P}_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان متوازيين .
- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{d_1}{d_2}$ كان المستويان منطبقين .
- إذا كان : $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (أي نسبتين منها) كان المستويان متقاطعين في فصل مشترك يمكن إيجاده كما مر معنا سابقاً صفحة
- إذا كان $\vec{n}_{p_1} . \vec{n}_{p_2} = 0$ كان المستويان متعامدان

الوضع النسبي لثلاثة مستويات :

المستويات الثلاثة هي إما :

★ تتقاطع بنقطة واحدة ★ لها فصل مشترك واحد ★ متوازية

لدراسة الوضع النسبي لها : نحل جملة المعادلات الثلاث للمستويات حلاً مشتركاً وهي :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 & L_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 & L_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 & L_3 \end{cases}$$

الطريقة الأولى :

الحذف بالتعويض :

نحسب قيمة أحد المجاهيل من إحدى المعادلات ونعوضه في المعادلتين المتبقيتين فنحصل على معادلتين بمجهولين نحلها حلاً مشتركاً ، نحصل على واحدة من ثلاث حالات :

- *الجملة مستحيلة الحل :* وتكون عندها المستويات متوازية .
- *الجملة لها عدد غير منتهٍ من الحلول :* وعندها تكون المستويات مشتركة بفصل مشترك واحد .

الجملة لها حل وحيد : المستويات تتقاطع في نقطة وحيدة .

لطريقة الثانية :

طريقة غاوص :

المرحلة الأولى : تهدف إلى جعل a_2, a_3 تساوي الصفر (أي أمثال x في المعادلتين الثانية والثالثة) ، ويتم ذلك بالخطوات التالية :

1) نضرب L_1 بـ a_2 و L_2 بـ a_1 ونضع

$$\grave{L}_2 = a_2 L_1 - a_1 L_2$$

2) نضرب L_1 بـ a_3 و L_3 بـ a_1 ونضع

$$\grave{L}_3 = a_3 L_1 - a_1 L_3$$

3) نحصل على جملة معادلات مكافئة للجملة الأصلية وتكون كما يلي

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & L_1 \\ \grave{b}_2 y + \grave{c}_2 z = \grave{d}_2 & \grave{L}_2 \\ \grave{b}_3 y + \grave{c}_3 z = \grave{d}_3 & \grave{L}_3 \end{cases}$$

المرحلة الثانية : تهدف إلى جعل أمثال y في المعادلة الثالثة تساوي الصفر :

نضرب $\grave{L}_2$ بـ $\grave{b}_3$ و $\grave{L}_3$ بـ $\grave{b}_2$ ونضع

$$\grave{\grave{L}}_3 = \grave{b}_3 \grave{L}_2 - \grave{b}_2 L_3$$ فنحصل على الجملة التالية :

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 & L_1 & (1) \\ \grave{b}_2 y + \grave{c}_2 z = \grave{d}_2 & \grave{L}_2 & (2) \\ \grave{\grave{c}}_3 z = \grave{\grave{d}}_3 & \grave{\grave{L}}_3 & (3) \end{cases}$$

مناقشة : من المعادلة (3) نحصل على الحالات التالية :

1) $\grave{\grave{c}}_3 \neq 0$: للمعادلة (3) حل وحيد وبالتالي للجملة حل وحيد المستويات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة ، نحصل على إحداثياتها بتعويض قيمة z في المعادلة (2) ثم بتعويض قيمتي z , y في المعادلة (1) فنحصل على المطلوب .

2) $\grave{\grave{c}}_3 = 0 , \grave{\grave{d}}_3 \neq 0$: المعادلة (3) مستحيلة الحل وبالتالي الجملة مستحيلة الحل ، والمستويات الثلاثة بحالة توازي .

3) $\grave{\grave{c}}_3 = 0 , \grave{\grave{d}}_3 = 0$: المعادلة الثالثة لها عدد غير منتهٍ من الحلول والجملة تمثل مستويات مشتركة بفصل مشترك ، نحصل على التمثيل الوسيطي له بفرض $z = t$ ثم إيجاد x , y من المعادلتين $(2) , (1)$

❖ بُعد نقطة عن مستوى :

يُعطى بُعد النقطة $A(x_0, y_0, z_0)$ عن المستوي $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$$

بالعلاقة :

$$dis(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

❖ البعد بين مستويين متوازيين :

نأخذ نقطة من المستوي الأول ونُطبق دستور البُعد بينها وبين المستوي الثاني .

