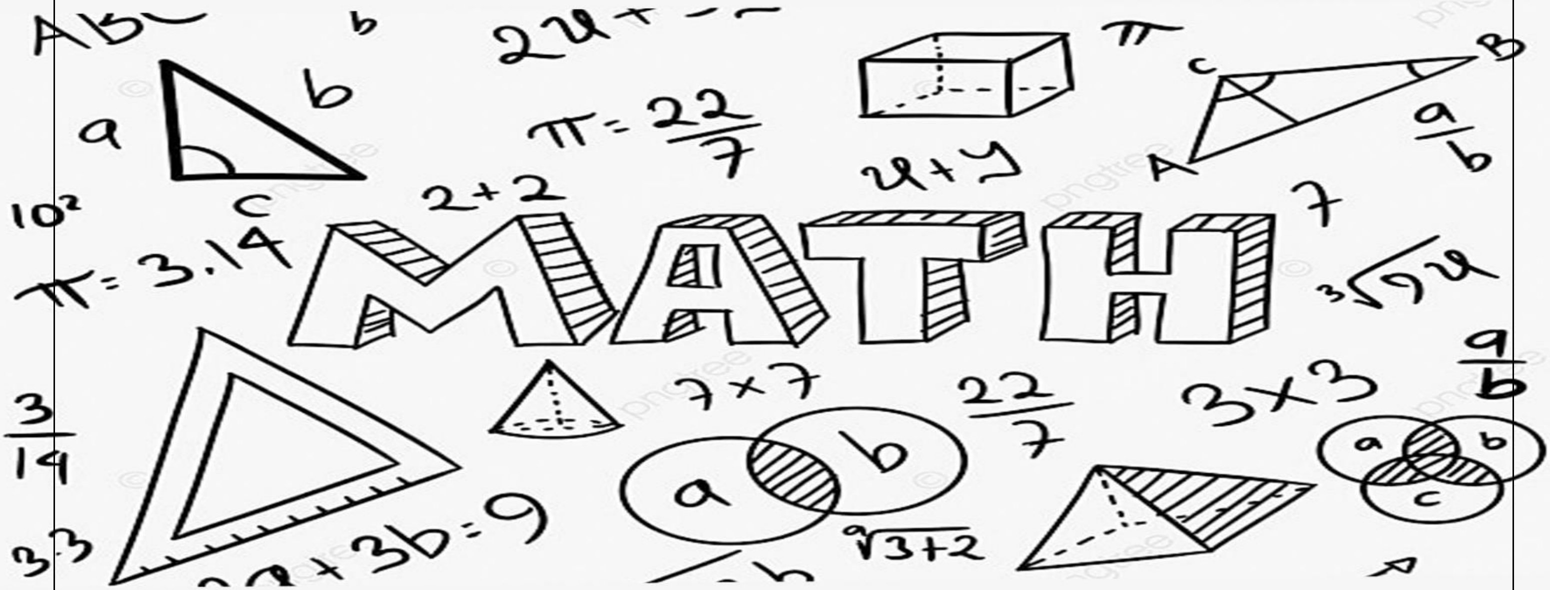
الأشعة



الثالث الثانوي العلمي

BY:Rahaf

أ.نورالدين البغدادي

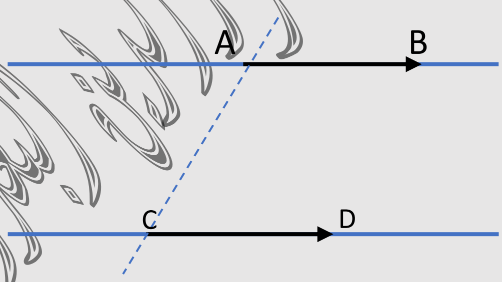
المقادير:

- مقادير كمية :
  1. الطول
  2. الوزن
  3. الحجم
- مقادير شعاعية :
  1. السرعة
  2. التسارع
  3. القوة

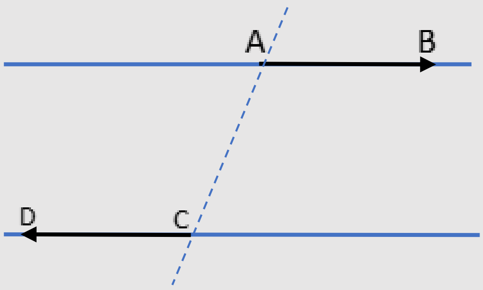
عناصر الشعاع: ١. المنحى ٢. الجهة ٣. الطويلة (النظيم)

المنحى: هو المستقيم الذي يحمل الشعاع أو أي مستقيم آخر يوازيه.

مقارنه الجهة لايمكن مقارنة جهة الشعاعين إلا كان لهما نفس المنحى .



CD,AB متفقان بالجهة



CD,AB متخالفان بالجهة

تساوى شعاعين :

يتساوى شعاعان اذا كان لهما

١.المنحى ذاته

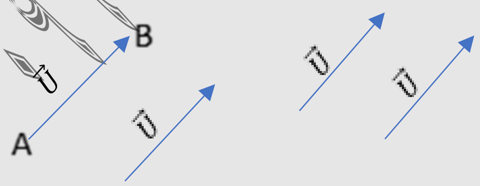
٢.الجهة ذاتها

٣.الطويلة ذاتها

$\vec{AB}=\vec{DC}$

خواص الأشعة :

١.الاستنساخ :

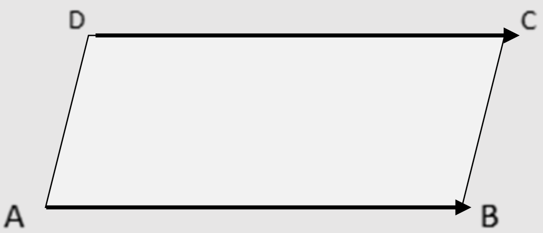


٢.تساوي شعاعين لهما المبدأ ذاته :

M تنطبق على B ⇒ $\vec{AM}=\vec{AB}$

M تنطبق على R ⇒ $\vec{CM}=\vec{CR}$

٣.متوازي الأضلاع:



ABCD متوازي اضلاع ⟺ $[AB]=[DC]$

$(DC) \parallel (AB)$

ضلعان متسايران

ABCD متوازي الاضلاع ⟹ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

بعض الأشعة الخاصة:

١. الشعاع الصفري $\vec{0}$: هو الشعاع انطبقت بدايته على نهايته وحامله غير معين .

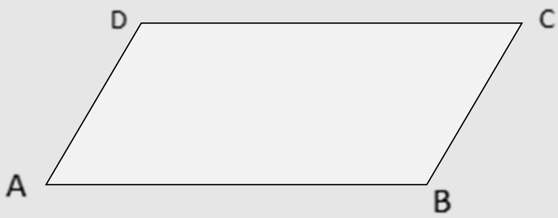
$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$

٢. الشعاعان المتعاكسان :

لهما : .a المنحى ذاته

.b الطويلة ذاتها

.c جهتين مختلفين



$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ متعاكسان

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=0$

ملاحظة :

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

$-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{DC}$

١ - جمع الأشعة: Tail to tail جمع شعاعين لهما المبد ذاته

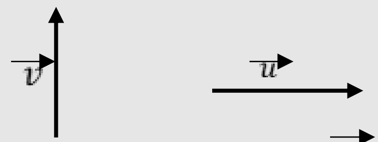
قاعدة متوازي الاضلاع

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}= \overrightarrow{AD}$

٢-الأشعة المتعاقبة Head to tail نهاية الأول بداية الثاني وهكذا (علاقة شال):

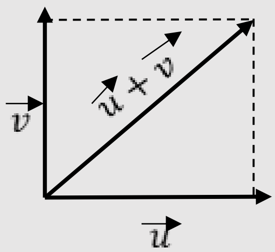
$\overrightarrow{AB} +\overrightarrow{BC} =\overrightarrow{AC}$

تمرين:

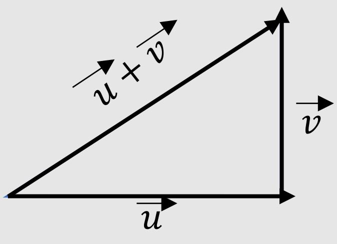


أوجد $\vec{u}+\vec{v}$

ط١



ط٢



كيف نعلم بوجود علاقة شال

الحرف الأوسط نفسه

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

الحرف الأول و الأخير نفسه

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=$

$\overline{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$

ماذا نستفيد من علاقة شال

اختصار المجاميع الشعاعية

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

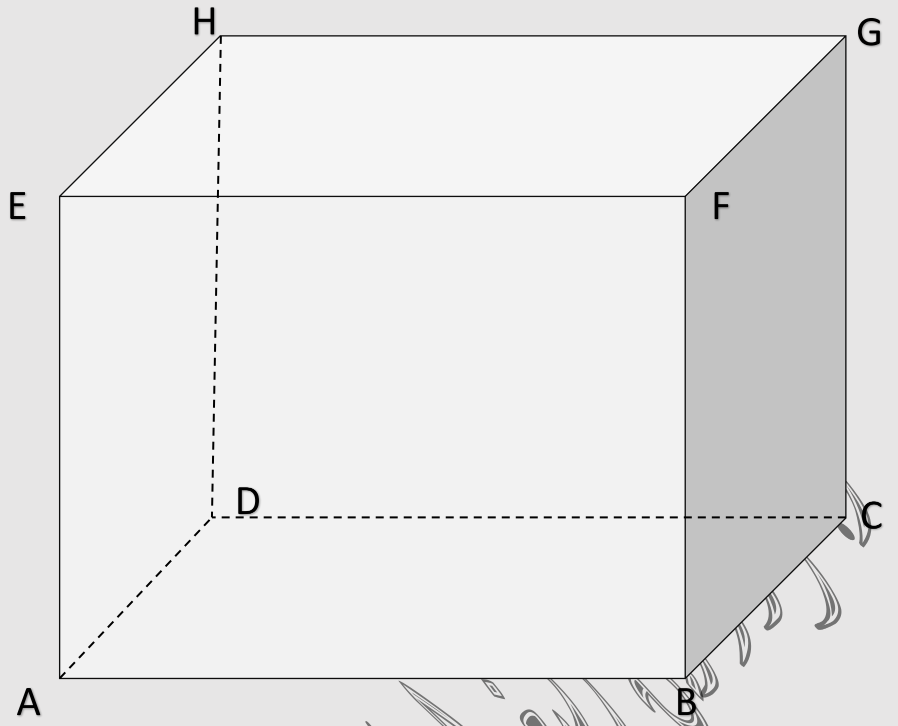
ويمكن مباشرة

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$

تفريق الشعاع

$\overrightarrow{A_CB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}$

المكعب:



- رؤوس المكعب 8 رؤوس H.G.F.E.D.C.B.A
- $[AB].[BC].[CG]$ .... أحرف المكعب(خشبات) عددها 12
- $ABCD, EFGH$ قاعدة 2
- $BCGF$, $CGHD$,....... 4 أوجه جانبية
- $[AC]$قطر قاعدة 4

  [BG] قطروجه جانبي 8
- قطر المكعب: هو كل قطعة مستقيمة تصل بين رأسين لا يقعان في قاعدة وحدة ولا في وجه جانبي واحد مثل القطر $[AG].[BH]$ ... ...

*لمعرفة القطر المرسوم من أي رأس في المكعب نستخدم قاعدة :

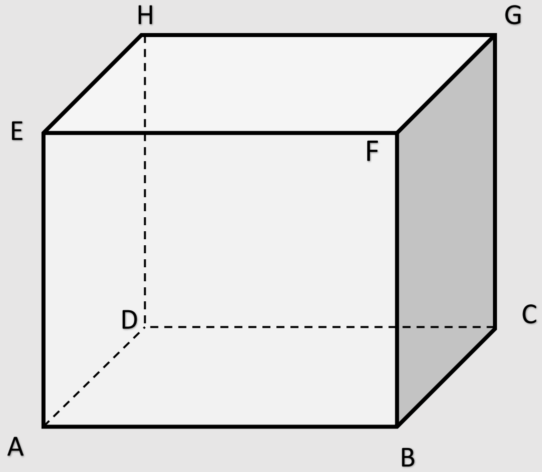
أرض ← سما ← مقابل

سما ← أرض ← مقابل

القطر المرسوم من A	$[AG]$
القطر المرسوم من B	$[BH]$
القطر المرسوم من D	$[FD]$
القطر المرسوم من E	$[EC]$

ملاحظة : أقطار المكعب متناصفة ومتساوية

الاستبدال :



١. الاستبدال الثلاثي : حرف المكعب

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$$

$$\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$$

٢. الاستبدال الوحيد :قطر قاعدة او جانبي

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF}$

٣. قطر المكعب : $\overrightarrow{AG}$=??

لا يستبدل

تمرين: ABCDEFGH مكعب :

أوجد مايلي :

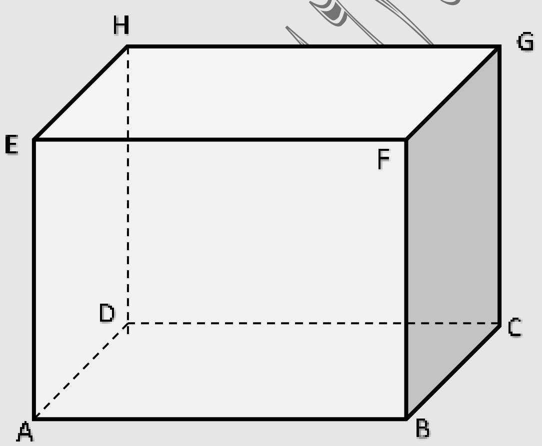
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FC}$$

$$\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DG}$$

$$\overrightarrow{FH} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FD}$$



علاقة الذهبية:

طرح شعاعين لهما المبدأ ذاته

$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=$

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=$

$\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$

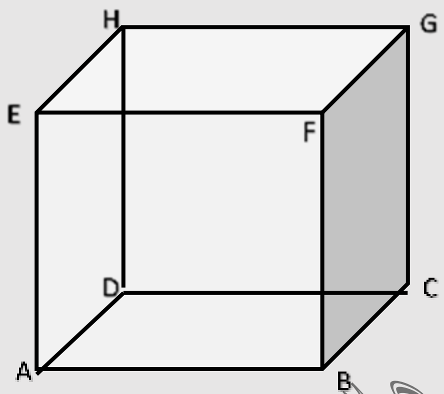
$\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{LK}$

جمع ثلاث أشعة تبدأ بالحرف ذاته .

قطر مكعب أو قطر متوازي السطوح

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AG}$



خشبات

نأخذ الحرف الأول

أرض ← سما ← مقابل

سما ← أرض ← مقابل

$\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=$

$\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BH}$

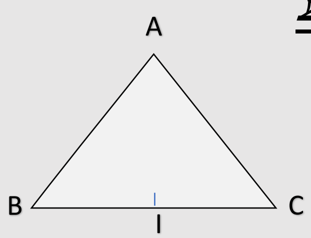
$\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}+\overrightarrow{FE}=$

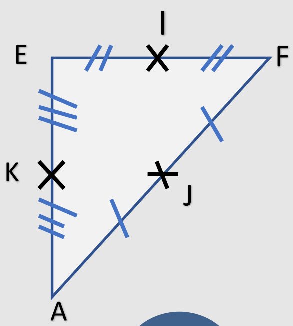
$\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FD}$

٣.علاقة ألماسية .

علاقة المتوسط

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$



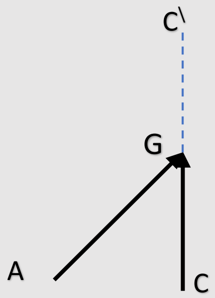


$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AI}$

$\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{EJ}$

$\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FA}=2\overrightarrow{FK}$

٤.جمع شعاعين لهما النهاية ذاتها.***Head to Head***.



$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG} =$........

$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AC'}$

C\ نظيرة C بالنسبة لـG

كيف نفكر في جمع شعاعين

(البحلقة)

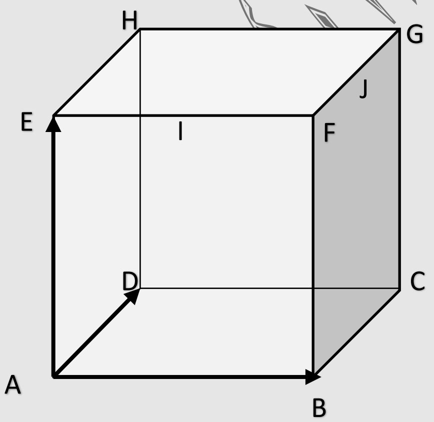
_ الحرف الأول نفسة ← متوازي الأضلاع

الحرف الأوسط نفسة أو الأول و الأخير ← شال

لما مايمشي الحال ← ننقل الأشعة إلى الرسم

الاستبدال | علاقة ذهبية | التفريق (الزرع)

تمرين صفحة 16 : ABCDEFGH مكعب , I منتصف EF , J منتصف FG في كل من الحالات التالية ,بين إذا كانت النقطة M المعرفة بالمساواة الشعاعية المفروضة تنطبق او لا تنطبق على أحد رؤوس المكعب , وعلل إجابتك .



١. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (الاستبدال)

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF}$

M تنطبق على F وهو أحد رؤوس المكعب

٢. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG}$

M تنطبق على G وهي أحد رؤوس المكعب

٣. $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{CH}$

M تنطبق عل H وهي احد رؤوس المكعب

٤. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

ط١ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{DG}$

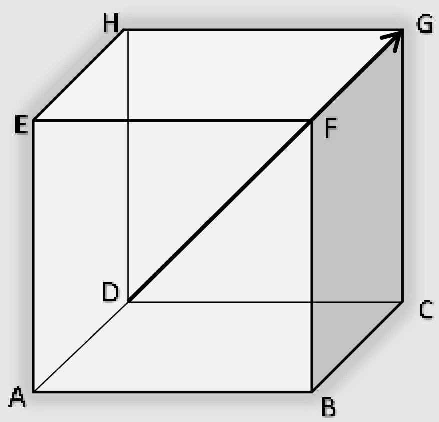
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DH}$

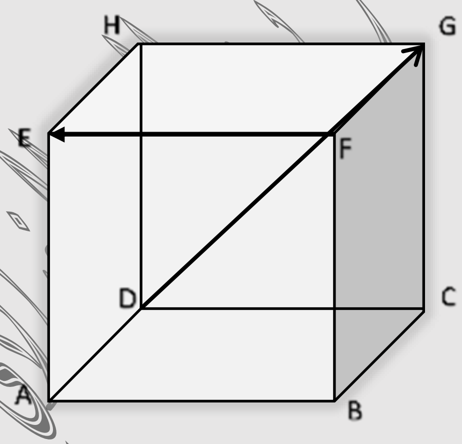
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$

ط٢ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{DG}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AF}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AE}$





الخطوة الأخيرة لازم يكون الحرف الأول بالطرف الأول نفس الحرف الأول بالطرف الثاني.

٥. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BF}$

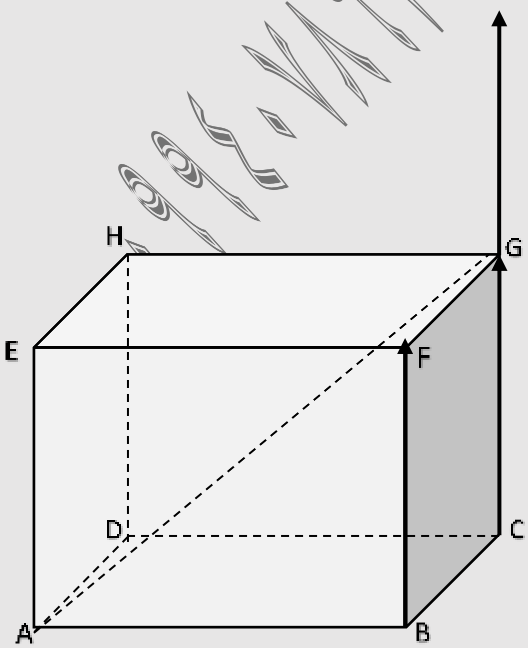
$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{CG}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC'} = \overrightarrow{AC'}$

M تنطبق على C'

C' نظيرة C بالنسبة ل G

C' خارج المكعب



٦. $\overrightarrow{AM}= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$

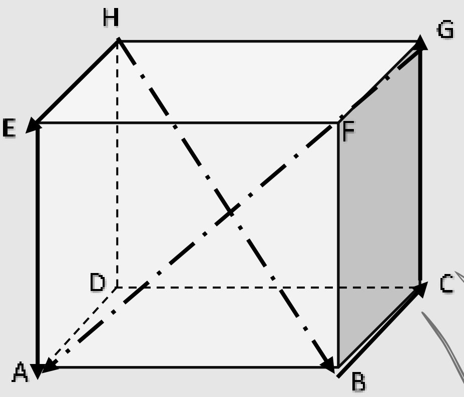
جبروك جبروك

$$\overrightarrow{AM}= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB})$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB}$$

M تنطبق على B أحد رؤوس المكعب

ط٢



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{HB})$$

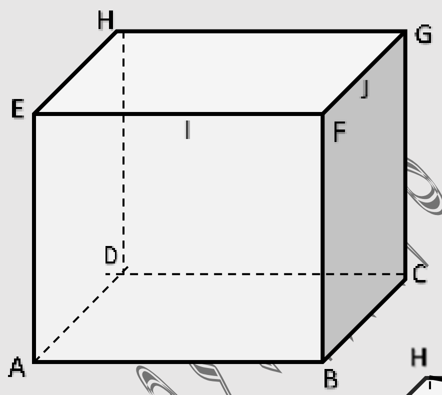
$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

M تنطبق على B

التمرين ٢ : ABCDEFGH مكعب

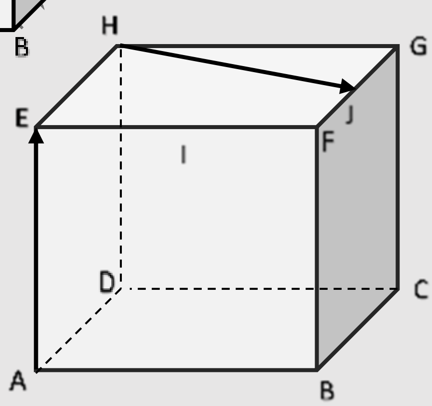
I, منتصف EF , J منتصف FG , حدد موقع النقطة N



١. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J



٢. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HJ}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AJ}$

N تنطبق على J

٣. $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EI} = \overrightarrow{AI}$

N تنطبق على I

٣: عبر عن مجموع الشعاعي بشعاع واحد ((قد يكون بضرب بعدد)) مستخدما نقطتين من الشكل ذاته .

١. $\overrightarrow{Aj} + \overrightarrow{BJ} =$

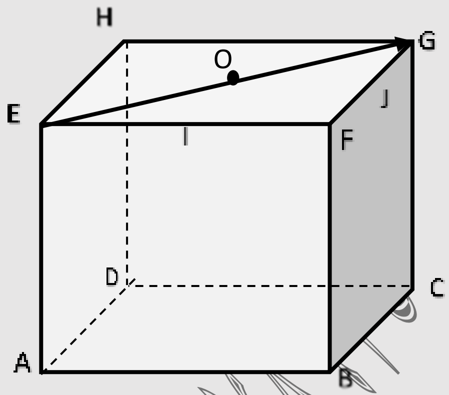
$\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BJ}$

٢. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC} =$

$\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AC}$

أو $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EG}$

هنا مو ضروري شغلة تنطبق على شغلة



٣. $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AI}$

٤. $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF} =$

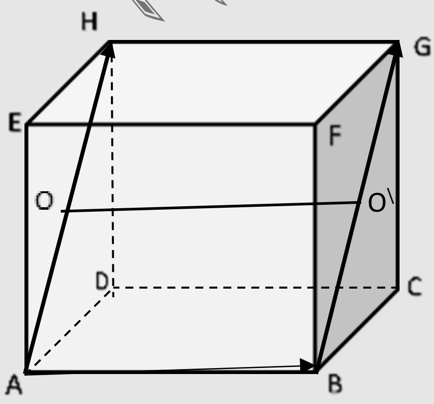
$\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \frac{1}{2}\overrightarrow{GF}$

$\frac{1}{2}(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EI}$

أو $\frac{1}{2}\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{JF}$

$\overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{EI}$

السؤال الثاني : ABCDEFGH متوازي سطوح ووضع النقاط . R.Q. P



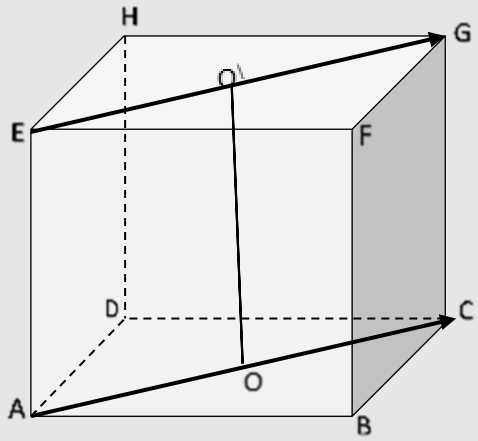
$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE})$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AH}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO'}$

P تنطبق على O\ و O\ مركز الوجه BCGF



$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})+\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AO'}$$

Q تنطبق على O' و O' مركز الوجه EFGH

$$\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{CR}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE})+\overrightarrow{BA}$$

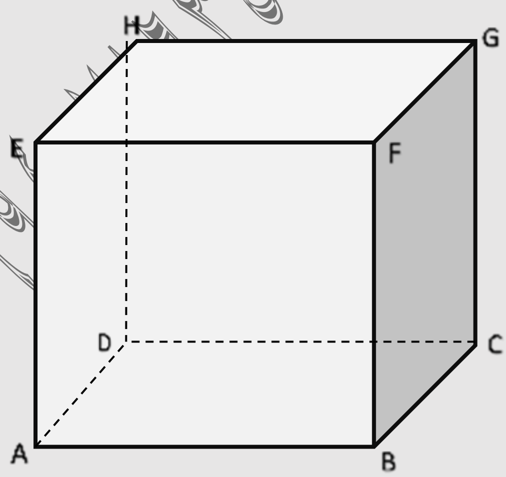
$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{BA}$$

$$=\overrightarrow{DO}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CO}$$

R تنطبق على O

مركز الوجه ADHE

أثبت صحة المساواة :



$$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{0}$$

$L1: \overrightarrow{EA}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{BE}=$

$\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{0}=L2$

٢. $\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{0}$

$L1=\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{CF}=$

$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DE}=0=L2$

٣. $\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{0}$

$L1=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{EB}$

$\overrightarrow{CH}+\overrightarrow{EB}=0=L2$

٤. $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}$

$L1=\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FG}=$

$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{FD}=L2$

الارتباط الخطي لشعاعين

نقول عن شعاعين v,u أنهما مرتبطين خطيا اذا وفقط اذا كان أحدهما ينتج عن الثاني بضربه بعدد حقيقي K .

$\vec{v} = K\vec{u}$ $\qquad\qquad$ $\vec{u} = K\vec{v}$

هنا نقول أن $\vec{v},\vec{u}$ لهما المنحى ذاته .

الفائدة

$\vec{AB} = \frac{1}{2}\vec{CD}$

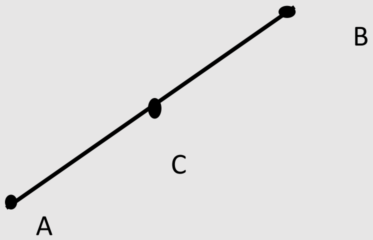
CD,AB مرتبطان خطيا ولهما المنحى ذاته.

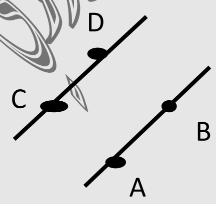
المستقيمان $\vec{AB}$ و $\vec{CD}$ متوازيان (الانطباق حالة من حالات التوازن)

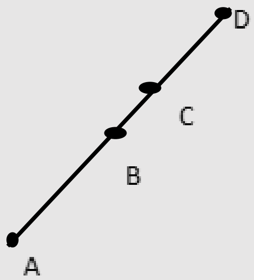
$\vec{AB} = 2\vec{AC}$

AB و AC مرتبطان خطيا ولهما المنحى ذاته .

C,B ,A تقع على استقامه واحدة



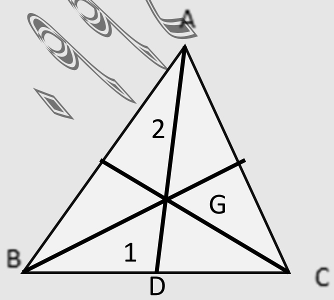




تذكرة : نقطة تلاقي المتوسطات في أي مثلث هي مركز ثقل المثلث .

مثال : G مركز ثقل المثلث ABC

G نقطة تلاقي متوسطة وهي تحقق



١. $[\vec{AG}] = \frac{2}{3}[\vec{AD}]$

٢. $[\vec{GD}] = \frac{1}{3}[\vec{AD}]$

٣. $[\vec{GD}] = \frac{1}{2}[\vec{GA}]$

G مركز ثقل المثلث ABC تحقق العلاقة $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = 0$

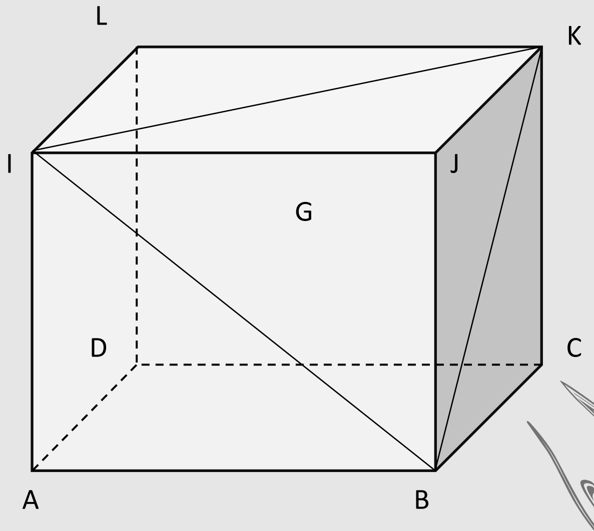
من اهم علاقات البدأ

س :كيف نبرهن أن ثلاث نقاط على استقامة واحدة : نبحث عن الارتباط الخطي لشعاعين مؤلفين من النقاط الثلاث .(ابحث عن علاقة نبدأ بها)

مثال محلول صفحة 15 :

ABCDIJKL متوازي السطوح G مركز ثقل المثل BIK

أثبت ان النقط D , G ,J على استقامة واحدة .



الحل : بما أن G مركز ثقل المثلث BIK

$$\vec{GB}+\vec{GI}+\vec{GK}=\vec{0}$$

$$\vec{GJ}+\vec{JB}+\vec{GJ}+\vec{JI}+\vec{GJ}+\vec{JK}=\vec{0}$$

$$3\vec{GJ}+\vec{JB}+\vec{JI}+\vec{JK}=\vec{0}$$

$$3\vec{GJ}+\vec{JD}=\vec{0}$$

$$\vec{JD}=-3\vec{GJ}$$

$\vec{GJ}$,$\vec{JD}$ مرتبطان خطيا

G, J, D على استقامة واحدة

يجب علينا زرع حرف يحقق لنا خشبات فقط

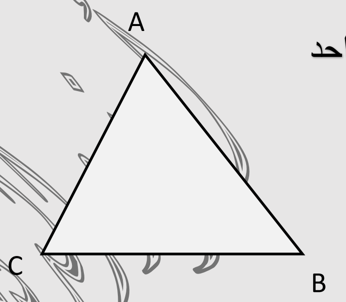
الارتباط الخطي لثلاثة أشعة

ماذا يعني

$\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ مرتبطة خطيا

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ تقع في مستو

واحد

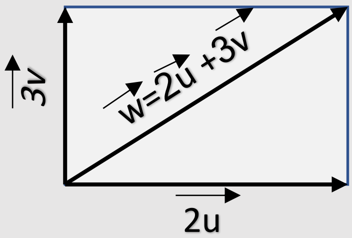


كيف نبرهن

$\vec{w}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}$

$\alpha \in IR$. $\beta \in R$

بشرط $\vec{u},\vec{v}$ غير مرتبطين خطيا



الفائدة

مثلث ABC

$\vec{AD} = 2\,\vec{AB} + 3\,\vec{AC}$

$\vec{AD},\vec{AB}$, $\vec{AC}$ مرتبطة

خطيا وتقع في مستو واحد

و النقاط ,A, B. C. D تقع

في مستو واحد

عدينا النقاط
وطلعو 4 نقاط
تقع في مستوي
واحد

مثلث ABC

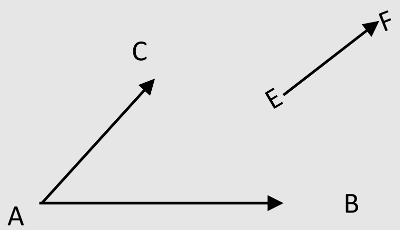
$\vec{EF} = -3\vec{AB} + 5\,\vec{AC}$

الأشعة $\vec{AB}$, $\vec{EF}$, $\vec{AC}$ مرتبطة

خطيا وتقع في مستو واحد

والمستقيم EF يوازي المستوي(ABC)

عدينا النقاط وطلعو
5 نقاط مستقيم
يوازي مستوي



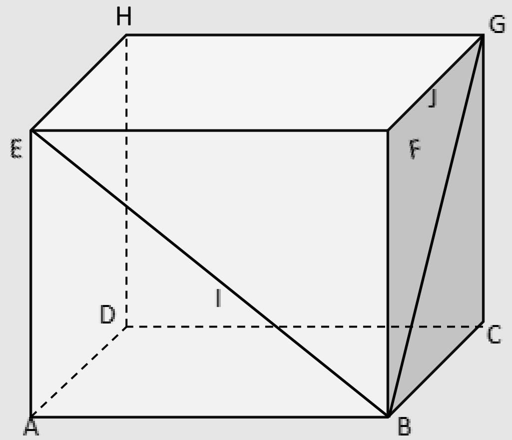
مثال محلول صفحة 18 :

ABCDEFGH . I منتصف EB ,J منتصف FG

أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا.

نبحث علاقة عن علاقة بدء تبدأ بها وتحوي أحد الأشعة

على الأقل



من المثلث BFG

حسب علاقة المتوسط

$$\overrightarrow{B_EF} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{B_IJ}$$

$$\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{BI} + 2\,\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} = 2\,\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

$\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BG}$ BG,EF غير مرتبطين خطيا

الأشعة $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا

ط٢ : من المثلث EFG حسب علاقة المتوسط

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{E_BG} = 2\,\overrightarrow{EJ}$$

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{EI} + 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{IJ}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BG}$$

$\overrightarrow{EF} \perp \overrightarrow{BG}$ BG,EF غير مرتبطين خطيا

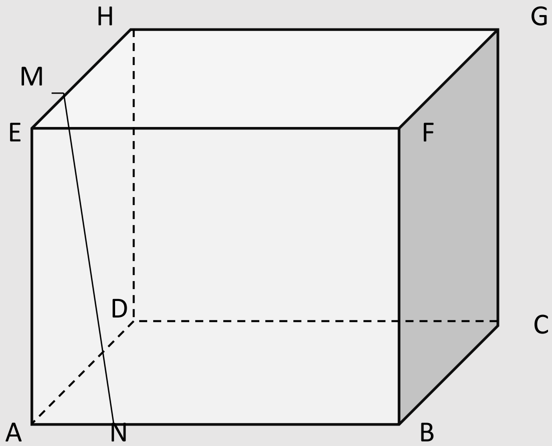
الأشعة $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطة خطيا

تمرين صفحة 20 :

ABCDEFGH مكعب, M نقطة تحقق $\overrightarrow{EM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$, N نقطة تحقق $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

١. اثبت صحة العلاقة .

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$$



$L1: \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EA}$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{EA}$

$= \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{EA} = L2$

ط٢: $L1 : \overrightarrow{E_MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{D_AB}$

$\overrightarrow{EM} + \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\frac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{AN} = M2 = L1$

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيا .

من الطلب 1

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB})$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$

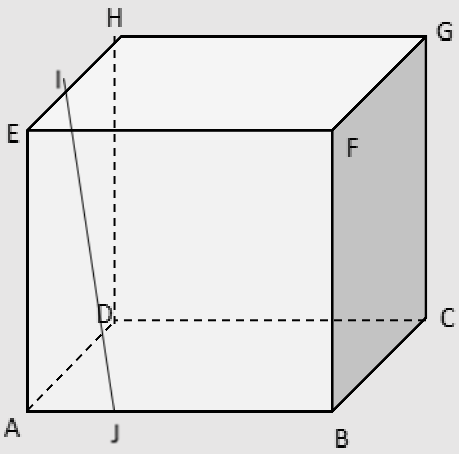
$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{HB}$ غير مرتبطة خطيا وضوحا

$\overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{HB}$, $\overrightarrow{EA}$ مرتبطة خطيا

تمرين :

ABCDEFGH مكعب , $\overrightarrow{EI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EH}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

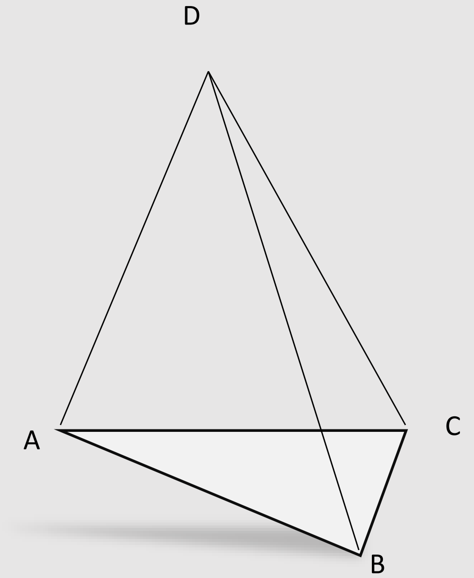


١. أثبت صحة العلاقة .

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{4}\overrightarrow{DB}$$

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{IJ}$. $\overrightarrow{EA}$. $\overrightarrow{HB}$ مرتبطة خطيا

الحل :



تمرين ٤ صفحة ٢٠

ABCD رباعي وجوه , M نقطة تحقق العلاقة :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

١. عبر عن $\overrightarrow{AM}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$

٢. استنتج أن M تنتمي للمستوي (ABC)

الحل: ١.

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{A_BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

٢. أثبت أن **M∈(ABC)**

كأن السؤال أثبت أن C,B,A,M تقع في مستو واحد

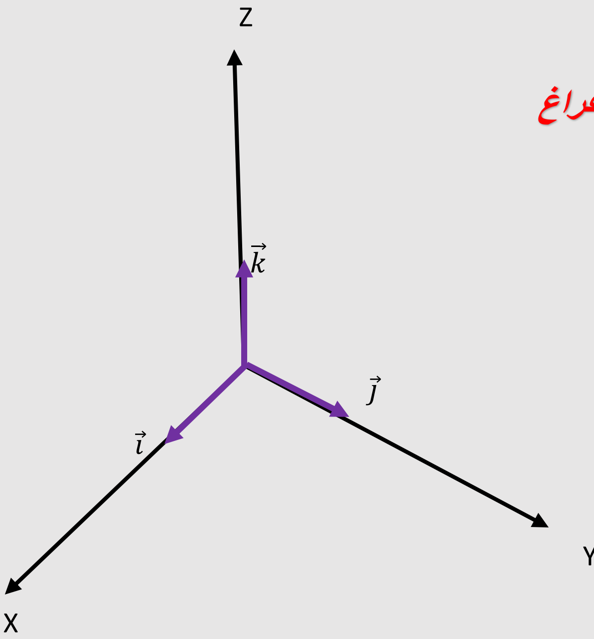
من العلاقة السابقة $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

الأشعة $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ مرتبطة خطيا

و النقاط M,C, B, A تقع في مستو واحد

$\Longrightarrow$ M∈(ABC)

المعلم في الفراغ



نرمز للمعلم $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

O:المبدأ

$(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ ثلاث أشعة غير مرتبطة خطيا

$M(X , Y ,Z)$

X:الفواصل

Y:التراتيب

Z:الراقم

قوانين المعلم الكيفي :

١. كتابة شعاع

$A(X_A , Y_A ,Z_A)$ $B (X_B , Y_B, Z_B)$

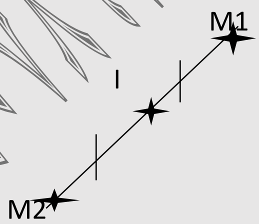
$\vec{AB} = (X_B - X_A)\vec{i} + (Y_B - Y_A)\vec{j} + (Z_B - Z_A)\vec{k}$

أو $\vec{AB} = (X_B - X_A , Y_B - Y_A , Z_B - Z_A)$

٢. بفرض $\vec{v}(X' , Y' , Z')$ ، $\vec{u}(X , Y , Z)$

- $\vec{u}+\vec{v} = (x+x' , y+y' , z+z')$
- $Ku = (Kx , Ky , Kz)$ $K \in R$
- $u=v$ $x=x'$, $y=y'$, $z=z'$

٣. منتصف قطعة مستقيمة



بفرض I منتصف القطعة $[M1 , M2]$

$$I \left(\frac{X1+X2}{2}, \frac{Y1+Y2}{2}, \frac{Z1+Z2}{2}\right)$$

٤. احداثيات مركز ثقل مثلث بفرض G مركز ثقل ABC

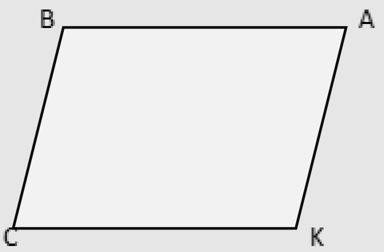
$$G \left(\frac{X1+X2+X3}{3} , \frac{Y1+Y2+Y3}{3} , \frac{Z1+Z2+Z3}{3}\right)$$

تمرين صفحة ٢٤ :

A(3,5,2) , B(2,-1,3) , C (0 , -2,2) , D (-2, 5 , 1) , E (3 ,9, 2) , F(8, 13 , 3)

١. احداثيات I منتصف AB
٢. احسب مركبات الأشعة $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB}$
٣. جد احداثيات K التي تجعل ABCK متوازي أضلاع
٤. $\overrightarrow{V} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + 3\,\overrightarrow{EF}$

الحل:



1) $I\left(\frac{XA+XB}{2}, \frac{YA+YB}{2}, \frac{ZA+ZB}{2}\right)$

$I\left(\frac{5}{2}, 2, \frac{5}{2}\right)$

2) $\overrightarrow{AB}$ (-1,-6 , 1)　　$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{i} - 6\overrightarrow{j} + \overrightarrow{K}$

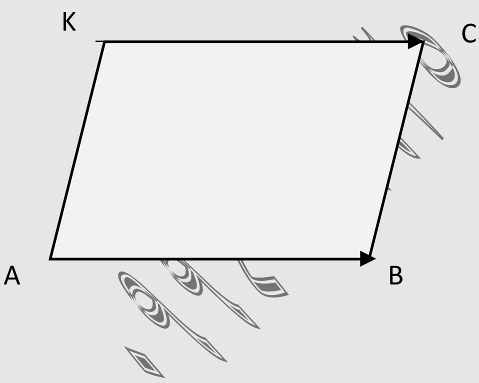
$\overrightarrow{CD}$ (-2,7,-1)　　$\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{i} + 7\overrightarrow{j} - \overrightarrow{K}$

$\overrightarrow{EF}$ (5,4,1)　　$\overrightarrow{EF} = 5\overrightarrow{i} + 4\overrightarrow{j} + \overrightarrow{K}$

3) نفرض K(X,Y,Z)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{KC}$

(-1, -6 , 1) = (-X ,-2-Y , 2-Z)



X=1　　-1 = -X

Y= 4　　-6 = -2-Y

Z=1　　1= 2-Z

K=(1,4,1)

4) $\overrightarrow{V} = 2\,(-1,-6,1) - \frac{1}{2}(-2,7,-1) + 3(5,4,1)$

$\overrightarrow{V} = (-2,-12,2) + (1, \frac{-7}{2}, \frac{1}{2}) + (15, 12, 3)$

$\overrightarrow{V} = (14, \frac{-7}{2}, \frac{11}{2})$

تمرين صفحة ٢٠

C,B,A ثلاث نقاط متمايزة في الفراغ

E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE} = 4\,\overrightarrow{BC}$

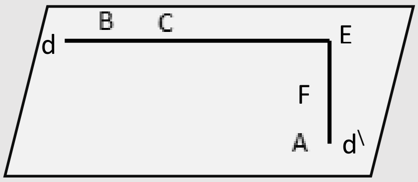
F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AE}$

هل النقاط F,E,C,B,A تقع في مستو واحد

الحل :

$\overrightarrow{BE} = 4\,\overrightarrow{BC}$ الشعاعان $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{BC}$ مرتبطان خطيا , E ,C, B على استقامة واحدة فهي تقع على مستقيم d

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{AE}$ الشعاعان $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}$ مرتبطة خطيا , E,F,A تقع على استقامة واحدة فهي تقع على مستقيم d



حالة١ : A,B,C على استقامة واحدة $d^{\backslash},d$ منطبقان و يقعان في مستو واحدة على الأقل F,E,C,B,A تقع في مستو واحد على الأقل

حالة ٢ :

ملاحظة : إذا كان $\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}$ مرتبطين خطيا $\overrightarrow{v},\overrightarrow{w},\overrightarrow{u}$ مرتبطة خطيا ولكن العكس ليس صحيحا بالضرورة .

مثال : بفرض $\overrightarrow{w}=2\overrightarrow{u}$ ولدينا شعاع $\overrightarrow{v}$ تصبح $\overrightarrow{w},\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}$ مرتبطة خطيا

$\overrightarrow{w} = 2\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$

I donot lik

تمرين صفحة ٢٠:

$3\overrightarrow{EM} = 2\overrightarrow{EI}$

$\overrightarrow{EM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EI}$

١. لماذا M مركز ثقل EAB في المثلث EAB لدينا EI متوسط

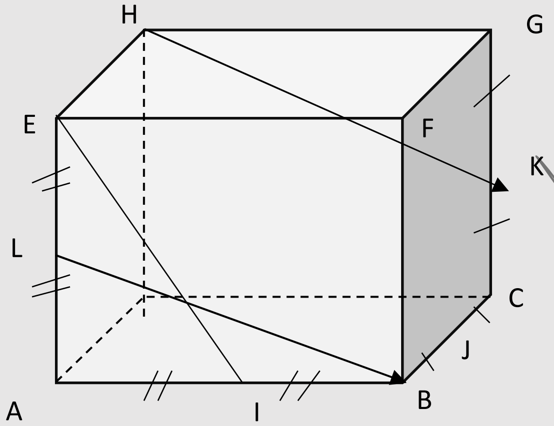
ومن الفرض $EM = \frac{2}{3} EI$, M هي نقطة تلاقي المتوسطات في المثلث EAB

M مركز ثقل المثلث EAB

٢. أثبت أن الأشعة $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطة خطيا .

$\overrightarrow{LM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{LB}$

$3\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LB}$



الحل:

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GK}$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{LB}$

$\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{LM}$

الشعاعين $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{LM}$ مرتبطان خطيا

اذا $\overrightarrow{HK}$, $\overrightarrow{LM}$, $\overrightarrow{CJ}$ مرتبطة خطيا

ويمكن أن تكتب $\overrightarrow{HK} = 3\overrightarrow{LM} + 0\overrightarrow{CJ}$

الارتباط الخطي تحليليا

بفرض $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$ $\qquad \vec{v}(x',y',z') \quad , \quad \vec{u}(x,y,z)$

$\vec{u}, \vec{V}$ مرتبطان خطيا $\qquad X', Y', Z' \in R$

تمرين صفحة ٢٤

$C(2,0,-3)$, $B(0,2,4)$, $A(3,-1,2)$

$\frac{-3}{-1}=\frac{3}{1}=\frac{2}{-5}$ $\qquad \vec{AB}(-3,3,2)$

$\vec{AC}(-1,+1,-5)$

الشعاعان $\vec{AC}, \vec{AB}$ مرتبطين خطيا

C, B, A ليست على استقامة واحدة

فهي تشكل رؤوس مثلث وتعين مستويا P

٢. $C(0,-1,7)$, $B(-2,0,5)$, $A(-4,1,3)$

$\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}=\frac{2}{4}$ $\qquad \vec{AB}(2,-1,2)$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{AB}{AC}$ $\qquad \vec{AC}(4,-2,4)$

$\vec{AC}=2\vec{AB}$

الشعاعان $\vec{AB}, \vec{AC}$ مرتبطان خطيا

C, B, A على استقامة واحدة

٣. $C(1,-1,-3)$, $B(1,-1,4)$, $A(1,-1,0)$

$\frac{0}{0}=\frac{0}{0}=\frac{4}{-3}=\frac{AB}{AC}$ $\qquad \vec{AB}(0,0,4)$

$\vec{AC}(0,0,-3)$

$4\vec{AC}=-3\vec{AB}$

$\vec{AC}=\frac{-3\vec{AB}}{4}$

الشعاعان $\vec{AB}, \vec{AC}$ مرتبطا خطيا , C,B,A على استقامة واحدة

تمرين صفحة ٢٤

أيمكن تعيين b,a لتكون

M(a,b ,2) , B (3,2,1) ,A (2,3,0)

على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AB}(1,-1,1)$

$\overrightarrow{AM}(a-2 ,b-3 ,2)$

$$\frac{a-2}{1} = \frac{b-3}{-1} = \frac{2}{1}$$

1 2 3

من ١ و ٣ $a-2 = 2 \rightarrow a = 4$

من ٢و ٣ $b-3 = -2$ $b = 1$ $\frac{b-3}{-1} = 2$

من اجل : $a = 4$, $b= 1$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا M,B,A على استقامة واحدة

تمرين

أيمكن تعيين a ليكون الشعاعان $\overrightarrow{u}(2,a , 5)$, $\overrightarrow{v}(1,-2, a)$ مرتبطان خطيا

$$\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} = \frac{5}{a} \qquad a \neq 0$$

من ١ و ٢ $\frac{2}{1} = \frac{a}{-2} \Longrightarrow a = -4$

من ١ و ٣ $\frac{2}{1} = \frac{5}{a} \Longrightarrow 2a = 5 \Longrightarrow a = \frac{5}{2}$

لا يوجد قيمة ل a تجعل $\overrightarrow{v},\overrightarrow{u}$ مرتبطان خطيا

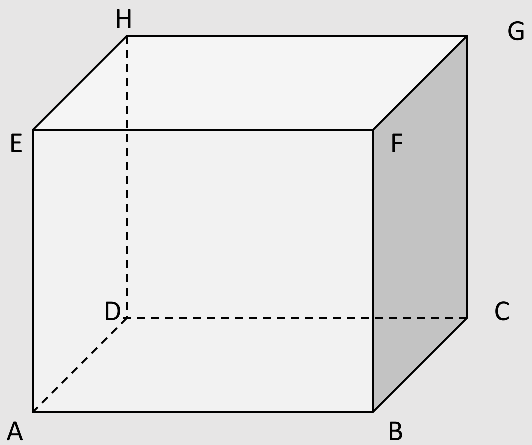
تمرين صفحة ٢٤ :

في معلم $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ للفراغ , تعطى إحداثيات أربع من الرؤوس متوازي السطوح

ABCDEFGH المرسوم جانبا وهي :

$E(3,-1,3)$, $C(-3,2,0)$, $B(1,3,-1)$, $A(2,1,-1)$

جد إحداثيات الرؤوس الأربع الأخرى .



الحل : ABCD متوزي السطوح

(X,Y,Z) $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$(-1,2,0) = (-3-X, 2-Y, -Z)$

$X=-2 \quad -1 = -3-X$

$Y=0 \quad 2 = 2-Y$

$Z=0 \quad 0=Z$

$D(-2, 0, 0)$

ABEF موازي الاضلاع :

$E(X,Y,Z) \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$

$(-1, 2, 0) = (X-3, Y+1, Z-3)$

$X = 2 \quad X-3 = -1$

$Y = -1 \quad Y+1 = 2$

$Z = +3 \quad Z-3 = 0$

ADHE متوازي أضلاع

$H(X,Y,Z) \quad \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH}$

$(-4, -1, 1) = (X-3, Y+1, Z-3)$

$X=-1 \quad X-3 = -4$

$Y=-2 \quad Y+1 = -1$

$Z=4 \quad Z-3 = 1$

$H(-1, -2, 4)$

BCGF متوازي أضلاع

BC = FG   G(X,Y,Z)

(-4, -1 ,1) = (X-2 , Y-1 , Z-3)

X-2 = -4   X= -2

Y-1 = -1   Y=0

Z-3 = 1   Z= 4

G(-2 , 0 , 4)

تمرين صفحة ٢٤ :

لدينا في معلم للفراغ النقاط A(3, 0 ,-1) , B(-2,3,2) , C(1,2,-2)

جد إحداثيات النقطة I منتصف AB

جد إحداثيات النقطة D نظيرة I بالنسبة الى C

جد إحداثيات النقطة M التي تحقق العلاقة : BM = AB + 3AC

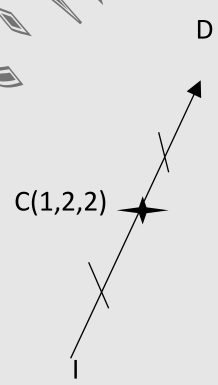
جد إحداثيات النقطة N التي تحقق العلاقة : NA = 2 NC

الحل :

١. $I\left(\frac{XA+XB}{2}, \frac{YA+YB}{2}, \frac{ZA+ZB}{2}\right)$

$I\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

٢. D(X,Y,Z)



$\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{ID}$

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right) = (X-1, Y-2, Z+2)$

$X-1=\frac{1}{2}$ $X = \frac{3}{2}$

$Y-2 = \frac{1}{2}$ $Y = \frac{5}{2}$

$Z+2 = \frac{-5}{2}$ $Z = \frac{-9}{2}$

$D\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{-9}{2}\right)$

٣.نفرض $M(X,Y,Z)$

$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

$(X+2, Y-3, Z-2) = (-5, 3, 3) + 3(-2, 2, -1)$

$X+2 = -11 \qquad X = -13$

$Y-3 = 9 \qquad Y = 12$

$Z-2 = 0 \qquad Z = 2$

$M(-13, 12, 2)$

٤. $N(X,Y,Z) \qquad \overrightarrow{NA} = 2\overrightarrow{NC}$

$(3-X, -Y, -1-Z) = (2-2X, -2Y, -4-2Z)$

$3-X = 2-2X \qquad X = -1$

$-Y = 4-2Y \qquad Y = 4$

$-1-Z = -4-2Z \qquad Z = -3$

$N(-1, 4, -3)$

تمرين صفحة ٢٤ :

لدينا النقطتان: $A(2,3,2)$, $B(5,-1,0)$

جد إن أمكن في كل حالة , إحداثيات النقطة M المحققة للعلاقة المفروضة .

١. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$

٢. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

٣. $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{0}$

٤. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

١. $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{AB}$

نفرض $M(X,Y,Z)$

$(2-X, 3-Y, -2-Z) = 2(3, -4, 2)$

$(2-X, 3-Y, -2-Z) = (6, -8, 4)$

$6 = 2-X \qquad X = -4$

$-8 = 3-Y \qquad Y = 11$

$4 = -2-Z \qquad Z = -6$

$M(-4, 11, -6)$

٢. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

(2-X , 3-Y , -2-Z) = (5-X , -1-Y , -Z)

2=5 2-X=5-X

مستحيلة لا يوجد نقطة M تجعل المساواة السابقة ممكنة

ط٢ $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$

اذا A تنطبق على B ولكن في الفرض A تختلف عن B اذا لايوجد نقطة M تجعل المساواة السابقة ممكنة

٣. $3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{MB} = -3\overrightarrow{BA}$

$\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{AB}$

(5-X , -1-Y , -Z) = 3 (3,-4,2)

(5-X ,-1-Y ,-Z) =(9 , -12 , 6)

X=-4 9 = 5-X

Y=11 -12 =-1-Y

Z=-6 6=-Z

M(-4,11,6)

٤. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

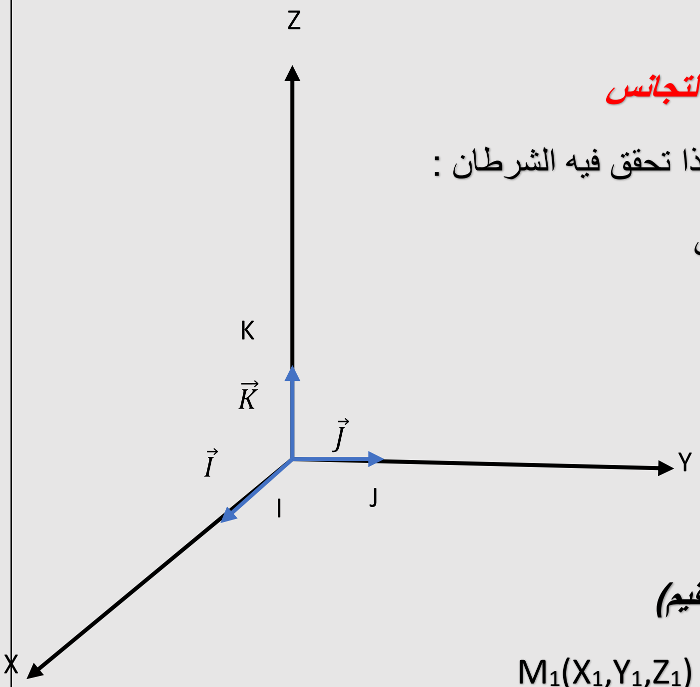
(2-X , 3-Y ,2-Z) - (5-X,-1+Y ,-Z) = (3,-4,2)

2-X-5+X=3

مستحيلة الحل لايوجد نقطة M تجعل المساواة ممكنة

$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BA} \neq \overrightarrow{AB}$



المعلم التجانس

نقول ان المعلم $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ انه متجانس اذا تحقق فيه الشرطان :

١. المستقيمات OI, OJ, OK متجانس مثنى
٢. $\|\vec{I}\| = \|\vec{J}\| = \|\vec{K}\| = 1$

١. *المسافة بين نقطتين (طول قطعة مستقيم)*

في معلم متجانس : $M_2(X_2, Y_2, Z_2)$, $M_1(X_1, Y_1, Z_1)$

$$(M_1, M_2) = \sqrt{(X2 - X1)^2 + (Y2 - Y1)^2 + (Z2 - Z1)^2}$$

٢. *نظيم شعاع (طويلة شعاع)*

بفرض $\vec{U}(X,Y,Z)$ $\vec{U} = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

تمرين صفحة ٢٧ :

في معلم متجانس احسب نظيم كل من الأشعة :

$\vec{U}(2,-2,3)$

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

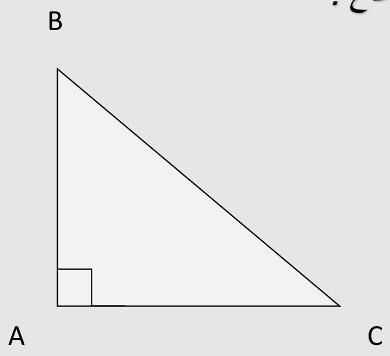
$\vec{V}(1,0,5)$ $\vec{V} = I + 5K$

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{1 + 0 + 25} = \sqrt{26}$$

$\vec{W}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, 1\right)$ $\vec{W} = \sqrt{2}I - \sqrt{3}J + K$

$$\|\vec{W}\| = \sqrt{2 + 3 + 1} = \sqrt{6}$$

بين هل المثلث ABC متساوي الساقين أو قائم أو متساوي الاضلاع :



A(1,3,-1) , B (3 ,6 , -2) , C(0,4,0)

$$[AB] = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$[AC] = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$$

$$[BC] = \sqrt{9+4+4} = \sqrt{17}$$

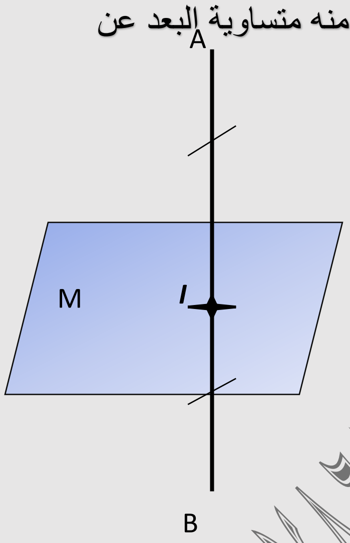
$$(\sqrt{17})^2 = (\sqrt{14})^2 + (\sqrt{3})^2$$

17 = 17 محققة

المثلث ABC قائم في A

المستوى المحوري للقطعة $[AB]$.