❖ المسقط القائم لنقطة على مستوٍ :

طريقة (1) (الأسهل)

نوجد التمثيل الوسيطي للمستقيم المار من النقطة المطلوبة ولتكن A والذي يقبل ناظم المستوي شعاع توجيه له.

نعوض في معادلة المستوي فنحصل على قيمة الوسيط t .

بالتعويض في التمثيل الوسيطي نحصل على نقطة التقاطع .

طريقة (2)

بفرض $\grave{A}$ هي المسقط القائم لـ A على المستوي $\mathcal{P}$ ، وبفرض $\vec{u}, \vec{v}$ شعاعي توجيه هذا المستوي عندئذٍ

$$\begin{cases} \overrightarrow{A\grave{A}} . \vec{u} = 0 & (1) \\ \overrightarrow{A\grave{A}} . \vec{v} = 0 & (2) \\ \grave{A} \in \mathcal{P} & (3) \end{cases}$$

- نحصل على المعادلة الثالثة بتعويض إحداثيات $\grave{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ في معادلة المستوي كونها تنتمي إليه .
- نحصل على ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل ، بالحل المشترك نحصل على إحداثيات $\grave{A}$.

❖ المستقيم :

- إذا كانت A, B نقطتان من الفراغ عندئذٍ المستقيم هو مجموعة النقاط M التي تجعل الشعاعين $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}$ مرتبطين خطياً وندعو الشعاع $\overrightarrow{AB}$ شعاع توجيه المستقيم .
- بفرض $\vec{u}(a,b,c)$ شعاع توجيه المستقيم المار من النقطة $A(x_A,y_A,z_A) \Leftarrow$

$$\overrightarrow{AM}=t\vec{u} \implies (x-x_A,y-y_A,z-z_A)=t(a,b,c)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x=at+x_A \\ y=bt+y_A \\ z=ct+z_A \end{cases}$$

- ندعو الجملة السابقة بالتمثيل الوسيطي للمستقيم d.
- *ملاحظة* **1** : إذا كان $t\in[0,1]$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل قطعة مستقيمة.
- *ملاحظة* **2** : إذا كان $t\in[0,+\infty[$ فإن جملة المعادلات السابقة تُمثل نصف مستقيم .

معادلة المستقيم المار من النقطتين A, B :

- نحسب مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$:
- $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A) \implies \overrightarrow{AB}(\alpha,\beta,\gamma)$

$$d:\begin{cases} x=\alpha t+x_A \\ y=\beta t+y_A \\ z=\gamma t+z_A \end{cases}$$

الفصل المشترك لمستويين :

طريقة (1)

- نوجد نقطتين A , B من الفصل المشترك كما شرحناها سابقاً
- ثم نعود إلى الحالة الثانية من طرق إيجاد معادلة المستقيم المار بنقطتين .

طريقة (2)

- نحل جملة معادلتي المستويين حلاً مشتركاً .
- نوجد إحداثيات x , y بدلالة z مثلاً .
- نفرض $z=t$ فنحصل على التمثيل الوسيطي للمستقيم المطلوب .

الوضع النسبي لمستقيمين :

المستقيمان في الفراغ إما :

★ متوازيين (منطبقين) ★ متقاطعين ★ متخالفين

ملاحظة **1** : إذا كان شعاعي التوجيه للمستقيمين مرتبطين خطياً فهما متوازيان .

ملاحظة **2** : الانطباق حالة خاصة من التوازي .

للتمييز بين حالة الانطباق والتوازي :

1) إذا كان شعاعي التوجيه لمستقيمين مرتبطين خطياً ووجدنا نقطة مشتركة بينهما كانا منطبقين .

2) إذا أُعطي التمثيل الوسيطي للمستقيمين وكان شعاعي توجيهها مرتبطين خطياً:

نأخذ نقطة من المستقيم الأول (نفرض قيمة للوسيط t فنحصل على الإحداثيات المطلوبة)

نعوضها في التمثيل الوسيطي للمستقيم الثاني فإذا تحققت كان المستقيمان منطبقان وإذا لم تتحقق فهما متوازيان فقط .