هو مستوي العمود على القطعة $[AB]$ في منتصف وكل نقطة منه متساوية البعد عن طرفي B,A



اذا كانت M تنتمي للمستوي المحوري

للقطعة $[AB] \Leftrightarrow [MA] = [MB]$

وأشهر نقاط المستوي المحوري للقطعة $[AB]$

هي I منتصف هذه النقطة .

تمرين صفحة ٢٧ :

B(3,0,1) , A(5,2.-1)

١. هل النقطة *C(-2,5,-2)* تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

٢. هل النقطة *E(3,2,1)* تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

الحل :

١. $[CA] = \sqrt{49+9+1} = \sqrt{59}$

$$[CB] = \sqrt{25+25+9} = \sqrt{59}$$

$$[CA] = [CB]$$

اذا C تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

٢. $[EA] = \sqrt{4+0+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$[EB] = \sqrt{0+4+0} = 2$$

E لا تنتمي للمستوي المحوري للقطعة $[AB]$

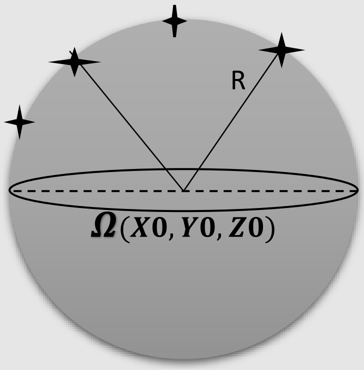
الكرة SPHERE

في معلم متجانس $M(X,Y,Z)$

لتكن الكرة **S** مركزها $\Omega(X_0,Y_0,Z_0)$

نصف قطرها **R**

نفرض (x,y,z) تنتمي لهذه الكرة **M**



$$[\boldsymbol{\Omega M}] = \boldsymbol{R}$$

$$\sqrt{(X-X0)^2+(Y-Y0)^2+(Z-Z0)^2} = R$$

نربع

المعادلة الديكارتية للكرة

$$(X-X0)^2+(Y-Y0)^2+(Z-Z0)^2 = \boldsymbol{R^2}$$

اكتب معادلة الكرة , مركزها $\Omega(-2,1,0)$ نصف قطرها $R=5$

الحل :

$$(X-X0)^2+(Y-Y0)^2+(Z-Z0)^2 = \boldsymbol{R^2}$$

$$(X+2)^2+(Y-1)^2+(Z-0)^2 = \boldsymbol{25}$$

$$(X+2)^2+(Y-1)^2+(Z)^2 = \boldsymbol{25}$$

السؤال المعاكس : عين مركز ونصف قطر الكرة S

$$S:(X+3)^2+Y^2+(Z-1)^2=12$$

الحل : مركزها $\Omega=(-3,0,1)$ مركزها $R=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$

اذا لكتابة معادلة الكرة يلزمنا : ١. مركزها Ω

٢. نصف قطرها ***R***

اكتب معادلة الكرة ***S*** مركزها ***O*** وتمر من ***A(2,-4,1)*** $O(0,0,0)$

$$OA = R = \sqrt{(2-0)^2+(-4-0)^2+(1-0)^2} =$$

$$= \sqrt{4+16+1} = \sqrt{21} = R$$

وتكون معادلة الكرة $(X-0)^2+(Y+0)^2+(Z-0)^2 = 21$

$$X^2+Y^2+Z^2=21$$

تمهيد : نظرة أي نقطة $M(X,Y,Z)$ بالنسبة للمبدأ $O(0,0,0)$ هي $M(-X, -Y, -Z)$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$(a-b)^2= a^2- 2ab+b^2=(b-a)^2$

$(-a-b)^2=(a+b)^2$

$(-a+b)^2=(b-a)^2=(a-b)^2$

تمرين صفحة ٢٧

$A(1,1,\sqrt{2}) \quad ,B\left(\sqrt{2},-\sqrt{2},0\right)$

C نظيرة A بالنسبة للمبدأ O

أثبت أن المثلث ABC قائم ومتساوي الساقين .

الحل : بما أن C نظيرة A بالنسبة للمبدأ $O(0,0,0)$

فإن $c(-1,-1,-\sqrt{2})$

$$[AB] = \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2+\left(-\sqrt{2}-1\right)^2+\left(0-\sqrt{2}\right)^2}$$

$$= \sqrt{2-2\sqrt{2}+1+2+2\sqrt{2}+1+2}$$

$$[AB] = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$[BC] = \sqrt{\left(-1-\sqrt{2}\right)^2+\left(+\sqrt{2}-1\right)^2+\left(-\sqrt{2}\right)^2} =$$

$$\sqrt{1+2\sqrt{2}+2+1-2\sqrt{2}+2+2}$$

$$[BC] = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

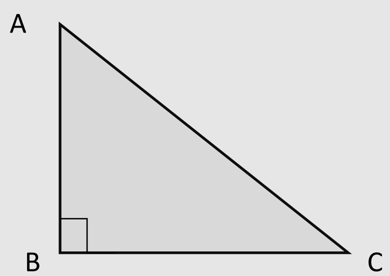
$$[AC] = \sqrt{4+4+\left(-2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{16} = 4$$

$$[AC]^2 = [AB]^2 + [BC]^2$$

16=8+8

16=16 محققة

المثلث ABC قائم في B ومتساوي الساقين



تمرين صفحة٢٧

A(2,3, -1) , B (2,8, -1) , C (7, 3,-1) , D (-1,3 , 3) , E (5,3,3)

أثبت *EDCB* تقع على كرة واحدة مركزها *A* .

$$[AB] = \sqrt{0 + 25 + 0} = 5$$

$$[AC\ ] = \sqrt{25 + 0 + 0} = 5$$

$$[AD] = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

$$[AE\ ] = \sqrt{9 + 0 + 16} = 5$$

$$[AB] = [AC] = \ [AD] = [AE] = 5$$

إذا E,D,C,B تقع على كرة واحدة مركزها (A(2,3,-1 ونصف قطرها R=5 ومعادلتها

$$(X - 2)^2 + (Y - 3)^2 + (Z + 1)^2 = 25$$

تمرين صفحة ٢٧:

مانوع المثلث *ABC* , *A(1,3,-2)* , *B(2,-1,0)* , *C(6,-3,-1)*

$$[AB] = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$$

$$[AC] = \sqrt{25 + 16 + 1} = \sqrt{62}$$

$$[BC] = \sqrt{16 + 4 + 1} = \sqrt{21}$$

$$\sqrt{62}^2 = \sqrt{21}^2 + \sqrt{21}^2$$

$$62=21+21$$

$$62 \neq 42$$

المثلث BAC متساوي الساقين وغير قائم .

ملاحظات: (AB) مستقيم

AB طول

$[AB]$ قطعة

$\overrightarrow{AB}$شعاع . $[AB)$ نصف مستقيم

سؤال خارجي : $A(1,-1,4)$, $B(3,1,0)$

أوجد معادلة الكرة S التي قطرها $[AB]$:

الحل : $\Omega=(\frac{XA+XB}{2},\frac{YA+YB}{2},\frac{ZA+ZB}{2})$

$\Omega(2,0,2)$

$2R=[AB]=\sqrt{4+4+16}=\sqrt{24}$

$2R=\sqrt{4+6}=2\sqrt{6}$

$R=\sqrt{6}$

$(X-2)^2+(Y-0)^2+(Z-2)^2=6$

$(X-2)^2+Y^2+(Z-2)^2=6$

تمرين صفحة ٣٦ : معدلة

في معلم $A(2,0,1)$, $B(1,-2,1)$, $C(5,5,0)$, $D(-3,-5,6)$

١. أثبت أن C,B,A ليست على استقامه واحدة .
٢. أثبت أن D,C,B,A تقع في مستو واحد P
٣. هل النقطة $E(3,1,2)$ تنتمي للمستوي P

الحل :

١. $\frac{-1}{3}=\frac{-2}{5}$ $\overrightarrow{AB}(-1,-2,0)$, $AC(3,5,-1)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

C, B, A ليست على استقامة واحدة فهي تشكل رؤوس مثلث وتعين مستويا P

٢. $\overrightarrow{AD}(-5,-5,5)$

$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا من الطلب الأول

$\overrightarrow{AD}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$(-5,-5,5)=\alpha(-1,-2,0)+\beta(3,5,-1)$

1) $-\alpha+3\beta=-5$
2) $-2\alpha+5\beta=-5$
3) $-\beta=5$

نحل الجملة $(\sqrt{3},\sqrt{2})$

من ٣) $\beta=-5$

نعوض في ٢)

$-2\alpha+5(-5)=-5$

$\alpha = -10$

نعوض $\alpha = -10$, $\beta = -5$ في ١)

$-\alpha + 3\beta = -5$

$-(-10) + 3(-5) = -5$

$-5 = -5$ محققة

$\overrightarrow{AD} = -10\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC}$

الأشعة $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ مرتبطة خطيا

D,C,B,A تقع في مستو واحد

٣. D,C,B,A

$AE(1,1,1)$

$\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$

$(1,1,1) = a(-1,-2,0) + b(3,5,-1)$

١) $-a + 3b = 1$
٢) $-2a + 5b = 1$
٣) $-b = 1$

نحل الجملة $(\sqrt{1}, \sqrt{3})$

من ٣) $b = -1$

نعوض في ١) $-a + 3(-1) = 1$

$a = -4$

نعوض $a = -4$ و $b = -1$ في ٢)

$-2a + 5b ?= 1$

$-2(-4) + 5(-1) ?= 1$

الاشعة $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطة خطيا

E,C,B,A لاتقع في مستو واحد

نستنتج $E\cancel{C}D$

تمرين صفحة ٣٨: معدل

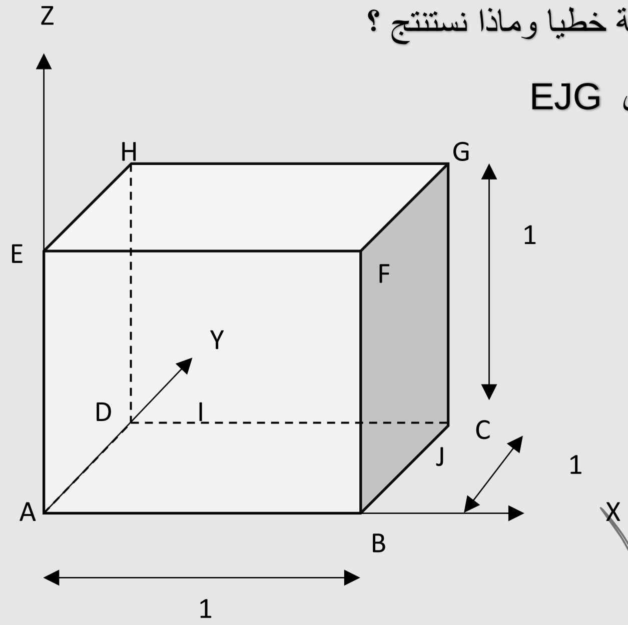
ABCDEFGH مكعب $\overrightarrow{BJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DC}$

في معلم متجانس $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AE})$

١. عين احداثيات رؤوس المكعب وكل من J,I

٢. أثبت أن الاشعة $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HI},\overrightarrow{EJ}$ مرتبطة خطيا وماذا نستنتج ؟

أو أثبت أن المستقيم (HI) يوازي المستوي EJG



A(0,0,0) , B(1,0,0)

C(1,1,0) , D (0,1,0)

E(0,0,1) F(1,0,1)

G (1,1,1) , H(0,1,1)

$J(1,\frac{3}{4},0)$, $I(\frac{1}{4},1,0)$

٢. $\overrightarrow{EG}(1,1,0)$

$\overrightarrow{EJ}(1,\frac{3}{4},-1)$

$$\frac{1}{1} \neq \frac{4}{3}$$

$\overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ غير مرتبطين خطيا

$\overrightarrow{HI}(\frac{1}{4},0,-1)$

$\overrightarrow{HI} = \alpha\overrightarrow{EG} + \beta\overrightarrow{EJ}$

$(\frac{1}{4},0,-1) = \alpha(1,1,0) + \beta(1,\frac{3}{4},-1)$

1) $\alpha+\beta=\frac{1}{4}$

2) $\alpha+\frac{3}{4}\beta = 0$

3) $-\beta = -1$

نحل الجملة (2,3)

من ٣ . $\beta = -1$ نعوض في ٢)

$$\alpha + \frac{3}{4}(1) = 0$$

$$\alpha = \frac{-3}{4}$$

نعوض $\alpha = \frac{-3}{4}$ $\quad \beta = 1$ في ١)

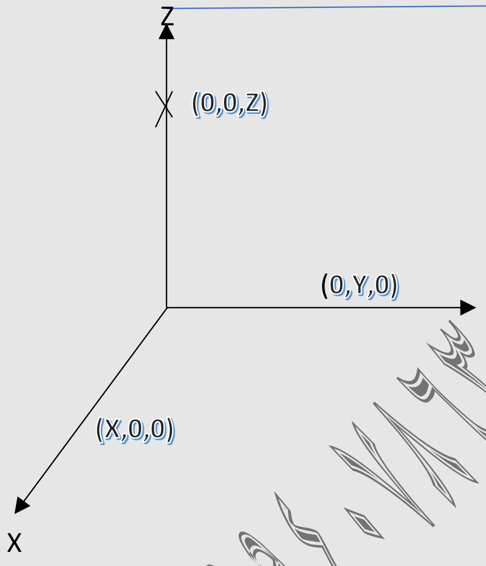
$$\alpha+\beta=\frac{1}{4}$$

$$\frac{-3}{4} + 1 = \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$ محققة

$$\overrightarrow{HI} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{EG} + 1\overrightarrow{EJ}$$

الاشعة $\overrightarrow{HI}, \overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{EG}$ والمستقيم (HI) يوازي المستوي (EJG)



ملاحظة :

- أي نقطة من محور الفواصل $X'X$ ⟵ (X,0,0)
- أي نقطة من محور التراتيب $Y'Y$ ⟵ (0,Y,0)
- أي نقطة من محور الراقم $Z'Z$ ⟵ (0,0,Z)

تمرين صفحة ٤١ :

في معلم $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$ النقط $A(3,2,1)$, $B(1,2,0)$, $C(3,1,-2)$

١. أثبت أن النقاط A,B,C استقامة واحدة
٢. عند أي قيمة الوسيط m تنتمي للنقطة $M(m,1,3)$ الى المستوي ABC ؟
٣. ماالعلاقة بين X,Y لتقع A,B,C و $D(X,Y,3)$ في مستو واحد ؟
٤. أوجد معادلة المستوي P المار من A,B,C .

الحل:

$\overrightarrow{AB}(-2,0,-1)$

$\overrightarrow{AC}(0,-1,-3)$

$$\frac{0}{-1} \neq \frac{-1}{-3}$$

الشعاعان $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا

A, B, C ليست على استقامة واحدة فهي تشكل رؤوس المثلث وتعيين مستويا P

نعلم أن $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ غير مرتبطان خطيا.

$\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$

$(m-3 ,-1,2) = \alpha(-2,0,-1) +\beta(0,-1,-3)$

1) $m-3 =-2\alpha$

2) $-1=-\beta$

3) $2= -\alpha -3\beta$

نحل الجملة (3,2)

من(2) $\beta=1$, نعوض في 3)

$-\alpha-3(1) =2$ $\quad$ $-\alpha-3\beta=2$

نعوض $\alpha=-5$

$m=-2(-5)$ $\quad$ $m-3 = -2\alpha$

$m=13$

$M(13,1,3)$

$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} +\beta\overrightarrow{AC}$

(X-3 , Y-2 , 2) = a(-2,0,-1) + b(0,-1,-3)

1)x-3 =-2a $\qquad$ a= $\frac{-1}{2}x+\frac{3}{2}$

2) y-2 =-b $\qquad$ b =-y +2

3) 2=-a-3b

نعوض ٢, ١ في ٣

$$\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}y-6=2$$

$$\frac{1}{2}x+3y=\frac{19}{2}$$

X+6y =19

٤.نفرض M(X,Y,Z) ЄP

$\overrightarrow{AM}$ (X-3 ,Y-2,Z-1)

(X-3 , Y-3,Z-1) =α(-2,0,-1) +β(0,-1,-3)

١. -2α=X-3 $\Longrightarrow$ α=$\frac{X-3}{-2}$

٢. -β =Y -2 $\Longrightarrow$ β=-Y+2

٣. -α-3β =Z-1

نعوض في ٣)

$$-\left(\frac{X-3}{-2}\right)-3(-Y+2)=Z-1$$

$$\frac{X-3}{2}+3Y-6=Z-1$$

X- 3+ 6y - 12= 2z-2

P: X + 6Y - 2Z - 13 = 0

ملاحظة : يمكن البدء بإبعاد معادلة المستوي P ثم حل الطلب 2,3 بسهولة

تمرين صفحة ٤١ :

C,B,A ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة من الفراغ . و E,D نقطتان تحققان :

$$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE} \quad , \quad 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}$$

١ . أثبت أن النقاط E,D,C,B,A تقع في مستو واحد

٢ . لتكن I منتصف CD و J منتصف BE . *أثبت وقوع A وI و j على استقامة واحدة.*

الحل :١ .

$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *مرتبطان خطيا* $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$, A,B,D *على استقامة واحدة فهي تنتمي لمستقيم* d

$\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{CE}$ *مرتبطان خطيا* $\overrightarrow{CE},\overrightarrow{AE}$, A,B,C *على استقامة واحدة فهي تنتمي لمستقيم* d\

المستقيمان d\,d *تقع في مستو واحد* E,D,C,B,A

٢. من المثلث ADC *حسب علاقة المتوسط*

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$$

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AI}$$

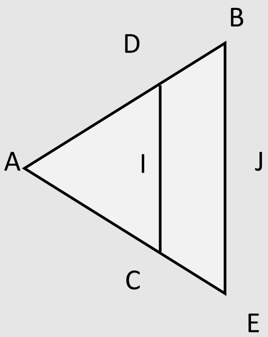
$$\frac{2}{3}[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AE}]=2\overrightarrow{AI}$$

حسب علاقة المتوسط

$$\frac{2}{3}2\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AI}$$

$$\overrightarrow{AI}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AJ}$$

الشعاعان $\overrightarrow{AI},\overrightarrow{AJ}$ *مرتبطان خطيا* J,I,A, *على استقامة واحدة .*



تمارين صفحة ٤٢:

١. جد على محور الفواصل نقطة C متساوية البعد عن النقطتين $A(2,-1,3)$, $B(0,5,-1)$

الحل : بما أن C تقع على محور XX'

$C(X,0,0)$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$

$$\sqrt{(X-2)^2+1+9} = \sqrt{x^2+25+1}$$

$$(X-2)^2+10 = x^2+26$$

$$X^2-4X+4+10=X^2+26$$

$$-4X=12$$

$X=\frac{12}{-4}=-3$ $\qquad$ $C(-3,0,0)$

٢. ليكن α عددا حقيقا , ولتتأمل النقاط الثلاث .

$A(3,1,-3)$, $B(-1,5,-3)$, $C(-1,1,\alpha)$

الحل :

$$AB=\sqrt{16+16+0} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$AC=\sqrt{16+0+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

$$BC=\sqrt{0+16+(\alpha+3)^2} = \sqrt{16+(\alpha+3)^2}$$

المثلث متساوي الساقين AC=AB يكون ABC متساوي الاضلاع اذا كان

$AB=AC=BC$

وبالتالي $AB = BC$

$$\sqrt{16+(\alpha+3)^2} = 4\sqrt{2}$$

$$16+(\alpha+3)^2 = 32$$

$$(\alpha+3)^2 = 16$$

اما : $\alpha=-7$ $\qquad$ $\alpha+3=-4$

او $\alpha+3=4$ $\qquad$ $\alpha=1$

تمرين .

نتأمل النقطتين $A(2, 1,0)$, $B(-1,4,2)$

١. أوجد نقطة متساوية البعد A,B
٢. أوجد العددالحقيقي λ الذي يجعل النقطة $C(1,1,\lambda)$ متساوية البعد عن A,B
٣. أوجد معادلة المستوي المحور للقطعة AB

الحل:

١. / منتصف AB لتكون نقطة متساوية البعد عن A,B

$$I\left(\frac{X1+X2}{2},\frac{Y1+Y2}{2},\frac{Z1+Z2}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{2-1}{2},\frac{1+4}{2},\frac{0+2}{2}\right)$$

$$I\left(\frac{1}{2},\frac{5}{2},1\right)$$

٢. CA=CB

$$\sqrt{1+0+\lambda^2}=\sqrt{4+9+(\lambda-2)^2}$$

$$1+0+\lambda^2=13+(\lambda-2)^2$$

$$1+\lambda^2=13+\lambda^2-4\lambda+4$$

$$4\lambda=16 \longrightarrow \lambda=4$$

٣. M(X,Y,Z) ЄP

حيث P هو المستوي المحوري AB يحب ان تتحقق

$MA= MB$

$$\sqrt{(X-2)^2+(Y-1)^2+Z^2}=\sqrt{(X+1)^2+(Y-4)^2+(Z-2)^2}$$

$$(X-2)^2+(Y-1)^2+Z^2=(X+1)^2+(Y-4)^2+(Z-2)^2$$

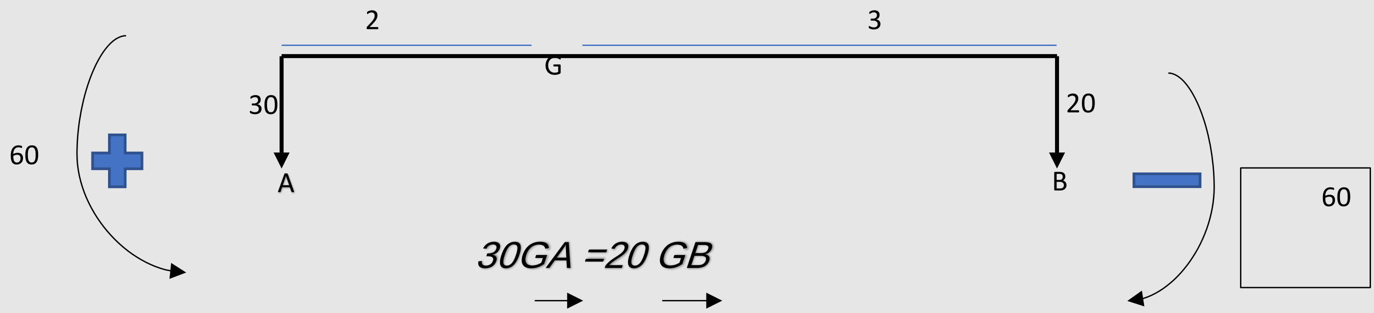
$$x^2-4X+4+Y^2-2Y+1+Z^2=$$

$$x^2+2X+1+Y^2-8Y+16+Z^2-4Z+4$$

$$P=-6X+6Y+4Z-16=0$$

معادلة المستوي المحوري للقطعة AB

مركز الأبعاد المتناسبة لنقطتين



$$30GA = 20\,GB$$

$$30\overrightarrow{GA} = 20\overrightarrow{GB}$$

$$30\overrightarrow{GA} - 20\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$$

G مركز ابعاد متناسبة ل : $(A,30)$, $(B,20)$

تكون G مركز الابعاد المتناسبة ل (A,α) ,(B,β)اذ اتحقق شرطان:

١. $\alpha+\beta \neq 0$

٢. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$, G,A,B على استقامة واحدة .

خواص :

١. G وحيدة , وهي نقطة من المستقيم AB

- وتكون G داخل القطعة AB اذا كان α,β من نفس الإشارة

- وتكون G خارج القطعة AB

اذا كان α,β من إشارتين مختلفتين

- وتكون G منتصف القطعة AB اذا كان $\alpha=\beta$

٢. اذا كان G مركز الابعاد المتناسبة ل: (A,α) ,(B,β) ويكون G مركز الابعاد المتناسبة ل: $(A,K\alpha)$, $(B,K\beta)$

٣. أيا كانت M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ (العلاقة الام) .

$M=G$ ← → $M=A$

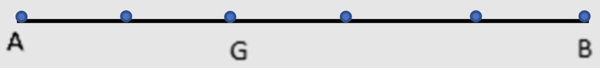
$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \qquad \overrightarrow{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$$

تستخدم لإيجاد الثواتب — الحرف الأول نفسة ,الحرف الثاني هو مركز ابعاد

سؤال: إيجاد الثوابت

س:عين G مركز ابعاد المتناسبة ل (A,α) ,(B,β)

عين α,β لتكن G مركز ابعاد المتناسبة ل (A,α) , (B,β)

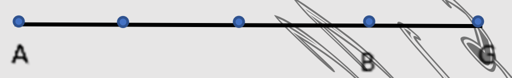


الحل : $3GA = 2GB \Rightarrow \frac{GA}{GB} = \frac{2}{3}$

نحول لاشعة $3\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GB}$

$3GA-2GB = 0$

G مركز ابعاد متناسبة $(A,3)$,$(B,2)$



$GA = 4GB \qquad \frac{GA}{GB} = \frac{4}{1}$

نحول لاشعة $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{GA}-4\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

G مركز ابعاد متناسبة ل $(A,1)$,$(B,-4)$

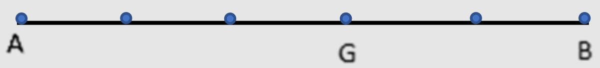
س: عين G مركز ابعاد متناسبة ل (A,α) ,(B,β) في الحالاتين

١. $(A,2)$,$(B,3)$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2+3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$

نقسم AB لخمسة أقسام متساوية , نمشي من A نحو G مثل جهة $\overrightarrow{AB}$ ثلاث أقسام



٢. $(A,2)$,$(B,3)$

مركز ابعاد متناسبة لثلاث نقط .

نقولان عن G مركز ابعاد متناسبة ل (A,α), (B,β), (C,δ) اذا تحقق الشرطان الاتيان

١. $\alpha+\beta+\delta\neq 0$

٢. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=0$

G وحيدة

★الخاصة التجميعية

(C,δ) $\quad \underline{(A,\alpha),(B,\beta)}$

(C,δ) $\quad \underline{(H,\alpha+\beta)}$

$(G,\alpha+\beta+\delta)$

$\neq 0$

أيا كان M : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\delta\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\delta)\overrightarrow{MG}$ علاقة الام

س: ماذا نستفيد من ان G مركز الابعاد المتناسبة ل :

(A,α) ,(B,β) ,(C,δ)

$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ $\qquad$ C,B,A,G تقع في مستو واحد

س: عين G مركز الابعاد المتناسبة ل: $(A,1)$, $(B,3)$, $(C,-2)$

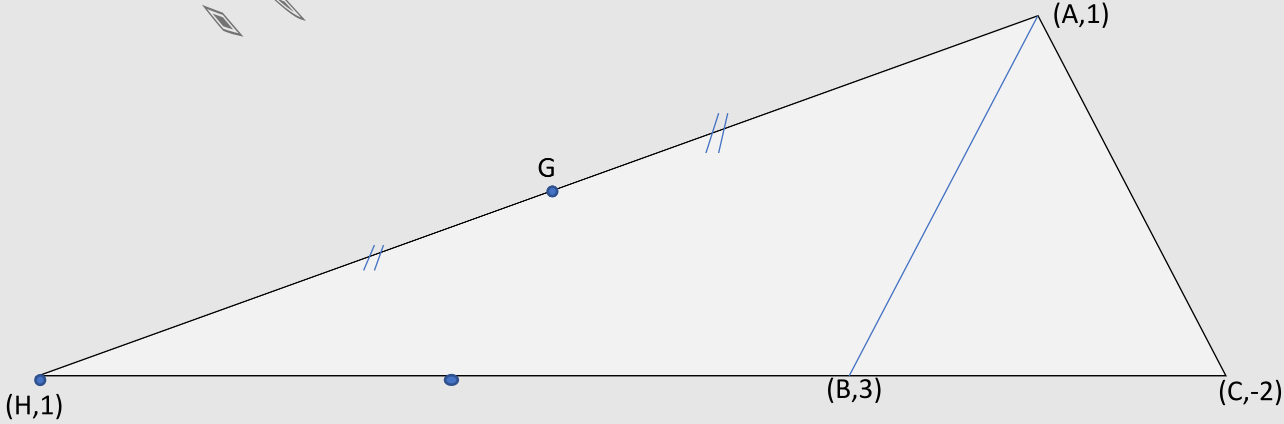
المرحلة ١. نعين H مركز ابعاد متناسبة ل $(C,-2)$, $(B,3)$

$$\overrightarrow{BH}=\frac{-2}{+1}\overrightarrow{BC}$$

نعتبر BC قسم واحد

نمشي من B نحو H عكس جهة $\overrightarrow{BC}$ قسمين وتكون $(H,1)$ حسب الخاصة التجميعية

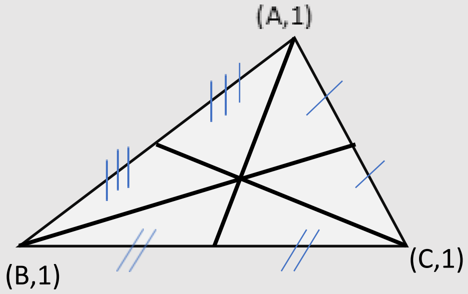
المرحلة ٢. نعين G مركز ابعاد متناسبة $(H,1)$ $(A,1)$ هو منتصف (AH)



مركز الابعاد المكتناسبة في الفراغ (الجوكر الثلاثي)

اذا كان $\alpha=\beta=\delta$ تكون G مركز ثقل المثلث ABC (نقطة تلاقي متوسطاته)

تدريب : عين G مركز الابعاد المتناسبة $(A,1), (B,1), (C,1)$



الحل : G هي مركز ثقل المثلث ABC

ونقطة تلاقي متوسطاته وتكون $(G,3)$

حسب الخاصة التجميعية

نقول أن G مركز الابعاد المتناسبة ل$(D,\delta), (C,\gamma), (A,\alpha), (B,\beta)$

اذا تحقق شرطان .

١. $\alpha+\beta+\gamma+\delta\neq 0$

٢. $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}+\delta\overrightarrow{GD}=0$

ملاحظة :

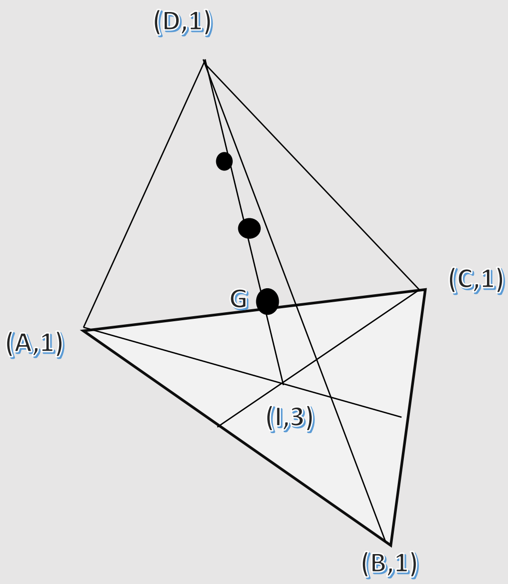
$$\alpha=\beta+\delta$$

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

$$\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\alpha\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

علاقة مركز ثقل المثلث



تمرين محلول ٢٩:

عين G مركز ثقل رباعي الوجوه $ABCD$:

بما ان G مركز ثقل لرباعي الوجوه

فإن G مركز ابعاد المتناسبة ل

$(D,1)$,$(C,1)$,$(B,1)$,$(A,1)$

مرحلة ١:

نعين I مركز ابعاد متناسبة ل

, $(C,1)$,$(B,1)$,$(A,1)$ وهي مركز

ثقل المثلث أي نقطة تلاقي متوسطاته

وتكون $(I,3)$ حسب الخاصة التجميعية

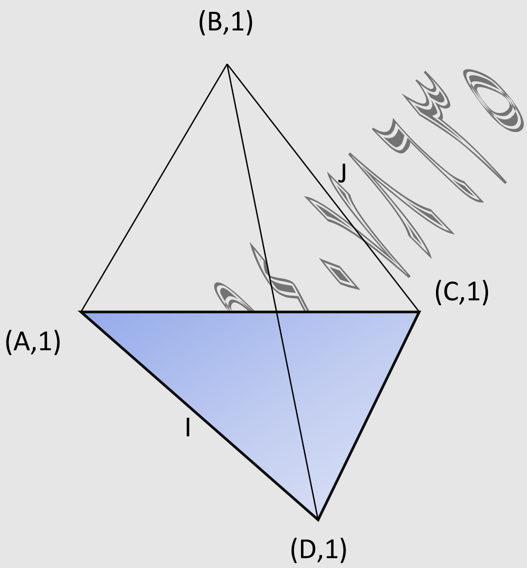
مرحلة ٢ :

نعين مركز ابعاد متناسبة ل $(I,3)$,$(D,1)$

$$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DI}$$

نقسم DI أربعة اقسام متساوية ونمشي من D نحو G بجهة DI ثلاث اقسام

تمرين محلول ٢٩:



$ABCD$ رباعي الوجوه مركز ثقله G

I منتصف AD

J منتصف BC

أثبت أن J,I,G على استقامة واحدة

بما ان G مركز ثقل رباعي الوجوه فهو مركز ابعاد

متناسبة ل $(D,1)$, $(C,1)$, $(B,1)$, $(A,1)$

ط١. J منتصف BC مركز ابعاد المتناسبة ل

$(C,1)$,$(B,1)$

I منتصف AD مركز ابعاد المتناسبة ل $(A,1)$, $(D,1)$,

وتكون $(I,2)$, $(J,2)$ حسب الخاصة التجميعية

G مركز ابعاد ل $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$,$(D,1)$

وهو مركز الابعاد المتناسبة ل $(J,2)$,$(I,2)$

G منتصف IJ

ومنه J,I,G على استقامة واحدة

ط٢: G مركز الابعاد المتناسبة ل $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$,$(D,1)$

$$\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$$

$$2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\overrightarrow{0}$$

$$2\overrightarrow{GI}=-2\overrightarrow{GJ}$$

$$\overrightarrow{GI}=-\overrightarrow{GJ}$$

الشعاعان $\overrightarrow{GJ}$,$\overrightarrow{GI}$ مرتبطان خطيا

J,I,G على استقامة واحدة

نستنتج : من التمرين السابق ان القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي كل جزئين متقابلين في ربعي الوجوه متناصفة ونقطة التقائها هي كل مركز ثقل رباعي الوجوة .

كيف نبرهن ان 4 نقاط تقع في مستو واحد ؟

الارتباط الخطي لثلاث اشعة

اذا علمت إحداثيات النقاط

مركز الابعاد المتناسبة

وذلك بأن نبرهن أن احدى النقاط

مركز أبعاد متناسبة للثلاث الباقية

نستخدم هذه الطريقة اذا علمت

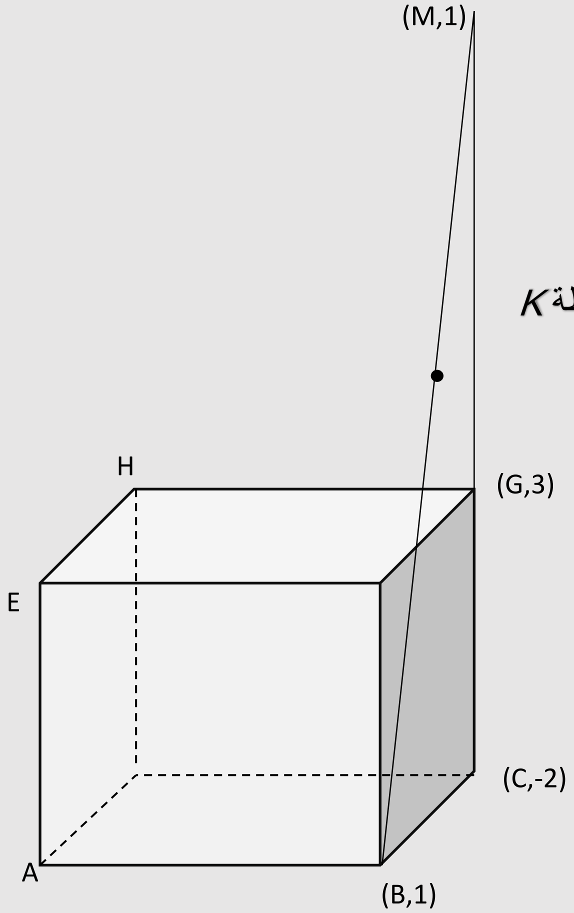
علاقة تحققها إحدى النقاط

تمرين محلول صفحة ٣٠ :

$ABCDEFGH$ مكعب

K النقطة التي تحقق $2\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{AG}$

١. أثبت ان K, G, C, B في مستو واحد , عين النقطة K



الحل:

نبرهن ان K مركز الابعاد المتناسبة للنقط

$(C,\gamma),(B,\beta),(G,\alpha)$

$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{C_KB} + \overrightarrow{C_KA} + 3\overrightarrow{A_KG}$

$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KA}+3\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{KG}$

$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{CK}-\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{KG}$

$2\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{O}$

$-2\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{KB}+3\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{0}$

K مركز ابعاد متناسبة ل

$(G,+3),(C,-2),(B,-1)$

اذا G,C,B,K تقع في مستو واحد

٢. عين M مركز الابعاد المتناسبة

ل $(G,3),(C,-2)$

$\overrightarrow{GM} = -2\overrightarrow{GC}$

نعتبر GC قسم واحد

نمشي من G نحو M عكس جهة GC قسمين

وتكون حسب الخاصة التجميعية $(M, 1)$

مرحلة ٢.

نعين K مركز الابعاد\ المتناسبة ل $(M,1)$, $(B,1)$

وهي منتصف MB

لازم شوف K اول شي خليني شوف K بعدين بساويها اول شي

تمرين صفحة ٣٩ : ٨ معدل

هرم E_ABCD

قاعدته $ABCD$ مربع طول ضلعة 4

$EB \perp ABCD$., $EB=4\sqrt{2}$

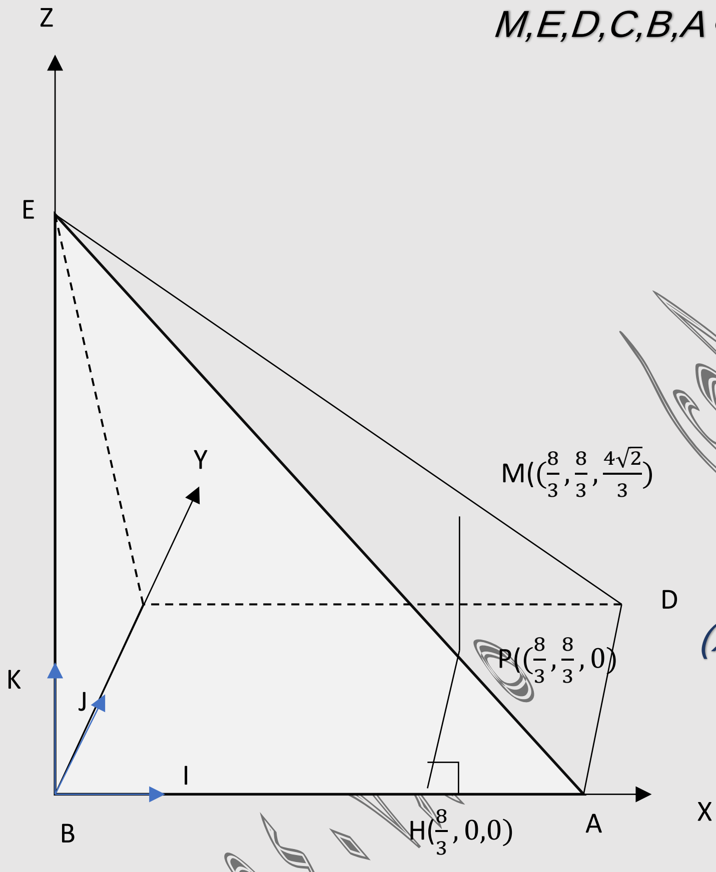
وبفرض M تنتمي للقطعة ED

$DM = \frac{1}{3}DE$

١. اختر معلما مبدؤه B وعين احداثيات M,E,D,C,B,A
٢. بفرض P مسقط M على $ABCD$

وبفرض H مسقط P على AB

اوجد MH $(B, \frac{1}{4}BA, \frac{1}{4}BC, \frac{1}{4}BE)$



$B(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $D(4,4,0)$

$C(0,4,0)$, $E(0,0,4\sqrt{2})$

نفرض $M(X,Y,Z)$

$DM == \frac{1}{3}DE$

$(X-4 , Y-4 , Z) = \frac{1}{3}\left(-4,-4,4\sqrt{2}\right)$

$X-4 = \frac{-4}{3}$ $\qquad X = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$Y-4 = \frac{-4}{3}$ $\qquad Y = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$

$Z = \frac{4\sqrt{2}}{3}$

$M(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, \frac{4\sqrt{2}}{3})$

$P(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}, 0)$

$H(\frac{8}{3}, 0, 0)$

$$MH = \sqrt{\left(\frac{8}{3}-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{8}{3}\right)^2 + \left(0-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2}$$

$$MH = \sqrt{0 + \frac{64}{9} + \frac{32}{9}} = \sqrt{\frac{96}{9}} = \sqrt{\frac{16\times 6}{9}} = \frac{4\sqrt{6}}{3}$$

$$(X-X_0)^2+(Y-Y_0)^2+(Z-Z_0)^2=\lambda$$

١. كرة $\lambda > 0$
٢. $\lambda = 0$ مجموعة النقط هي نقطة وحيدة
٣. $\lambda < 0$

المسألة ٢٣ صفحة ٤٣ :

في معلم متجانس $(O,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$

$A(2,-1,2)\ ,\ B(-2,1,-2)$

نقرن بكل نقطة $M(X,Y,Z)$, من الفراغ , المقدار : $F(M) = MA^2+MB^2$

١.احسب $F(M)$ بدلالة Z,X,Y

٢. ماذا تمثل مجموعة النقط M التي تحقق $F(M) = 18$

٣. ماذا تمثل مجموعة النقط M التي تحقق $F(M) = 30$

٤.ناقش حسب قيم K ما تمثله مجموعة النقط $F(M) = K$

الحل :

١. $F(M) = MA^2+MB^2$

$$F(M) = (X-2)^2+(Y+1)^2+(Z-2)^2+(X+2)^2+(Y-1)^2+(Z+2)^2$$

$$= X^2 -4X +4 +Y^2 +2Y +1 +Z^2 - 4Z +4 + X^2 +4X +Y^2 -2Y +1+Z^2+4Z+4$$

$$=2X^2+8 +2Y^2+2+2Z^2+8$$

$$F(M) =2X^2+2Y^2+2Z^2+18$$

٢. $F(M) =18$

$$2X^2+2Y^2+2Z^2+18=18$$

$$2X^2+2Y^2+2Z^2=0 \qquad \div 2$$

$$X^2+Y^2+Z^2=0$$

مجموعة النقط هي نقطة وحيدة : $O(0,0,0)$

٣. $F(M) = 30 \Rightarrow 2X^2+2Y^2+2Z^2+18=30$

$2X^2+2Y^2+2Z^2=12 \Rightarrow X^2+Y^2+Z^2=6$

مجموعة النقط كرة مركزها $O(0,0,0)$

ونصف قطرها $R=\sqrt{6}$

٤. $F(M) = K$

$2X^2+2Y^2+2Z^2+18=K \Rightarrow 2X^2+2Y^2+2Z^2=K-18$

$X^2+Y^2+Z^2=\frac{1}{2}K-18=\frac{1}{2}K-9$

ندرس إشارة $\frac{1}{2}K-9$

$\frac{1}{2}K-9=0 \qquad K=18$

K	$-\infty$ 18 $+\infty$
$\frac{1}{2}K-9$	------------------------------ 0 + +++++++++++++++++
مجموعة النقط	$\emptyset$ ؛ نقطة وحيدة $O(0,0,0)$ ؛ كرة مركزها $O(0,0,0)$ $R=\sqrt{\frac{1}{2}K-9}$

تمرين ٢١ صفحة ٤٣:

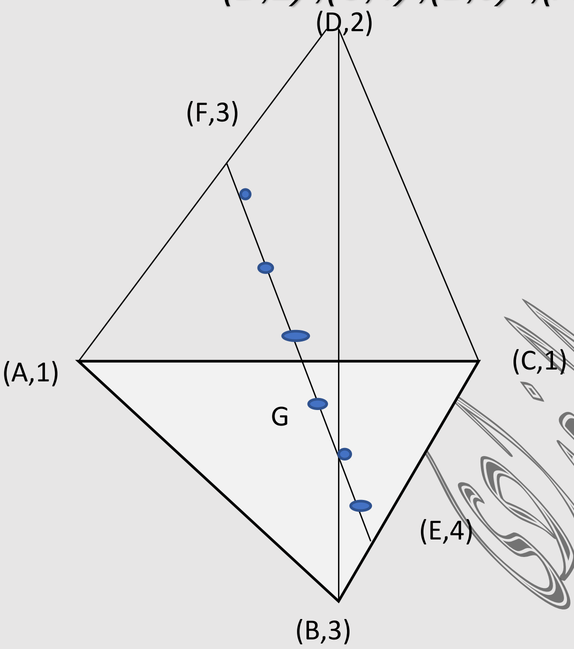
ABCD رباعي وجوه .

E نقطة تحقق $\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

F نقطة تحقق $\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

١. ابت ان *G* مركز ابعاد ل *(A,1)*, *(B,3)*, *(C,1)*, *(D,2)* يقع على *EF*

٢. عين *G* على *EF*



الحل:

$\overrightarrow{BE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$

E مركز ابعاد المتناسبة ل *(B,3)*, *(C,1)* وتكون *(E,4)* حسب الخاصة التجميعية

$\overrightarrow{AF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

F مركز ابعاد المتناسبة ل *(D,2)*, *(A,1)* وتكون *(F,3)* حسب الخاصة التجميعية

اذا مركز الابعاد المتناسبة ل *(A,1)*, *(B,3)*, *(C,1)*, *(D,2)*

هو *G* وهو مركز الابعاد المتناسبة ل *(E,4)*, *(F,3)*

G تنتمي للمستقيم *EF*

٢. $\overrightarrow{EG}=\frac{3}{7}\overrightarrow{EF}$

نقسم *EF* سبع اقسام متساوية نمشي من *E* نحو *G* مثل جهة *EF* ثلاث اقسام

تمرين : ناقش حسب قيم λ ما تمثله مجموعة النقط

$$X^2+Y^2+Z^2-2X-4Z=\lambda$$

الحل :

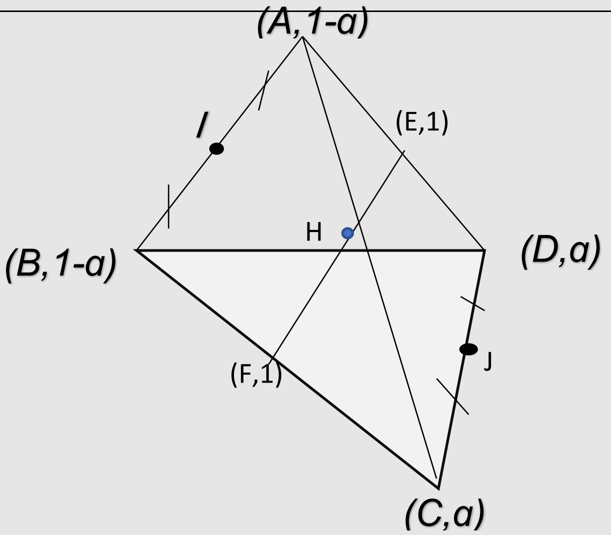
$$X^2-2X+1-1+Y^2+Z^2-4Z+4-4=\lambda$$

$$(X-1)^2+Y^2+(Z-2)^2=\lambda+5$$

ندرس إشارة $\lambda = 5$

$\lambda = -5$ $\qquad$ $\lambda + 5 = 0$

λ	$-\infty$	-5	$+\infty$
$\lambda + 5$	------------	0	++++++++++++
مجموعة النقط	$\emptyset$	نقطة وحيدة $n(1,0,2)$	كرة مركزها $\Omega(1,0,2)$ $R=\sqrt{\lambda+5}$



مسألة ٩ صفحة ٤٠:

$a \in R$, رباعي وجوه , ABCD ,

I منتصف AB

J منتصف CD

E تحقق $\overrightarrow{AE} = a\overrightarrow{AD}$

F تحقق $\overrightarrow{BF} = a\overrightarrow{BC}$

H منتصف EF

١. اثبت ان H مركز الابعاد المتناسبة ل (B,1-a) ,(C,a) ,(A,1-a) ,(D,a)

٢. اثبت ان J,H,I على استقامة واحدة

$\overrightarrow{AE}=\frac{\alpha}{1}\overrightarrow{AD}$

الحل :

E مركز الابعاد المتناسبة ل (A,1-a) ,(D,a) ويكون (E,1) حسب الخاصة التجميعية $\overrightarrow{BE}=\frac{\alpha}{1}\overrightarrow{BC}$

F مركز الابعاد متناسبة ل (B,1-a) ,(C,a)

ويكون (F,1) حسب الخاصة التجميعية

اذا مركز الابعاد ل (B,1-a) ,(C,a) ,(A,1-a) ,(D,a) وهو نفسه

مركز الابعاد المتناسبة ل (F,1) ,(E,1) أي هو منتصف EF أي هو H

٣. I منتصف AB مركز الابعاد المتناسبة ل (B,1-a) ,(A,1-a) وتكون

(I,2-2a) حسب الخاصة التجميعية

J منتصف DC مركز الابعاد المتناسبة ل (C,a) ,(D,a)

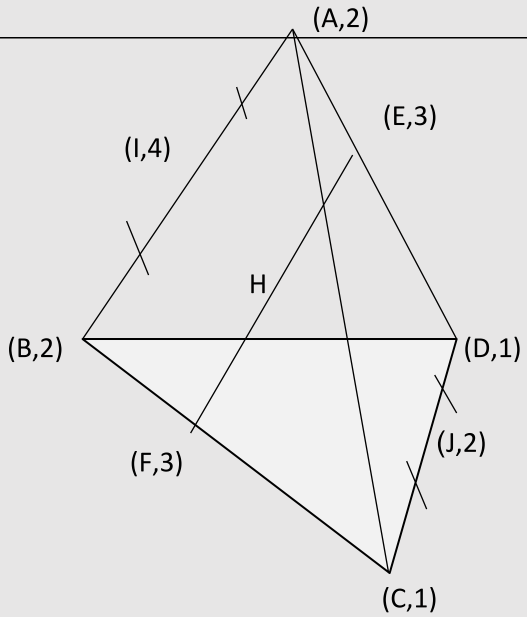
وتكون (J,2a) حسب الخاصة التجميعية

اذا مركز الابعاد المتناسبة ل B,1-a) ,(C,a) ,(A,1-a) ,(D,a)

والذي هو H هو نفسه مركز الابعاد المتناسبة ل (J,2a), (I,2-2a)

H تنتمي للمستقيم IJ

H,I,J على استقامة واحدة



مسألة دورة ٢٠١٧:

$ABCD$ رباعي وجوه $a=\frac{1}{3}$

I منتصف AB

J منتصف CD

E نقطة تحقق $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

F نقطة تحقق $\overrightarrow{BF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

١. اثبت ان H مركز الابعاد ل

$(D,1)\,,(B,2)\,,(C,1)\,,(A,2)$

٢. اثبت J,H,I على استقامة واحدة

الحل :

١. E مركز ابعاد المتناسبة ل $(D,1),(A,2)$

وتكون $(E,3)$ حسب الخاصة التجميعية

F مركز الابعاد المتناسبة ل $(C,1),(B,2)$ وتكون $(F,3)$

حسب الخاصة التجميعية

اذا مركز الابعاد المتناسبة ل $(D,1)\,,(B,2)\,,(C,1)\,,(A,2)$

هو نفس مركز المتناسبة $(E,3),(F,3)$ وهو H

٢. I مركز الابعاد المتناسبة ل $(A,2)\,,(B,2)$ وتكون $(I,4)$ حسب الخاصة التجميعية

J مركز الابعاد المتناسبة ل $(D,1)\,,(C,1)$ وتكون $(J,2)$ حسب الخاصة التجميعية د

اذا مركز الابعاد المتناسبة ل . $(D,1)\,,(B,2)\,,(C,1)\,,(A,2)$

والذي هو H هو نفس مركز الابعاد المتناسبة ل $(J,2)\,,(I,4)$

H تنتمي للمستقيم IJ

J,I,H على استقامة واحدة

تدرب صفحة 31

لدينا ثلاث نقاط C,B,A في الفراغ .

١. اثبت وجود نقطة وحيدة M, تحقق : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

٢. اثبت ان $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$

٣. ما القول عن M عندما C,B,A على استقامة واحدة؟

٤. ما القول عن الرباعي $ACBM$ عندما C,B,A ليست على استقامة واحدة

الحل :

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

M مركز الابعاد المتناسبة ل $(A,1), (B,1), (C,-1)$

$1+1-1\neq 0$

M نقطة وحيدة

٢.

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{0}$

$\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{MA}$

$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AM}$

٣.

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CB}$

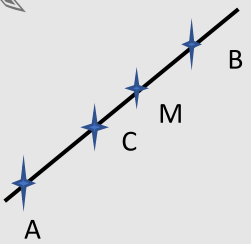
الشعاعان $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AM}$ مرتبطان خطيا والمستقيمان $(CB),(AM)$ متوازيان

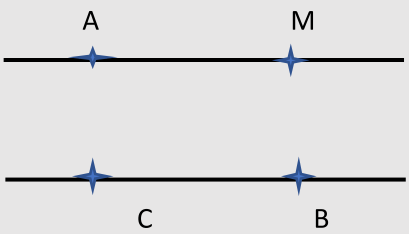
ولكن C,B,A على استقامة واحدة ⬅ المستقيمان CB ,AM منطبقان

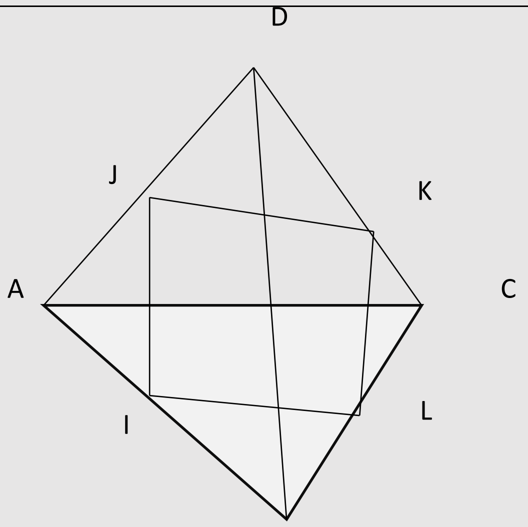
M,C,B,A على استقامة واحدة

٤. $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{CB}$

الرباعي $AMBC$ متوازي اضلاع







تدرب ٤ صفحة ٣١ معدل

$ABCD$ رباعي وجوه

$a \neq 1 \quad , a \neq 0 \; , a \in R$

$\overrightarrow{AJ} = a\overrightarrow{AD} \quad , \overrightarrow{AI} = a\,\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CL} = a\overrightarrow{CB} \quad , \overrightarrow{CK} = a\,\overrightarrow{CD}$

١. أثبت ان $\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$
٢. اثبت ان L,J,K,I تقع في مستو واحد
٣. ماطبيعة الرباعي $IJKL$

الحل :

١. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ}$

$= a\overrightarrow{BA} + a\overrightarrow{AD} = a(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = a\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CK} =$

$a\overrightarrow{BC} + a\overrightarrow{CD} = a(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = a\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{LK}$

٢. الشعاعان $\overrightarrow{LK}, \overrightarrow{IJ}$ مرتبطان خطيا والمستقيمان $LK \, , \, IJ$

متوازيان ويعقان في مستو واحد .

٣. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{LK}$

الرباعي $IJKL$ موازي اضلاع

تدرب ٢ صفحة ٣١

عين مركز G ثقل ABC

$C(6,3,-5) \; , \; B(-2,1,0) \; , \; A(-4 , -1, 2)$

الحل : $G\left(\frac{XA+XB+XC}{3}, \frac{YA+YB+YC}{3}, \frac{ZA+ZB+ZC}{3}\right)$

$G(0,1,-1)$

العلاقة الام :

أيا كان M: $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

حيث G مركز الابعاد المتناسبة للنقاط :

(A,α) , (B,β) , (C,γ)

في مسائل مجموعة النقط M التي تحوي $\|\square\| = \|\square\|$

حرف M

$[MA]=[MB]$

مجموعة النقط M

هي نقاط المستوي المحوري للقطعة $[AB]$.