متى يكون المستقيمان متقاطعان ؟ إذا كان :

★ شعاعي توجيهها غير مرتبطين خطياً ★ يقعان في مستوٍ واحد .

متى يكون المستقيمان متخالفان ؟ إذا كان :

★ شعاعي توجيهها غير مرتبطين خطياً ★ لا يقعان في مستوٍ واحد .

❖ تقاطع مستقيمين :

طريقة1) : بعد التأكد أن شعاعي توجيه المستقيمين غير مرتبطين خطياً

ندرس الارتباط الخطي لثلاثة أشعة :

⋆ $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم d_1 ⋆ $\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم d_2 ⋆ $\overrightarrow{AB}$ حيث $A \in d_1\ ,\ B \in d_2$

طريقة 2) : بفرض

$$d_1 : \begin{cases} x = a_1 t + x_1 \\ y = b_1 t + y_1 \\ z = c_1 t + z_1 \end{cases} \qquad d_2 : \begin{cases} x = a_2 s + x_2 \\ y = b_2 s + y_2 \\ z = c_2 s + z_2 \end{cases}$$

- بمساواة الإحداثيات بين المعادلتين نحصل على ثلاثة معادلات بمجهولين هما $t\ ,s$.
- نأخذ معادلتين ونحسب قيمتي $s\ ,t$ ونعوض القيمتين في المعادلة الثالثة فنكون أمام حالتين :
- إذا تحققت يكون المستقيمان متقاطعان ، بتعويض قيمة t في التمثيل الوسيطي نحصل على إحداثيات نقطة التقاطع .
- إذا لم تتحقق فالمستقيمين متخالفين .

❖ الوضع النسبي لمستقيم ومستوى :

يوجد ثلاث حالات للوضع النسبي بين المستقيم والمستوي ، فهما إما :

⋆ متوازيين ⋆ المستقيم محتوى في المستوي ⋆ متقاطعين

إذا كان $\vec{n}\,.\,\vec{u} = 0$ يكون المستقيم موازي للمستوي ، فإذا اشترك معه بنقطة كان محتوى فيه .

إذا أُعطي التمثيل الوسيطي للمستقيم:

- نعوض إحداثيات المستقيم من التمثيل الوسيطي في معادلة المستوي .
- نحصل على معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة للوسيط t من الشكل :

$$A.\,t = B$$

ناقش الحالات :

- $A \neq 0 \Leftarrow t = \frac{B}{A}$ المستقيم قاطع للمستوي $\Leftarrow$ حل وحيد .
- $A = 0\ ,B \neq 0 \Leftarrow$ المستقيم يوازي المستوي $\Leftarrow$ مستحيلة الحل .
- $A = 0\ ,B = 0 \Leftarrow$ المستقيم محتوى في المستوي $\Leftarrow$ عدد غير منتهٍ من

طريقة ثانية لإثبات التوازي :

- نوجد نقطتين من المستقيم لإيجاد شعاع التوجيه وليكن $\overrightarrow{AB}$.
- نثبت الارتباط الخطي لـ $\overrightarrow{AB}$ مع شعاعي توجيه المستوي $\vec{u}\ ,\vec{v}$ من خلال إيجاد $\alpha\ ,\beta \in \mathcal{R}$ وتحقق العلاقة: $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

❖ طريقتين لإثبات تعامد مستقيم ومستوى :

طريقة(1) :

- نوجد شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}$ ⋆ نوجد شعاع الناظم المستوي $\vec{n}$
- نثبت الارتباط الخطي لهما $\Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n}$.

طريقة (2) :

- نوجد شعاع توجيه المستقيم $\vec{u}$.
- نوجد شعاعين غير مرتبطين خطياً محتويان في المستوي ، شعاعي توجيه المستوي $\vec{v}\ ,\vec{w}$.