حرف M

$[MG]=[GA]$

كرة مركزها G

نصف قطرها الجواب

تمرين :

بفرض I مركز الابعاد المتناسبة ل:

$(A,2)$, $(B,3)$, $(C,1)$

عين مجموعة النقط M الفراغ التي تحقق:

$\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=24$

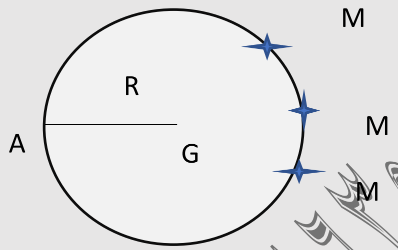
$\|(2+3+1)\overrightarrow{MI}\|=24$

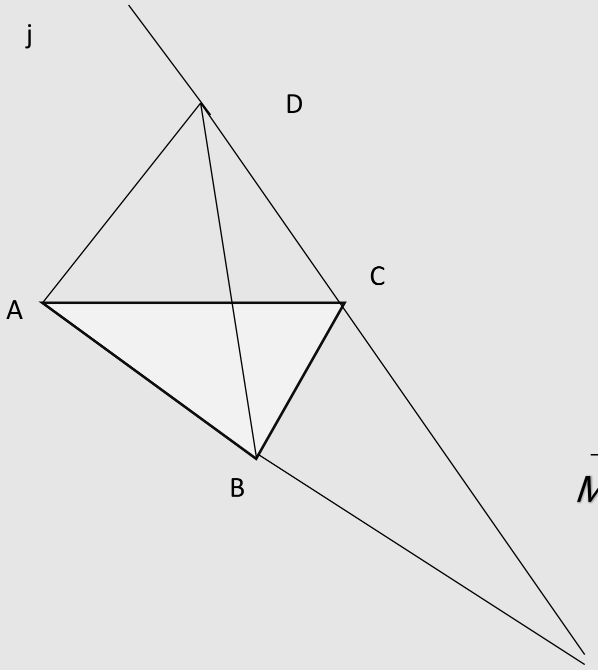
$\|6\overrightarrow{MI}\|=24$

$6[MI]=24$

$[MI]=4$

كرة مركزها I نصف قطرها $R=4$





تمرين ٢٢ صفحة ٤٣ هام .

ABCD رباعي وجوه

I تحقق $\overrightarrow{IA} = 2\,\overrightarrow{IB}$

J تحقق $\overrightarrow{JC} = 2\,\overrightarrow{JD}$

١. ايمكن ان تنطبق *I* على *J* وعلل:

٢. اثبت انه أيا كانت *M* : $\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$

٣. بفرض *G* مركز الابعاد المتناسبة ل :

$(D,1)\,,(C,1)\,,(B,1)$

٤. جد مجموعة النقط الفراغ التي تحقق : ا

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

الحل:

١. *I* تنتمي للمستقيم *AB*

J تنتمي للمستقيم *DC*

المستقيمات *DC,AB* متخالفان لانهما حرفان متقابلان في رباعي

الوجوه *ABCD* اذا *J,I* لا يمكن ان تنطبق احداهما على الأخرى

٢. ط١: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$

$L1:\ \overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{IB}=-\overrightarrow{MI}=L2$

ط٢: $\overrightarrow{IA}=2\overrightarrow{IB}$

$\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}=0$

I مركز الابعاد المتناسبة ل $(B\text{-}2)\,,(A,1)$

وحسب العلاقة الام

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MI}$

$1\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MI}$

$$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\| = \|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$$

$$\|(1+1+1)\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}(-1-1-1)\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\|$$

$$\|3\overrightarrow{MG}\| = \|3(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG})\|$$

$$3[MG] = \|3\overrightarrow{GA}\|$$

$$3[MG] = 3[GA]$$

$$[MG] = [GA]$$

مجموعة النقط كرة مركزها *G* ونصف قطرها $[GA]$

الجداء السلمي

العبارات المختلفة للجداء السلمي :

١. في المستوي الجداء السلمي لشعاعين هو العدد الحقيقي :

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[[\|\vec{u}+\vec{v}\|]^2 - [\|\vec{u}\|]^2 - [\|\vec{v}\|]^2]$$

٢. $\vec{v},\vec{u}$ غير معدومين :

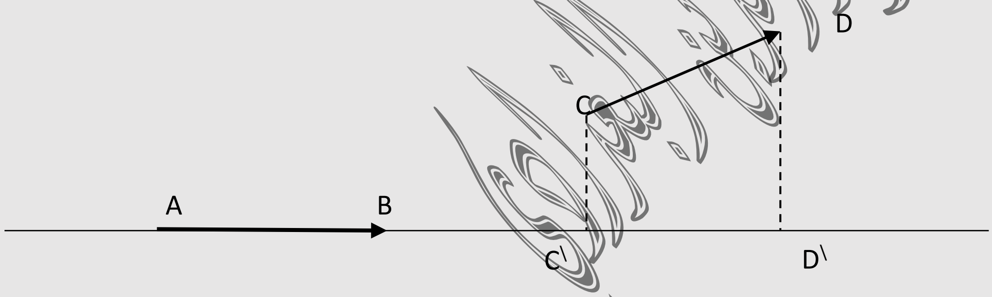
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.cos\theta$$

حيث : θ زاوية هندسية لشعاعين $\vec{v},\vec{u}$ وهي زاوية اصغر من 180

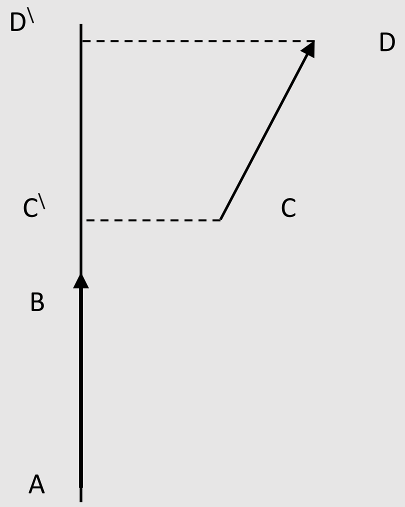
٣.في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$, $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$

$$\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'$$

٤.اذا كان $\overrightarrow{C'D'}$ المسقط القائم ل $\overrightarrow{CD}$ على السمتقيم AB فان :



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$



$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$$

ملاحظة: $\theta = \frac{\pi}{2}$

$\vec{V},\vec{u}$ غير معدومين: $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

ولكن $\cos\frac{\pi}{2} = 0 \longrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0$ شرط تعامد شعاعين

اذا $\vec{u}.\vec{v}=0$ فإن $\vec{u}\perp\vec{v}$

كان $\vec{u}(x,y)$, $\vec{v}(x',y')$

$\vec{u}.\vec{v}=0$

$xx'+yy'=0$

ملاحظة : بما ان الزاوية الهندسية بين الشعاع ونفسه صفر

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.1$

$\vec{u}.\vec{v} = (\vec{u})^2 = \|\vec{u}\|^2$

مربع شعاع يساوي مربع طويلته :

$(\vec{AB})^2=\vec{AB}.\vec{AB}=\|\vec{AB}\|^2 = [AB]^2$

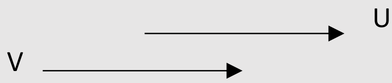
اذا كان الشعاعان $\vec{U}.\vec{V}$ مرتبطان خطيا

$\vec{U},\vec{V}$ بجهة واحدة

$\theta = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos 0$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.$

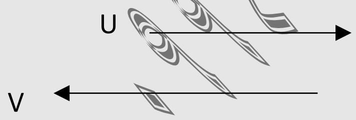


$\vec{U},\vec{V}$ بجهتين متعاكستين

$\theta = \pi$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$



كيف تجري الحسابات باستخدام الجداء السلمي؟

١. $\vec{U}.\vec{V} = \vec{V}.\vec{U}$
٢. $\vec{U}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
٣. $(\vec{u}^2-\vec{v}^2)=(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}+\vec{v})$

انتبه: $\vec{u}\vec{v}= \vec{u}\vec{w}$

لا تعني $\vec{v}=\vec{w}$

بل : $\vec{u}\vec{v}-\vec{u}\vec{w}=0$

$$\overrightarrow{U}(\overrightarrow{v}-\overrightarrow{w})=0$$

اذا الشعاعان $\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}-\overrightarrow{w}$ متعامدان

تمرين٣ صفحة ٥٠

اثبت انه في حالة 4 نقط A,B,C,D من المستوي:

$$2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{DA}^2$$

الحل : $L2=\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{BC}^2+\overrightarrow{CD}^2-\overrightarrow{DA}^2$

$$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DA}$$

$$=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}).(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{DA})$$

$$=\overrightarrow{AC}\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})+\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD})$$

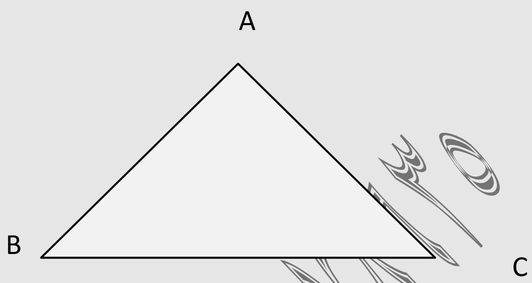
$$=\overrightarrow{AC}\,(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD})$$

$$=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{AD})$$

$$=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA})$$

$$=\overrightarrow{AC}(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AC}\,.\,2\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{AC}\,.\overrightarrow{DB}=L1$$

تطبيقات :



علاقة كاشي : عنصر امان

$$AC^2=BA^2+BC^2-2BA\,.BC\,COS(B)$$

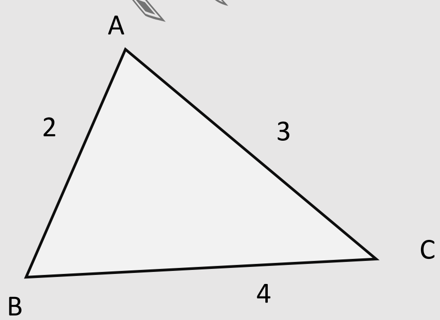
$$AB^2=CA^2+CB^2-2CA\,.CB\,.COS(C)$$

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB.AC.COS(A)$$

تفيد علاقة كاشي في إيجاد ((COS)) أي زاوية في مثلث علمت اطوال اضلاعة

مثال : ١. اوجد $COS\ B$

٢. اوجد $\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{BC}$



الحل: $AC^2=BA^2+BC^2-2BA\,.BC\,COS(B)$

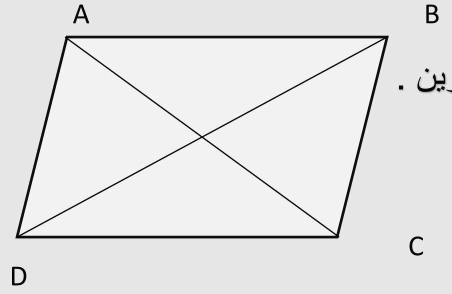
$$9=4+16-2\times 4X^2COS(B)$$

$$-11=-16\,COS(B) \qquad COS(B)=\frac{11}{16}$$

$$\overrightarrow{BA}\,.\overrightarrow{BC}=\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|.\cos B$$

$$=2\ .\ 4\ .\ \frac{11}{16}=\frac{11}{2}$$

٢.علاقة متوازي الاضلاع .



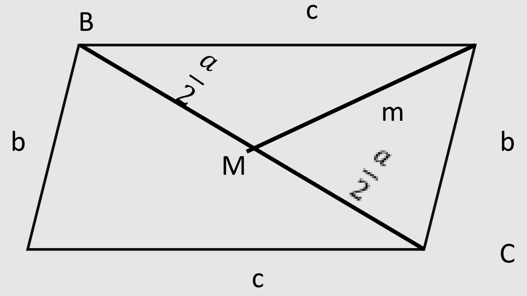
مجموع مربعان اطوال اضلاعه يساوي مجموع مربعي طولي القطرين .

$$[AB]^2+[BC]^2+[DC]^2+[AD]^2=[DB]^2+[Ac]^2$$

$$2[AB]^2+2[BC]^2=[BD]^2+[Ac]^2$$

٣. مبرهنة المتوسط : $b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$

نكمل الشكل الى متوازي اضلاع وحسب علاقة متوازي الاضلاع :



$$2b^2+2c^2=a^2+(2m)^2$$

$$2b^2+2c^2=a^2+4m^2$$

$$b^2+c^2=2m^2+\frac{a^2}{2}$$

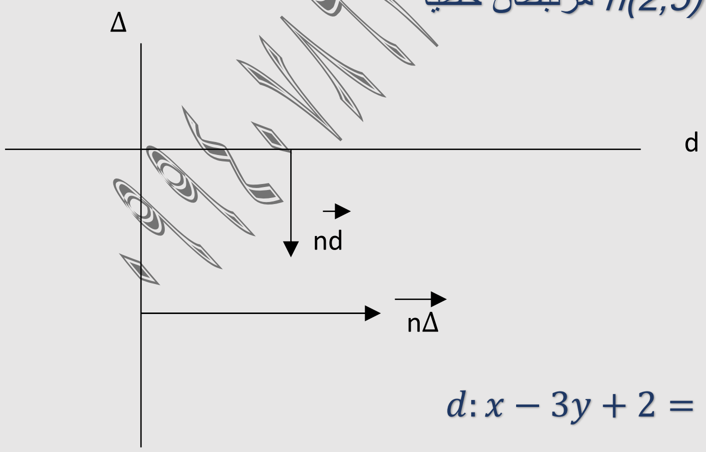
تمرين صفحة ٥٠ :

اكتب معادلة المستقيم Δ المار من $A(5,3)$ ويعامد المستقيم $d{:}2x+5y-5=0$

الحل : نفرض $M(X,Y)$ تنتمي للمستقيم Δ

$\overrightarrow{n}(2,5)$ ناظم على المستقيم d

الشعاعان $\overrightarrow{AM}(X-5,Y-3)$, $\overrightarrow{n}(2,5)$ مرتبطان خطيا



$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-3}{5}$$

$$5(x-5)=2(y-3)$$

$$5x-25=2y-6$$

$$\Delta{:}\ 5x-2y-19=0$$

٢. $A(-1,2)$, $d{:}\ x-3y+2=0$

الحل : نفرض $M(X,Y)$ تنتمي للمستقيم Δ

$\overrightarrow{n}(1,-3)$ ناظم على المستقيم d

الشعاعان $\overrightarrow{AM}(X+1,Y-3)$, $\overrightarrow{n}(1,-3)$ مرتبطان خطيا

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{-3}$$

$$-3(x+1) = y-2$$

$$-3x-3=y-2$$

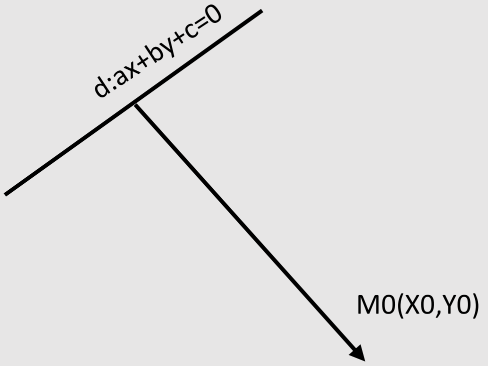
$$\Delta: 3x+y+1=0$$

قانون بعد نقطة عن مستقيم :

بعد نقطة $M(X_0,Y_0)$ عن d

هو طول العمود المرسوم من M_0 على المستقيم d ويعطي بالعلاقة:

$$L=\frac{|a(x_0)+b(y_0)+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

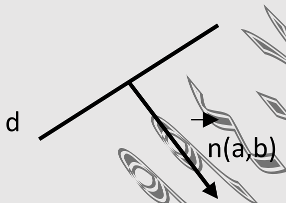


مثال : بعد النقطة $M(2,1)$ عن المستقيم

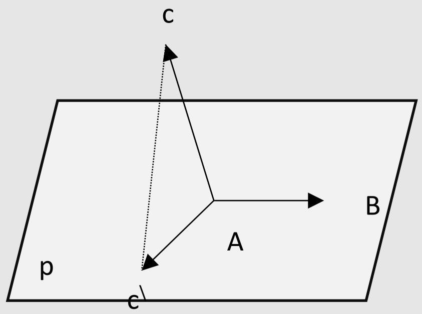
$$d: 4x-3y=10$$

$$L=\frac{|4(2)+3(1)-10|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{|-5|}{\sqrt{25}}=\frac{5}{5}=1$$

ملاحظة : $d:ax+by+c=0$ يقبل ناظم $\vec{n}(a,b)$



الجداء السلمي في الفراغ :



- $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}[[\|\vec{u}+\vec{v}\|]^2-[\|\vec{u}\|]^2-[\|\vec{v}\|]^2]$
- $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.\cos\theta$
- في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,

  $\vec{u}(x,y,z)$ او $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

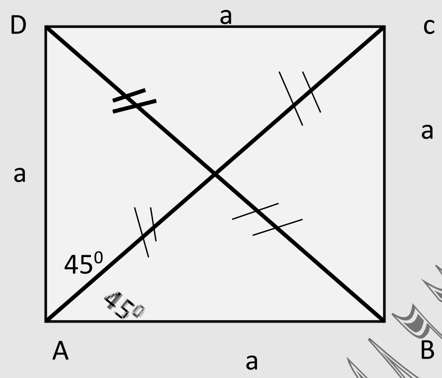
  $\vec{v}=(x',y',z')$ او $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$
- الاسقاط : $\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AC'}$

$\vec{AC'}$ مسقط $\vec{AC}$ على P الذي $\vec{AB}$

ملاحظات :

في المسائل التي ليس فيها اسقاط او استبدال مثل رباعي الوجوه لابد من توضيح الزاوية .

خواص المربع :



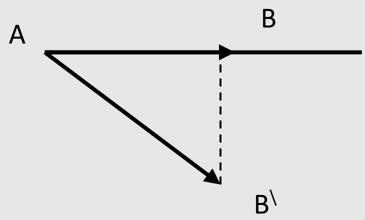
١. قطراه متناصفان ومتساويان ومتعامدان وينصفان زواياه

٢. حساب طول قطر مربع بدلالة ضلعه :

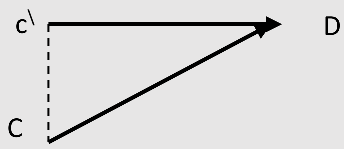
حسب فيثاغورث من DAB

$$DB^2=a^2+a^2=2a^2$$

$$DB=\sqrt{2}a$$



AB' مسقط AB على Δ

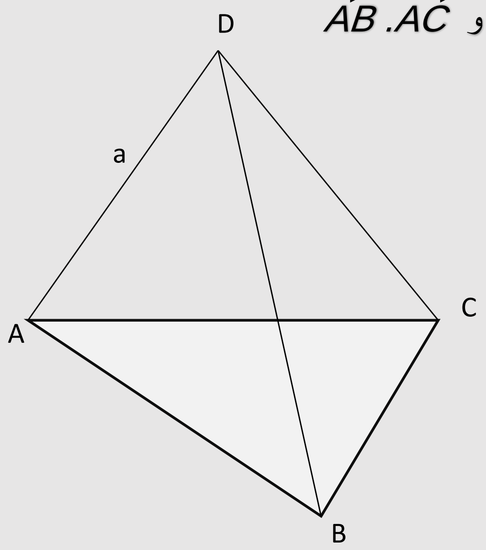


$C'D$ مسقط CD على Δ

مسألة صفحة ٥٢

ABCD رباعي وجوه منتظم , كل وجه فيه مثلث متساوي الاضلاع طول ضلعه *a*

احسب $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$



الحل :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\cos\frac{\Pi}{3}$$

$$= a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} = -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -\|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AD}\|.\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= -a.a.\frac{1}{2} = \frac{-a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CD} = (-\overrightarrow{DA}).(-\overrightarrow{DC}).\cos\frac{\pi}{3}$$

$$= a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AD})$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$$

$$= -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{CD}$$

مسألة صفحة ٥٣

اذا علمت ان : $\vec{U}.\vec{V}=-4$, $\vec{V}=3$, $\vec{U}=5$

احسب $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v})$, $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-3\vec{v})$

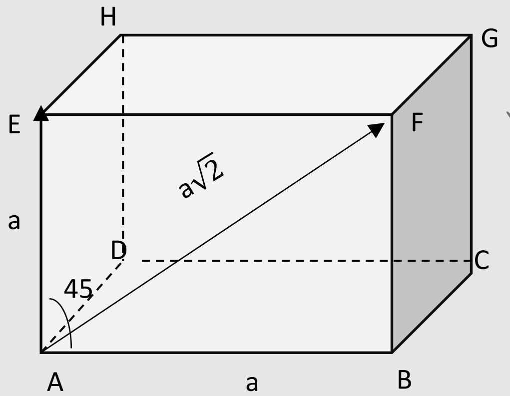
الحل : $\vec{u}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}\,\vec{v}$

$= \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}\vec{v} = 25 - 4 = 21$

$(\vec{u}+\vec{v})\,(\vec{u}-3\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{u} - 3\vec{v}\vec{u} - 3\vec{v}\vec{v}$

$=25 - 3(-4) -4 -3(9) =6$

تمرين : $ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a, اوجد $\vec{AE}.\vec{AF}$



١. $\vec{AE}\,.\,\vec{AF}$

$=\|\vec{AE}\|.\|\vec{AF}\|.\cos\frac{\pi}{4}$

$=a\,.a\sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$

طريقة٢:

$\vec{AE}.\vec{AF}$

$=\vec{AE}\,.\vec{AE}$

$=+\|\vec{AE}\|.\|\vec{AE}\|$

$=a.a=a^2$

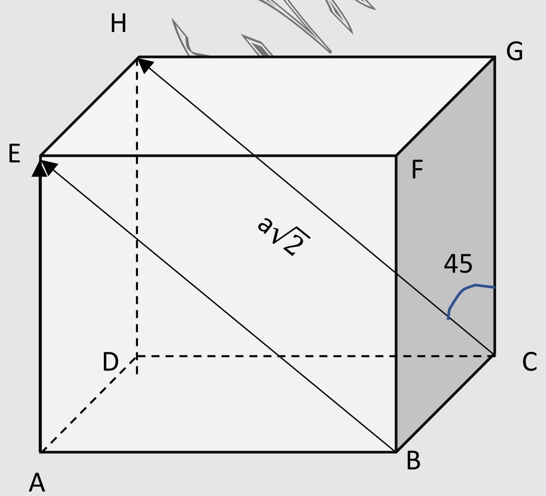
$\vec{AE}$ هو مسقط $\vec{AF}$ على المستوي ADHE

٢. $\vec{AE}\,.\vec{CH}$

$=\vec{CG}\,.\vec{CH}$

$=\|\vec{CG}\|.\|\vec{CH}\|.\cos\frac{\pi}{4}$

$=a\,.a\sqrt{2}\,.\frac{\sqrt{2}}{2}=a^2$



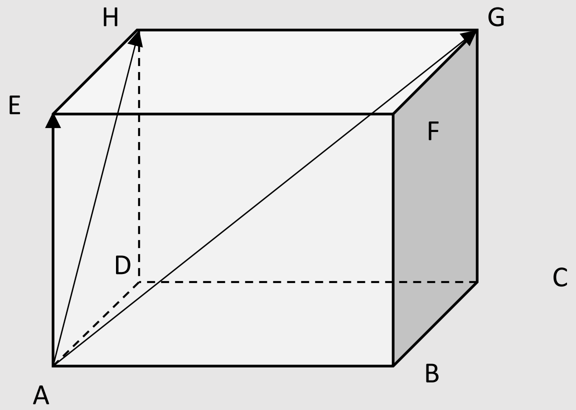
طريقة٢ :

$\vec{AE}\,.\vec{CH}$

$=\vec{AE}.\vec{BE}$

$=\vec{AE}\,.\vec{AE}$

$=+\|\vec{AE}\|.\|\vec{AE}\|. = a\,.a = a^2$

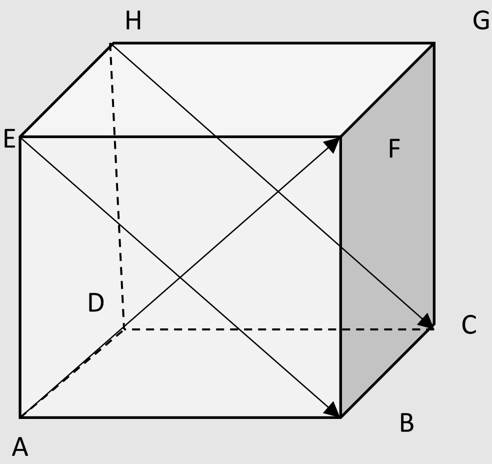


٣. $\vec{AE}\,.\vec{AG}$

$=\vec{AE}\,.\,\vec{AH}$

$=\vec{AE}\,.\vec{AE}$

$=\|\vec{AE}\|.\,\|\vec{AE}\|.=a\,.\,a=a^2$



٤. $\vec{AF}\,.\vec{HC}$

$=\vec{AF}\,.\,\vec{EB}=0$

(لان قطرا المربع متعامدان)

طريقة ٢. $\vec{AF}\,.\vec{EB}$

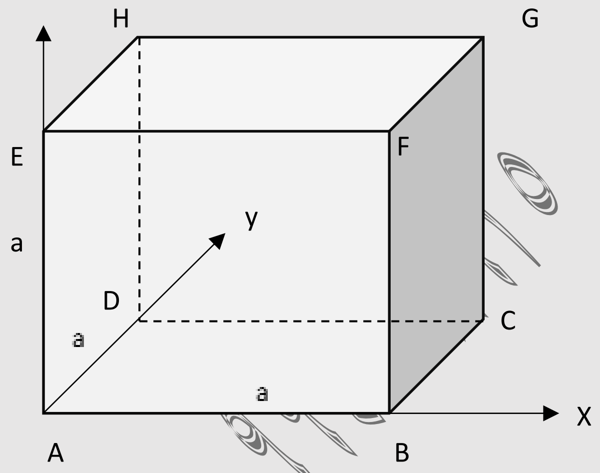
$=(\vec{AB}+\vec{BF})\,.\,(\vec{EA}+\vec{AB})$

$=\vec{AB}\,.\vec{EA}+\vec{AB}\,.\vec{AB}+\vec{BF}.\,\vec{EA}+\vec{BF}\,.\vec{AB}$

$=a.a-a.a=0$

طريقة ثانية عامة للتمرين كاملا:

في معلم متجانس $(A,\frac{1}{a}\vec{AB},\frac{1}{a}\vec{AD},\frac{1}{a}\vec{AE})$



$A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $c(a,a,0)$

$D(0,a,0)$, $E(0,0,a)$,$F(a,0,a)$

$G(a,a,a)$, $H(0,a,a)$

$\vec{AE}\,.\,\vec{AF}$ $\qquad$ $\vec{AE}(0,0,a)$

$\vec{AF}(a,0,a)$

$\vec{AE}\,.\,\vec{AF}=XX'+YY'+ZZ'=0+0+a^2=a^2$

$\vec{AE}.\vec{CH}$ $\qquad$ $\vec{AE}(0,0,a)$

$\vec{CH}(-a,0,a)$

$\vec{AE}\,.\vec{CH}=XX'+YY'+ZZ'=0+0+a^2=a^2$

$\vec{AE}\,.\vec{AG}$ $\qquad$ $\vec{AE}(0,0,a)$

$\vec{AG}(a,a,a)$

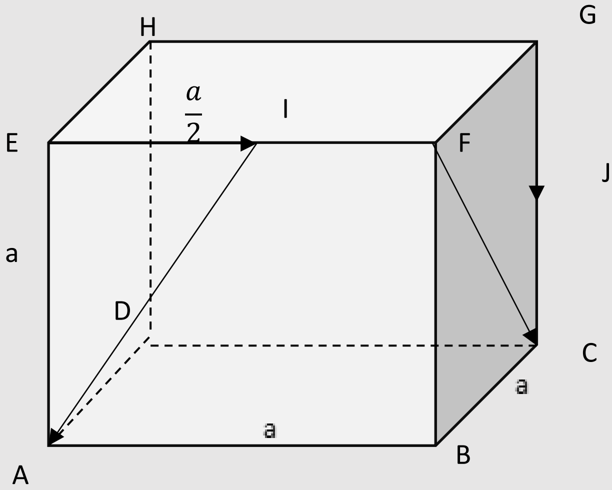
$\vec{AE}\,.\,\vec{AG}=XX'+YY'+ZZ'=0+0-a^2=a^2$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC}$ $\overrightarrow{AF}(a,0,a)$

$\overrightarrow{Hc}(a,0,-a)$

$\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{HC} = XX^{\prime} + YY^{\prime} + ZZ^{\prime} = a^2 - 0 - a^2 = 0$

تمرين صفحة ٥٣ :



$ABCDEFGH$ مكعب طول ضلعه a

I منتصف EF

J منتصف GC

احسب $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FC}$, $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{IA}$

الحل :

١. $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{EA}$ $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{EA} = 0$

٢. $EI \perp (BFGC)$ $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$

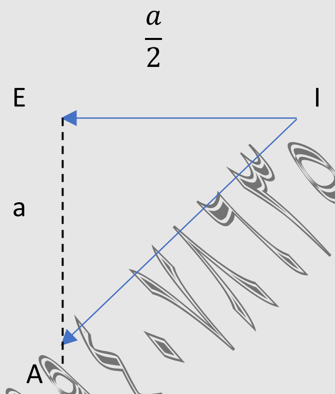
٣. $EI \perp (BFGC)$ $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{GI} = 0$

حسب فيثاغورث في IEA

$IA^2 = EI^2 + EA^2$

$IA^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{1} = \frac{5a^2}{4}$

$IA = \frac{\sqrt{5}a}{2}$



$Cos\Theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{IE}{IA} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{5}a}{2}} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