نبين أن : $\begin{cases} \vec{u}\,.\,\vec{v} = 0 \\ \vec{u}\,.\,\vec{w} = 0 \end{cases}$

❖ بُعد نقطة عن مستقيم ، المسقط القائم لنقطة على مستقيم :

طريقة (1)

- نقوم بإيجاد التمثيل الوسيطي للمستقيم بإحدى الطرق التي تعلمناها سابقاً
- بفرض $\grave{A}(x,y,z)$ هي المسقط القائم لـ A على المستقيم .
- نوجد إحداثيات الشعاع $\overrightarrow{A\grave{A}}$ بدلالة t .
- نضع $\overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{u}=0$ حيث $\overrightarrow{u}$ هو شعاع توجيه المستقيم .
- تنتج معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة لـ t .
- نحسب قيمة t ونعوض فيها بالتمثيل الوسيطي لحساب إحداثيات $\grave{A}$.

وجد طويلة $\left\|\overrightarrow{A\grave{A}}\right\|$ والتي تُمثل بُعد النقطة عن المستقيم

طريقة (2) :

- نوجد نقطتين من الفصل المشترك ولتكن B , C .
- بفرض $M(x,y,z)$ نقطة من الفصل المشترك ، نطبق علاقة الارتباط الخطي : $\overrightarrow{BM}=t\overrightarrow{BC}$.
- نحسب البُعد AM الذي يُمثل طويلة الشعاع $\overrightarrow{AM}$ بدلالة t .
- نأخذ $(AM)^2$ بدلالة t ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ t .
- نوجد أصغر قيمة لـ $(AM)^2$ إمّا :
  - ← لإتمام لمربع كامل وحساب أصغر قيمة.
  - ← بفرض $f(x)=(AM)^2$ وندرس أصغر قيمة للتابع وتُمثل هذه القيمة البُعد المطلوب .

ملاحظة : $\overrightarrow{BC}$ يُمثل شعاع التوجيه للمستقيم .

طريقة (3) :

- نوجد شعاع التوجيه للمستقيم .
- نوجد معادلة المستوي المار من A ويقبل $\overrightarrow{u}$ شعاعاً ناظماً له .
- نأخذ نقطة من المستقيم ولتكن B و نوجد المسقط القائم لـ B على المستوي الذي أوجدناه وليكن $\grave{A}$ عندئذٍ :
  $\overrightarrow{B\grave{A}}=t\overrightarrow{u}$ فنحصل على معادلة من الدرجة الأولى بالنسبة لـ t .
- نحسب إحداثيات $\grave{A}$ بدلالة t و نعوضها في معادلة المستوي فنحصل على قيمة t .

طريقة (4) (تُستخدم إذا كان المستقيم هو الفصل المشترك لمستويين غير متعامدين)

- نوجد شعاع التوجيه للفصل المشترك كما تعلمنا سابقاً .
- بفرض $\grave{A}(\alpha,\beta,\gamma)$ هي المسقط القائم لـ A على الفصل المشترك :
- نعوض في : ★ معادلة المستوي الأول ★ معادلة المستوي الثاني ★ $\overrightarrow{A\grave{A}}.\overrightarrow{u}=0$.
  فنحصل على ثلاث معادلات بدلالة α,β,γ .
- بالحل المشترك نحصل على إحداثيات $\grave{A}$ فنحسب طويلة الشعاع $\overrightarrow{A\grave{A}}$ فنحصل على المطلوب .

طريقة (5) (إذا كان المستقيم هو الفصل المشترك لمستويين متعامدين)

- نوجد بُعد النقطة عن المستوي الأول
- نوجد بُعد النقطة عن المستوي الثاني

نُطبق فيثاغورث فيكون : $d=\sqrt{d_1^2+d_2^2}$

❖ مركز الأبعاد المتناسبة في الفراغ :

1) مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين :

نرمز بـ α , β لتثقيلات النقاط A , B .

إذا كان لدينا النقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ حيث $\alpha+\beta \neq 0$ عندئذٍ ندعو النقطة G المحققة للعلاقة $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ بأنها مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين المثقلتين $(A,\alpha),(B,\beta)$.

خواص مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين :

1. إذا كان $\alpha=\beta\neq 0$ عندها G هي منتصف $[AB]$.
2. بفرض $k\in\mathcal{R}$ فإن G مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,\alpha),(B,\beta)$ هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,k\alpha),(B,k\beta)$.
3. المستقيم (AB) هو مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,t),(A,1-t)$ عندما $t\in\mathcal{R}$.
4. القطعة المستقيمة $[AB]$ هي مجموعة مراكز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(B,t),(A,1-t)$ عندما تتحول t في المجال $[0,1]$.
5. أياً كانت M نقطة في الفراغ فإنها تحقق العلاقة التالية : $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}}$
6. تثقيل G مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ هو $(G,\alpha+\beta)$.
7. إحداثيات مركز الأبعاد المتناسبة G :

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta} \\ y_G=\dfrac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta} \\ z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta} \end{cases}$$

إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين :

إن مركز الأبعاد المتناسبة G للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$ تحقق العلاقتين :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB} \quad (1) \\ \overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA} \quad (2) \end{cases}$$

ويمكن استخدام واحدة من هاتين العلاقتين لتحديد موضع G على المستقيم (AB) مع ملاحظة أنَّ :

- G تقع بين A , B إذا كانت α , β من نفس الإشارة أي إما موجبين معاً أو سالبين معاً .
- G تقع خارج A , B إذا كانت α , β من إشارتين مختلفتين ، G دائماً أقرب إلى التثقيل الأكبر .

❖ مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط في الفراغ :

ندعو G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ إذا تحقق:

$$* \ \alpha+\beta+\gamma\neq 0$$

$$* \ \alpha(\overrightarrow{GA})+\beta(\overrightarrow{GB})+\gamma(\overrightarrow{GC})=\overrightarrow{0}$$

خواص مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط:

1. إذا كانت التثقيلات متساوية ولا تساوي الصفر أي $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ عندها مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ هو نفسه مركز ثقل المثلث ABC أي نقطة تلاقي متوسطاته .
2. بفرض $k\in\mathcal{R}$ و بفرض أن G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ عندها فإن G هو مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,k\alpha),(B,k\beta),(C,k\gamma)$.
3. أياً كانت M نقطة من الفراغ عندئذٍ : $\boldsymbol{\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}}$
4. تثقيل مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ هو $(G,\alpha+\beta+\gamma)$.

5. G تحقق العلاقة الشعاعية :

$$\overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\frac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$$

6. إحداثيات مركز الأبعاد لثلاث نقاط :

$$\begin{cases} x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma} \\ z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma} \end{cases}$$

7. إن انتماء M إلى المستوي المعرف بشعاعي $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ والمحدد بالعلاقة $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$ يكافئ وجود عددين x,y حيث M هي مركز الأبعاد المتناسبة لـ $(A,1-x-y),(B,x)(C,y)$.

إنشاء مركز الأبعاد المتناسبة لثلاث نقاط :

بفرض G مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma)$ المراد إنشاؤه :

- نقوم بإيجاد $(H,\alpha+\beta)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(A,\alpha),(B,\beta)$.
- نوجد $(G,\alpha+\beta+\gamma)$ مركز الأبعاد المتناسبة للنقطتين $(H,\alpha+\beta),(C,\gamma)$.
- تُدعى الخاصية السابقة بالخاصية التجميعية ، حيث يمكن تعميمها على أكثر من ثلاث نقاط .

❖ تعميم خواص مركز الابعاد المتناسبة في الفراغ

فرض لدينا عدد من النقاط لا على التعيين $(A,\alpha),(B,\beta),(C,\gamma),(D,\delta)\ldots$ فإن G مركز الأبعاد لمتناسبة لها تحقق الشرطين :

- $* \ \alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots\neq 0 \quad *$ $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}+\cdots=\vec{0}$
- إذا كانت M نقطة من الفراغ فإن :
- $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}+\delta\overrightarrow{MD}+\cdots=(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots)\overrightarrow{MG}$
- لإيجاد G نقوم بإيجاد مركز الأبعاد لكل نقطتين على حِدا ثم مركز الأبعاد للنقاط التي حصلنا عليها وهكذا حتى نصل إلى G .

ملاحظة هامة : مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط هو نقطة وحيدة لا تختلف باختلاف النقاط المجمعة .