طريقة ١) $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{IA}$

$= -\overrightarrow{IE} \cdot \overrightarrow{IA}$

$= -\|\overrightarrow{IE}\| \cdot \|\overrightarrow{IA}\| \cdot \cos\Theta$

$= -\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}a}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{a^2}{4}$

طريقة ٢) $\overrightarrow{EI}\,.\,\overrightarrow{IA}$

)) الحرف الأوسط نفسه ← نعرف ناتج الجمع ← غريندايزر((

$$=\frac{1}{2}\left[\|\overrightarrow{EA}\| - \|\overrightarrow{EI}\| - \|\overrightarrow{IA}\|\right]$$

$$=\left[a^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-2a^2}{4}\right] = -\frac{a^2}{4}$$

طريقة٣)

$$\overrightarrow{EI}.\overrightarrow{IA}$$

$$=\|\overrightarrow{EI}\|.\,\|\overrightarrow{IE}\|$$

$$= -\|\overrightarrow{EI}\|.\,\|\overrightarrow{IE}\| = -\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = -\frac{a^2}{4}$$

طريقة ١)

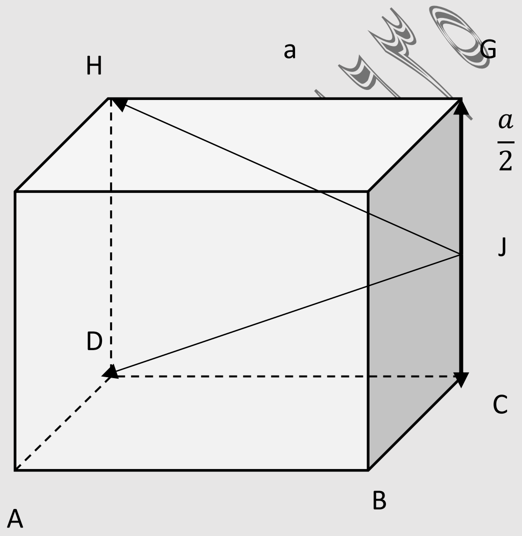
$$\overrightarrow{JH}\,.\,\overrightarrow{JD}$$

$$=(\overrightarrow{JG}+\overrightarrow{GH})\,.\,(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{CD})$$

$$=\overrightarrow{JG}.\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JG}.\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CD}$$

$$=-\frac{a}{2}.\frac{a}{2}+0+0+a.a$$

$$=-\frac{a^2}{4}+a^2=\frac{3a^2}{4}$$



طريقة ٢)

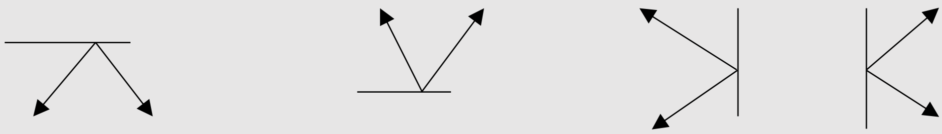
$$\overrightarrow{JH}\,.\overrightarrow{JD}$$

$$=\overrightarrow{HJ}\,.\overrightarrow{JD}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[[\|\overrightarrow{HJ}+\overrightarrow{JD}\|]^2 - [\|\overrightarrow{HJ}\|]^2 - [\|\overrightarrow{JD}\|]^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[[\|\overrightarrow{HD}\|]^2 - [\|\overrightarrow{HJ}\|]^2 - [\|\overrightarrow{JD}\|]^2\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\left[a^2 - \frac{5a^2}{4} - \frac{5a^2}{4}\right] = -\frac{1}{2}\left[\frac{-6a^2}{4}\right] = \frac{3a^2}{4}$$



الوصلة :

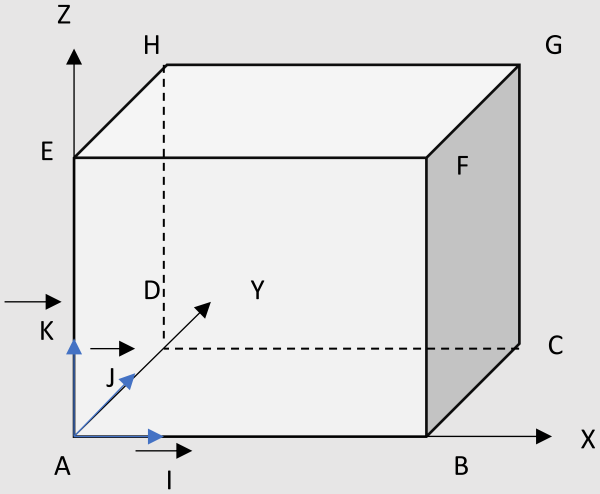
شعاعان مائلان (لايوجد اسقاط)

نحلل الشعاع المائل الى افقي +شقالولي بمساعدة رؤوس المكعب .

(كما في الطريقة_١_لحل الجداء $\vec{JH}.\vec{JD}$

طريقة ٢ كل التمرين كاملا:

في معلم متجانس $(A,\vec{I},\vec{J},\vec{K})$



$A(0,0,0)$, $B(a,0,0)$, $c(a,a,0)$

$D(a,a,\frac{a}{2})$, $E(0,0,a)$,$F(a,0,a)$

$G(a,a,a)$, $H(\frac{a}{2},a,a)$

$\vec{EI}(\frac{a}{2},0,0)$

$\vec{EA}(0,0,-a)$ $\qquad$ $\vec{EI}.\vec{EA}$

$=XX'+YY'+ZZ'=0+0+0=0$

$\vec{EI}(\frac{a}{2},0,0)$ $\qquad$ $\vec{EI}.\vec{FC}$

$\vec{FC}(0,a,-a)$

$=XX'+YY'+ZZ'=0+0+0=0$

$\vec{EI}(\frac{a}{2},0,0)$ $\qquad$ $\vec{EI}.\vec{GJ}$

$\vec{Gj}(0,0,-\frac{a}{2})$

$=XX'+YY'+ZZ'=0+0+0=0$

$\vec{EI}(\frac{a}{2},0,0)$ $\qquad$ $\vec{EI}.\vec{AI}$

$\vec{IA}(-\frac{a}{2},0,0)$

$=XX'+YY'+ZZ'=-\frac{a^2}{4}+0+0=-\frac{a^2}{4}$

$\vec{JH}(-a,0,\frac{a}{2})$ $\qquad$ $\vec{JH}.\vec{JD}$

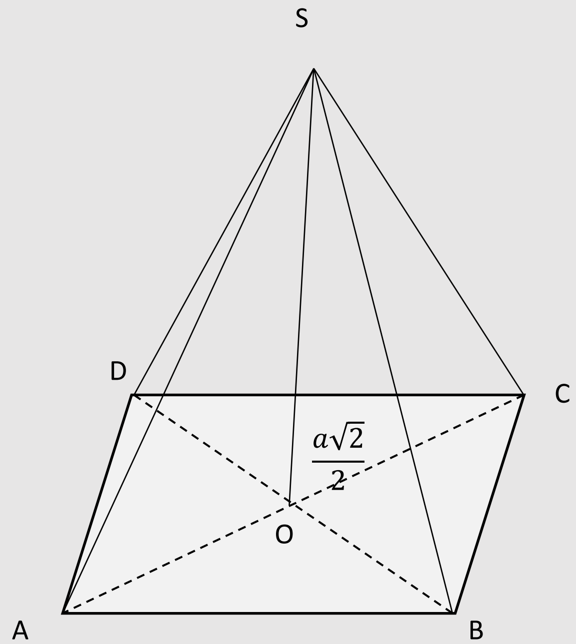
$\vec{JD}(-a,0,\frac{-a}{2})$

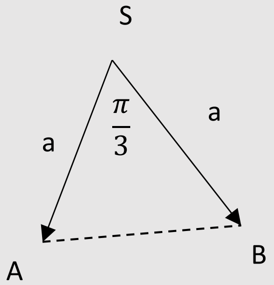
$$\boxed{=XX'+YY'+ZZ'=a^2+0+(\frac{-a^2}{4})=\frac{3a^2}{4}}$$

تمرين صفحة ٥٣:

S_ABCD هرم رباعي منتظم رأسه S وقاعدته $ABCD$ مربع , طول كل حرف من حروفه واضلاع قاعدته يساوي a

احسب : $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$





الحل :

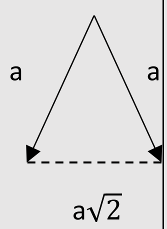
$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SB}\|.\cos\frac{\pi}{3}$

$= a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$= \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SC}\|.\cos\theta$



$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA.SC.\cos\theta$

$2a^2 = a^2 + a^2 - 2a.a\cos\theta$

$0 = -2a^2.\cos\theta$

$\cos\theta = \frac{0}{-2a^2} = 0$

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC}$

$= \|\overrightarrow{SA}\|.\|\overrightarrow{SC}\|.\cos\theta$

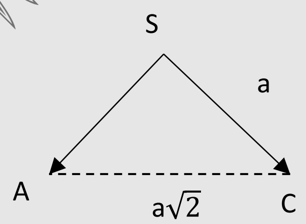
$= a.a.0 = 0$

طريقة ١) $\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{AC}$

$= -\overrightarrow{AS}.\overrightarrow{AC}$

$= -\|\overrightarrow{AC}\|.\|\overrightarrow{AS}\|.\cos\frac{\pi}{4}$

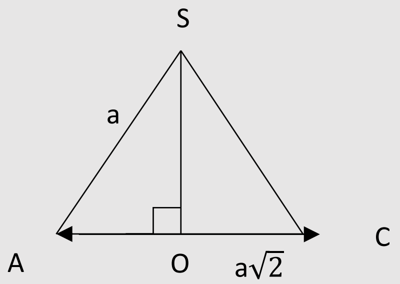
$= -a.a\sqrt{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = -a^2$



المثلث SAC قائم في S

ومتساوي الساقين

$A=C=45$



طريقة ٢

$$\overrightarrow{SA}\,.\overrightarrow{SC}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\|\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{AC}\|\right]^2-\left[\|\overrightarrow{SA}\|\right]^2-\left[\|\overrightarrow{AC}\|\right]^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left[\|\overrightarrow{SC}\|\right]^2-\left[\|\overrightarrow{SA}\|\right]^2-\left[\|\overrightarrow{AC}\|\right]^2\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[a^2-a^2-2a^2\right]=-a^2$$

$$\overrightarrow{SA}\,.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$$

$$=\ -\|\overrightarrow{OA}\|\|\overrightarrow{AC}\|=-\frac{a\sqrt{2}}{2}.\,a\sqrt{2}=-a^2$$

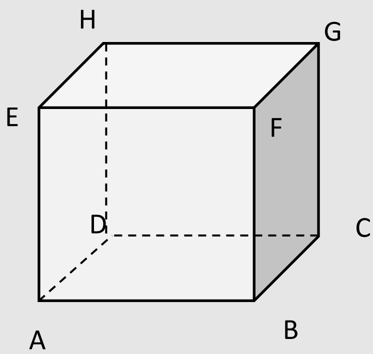
الأوضاع المختلفة لمستقيمين في الفراغ

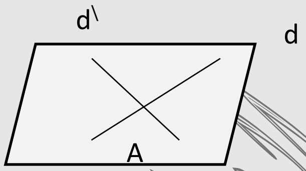
المستقيمات متوازيان

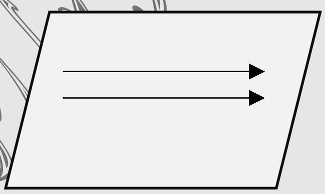
- متوازيان تماما: لايشتركان بأي نقطة ويقعان في مستو واحد
- منطبقان

المستقيمات غير متوازيان

- متقاطعان: يشتركان بنقطة واحدة ويقعان في مستو واحد
- متخالفان(فراغيان): لايشتركان بأي نقطة ولايقعان في مستو واحد



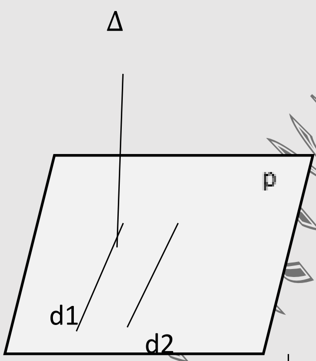




المستقيمات المتعامدان

هما مستقمان الزواية بينهما *90*

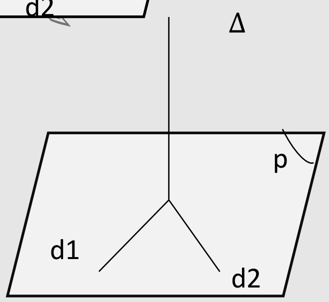
المستقيم العمود على احد المستقيمن المتوازيين تماما يعامد المستقيم الأخر.



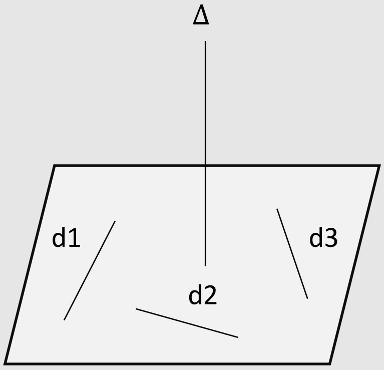
$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp d_1\\ d_1 \parallel d_2\end{array}\right\} \longrightarrow \Delta \perp d_2$$

كيف نبرهن ان مستقيم يعامد مستوي ؟

نبرهن ان يعامد مستقيمين متقاطعين في هذا المستوي .



$$\left.\begin{array}{l}\Delta \perp d_1\\ \Delta \perp d_2\end{array}\right\} \longrightarrow \Delta \perp p$$



المستقيم العمود على مستو يعامد جميع مستقيمات هذا المستوي.

$\Delta \perp d_1$

$\Delta \perp d_2$

$\Delta \perp d_3$

$\Longrightarrow \Delta \perp p$

كيف نبرهن تعامد مستقيمين ؟

نبرهن تعامد شعاعي التوجيه لهما

كيف نرمز للمستقيم في الفراغ ؟

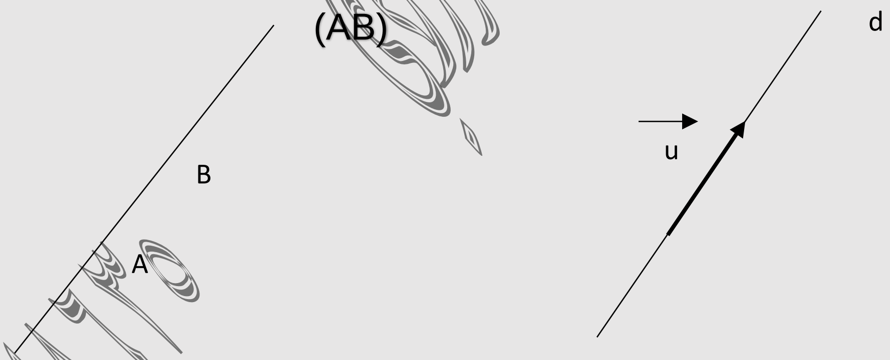
نرمز للمستقيم بحرف واحد مثل d

ويعطى عليه شعاع توجيه $\vec{u}$

نرمز للمستقيم بحرفين مثل (AB)

حيث B,A نقطتان من المستقيم

وفي هذه الحالة $\vec{AB}$ هو شعاع التوجية



في الفراغ يتعامد الشعاعان $\vec{u},\vec{v}$ اذا وفقط اذا كان $\vec{u}.\vec{v}= 0$

هام . تعامد المستقيمين AB , AC يكافئ تعامد المستقيمين (AB) ,(AC)

تمرين صفحة ٥٦ : في معلم متجانس

١) بين فيما يلي اذا كان الشعاعان $\vec{v},\vec{u}$ متعامدان او عين α ليكون كذلك

١. $\vec{v}\,(-\sqrt{2},1,1)$, $\vec{u}(\sqrt{2},1+\sqrt{2},1-\sqrt{2})$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' = -2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}$

$=0$ $\vec{u} \perp \vec{v}$

٢. $\vec{v}(-2\ ,3,\ \alpha)$, $\vec{u}(2,-1,5)$

نعلم ان $\vec{u}.\vec{v} = 0$

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz' = 0$

$(2)(-2)+(-1)(3)+(5)(\alpha)=0$

$-4-3+5\alpha = 0 \longrightarrow \alpha = \frac{+7}{5}$

٢) لتكن النقطتان $A(2,-5,1)$, $B(0\ ,2,6)$

المستقيم d المار من $C(-2\ ,3,1)$

وشعاعه التوجيهي : $\vec{u} = -4\vec{i}+\vec{j}-3\vec{k}$

اثبت أن d يعامد المستقيم (AB)

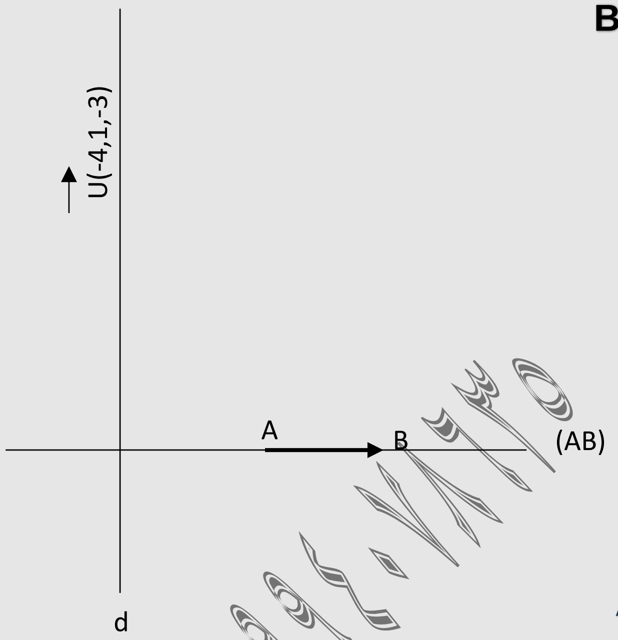
الحل : $\vec{AB}(-2\ ,7,5)$

شعاع توجيه لمستقيم (AB)

$\vec{AB}.\vec{u} = xx' + yy' + zz' = 8+7-15 = 0$

$\longrightarrow \vec{AB} \perp \vec{u}$

ومنه المستقيمان d و (AB) متعامدان $AB \perp d$



٣)اطوال الاشعة $\vec{u}\ .\ \vec{v}$ هي بالترتيب 6 ,8 ,10 هل v.u متعامدان

الحل : $\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[[\|\vec{u}+\vec{v}\|]^2 - [\|\vec{u}\|]^2 - [\|\vec{v}\|]^2]$

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}[100-36-64] = 0 \longrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

٤) $\vec{u}+\vec{v}$ و $\vec{u}-\vec{v}$ شعاعان متعامدان .

اثبت ان للشعاعان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ الطول ذاته .

الحل:

بما أن $\vec{u}-\vec{v}$ و $\vec{u}+\vec{v}$ متعامدان

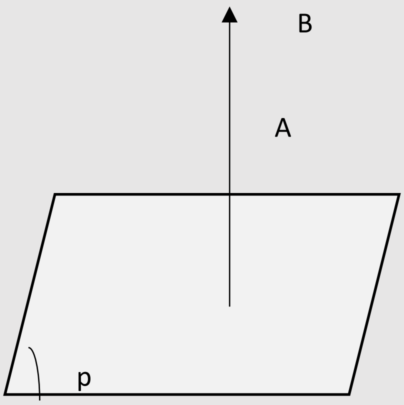
$$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=0$$

$$\vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{v}=0$$

$$\vec{u}.\vec{u}-\vec{v}.\vec{v}=0$$

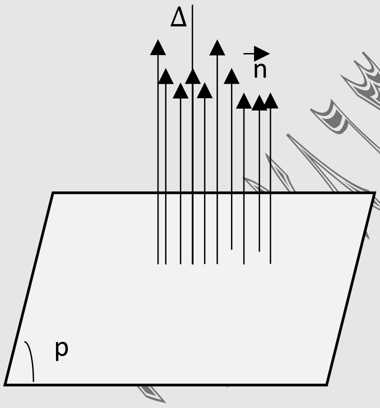
$$\|\vec{u}\|^2=\|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}\|=\|\vec{v}\|$$



الشعاع الناظم على مستو :

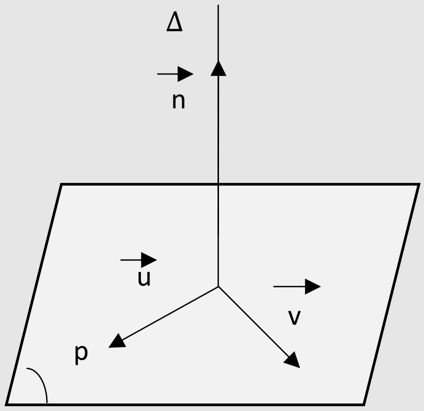
- اذا كان الشعاع $\vec{AB}$ الغير صفري ناظم على المستوي P هذا يعني أن المستقيم (AB) يعامد المستوي P



- إذا كان $\vec{n}$ ناظم على P , فأي شعاع (غير صفري) مرتبط خطيا مع $\vec{n}$ هو أيضا ناظم على المستوي P

مثال: P=2X +3Y -4Z +55 =0 وناظم $\vec{n''}(5,b,c)$: عين ناظم , $\vec{n}(2,3,-4)$: عليه

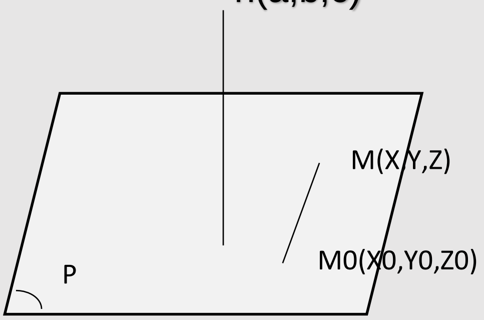
$$\vec{n''}=\frac{5}{2}\vec{n}=\left(5,\frac{15}{2},-10\right)$$



- كيف تترجم شعاعيا تعامد مستقيم مع مستو ؟

اذا كان الشعاع $\vec{n}$ الموجه لمستقيم Δ يعامد كل من $\vec{u}$,$\vec{v}$ المستقلان خطيا في p , فإن Δ يعامد المستوي P

معادلة مستو يمر من نقطة معلومة $M_0(X_0,Y_0,Z_0)$ ويقبل ناظم عليه $\vec{n}(a,b,c)$ غير معدوم.



$M(X,Y,Z) \in P$

$\overrightarrow{M_0M}(X-X_0 , Y-Y_0 ,Z-Z_0)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \qquad \vec{n} . \overrightarrow{M_0M}=0$

$a(x-x_0) +b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$

$ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0$

$$P=ax+by+cz+d=0$$

تمرين

اكتب معادلة المستوي p المار من $A(1,1,3)$ ويقبل ناظم عليه $n(5,-4,2)$

طريقة ١ . $M(X,Y,Z) \in P$

$\overrightarrow{AM}(X-1,Y-1 ,Z-3)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AM} \longrightarrow \vec{n} .\overrightarrow{AM} =0$

$5(X-1)-4(Y-1)+2(Z-3) =0$

$5X-5-4Y+4+2Z-6=0$

$P:5X-4Y+2Z-7=0$

طريقة ٢

$P:ax+by+cz+d=0$

$P:5X-4Y+2Z+d=0$

$A(1,1,3)\in P \longrightarrow 5(1)-4(1)+2(3)+d=0 \longrightarrow d= -7$

$P:5X-4Y+2Z-7=0$

تدرب 1 قم 1 صفحة ٥٦

اوجد معادلة المستوي P , يمر من $A(1,0,5)$, وناظم عليه $\vec{n}(1,-1,0)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$P: x-1y+0z+d=0$

$A(1,0,5)\in P \longrightarrow 1(1)-1(0)+d=0 \longrightarrow d=-1$

$P: X-Y-1=0$

مثال : اكتب معادلة المستوي P المارمن $B(1,-1,5)$ ويقبل ناظم عليه $\vec{n}(3,2,1)$

الحل : $P: ax+by+cz+d=0$

$P: 3x+2y+z+d=0$

$A(1,-1,5)\in P \longrightarrow P: 3(1)+(2)(-1)+(5)+d=0 \longrightarrow d=0$

$P: 3X+2Y+Z=0$

الأوضاع النسبية لمستويين P_2, P_1 في الفراغ :

$P_1: a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \quad , \vec{n}_1(a_1,b_1,c_1)$

$P_2: a_2x+b_2y+c_2z+d=0 \quad , \vec{n}_2(a_2,b_2,c_2)$

١. $\vec{n}_2 , \vec{n}_1$ مرتبطان خطيا $\quad p_2.p_1$ متوازيان

٢. $\vec{n}_2 , \vec{n}_1$ غير مرتبطان خطيا $\quad p_2.p_1$ متقاطعان

٣. $\vec{n}_2 , \vec{n}_1$ متعامدان $\quad p_2 \perp p_1$

$\vec{n}_2 . \vec{n}_1 = 0$

أثبت أن $p_2.p_1$ متعامدان : $p_1: 2x+y+z-5=0$

$P_2: x-2y+8=0$

$\vec{n}_2(1,-2,0) \quad , \quad \vec{n}_1(2,1,1)$

$\vec{n}_1.\vec{n}_2 = xx' + yy' + zz' = 0$

$= 2\times 1 + 1\times(-2) + 1\times(0) = 2-2+0=0$

$\vec{n}_2 \perp \vec{n}_1 \longrightarrow p_2 \perp p_1$

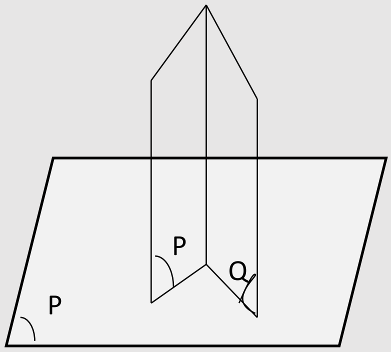
تمرين صفحة ٥٩

ادس تعامد كل من المستويات .