- إحداثيات مركز الأبعاد لـ n نقطة :

$$\begin{cases} x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C+\delta x_D+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots} \\ y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C+\delta y_D+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots} \\ z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C+\delta z_D+\cdots}{\alpha+\beta+\gamma+\delta+\cdots} \end{cases}$$

❖ ماذا يفيد مركز الأبعاد المتناسبة ؟

إثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة :

لإثبات وقوع ثلاث نقاط على استقامة واحدة يكفي أن نثبت أن إحدى هذه النقاط هي مركز ابعاد متناسبة للنقطتين الباقيتين

إثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد :

لإثبات وقوع أربع نقاط في مستوٍ واحد يكفي إثبات أن أحدها هو مركز أبعاد متناسبة لباقي النقاط .

إثبات تلاقي مستقيمين :

يكفي إثبات أن مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين من المستقيم الأول هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين من المستقيم الثاني .

مجموعات النقاط M في الفراغ :

❖ $\|\overrightarrow{MA}\| = k$ تُمثل كرة مركزها A ونصف قطرها k .

❖ $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{BA}\|$ تُمثل كرة مركزها A ونصف قطرها AB .

❖ $\|\overrightarrow{MA}\| = \|\overrightarrow{MB}\|$ تُمثل المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[AB]$.

❖ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ تُمثل كرة مركزها منتصف $[AB]$ وقطرها $[AB]$.

❖ $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$ تُمثل مستوٍ مار من A ويقبل $\overrightarrow{BC}$ شعاع ناظم له .

الكرة

معادلة الكرة التي مركزها $A(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطرها R :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

حالة خاصة : إذا كان مركز الكرة هو مبدأ الإحداثيات فتكون معادلتها :

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

ماذا تُمثل مجموعة النقاط

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

طريقة (2) :

بالإتمام لمربع كامل نحصل على المعادلة التالية :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \lambda$$

- $\lambda < 0$ تُمثل مجموعة خالية .
- $\lambda = 0$ تمثل نقطة واحدة هي (x_0, y_0, z_0) .
- $\lambda > 0$ تُمثل كرة مركزها $A(x_0, y_0, z_0)$ ونصف قطره $R = \sqrt{\lambda}$.

ملاحظة :

- انتماء أي نقطة إلى الكرة هذا يعني أنها تحقق معادلتها .
- تقع النقاط A,B,C,D على سطح كرة واحدة إذا كانت متساوية الابعاد عن نقطة واحدة هي مركز الكرة

❖ **الوضع النسبي لمستوٍ وكرة :**

نوجد بُعد مركز الكرة عن المستوي ولنفرض أن هذا البعد d عندها :

- $d > R$ المستوي لا يقطع الكرة .
- $d = R$ المستوي مماس للكرة .
- $d < R$ المستوي قاطع للكرة ، وعندها فإن سطح المقطع هو دائرة نصف قطرها $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ ومركزها هو المسقط القائم لمركز الكرة على المستوي القاطع لها .

❖ **الوضع النسبي لمستقيم وكرة :**

نعوض إحداثيات التمثيل الوسيطي في معادلة الكرة ، فنحصل على معادلة من الدرجة الثانية بالنسبة لـ t ، نحسب المميز لها ، وعندها :

- $\Delta < 0$ المستقيم خارج الكرة .
- $\Delta = 0$ المستقيم مماس للكرة .
- $\Delta > 0$ المستقيم قاطع للكرة بنقطتين .

بحساب t يمكن إيجاد نقاط التقاطع والتماس .

حالة خاصة :

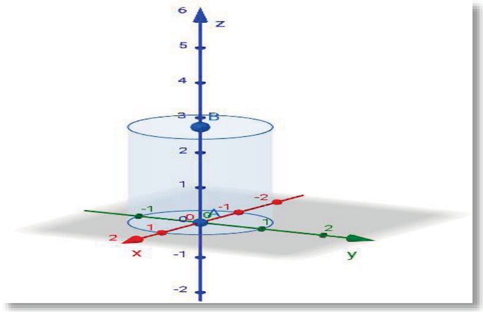
معادلة المستوي المماس لكر ة في نقطة B :

بفرض A هو مركز الكرة .