$P: 7X+3Y-Z-1=0$

$Q: 6X-11Y-9Z-5=0$

$R: 2X-3Y+5Z+4=0$



الحل : $\vec{n}_P=(7,3,-1)$, $\vec{n}_Q(6,-11,-9)$, $\vec{n}_R(2,-3,5)$

$\vec{n}_p \cdot \vec{n}_Q = XX' + YY' + ZZ' = 42+33-45=18 \neq 0$

$\vec{n}_P$ لا يعامد $\vec{n}_Q$ ⟵ P لايعامد Q

P مع R

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_R = 14-9-5=0$

$\vec{n}_P \perp \vec{n}_Q$ ⟵ $P \perp R$

Q مع R

$\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_R = 12+33-45=0$

$\vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ ⟵ $Q \perp R$

تمرين صفحة ٥٩

$A(\sqrt{2},-2,5)$, $\vec{n}(2,-3,-1)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$P: 2x-3y-z+d=0$

$A(\sqrt{2},-2,5) \in P \longrightarrow 2(\sqrt{2})-3(-2)-(5)+d=0$

$d=-1-2\sqrt{2}$

$$P: 2X-3Y-Z-1-2\sqrt{2}=0$$

تمرين صفحة ٥٩

بين اذاكان Q,P متعامدان

$\vec{n}_p(1,-1,1)$ $P: X-Y+Z=0$

$\vec{n}_Q(1,-1,1)$ $Q: X-Y+Z-3=0$

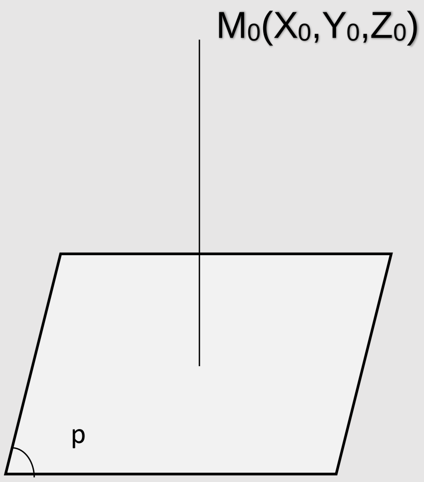
$$\frac{1}{1}=\frac{-1}{-1}=\frac{1}{1}$$

$\vec{n}_Q=\vec{N}_p$ مرتبطان خطيا ⟵ المستويان q,p متوازيان , وغير متقاطعان

$P: 2X+Y+5=0 \quad , \quad Q: 4X+2Y+Z+5=0$

$\vec{np}(2,1,0) \; , \; \vec{nQ}(4,2,1) \qquad \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$

nQ=nP غير مرتبطين خطيا ← Q,P متقاطعان



بعد نقطة معلومة عن مستو معلوم

بعد $M_0(X_0,Y_0,Z_0)$ عن $P: ax+by+cz+d=0$

$$dist(M_0,P)=\frac{|a(x_0)+b(y_0)+c(z_0)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

مثال : أوجد بعد $A(1,1,1)$ عن $P: 2X+2Y-Z-9=0$

$$dist(A,P)=\frac{|2(1)+2(1)-1(1)-9|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{|-6|}{\sqrt{9}}=2$$

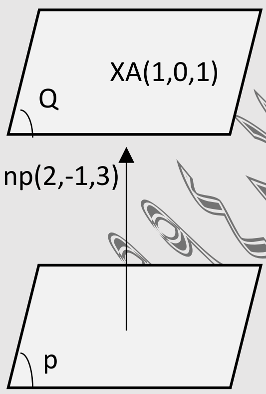
ملاحظة :

اذا كان $M_0 \in P$ ⟺ $dist(M_0.P)$

تمرين صفحة ٥٩

اكتب معادلة المستوي Q المار من $A(1,0,1)$ ويوازي :

$P: 2X-Y+3Z=4$



١. بما ان $P \parallel Q$ ⟵ $\vec{np}=\vec{nQ}$

$Q=ax+by+cz+d=0$

$2x-y+3z+d-0$

$A(1,0,1) \in Q \rightarrow 2(1)-(0)+3(1)+d=0$

$\longrightarrow d=-5$

$Q=2x-y+3z-5=0$

٢. $A(0,0,0) \qquad P: Z=2$

$P: 0X+0Y+1Z-2=0$

بما أن $P \parallel Q \leftarrow \vec{nQ}=\vec{np} \leftarrow \vec{nQ}(0,0,1)$

$Q: ax+by+cz+d=0$

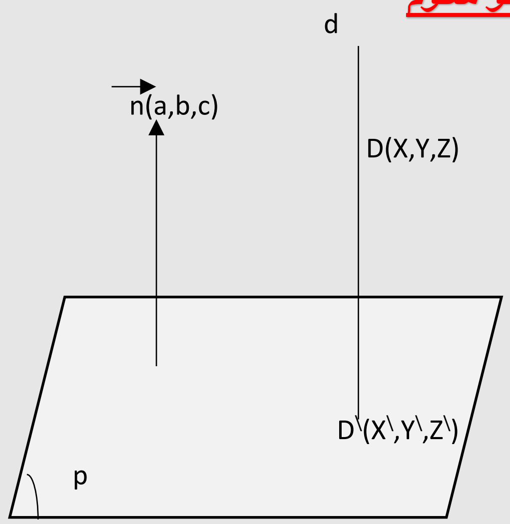
$Q: 0x+0y+1z+d=0$

$A(0,0,0) \in Q \longrightarrow 0+d=0$

$\longrightarrow d=0$

$Q: Z=0$

المسقط القائم لنقطة المعلومة على مستو معلوم



نفرض D نقطة معلومة و P مستو معلوم

المطلوب:

إيجاد D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P

مراحل الحل :

١. نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d المار من D ويعامد المستوي P

((نعتبر ناظم *P* هو الشعاع لا التوجيهي لـ*d*))

$\overrightarrow{DM} = t\,\vec{n}$

$$d: \begin{cases} x = at + x_D \\ y = bt + y_D \\ Z = ct + Z_D \end{cases} \qquad t \in R$$

٢. نقاطع *d* مع *P* فنحصل على *D'*

تمرين ٨ صفحة ٦٧

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$D(-11,9,-4)$, $C(1,5,5)$, $B(0,0,1)$, $A(1,2,0)$

١. اثبت ان *C,B,A* ليست على استقامة واحدة
٢. اكتب معادلة المستوي *(ABC)*
٣. عين *D'* المسقط القائم لـ *D* على المستوي *(ABC)*

الحل:

١. $\overrightarrow{AB}(-1,-2,1)$

$\overrightarrow{AC}(0,3,5)$

$$\frac{-2}{3} \neq \frac{1}{5}$$

$\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطيا

C,B,A ليست على استقامة واحدة فهي تشكل مستو P

٢. نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على P

$\vec{n}\perp\vec{AB} \longrightarrow \vec{n}.\vec{AB}=0 \longrightarrow -a-2b+c=0$

$\vec{n}\perp\vec{AC} \longrightarrow \vec{n}.\vec{AC}=0 \longrightarrow 3b+5c=0$

من (٢) $b=\frac{-5c}{3}$

نفرض $c=3$ فتكون من (٢) $b=-5$

نعوض في (١) فنجد $a=13$

$\vec{n}(13,-5,3)$

$P: ax+by+cz+d=0$

$13x-5y+3z+d=0$

$B(0,0,1)\in P$ $\quad 0-0+3(1)+d=0$

$P: 13x-5y+3z-3=0$

٣. نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم d

المار من $D(-11,9,-4)$ ويعامد المستوي P

$\vec{DM}=t.\vec{n}$

$$d: \begin{cases} x=13t-11 \\ y=-5t+9 \\ Z=3t-4 \end{cases} \quad \boxed{t\in R}$$

تقاطع d مع P

$13(13t-11)-5(-5t+9)+3(3t-4)-3=0$

$169t-143+25t-45+9t-12-3=0$

$203t=203 \Rightarrow t=1$

$D'(2,4,-1)$

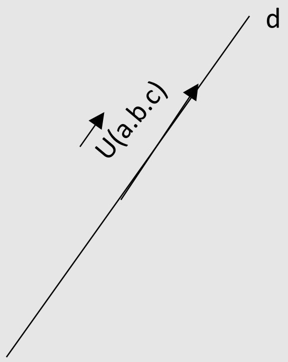
تمرين ١٧ صفحة ٧٠

$D(3,3,-3)$ $C(1,-1,1)$ $B(4,-2,3)$ $A(2,4,3)$

١. أثبت أن C,B,A ليست على استقامه واحدة.
٢. أوجد معادلة المستوي P المار من C,B,A
٣. عين D' المسقط القائم للنقطة D على المستوي P

الحل :

بعد نقطة معلوم A عن مستقيم معلومة d ((في الفراغ))



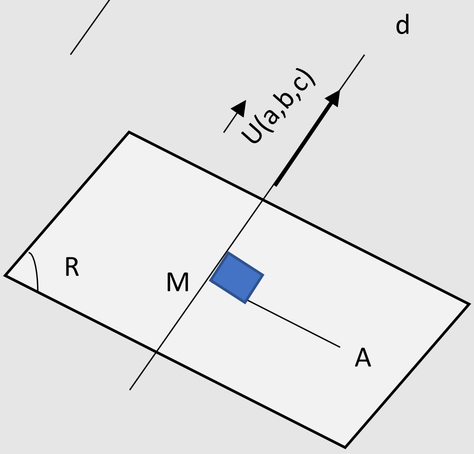
مراحل الحل :

١. المستقيم d يكتب بالشكل الوسيطي

$$d: \begin{cases} x=at+x0 \\ y=bt+y0 \\ Z=ct+Z0 \end{cases}$$

$t \in R$

شعاع التوجيهي $\vec{u}(a,b,c)$



٢. نكتب معالة المستوي R

المار من A ويعامد المستقيم d

نعتبر ناظم R هو الشعاع التوجيهي ل d

أي $\vec{n}=\vec{u}(a,b,c)$

R:ax+by+cz+d=0

٣. تقاطع d مع R

فنحصل على M المسقط القائم ل

A على المستقيم d

٤. نوجد المسافة بين M, A

وهي بعد النقطة A عن المستقيم d

$$[AM]=\sqrt{(X_2-X_1)^2+(Y_2-Y_1)^2+(Z_2-Z_1)^2}$$

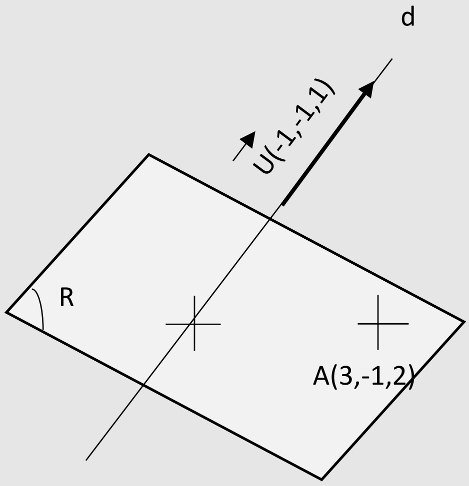
تمرين صفحة ٦٦

في معلم متجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{K})$

$A(3,-1,2)$

$1)P:2X-Y+Z-4=0$

$2)Q:X+Y+2Z=0$



١. أثبت أن Q,P يتقاطعان بفضل مشترك d

٢. أوجد تمثيل وسيطي لمستقيم d

٣.احسب بعد $A(3,-1,2)$ عن المستقيم d

الحل :

١. $\vec{np}(2,-1,1)$

$\vec{nQ}(1,1,2)$

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$$

$\vec{np},\vec{nQ}$ غير مرتبطين خطيا

المستويان Q,P متقاطعان بفصل مشترك d

٢. $\div 3$ $\quad 1+2\ )\ 3x+3z-9=0$

$X+Z-3=0 \longrightarrow X=-Z+3$

نفرض $Z=t$ فتكون $x=-t+3$

نعوض في (2)

$(-t+3)+y+2(t)-5=0$

$Y=-t+2$

$$d:\begin{cases} x=-t+3 \\ y=-t+2 \\ Z=t \end{cases} \qquad t\in R$$

٣. نكتب معادلة المستوي R

المار من $A(3,-1,2)$

ويعامد المستقيم d

نعتبر ناظم R هو شعاع توجيه d

$\vec{n}=\vec{u}(-1,-1,1)$

$R: ax+by+cz+d=0$

$-x-y+z+d=0$

$A(3,-1,2) \in R$

$-(3)-(-1)+2+d=0 \longrightarrow d=0$

$R: -x-y+z=0$

تقاطع d مع R

$-(-t+3)-(-t+2)+(t)=0$

$t-3+t-2+t=0 \longrightarrow t=\frac{5}{3}$

نعوض في المعادلات الوسيطية

$X=-(\frac{5}{3})+3=\frac{4}{3}$

$y=-\frac{5}{3}+2=\frac{1}{3}$

$z=\frac{5}{3}$

المسقط القائم لـA على d $M(\frac{4}{3},\frac{1}{3},\frac{5}{3})$

$$[AM]=\sqrt{\left(3-\frac{4}{3}\right)^2+\left(-1-\frac{1}{3}\right)^2+\left(2-\frac{5}{3}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{9}+\frac{16}{9}+\frac{1}{9}}=\sqrt{\frac{42}{9}}=\frac{\sqrt{42}}{3}$$

تمرين ١٢ صفحة ٦٩

في معلم متجانس $(O\vec{i},\vec{j},\vec{K})$

$A(2,2,-1)$

$1)P:x-y+z=0$

$2)Q:3X+Z-1=0$

١. أثبت ان Q,P متقاطعان بفصل مشترك d

٢. أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d

٣. احسب بعد $A(2,2,-1)$ عن المستقيم d

الحل :

١. $\overrightarrow{np}(1,-1,1)$

$\overrightarrow{nQ}(3,0,1)$

$$\frac{1}{3} \neq \frac{1}{1}$$

$\overrightarrow{np},\overrightarrow{nQ}$ غير مرتبطين خطيا

المستويان Q,P متقاطعان بفصل مشترك d

من المعادلة (2)

$Z=-3x+1$

نعوض $x=t$

فتكون $Z=-3t+1$

نعوض من (1)

$(t)-y+(-3t+1)=0$

$Y=-2t+1$

$$d: \begin{cases} x=t \\ y=-2t+1 \\ Z=-3t+1 \end{cases} \quad t\in R$$

٣.نكتب معادلة السمتوي R

المار من $A(2,2,-1)$ ويعامد المستقيم d

الناظم R هو الشعاع التوجيهي ل d

$\vec{nR}=\vec{u}(1,-2,-3)$

$R: ax+by+cz+d=0$

$x-2y-3z+d=0$

$(2)-2(2)-3(-1)+d=0 \qquad A(2,2,-1)\in R$

$d=-1$

$R: x-2y-3z-1=0$

تقاطع d مع P

$(t)-2(-2t+1)-3(-3t+1)-1=0$

$t+4t-2+9t-3-1=0$

$14t=6 \longrightarrow t=\frac{6}{14}=\frac{3}{7}$

$X=\frac{3}{7}$

$Y=-2\left(\frac{3}{7}\right)+1=\frac{1}{7}$

$Z=-3\left(\frac{3}{7}\right)+1=-\frac{2}{7}$

المسقط القائم لA على d $M\left(\frac{3}{7},\frac{1}{7},\frac{-2}{7}\right)$

$$[AM]=\sqrt{\left(2-\frac{3}{7}\right)^2+\left(2-\frac{1}{7}\right)^2+\left(-1+\frac{2}{7}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{121}{49}+\frac{169}{49}+\frac{25}{49}}=\sqrt{\frac{315}{49}}=\frac{\sqrt{315}}{7}$$

تمرين :

$D(1,0,-1)$,$B(-1,3,6)$, $A(1,1,4)$

١. اكتب المعادلات الوسيطية ل المستقيم (AB)
٢. احسب بعد النقطة D عن المستقيم (AB)

الحل :

تقاطع ثلاث مستويات

١. المستويات الثلاثة نشترك بنقطة وحيدة

<<حل وحيد>>

٢. المستويات الثلاث تشترك بنقطة بمستقيم

<<عدد غير منتهيه من الحلول>>

٣. المستويات الثلاث لا تشترك بأي نقطة

$S=\Phi$

$0\ 0\ 0 = 0$	$0\ 0\ 0 = 0$	$0\ 0\ 0 = 0$
$.\ 0\ 0 = 0$	$.\ 0\ 0 = 0$	$0\ 0\ 0 = 0$
$.\ .\ 0 = 0$	$.\ 0\ 0 = 0$	$0\ 0\ 0 = 0$

الحالات حسب السطر الثالث:

حالة الأولى :

السطر الثالث $.\ 0 = 0$

عدد $Z=$ حل وحيد المستويات الثلاثة تشترك بنقطة وحيدة

حالة الثانية :

$. . . = .$

$Z = 0$. عدد غير منهي من الحلول المستويات تشترك بمستقيم

حالة الثالثة:

عدد = . . .

$S=\Phi$ المستويات الثلاث لا تشترك بأي نقطة

تمرين :

ادرس تقاطع المستويات

$X+Y+2Z=4 \qquad L1$

$3X+4y+z=8 \qquad L2$

$2x-5y+3z=0 \qquad L3$

الحل :

$X+y+2z=4$

$0+y-5z=-4 \qquad -3L1+L2 \longrightarrow L2$

$0-7Y-Z=-8 \qquad -2L1+L3 \longrightarrow L3$

$1)X+Y+2Z=4$

$2)0+y-5z=-4$

$3)0 \quad 0 \quad -36z=-36 \qquad 7L2+L3 \longrightarrow L3$

في المعادلة (3 $Z=1$

نعوض في (2 فنجد

$y-5(1)=-4 \longrightarrow y=1$

نعوض في (1

$X+(1)+2(1)=4 \longrightarrow x=1$

المستويات الثلاث نشترك بنقطة وحيدة

$(1,1,1)$

تمرين :

ادرس تقاطع المستويات .

طلب إضافي : أوجد تمثيل وسيطي لهذا المستقيم .

$2X-y+3Z=2$

$X+2y+z=1$

$3x-4y+5z=3$

الحل :

$X+2y+z=1 \qquad L1$

$2X-y+3Z=2 \qquad L2$

$3x-4y+5z=3 \qquad L3$

$X+2y+z=1$

$0-5y+z=0 \qquad -2L1+L2 \longrightarrow L2$

$0-10y+2z=0 \qquad -3L1+L3 \longrightarrow L3$

$X+2y+z=1$

$0-5y+z=0$

$0\ \ 0\ \ 0\ =0 \qquad -2L2+L3 \longrightarrow L3$

$0.Z=0$

عدد غير منته من الحلول المستويات الثلاث تشترك بمستقيم d هو الفصل المشترك لها .

تمرين :

ادرس تقاطع المستويات :

$$X+2y+z=1 \qquad L1$$

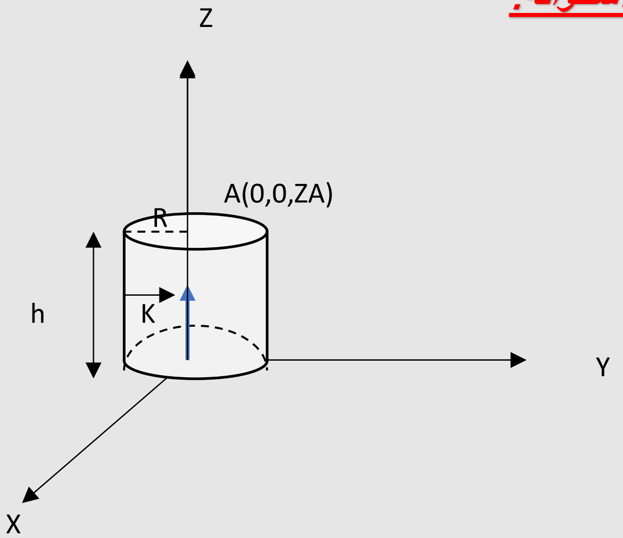
$$2X-y+3Z=2 \qquad L2$$

$$3x-4y+5z=5 \qquad L3$$

الحل :

الأسطوانة:

حالة ١)



محور الأسطوانة $(o,\overrightarrow{K})$

قاعدتا الأسطوانة الدائرتان

اللتان مركزهما

$0(0,0,0)$ $A(0,0,ZA)$

نصف قطر كل منها R

المعادلة $X^2+Y^2=R^2$

$Z_0 \leq ZM \leq ZA$

ارتفاع الأسطوانة

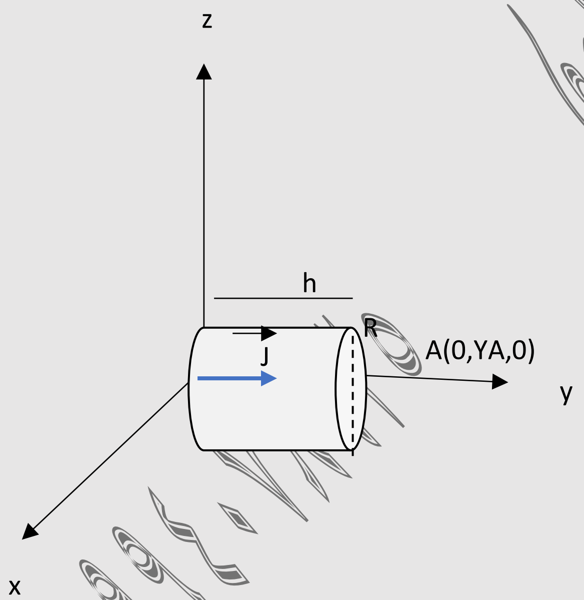
$h=|ZA-Z0|$

حالة ٢)

محور الأسطوانة $(O,\overrightarrow{j})$

قاعدتا الأسطوانة الدائرتان

مركزهما



$0(0,0,0)$ $A(0,YA,0)$

نصف قطر كل منهما R

المعادلة : $X^2+Z^2=R^2$

$Y_0 \leq yM \leq yA$

ارتفاع الأسطوانة $h=|yA-y0|$

حالة ٣)

محور الأسطوانة $(O,\vec{i})$

قاعدتا الأسطوانة الدائرتان

مركزهما

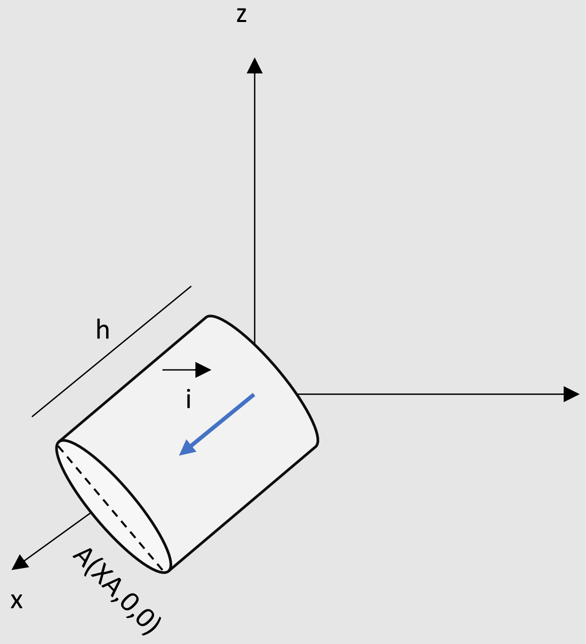
$O(0,0,0)$ $A(XA,0,0)$

نصف قطر كل منهما R

المعادلة : $y^2+z^2=R^2$

$X_0 \le XM \le XA$

$h=|xA - X0|$



تمارين صفحة ٣٣

١. جد معادلة الأسطوانة محورها $(O,\vec{J})$

قاعدتها الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $R=2$

٢. جد معادلة الأسطوانة محورها $(O,\vec{J})$

قاعتها الدائرة مركزها $Q(0,8,0)$ ونصف قطرها $R=2$

٣. جد معادلة الأسطوانة محورها $(O,\vec{i})$

مركز قاعدتها $T(3,0,0)$ ونصف قطرها $R=\sqrt{6}$

الحل :

٤. صف مجموعة النقاط $M(X,Y,Z)$ التي احداثياتها العلاقات

$X^2+Y^2=25$

$1\le Z\le 4$

هل النقطة $D(3,4,2)$ تقع على الأسطوانة السابقة؟ علل

الحل :

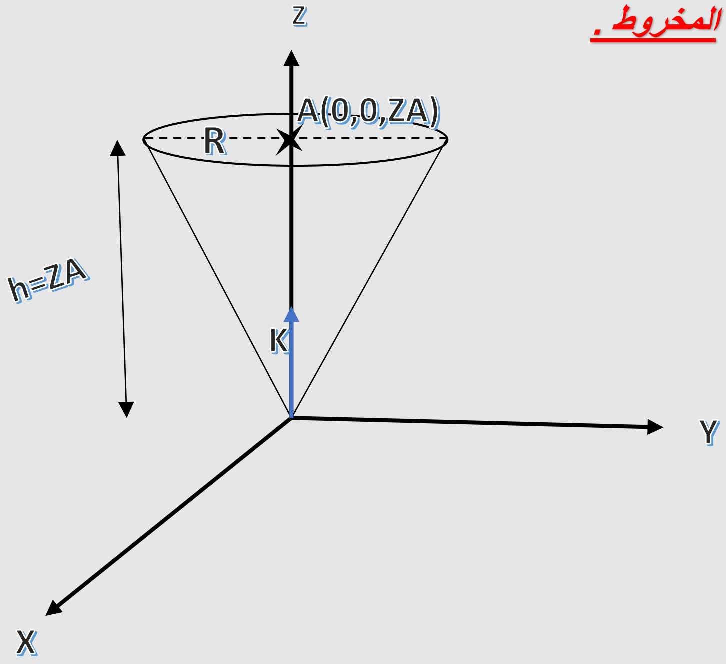
المخروط .

حالة ١)

محور المخروط $(O,\vec{K})$

$$X^2+Y^2-\frac{R^2}{h^2}z^2=0$$

$$Z0 \leq ZM \leq ZA$$

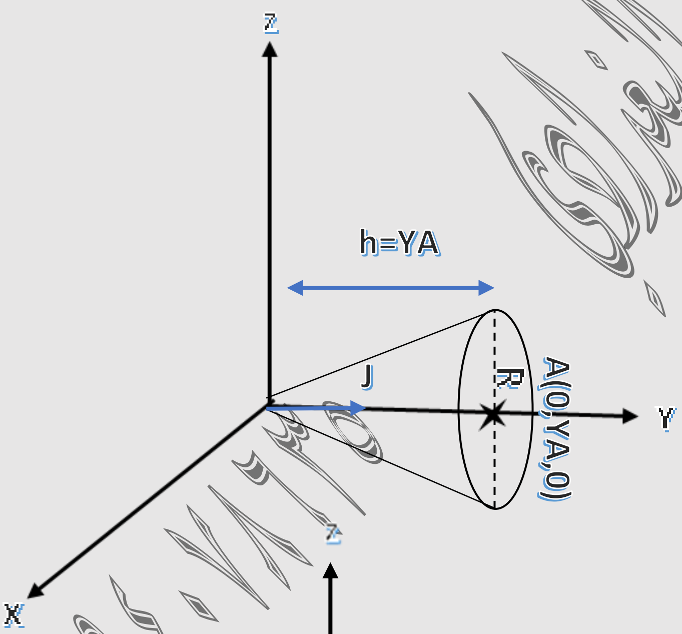


حالة ٢)

محور المخروط $(O,\vec{j})$

$$X^2+Z^2-\frac{R^2}{h^2}y^2=0$$

$$y_0 \leq yM \leq yA$$

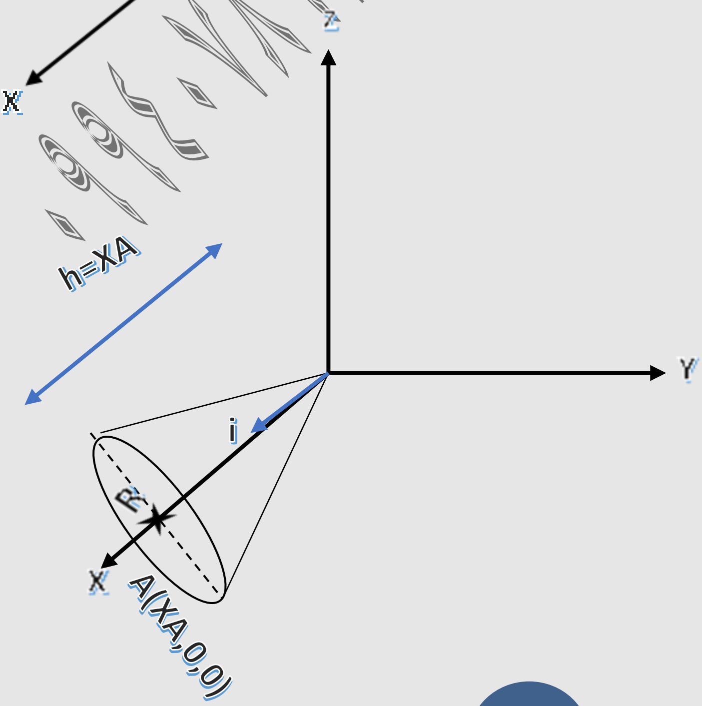


حالة ٣)

محور المخروط $(\overrightarrow{O,X})$

$$y^2+z^2-\frac{R^2}{h^2}x^2=0$$

$$X_0 \leq XM \leq XA$$



تمرين ١ صفحة ٣٤

ليكن المخروط الذي معادلته

$$X^2+Y^2-\frac{4}{25}z^2=0$$
$$0\leq Z\leq 5$$

عين من النقاط الاتية تلك التي تقع على المخروط معللا إجابتك .

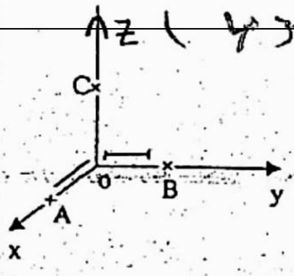
$$T(2,2\sqrt{3},10)\quad S(1,1,3)\quad R(-2,1,5)\quad Q(2,0,5)$$

تمرين ٢ صفحة ٣٤

اكتب معادلة المخروط رأسه O محوره $(O,\vec{i})$

قاعدته الدائرة التي مركزها $B(4,0,0)$ ونصف قطرها $R=3$

مسألة: 15



ليكن المعلم المتجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC})$

لتكن G مركز ثقل المثلث ABC

1) عين احداثيات G , A , B , C.

2) اثبت ان المستقيم (OG) يعامد المستوي (ABC)

الحل :

$C(0,0,1)$, $B(0,1,0)$, $A(1,0,0)$ (1

G مركز ثقل المثلث ABC

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3},\frac{y_A+y_B+y_C}{3},\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{OG}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)\qquad \overrightarrow{AB}(-1,1,0)$$

$$\overrightarrow{AC}(-1,0,1)$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AB}=xx'+yy'+zz'=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+0=0$$

$$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AB}\Leftarrow$$

$$\overrightarrow{OG}.\overrightarrow{AC}=xx'+yy'+zz'=-\frac{1}{3}+0+\frac{1}{3}=0$$

$$\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{AC}\Leftarrow$$

و منه $\overrightarrow{OG}$ يعامد شعاعين غير مرتبطين خطيا من المستوي ABC

إذا المستقيم OG يعامد المستوي ABC .

ABCD رباعي وجوه ، G مركز الأبعاد المتناسبة لـ (A,1) (B,1) (C,1) (D,1)

جد مجموعة نقاط الفراغ M التي تحقق :

$$\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\right\|$$

$$\left\|(1+1+1)\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD})\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MG}\right\|$$

$$\left\|3\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|3\overrightarrow{GA}\right\|$$

$$3[MG]=3[GA]$$

$$[MG]=[GA]$$

مجموعة النقط هي كرة، مركزها G نصف قطرها [GA] .

في المعلم المتجانس $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

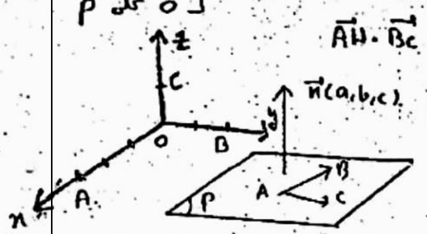
لتكن النقط $A(3,0,0)$ $B(0,2,0)$ $C(0,0,1)$

1) اكتب معادلة المستوي (ABC)

2) أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d المار من O ويُعامد (ABC)

3) عين نقطة تقاطع المستقيم d مع المستوي (ABC) . H المسقط العمودي لـ O على P

4) احسب $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}$ ماذا تستنتج



الحل :

$$\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$$

$$\overrightarrow{AC}(-3,0,1)$$

الشعاعين غير مرتبطين خطيا، A , B , C تعين مستويا P

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على P .