- نوجد الشعاع $\overrightarrow{AB}$.
- المستوي المطلوب يقبل $\overrightarrow{AB}$ ناظماً له ويمر من B يمكن إيجاد معادلته بسهولة .

❖ الأسطوانة في الفراغ :

1) المحور منطبق على oz $(o,\vec{k})$:



قاعدتي الأسطوانة هما دائرتان طبوقتان نصف قطرهما r ومركزيهما من النمط $A(0,0,z_1), \grave{A}(0,0,z_2)$

تعطى معادلة الأسطوانة بالشكل :

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ z_1 \le z \le z_2 \end{cases}$$

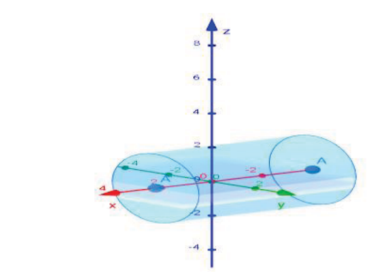
حالة خاصة : إذا كان مركز القاعدة $(0,0,0)$ $\Leftarrow$

$$\begin{cases} x^2+y^2=r^2 \\ 0 \le z \le z_{\grave{A}} \end{cases}$$

2) المحور منطبق على ox $(o,\vec{i})$:

قاعدتي الأسطوانة هما دائرتان طبوقتان نصف قطرهما r ومركزيهما من النمط

$$A(x_1,0,0), \grave{A}(x_2,0,0)$$



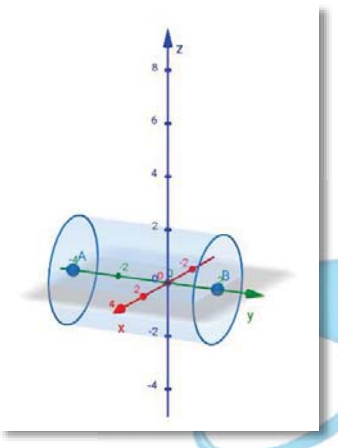
تعطى معادلة الأسطوانة بالشكل :

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ x_1 \le x \le x_2 \end{cases}$$

حالة خاصة :إذا كان مركز القاعدة $(0,0,0)$ $\Leftarrow$

$$\begin{cases} y^2+z^2=r^2 \\ 0 \le x \le x_{\grave{A}} \end{cases}$$

3) المحور منطبق على oy $(o,\vec{j})$:



قاعدتي الأسطوانة هما دائرتان طبوقتان نصف قطرهما r ومركزيهما من النمط

$$A(0,y_1,0), \grave{A}(0,y_2,0)$$

تعطى معادلة الأسطوانة بالشكل :

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ y_1 \le y \le y_2 \end{cases}$$

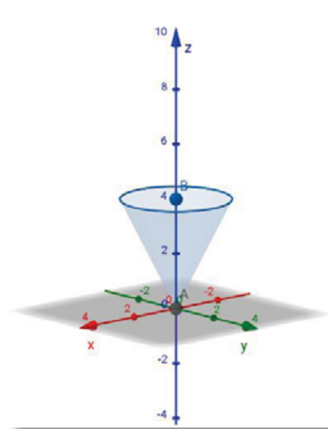
حالة خاصة : إذا كان مركز القاعدة $(0,0,0)$ $\Leftarrow$

$$\begin{cases} x^2+z^2=r^2 \\ 0 \le y \le y_{\grave{A}} \end{cases}$$

❖ المخروط في الفراغ :

1) المحور منطبق على oz $(o,\vec{k})$:

رأس المخروط هو o مركز القاعدة من النمط $(0,0,a)$ ونصف قطرها r .



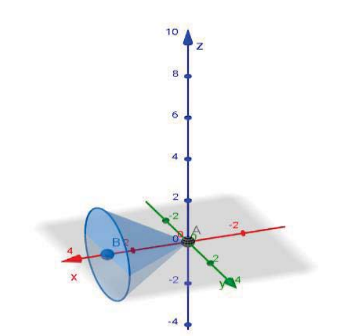
معادلة من النمط :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{r^2}{a^2} z^2 = 0 \\ 0 \le z \le a \end{cases}$$

2) المحور منطبق على ox $(o,\vec{i})$:

رأس المخروط هو o مركز القاعدة من النمط $(a,0,0)$

ونصف قطرها r .