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AB}\longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AB}=0\Rightarrow-3a+2b=0\qquad(1)$$

$$\vec{n}\perp\overrightarrow{AC}\longrightarrow\vec{n}.\overrightarrow{AC}=0\Rightarrow-3a+c=0\qquad(2)$$

من (1) $b=\dfrac{3a}{2}$ *

نفرض a = 2 فيكون من * b = 3 ، نعوض في (2)

فنجد c = 6 إذا: $\vec{n}(2,3,6)$

$$p:ax+by+cz+d=0$$

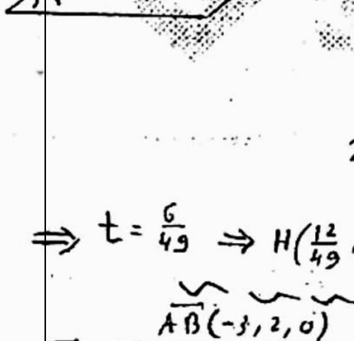
$$p:2x+3y+6z+d=0$$

$$A(3,0,0)\in p\longrightarrow 2(3)+0+0+d=0\longrightarrow d=-6$$

$$p:2x+3y+6z-6=0$$

2) d يُعامد p إذا نعتبر $\vec{n}$ شعاع توجيه لـ d .

$$\overrightarrow{OM}=t\,\vec{n}$$



$$d:\begin{cases}x=2t\\y=3t\\z=6t\end{cases}\qquad t\in R$$

3) نعوض في معادلة المستوي :

$$2(2t)+3(3t)+6(6t)-6=0$$

$$4t+9t+36t=6$$

$$\Rightarrow t=\frac{6}{49}\Rightarrow H\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)$$

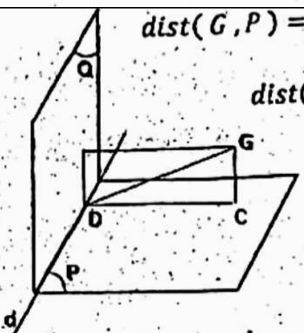
(4 $\overrightarrow{AB}(-3,2,0)$ $\overrightarrow{CH}\left(\frac{12}{49},\frac{18}{49},\frac{-13}{49}\right)$

$$\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB}=-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}+0=0\Rightarrow\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AH}\left(-\frac{135}{49},\frac{18}{49},\frac{36}{49}\right)\quad\overrightarrow{BC}(0,-2,1)$$

$$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0-\frac{36}{49}+\frac{36}{49}=0\Rightarrow\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$$

H نقطة تلاقي الارتفاعات في ABC

$$dist(G,P)=\frac{|2(0)+(4)+(1)-7|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{2}{\sqrt6}=\frac{2\sqrt6}{6}=\frac{\sqrt6}{3}$$



$$dist(G,q)=\frac{|(0)-3(4)+(1)|}{\sqrt{1+9+1}}=\frac{11}{\sqrt{11}}=\sqrt{11}$$

حسب فيثاغورث من GCD

$$L^2={L_1}^2+{L_2}^2$$

$$L^2=\frac{6}{9}+\frac{11}{1}=\frac{105}{9}\Rightarrow L=\frac{\sqrt{105}}{3}$$

$d\perp GC$

$d\perp GD$ ➡ $\boxed{d\perp(GCD)\Rightarrow d\perp GD}$

4) $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$\overrightarrow{MA}(1-x,-y,-1-z)$

$\overrightarrow{MB}(1-x,1-y,2-z)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$

$$(1-x)(1-x)+(-y)(1-y)+(-1-z)(2-z)=0$$

$$1-x-x+x^2-y+y^2-2+z^2-2z+z=0$$

$$x^2-2x+y^2-y+z^2-z-1=0$$

$$x^2-2x+1-1+y^2-y+\frac14-\frac14+z^2-z+\frac14-\frac14-1=0$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac12\right)^2+\left(z-\frac12\right)^2=\frac{10}{4}$$

مجموعة النقط كرة مركزها $\Omega\left(1,\frac12,\frac12\right)$ و نصف قطرها $R=\frac{\sqrt{10}}{2}$

المسألة الثالثة :

في معلم متجانس $(o,\vec i,\vec j,\vec k)$

$P: 2x-y+z-4=0$

$Q: x+y+2z-5=0$

1) أثبت أن P,Q متقاطعان في فصل مشترك d .

2) أوجد تمثيل وسيطي للمستقيم d .

3) أوجد بعد $A(3,-1,2)$ عن الفصل المشترك d .

4) أوجد معادلة المستوي R المار من A و يعامد كلاً من P,Q .

الحل :

1) $\overrightarrow{nP}(2,-1,1)$ $\quad \frac{2}{1}\neq\frac{-1}{1}$

$\overrightarrow{nQ}(1,1,2)$

$\overrightarrow{nP},\overrightarrow{nQ}$ غير مرتبطين خطياً ← P,Q متقاطعان .

2) $2x-y+z-4=0$ $\boxed{1}$

$x+y+2z-5=0$ $\boxed{2}$

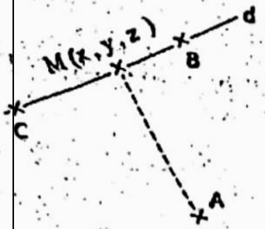
$\boxed{1}+\boxed{2}: 3x+3z-9=0\Rightarrow x=-z+3$

نعوض في $\boxed{2}$: $(-z+3)+y+2z-5=0\Rightarrow y=-z+2$

نفرض $z=t$:

$$d:\begin{cases}x=-t+3\\ y=-t+2 & t\in R\\ z=t\end{cases}$$

3) لنوجد نقطتين من الفصل المشترك ، وجدنا من الطلب السابق



$M\in d\Rightarrow M(-z+3,-z+2,z)$

نفرض $z=3 \Leftarrow B(0,-1,3)$

نفرض $z=0\Leftarrow C(3,2,0)$

نفرض $M(x,y,z)\in d$

$\overrightarrow{BM}=k.\overrightarrow{BC}$

$(x,y+1,z-3)=k(3,3,-3)$

$x=3k$; $y+1=3k$; $z-3=-3k$ ➡ $x=3k$; $y=3k-1$; $z=-3k+3$

$\Rightarrow M(3k,3k-1,-3k+3)$

حتى تكون M المسقط القائم ل A على (BC)

يجب أن تحقق : $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AM}(3k-3,3k,-3k+1)$

$\overrightarrow{BC}(3,3,-3)$

$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow 3(3k-3)+3k(3)+(-3)-3k+1=0$$

$$9k-9+9k+9k-3=0\Rightarrow 27k=12$$

$$k=\frac{12}{27}\Rightarrow k=\frac49$$

نعوض : $M\left(3\left(\frac49\right),3\left(\frac49\right)-1,-3\left(\frac49\right)+3\right)$

$\Rightarrow M\left(\frac43,\frac13,\frac53\right)$

$$AM=\sqrt{\left(3-\frac43\right)^2+\left(-1-\frac13\right)^2+\left(2-\frac53\right)^2}=\sqrt{\frac{42}{9}}$$

4) نفرض $\overrightarrow{nR}(a,b,c)$ ناظم على .

$\overrightarrow{nR}\perp\overrightarrow{nP}\Rightarrow\overrightarrow{nR}.\overrightarrow{nP}=0\Rightarrow 2a-b+c=0$ $\boxed{1}$

$\overrightarrow{nR}\perp\overrightarrow{nQ}\Rightarrow\overrightarrow{nR}\perp\overrightarrow{nQ}=0\Rightarrow a+b+2c=0$ $\boxed{2}$

$\boxed{1}+\boxed{2}$: $3a+3c=0$

$\Rightarrow a=-c$ *

نفرض $c=1$ نعوض في * ← $a=-1$

نعوض في $\boxed{2}$: $-1+b+2=0\Rightarrow b=-1$

$\Rightarrow \vec n(-1,-1,1)$

$R: ax+by+cz+d=0$

$R: -x-y+z+d=0$

$A(3,-1,2)\in R: -(3)-(-1)+(2)+d=0$

$\Rightarrow d=0$

$\Rightarrow R: -x-y+z=0$

المسألة الرابعة :

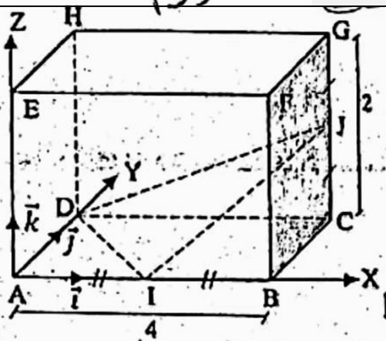
ABCDEFGH متوازي مستطيلات

I منتصف $[AB]$ ، J منتصف $[CG]$

في معلم متجانس $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$CG = 2 , BC = 2 , AB = 4$

O نقطة تلاقي القطرين $[BH]$, $[AG]$



1) جد احداثيات متوازي المستطيلات و النقطتين J , I .

2) احسب المسافات $[DI]$, $[IJ]$, $[JD]$.

3) أثبت أن (DI) , (IJ) متعامدان . وأوجد مساحة المثلث (DIJ)

4) أوجد معادلة المستوي P المار من J, D, I .

5) احسب بعد H عن المستوي (JID) و حجم الهرم $H - DIJ$

6) نفرض $BOG = \alpha$ احسب $\cos\alpha$

الحل :

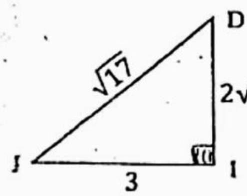
1)

$E(0,0,2)$	$A(0,0,0)$
$F(4,0,2)$	$B(4,0,0)$
$G(4,2,2)$	$C(4,2,0)$
$H(0,2,2)$	$D(0,2,0)$
$J(4,2,1)$	$I(2,0,0)$

2) $DI = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8}$

$JI = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$

$DJ = \sqrt{16+1+0} = \sqrt{17}$



3) $\overrightarrow{DI}(2,-2,0)$, $\overrightarrow{IJ}(2,2,1)$ $\Longrightarrow$ $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{IJ} = xx' + yy + zz'$

$= 4 - 4 + 0 = 0$

و منه $\overrightarrow{DI} \perp \overrightarrow{IJ}$ إذا المستقيمان $(DI),(IJ)$ متعامدان

$S(DIJ) = \frac{1}{2}[ID][IJ] = \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

4) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم P

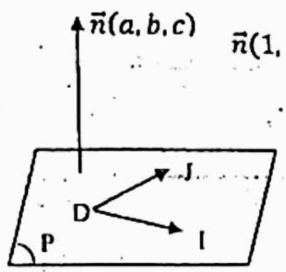
$\overrightarrow{DI}(2,-2,0) , \overrightarrow{DJ}(4,0,1)$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{DI} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DI} = 0 \Rightarrow 2a - 2b = 0$ $\boxed{1}$

$\vec{n}.\overrightarrow{DJ} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{DJ} = 0 \Rightarrow 4a + c = 0$ $\boxed{2}$

من $\boxed{1}$ نفرض $a = 1 \Leftarrow b = 1$

نعوض في $\boxed{2}$ $\Leftarrow c = -4$



$\vec{n}(1,1,-4) \Rightarrow P: ax + by + cz + d = 0$

$\Rightarrow P: x + y - 4z + d = 0$

$I(2,0,0) \in P \Rightarrow$

$2 + 0 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -2$

$\Rightarrow P: x + y - 4z - 2 = 0$

5) $dist(H, P) = \frac{|0+(2)-4(2)-2|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{8}{\sqrt{18}} = \frac{8}{3\sqrt{2}}$

$V = \frac{1}{3}S(DIJ).h \Rightarrow V = \frac{1}{3}.3\sqrt{2}.\frac{8}{3\sqrt{2}}$

$\Rightarrow V = \frac{8}{3}$

6) قطرا متوازي المستطيلات متناصفان

O منتصف [BH] ، $O(2,1,1)$

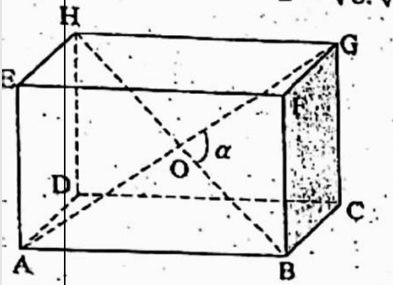
$\overrightarrow{OB}(2,-1,-1)$ $\quad \|OB\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{OG}(2,1,1)$ $\quad \|OG\| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = xx' + yy' + zz' = 4 - 1 - 1 = 2$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OG} = \|\overrightarrow{OB}\|.\|\overrightarrow{OG}\|\cos(\alpha)$

$2 = \sqrt{6}.\sqrt{6}.\cos(\alpha) \Longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$



تمرين (1) :

تمرين- بفرض A و B نقطتين مختلفتين في الفراغ

نضع $r = \frac{1}{2}AB$ ، I منتصف [AB] :

1) أثبت أنه في حالة نقطة ما M في الفراغ

تتحقق المساواة $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = MI^2 - r^2$

$L_1 : \overline{MA} . \overline{MB} =$

$(\overline{MI} + \overline{IA}) . (\overline{MI} + \overline{IB}) =$

$(\overline{MI} + \overline{IA}) . (\overline{MI} - \overline{IA}) =$

$MI^2 - IA^2 =$

$MI^2 - r^2 = L_2$

$L_2 = MI^2 - r^2$

$\overrightarrow{MI}^2 - \overrightarrow{IB}^2$

$(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IB})$

$\overrightarrow{MB} . (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$

$\overrightarrow{MB} . \overrightarrow{MA} = L_1$

تمرين (2) :

بفرض $\vec{u}$, $\vec{v}$ شعاعان ، بفرض أن الشعاعان $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$ متعامدان

أثبت أن للشعاعين $\vec{u}$, $\vec{v}$ الطول ذاته .

الحل : $(\vec{u} - \vec{v}).(\vec{u} + \vec{v}) = 0$

$\vec{u}^2 - \vec{v}^2 = 0$

$\vec{u}^2 = \vec{v}^2 \Rightarrow \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2$

$\Rightarrow \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$

مركز الأبعاد المتناسبة :

1) ABC مثلث

جد عددين x , y بحيث $\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AB} + y.\overrightarrow{AC}$ *

M مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,-1)(B,1)(C,1)$

الحل :

$$\alpha\,\overrightarrow{MA} + \beta\,\overrightarrow{MB} + \gamma\,\overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$-\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

بالمقارنة مع * : $x = 1\ ,\ y = 1$

2) ABC مثلث ، أوجد $\alpha , \beta , \gamma , \delta$ لتكون M

مركز الأبعاد المتناسبة ل : $(A,\alpha)\ (B,\beta)(C,\gamma)$

حيث : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

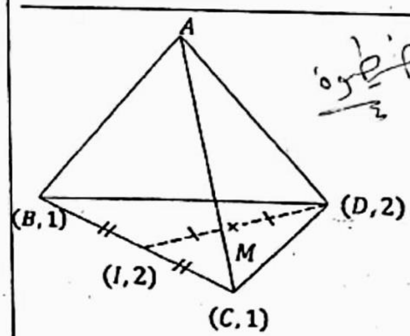
الحل :

$$\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$$

$$0\,\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

M مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(A,0), (B,2), (C,-1)$



3) $ABCD$ رباعي وجوه

أثبت أن D, C, M, B

تقع في مستوٍ واحد

ثم عيين M علماً أن

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$$

الحل :

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MC}$$

$$\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

M مركز الأبعاد المتناسبة ل $(B,1), (D,2), (C,1)$

D, C, B, M تقع في مستوٍ واحد

تعيين M :

تعيين I مركز الأبعاد المتناسبة ل $(B,1), (C,1)$

و هي منتصف $[BC]$ وتكون $(I,2)$

تعيين M مركز الأبعاد المتناسبة ل $(I,2), (D,2)$

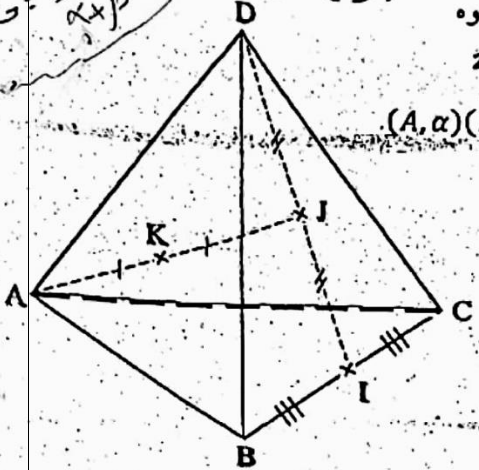
و هي منتصف $[DI]$

(3)

4) $ABCD$ رباعي وجوه

K مركز الأبعاد المتناسبة

ل $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)(D,\delta)$



الحل :

I منتصف $[BC]$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(B,1)\ (C,1)$

و تكون $(I,2)$ حسب الخاصة التجميعية

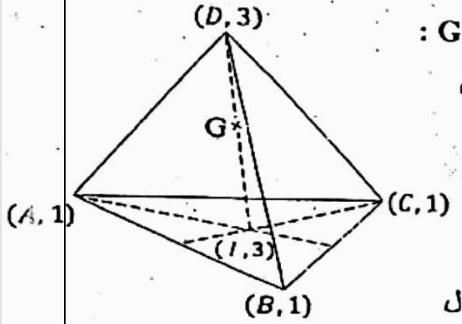
J منتصف $[DI]$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(I,2)\ (D,2)$

و تكون $(J,4)$ حسب الخاصة التجميعية

K منتصف $[AJ]$ مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,4)$, $(J,4)$

إذاً K مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(A,4)(B,1)(C,1)(D,2)$



$ABCD$ رباعي وجوه ، عيين G :

1) I مركز الأبعاد المتناسبة ل

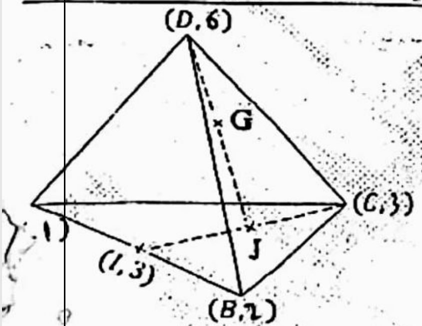
$(A,1)(B,1)(C,1)$

و هو مركز ثقل المثلث ABC

و تكون $(I,3)$

نعيين G مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(I,3)(D,3)$ و هي منتصف $[DI]$



2) G مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(A,1)(B,2)(C,3)(D,6)$

الحل :

نعيين I مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(A,1)(B,2)$

و تكون $(I,3)$ $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

حسب الخاصة التجميعية

نعيين J مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(I,3)(C,3)$ و هي منتصف $[IC]$ و تكون $(J,6)$ حسب الخاصة التجميعية

نعيين G مركز الأبعاد المتناسبة ل $(J,6)(D,6)$

و هي منتصف $[DJ]$

المسألة الأولى : (4) الإبداع السليمي ; «الوحدة الثامنة»

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$D(1,0,-1)$, $C(2,4,-1)$, $B(-1,3,6)$, $A(1,1,4)$

1) أثبت أن A , B , C ليست على استقامة واحدة .

2) أوجد معادلة المستوي P المار من A, B, C .

3) عين احداثيات D' المسقط القائم لـ D على P .

4) أوجد معادلة الكرة S مركزها D و تمس المستوي P ..

5) احسب بعد النقطة D عن المستقيم (AB) . حلها بالطريقة الذي أفترض

الحل :

1)

$\overrightarrow{AB}(-2,2,2)$ $\quad \frac{-2}{1} \neq \frac{2}{3}$

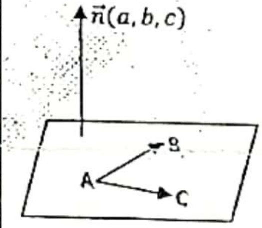
$\overrightarrow{AC}(1,3,-5)$

الشعاعان $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ غير مرتبطين خطياً $\Leftarrow$ A , B , C ليست على استقامة واحدة ، فهي تشكل رؤوس مثلث و تعين مستوياً P.

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ ناظم على P

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow -2a + 2b + 2c = 0 \ \boxed{1}$

$\vec{n} \perp \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n}.\overrightarrow{AC} = 0 \Rightarrow a + 3b - 5c = 0 \ \boxed{2}$



من $\boxed{1}$: $\div 2$ $\quad -a + b + c = 0 \ \boxed{1}$

$a + 3b - 5c = 0 \ \boxed{2}$

نفرض $c = 1 \Rightarrow -a + b + 1 = 0 \ \boxed{1}'$

$a + 3b - 5 = 0 \ \boxed{2}' \Rightarrow \boxed{1}' + \boxed{2}'$

$4b - 4 = 0 \Rightarrow b = 1$

نعوض في $\boxed{1}$ $-a + 1 + 1 = 0 \Rightarrow a = 2$

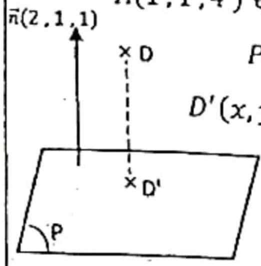
$\Rightarrow \vec{n}(2,1,1)$

$P: ax + by + cz + d = 0$

$P: 2x + y + c + d = 0$

$A(1,1,4) \in P : \ 2(1) + 1 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -7$

$P: 2x + y + Z - 7 = 0$



3) نفرض المسقط القائم لـ D على المستوي P $D'(x,y,z)$

$\overrightarrow{DD'}(x-1, y, z+1)$

$\overrightarrow{DD'}, \vec{n}$ مرتبطان خطياً $\Leftarrow$

$\overrightarrow{DD'} = kn \Rightarrow (x-1, y, z+1) = k(2,1,1)$

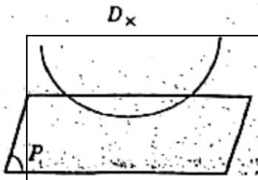
$x - 1 = 2k \qquad x = 2k+1$

$y = k \quad \Rightarrow \quad y = k \quad \Rightarrow \quad \boxed{D'(2k+1, k, k-1)}$

$z + 1 = k \qquad z = k - 1$

$D' \in P \Rightarrow 2(2k+1) + k + k - 1 - 7 = 0$

$6k = 6 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow D'(3,1,0)$

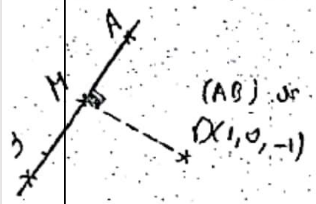


4) $dist(D,P) = \frac{|2(1)+(0)+(-1)-7|}{\sqrt{4+1+1}}$

$R = dist(D,P) = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

معادلة الكرة :

$(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 6$



5) نفرض $M(x,y,z)$ المسقط القائم لـ D عن (AB)

$\overrightarrow{AM} = K . \overrightarrow{AB}$

$(x-1, y-1, z-4) = K(-2, 2, 2)$

$x - 1 = -2K \qquad x = -2K+1$

$y - 1 = 2K \Rightarrow y = 2K+1$

$z - 4 = 2K \qquad z = 2K+4$

$M(-2K+1, 2K+1, 2K+4)$

$\overrightarrow{DM}(-2K, 2K+1, 2K+5)$

حتى تكون M المسقط القائم لـ D على (AB)

يجب أن يتحقق الشرط $\overrightarrow{DM} . \overrightarrow{AB} = 0$

$(-2)(-2K) + (2)(2K+1) + (2)(2K+5) = 0$

$\Rightarrow K = -1$

سيكون $M(3,-1,2)$

$DM = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$

المسألة الثانية :

في معلم متجانس $(o,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

$P: 2x + y + z - 7 = 0$, $B(1,1,2)$, $A(1,0,-1)$

1) تيقن أن المستقيم (AB) لا يعامد المستوي P.

2) أوجد معادلة المستوي Q المار من A , B و يعامد P .

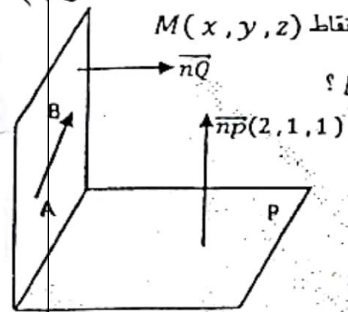
3) أوجد بعد النقطة $G(0,4,1)$ عن كل من المستويين المتعامدين Q , P

ثم استنتج بعد G عن فصلهما المشترك d . "هام جداً" (تابع مسألة 13 / 62)

4) أعطِ معادلة مجموعة النقط E المكونة من النقاط $M(x,y,z)$

و التي تحقق : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ ، وما طبيعة E ؟

الحل :



1) $\overrightarrow{AB}(0,1,3)$ $\quad \frac{0}{2} \neq \frac{1}{1}$

$\overrightarrow{np}(2,1,1)$

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{np}$ غير مرتبطين خطياً

المستقيم (AB) لا يعامد المستوي P .

2) نفرض $\overrightarrow{nQ}(a,b,c)$ ناظم على Q

$\overrightarrow{np} \perp \overrightarrow{nQ} \Rightarrow \overrightarrow{np}.\overrightarrow{nQ} = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0 \ \boxed{1}$

$\overrightarrow{nQ} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{nQ}.\overrightarrow{AB} = 0 \Rightarrow b + 3c = 0 \ \boxed{2}$

من $\boxed{2}$: $b = -3c$ *

نفرض $c = 1$ نعوض في * : $b = -3$

نعوض في $\boxed{1}$: $2a - 3 + 1 = 0 \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow \overrightarrow{nQ}(1,-3,1)$

$Q: ax + by + cz + d = 0 \Rightarrow x - 3y + z + d = 0$

$A(1,0,-1) \in Q \Rightarrow 1 - 3(0) - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 0$

$Q: x - 3y + z = 0$

مركز الأبعاد المتناسبة

1) عين G مركز ثقل رباعي الوجوه ABCD

الحل :

بما أن G مركز ثقل رباعي الوجوه فإن

G مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(D\,,1)\ (C,1)\ (B,1)\ (A,1)$

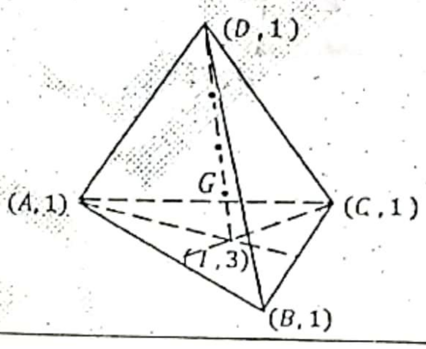
تعيين I مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(C,1)\ (B,1)\ (A,1)$ و هو مركز ثقل المثلث ABC

نقطة تلاقي متوسطاته و تكون (I , 3) حسب الخاصة التجميعية .

تعيين G مركز الأبعاد المتناسبة $(I\,,3)$ و $(D\,,1)$

$\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DI}$ ، نقسم [DI] لأربع أقسام متساوية .



2) ABCD رباعي وجوه مركز ثقله G ، I منتصف AD

J منتصف BC

أثبت أن I , J , G على استقامة واحدة

الحل :

G مركز ثقل ABCD

G الأبعاد المتناسبة ل

$(D\,,1)\ (C,1)\ (B,1)\ (A,1)$

I منتصف [AD] مركز الأبعاد المتناسبة ل

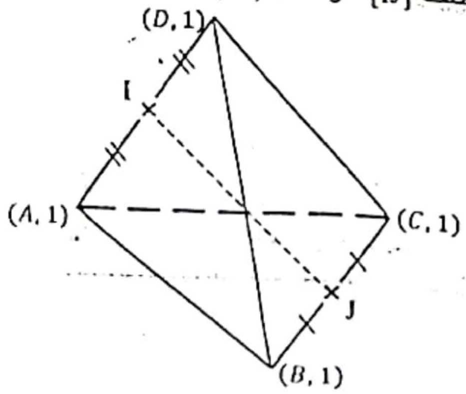
$(A,1)\ (D\,,1)$ و تكون $(I\,,2)$ حسب الخاصة التجميعية

J منتصف [BC] مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(B,1)\ (C\,,1)$ و تكون $(J\,,2)$ حسب الخاصة التجميعية

إذاً مركز الأبعاد المتناسبة ل $(A,1)\ (B,1)\ (C,1)\ (D,1)$ و الذي هو G ، هو نفسه مركز الأبعاد المتناسبة ل $(J\,,2)\,,\,(I\,,2)$

G ⇐ منتصف [IJ] ، و منه I , J , G على استقامة واحدة . . .



3) ABCDEFGH مكعب ، K هي النقطة المعرفة بالعلاقة :

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

أثبت أن K , C , B , G تقع في مستوٍ واحد ، ثم عيين K .

الحل :

نبرهن أن K مركز الأبعاد المتناسبة ل

$(C\,,\gamma)\ (B\,,\beta)\ (G\,,\alpha)$

$$2\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AG}$$

$$\cancel{2\overrightarrow{AK}} = \overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{CK} + \cancel{\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{AK}} + 3\overrightarrow{KG}$$

$$2\overrightarrow{CK} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

$$-2\overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KG} = \vec{0}$$

K مركز الأبعاد المتناسبة ل $(G\,,3)\ (B\,,1)\ (C\,,-2)$

و تكون G , B , C , K تقع في مستوٍ واحد .

تعيين K : $(G\,,3)\ (B\,,1)\ (C\,,-2)$

تعيين L مركز الأبعاد المتناسبة ل $(C,-2)\,,\,(G\,,3)$

$$\overrightarrow{GL} = \frac{-2}{1}\overrightarrow{GC}$$

و تكون (L , 1) حسب الخاصة التجميعية

تعيين K مركز الأبعاد المتناسبة ل $(L\,,1)\,,\,(B\,,1)$

و هي منتصف [LB]