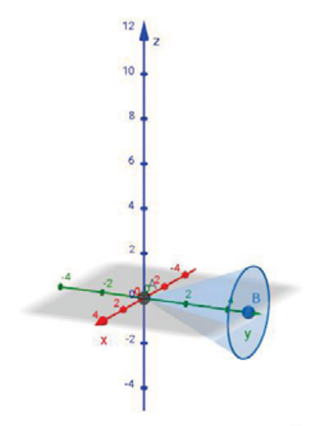
المعادلة من النمط :

$$\begin{cases} y^2 + z^2 - \frac{r^2}{a^2} x^2 = 0 \\ 0 \le x \le a \end{cases}$$

3) المحور منطبق على oy $(o,\vec{j})$:

رأس المخروط هو o مركز القاعدة من النمط

$(0,a,0)$ ونصف قطرها r



المعادلة من النمط :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - \frac{r^2}{a^2} y^2 = 0 \\ 0 \le y \le a \end{cases}$$

======================

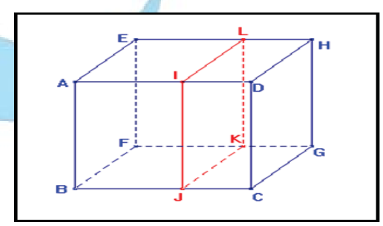
❖ **مقطع مجسم بمستوى :**

- يقطع مستو (P) مستويين متوازيين (P_1) و (P_2) وفق مستقيمين متوازيين (Δ_1) و (Δ_2).
- إدا كان مستقيم موازيا لمستويين متقاطعين (P_1) و (P_2)، يكون موازيا للمستقيم (Δ) تقاطع (P_1) و (P_2).
- إذا احتوى مستويين متقاطعين (P_1) و (P_2)، على مستقيمين متوازيين (Δ_1) و (Δ_2) كان الفصل المشترك لهما موازياً لهذين المستقيمين
- إذا انتمت نقطتين إلى مستوي فإن المستقيم المار بهما محتوى بهذا المستوي
- لا يجاد الفصل المشترك بين مستويين نبحث عن النقاط المشتركة بين المستويين

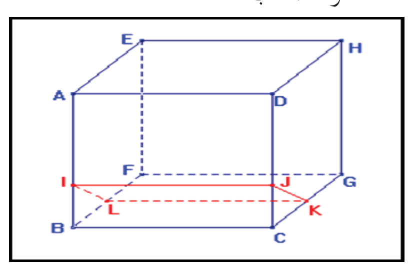
1) المقاطع المستوية لمكعب

مقطع مكعب بمستو (P) هو:

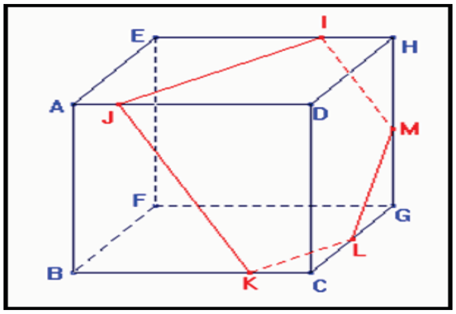
- مربع إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه المكعب.



- قطعة مستقيمة أو مستطيل إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أحرف المكعب.



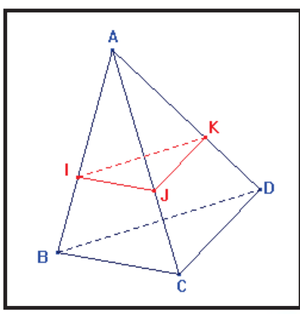
- نقطة، مثلث، متوازي أضلاع، شبه منحرف، خماسي أو سداسي في الحالات الأخرى.



2) المقاطع المستوية لرباعي وجوه

مقطع رباعي وجوه بمستو (P) هو:

- نقطة أو مثلث إدا كان المستوي (P) موازيا لأحد أوجه رباعي الوجوه.



- نقطة، قطعة مستقيمة، مثلث أو رباعي في الحالات الأخرى.