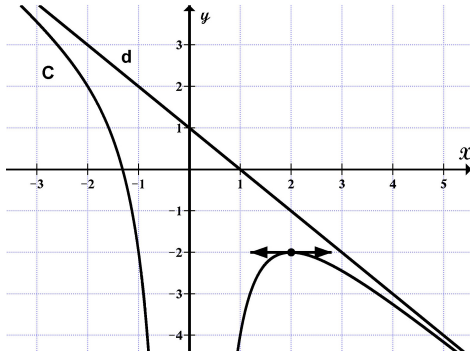


أولاً : أجب عن الأسئلة الأربعة الآتية : (40 درجة لكل سؤال)

السؤال الأول : C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathcal{R}^*



وفق العلاقة $f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$

حيث $a, b, c \in \mathcal{R}$ و d مقارب مائل لـ C

① جد معادلة المستقيم d

② احسب قيمة كل من a و b و c

③ جد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

④ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$

السؤال الثاني : في معلم متجانس $(O, \bar{i}, \bar{j}, \bar{k})$ لدينا النقطتان $B(3, 2, -1), A(-3, 0, -1)$

نقرن بكل نقطة $M(x, y, z)$ من الفراغ المقدار $f(M) = \overline{AM} \cdot \overline{BM}$

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z

② أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = -6$ هي كرة يُطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

السؤال الثالث : حل جملة المعادلتين :

$$2^x \times 2^y = 4 \quad \dots(1)$$

$$2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y = 6 \quad \dots(2)$$

السؤال الرابع : لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$

① ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

② ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها ليس من مضاعفات العدد 3 ؟

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (٦٠ درجة لكل تمرين)

التمرين الأول : ليكن f التابع المعرفة على \mathcal{R} وفق : $f(x) = x^3 - 3x + 3$ خطه البياني C والمطلوب :

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in \mathcal{R}$ ثم بيّن أن $\alpha \in]-3, -2[$

③ ارسم الخط C

التمرين الثاني :

في معلم متجانس (O, \bar{u}, \bar{v}) نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما على الترتيب العدديان $a = 1 + i$ و $b = 1 - i$ والمطلوب :

① عيّن العددين p و q حتى يكون a و b جذري المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$

② جد الشكل المثلي للعدد a واستنتج منه الشكل المثلي للعدد b

③ استنتج قيمة العدد w حيث $w = a^6 + b^6$

④ إذا علمت أن دوران R دوران مركزه O وزاويته θ وأن $R(A) = B$ احسب θ : $\theta = (\overline{OA}, \overline{OB})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R

يتبع في الصفحة الثانية

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 \end{array} \right. \quad \text{التمرين الثالث : لتكن المتتالية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ المعرفة تدريجياً وفق :}$$

$$t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4 \quad \text{ولتكن المتتالية } (t_n)_{n \geq 0} \text{ حسابية تحقق العلاقة :}$$

① جد t_n بدلالة n

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي حددها العام $v_n = u_n - t_n$ هندسية ، اكتب v_n بدلالة n

③ استنتج u_n بدلالة n ، ثم بيّن فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة أم متباعدة .

التمرين الرابع :

في نادٍ رياضي يمارس 45% من أعضائه لعبة كرة الطاولة ونعلم أن 70% من أعضائه ذكور وأن 40% منهم لا يمارسون لعبة كرة الطاولة نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي احسب :

① احتمال أن يكون ذكر يمارس لعبة كرة الطاولة

② احتمال أن يكون لا يمارس لعبة كرة الطاولة علماً أنه أنثى

③ احتمال أن يكون أنثى علماً أنه يمارس لعبة كرة الطاولة

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى : ليكن التابع g المعرفة على $I =]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = x - 1 + \ln x$

وليكن C_r الخط البياني للتابع f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$

① بيّن أن $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$

② جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

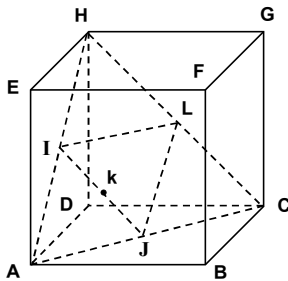
③ بيّن أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبيّن أن $f(x) \geq 0$ أيّاً كانت $x \in I$

④ أثبت أن التابع F المعرفة على I وفق : $F(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C_r ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

المسألة الثانية :

ABCEFGH مكعب طول ضلعه 4 ، I مركز الوجه ADHE ، J مركز الوجه ABCD ، L مركز الوجه DCGH ، k منتصف [IJ]



نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}, \frac{1}{4} \overrightarrow{AD}, \frac{1}{4} \overrightarrow{AE})$

① هل A, k, G على استقامة واحدة

② أثبت أن الرباعي AJLI معين

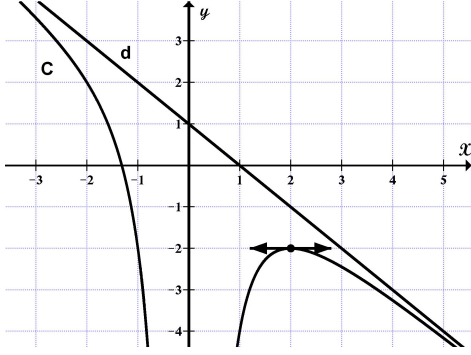
③ أثبت أن النقاط A و k و G و D تقع في مستوى واحد

④ استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المنقولة D و G و k يُطلب إيجاد تنقيلاتها

⑤ أثبت أن $\vec{n}(1, 1, 0)$ ناظم على المستوي (BDH) واكتب معادلة المستوي (BDH)

انتهت الأسئلة

السؤال الأول :



C هو الخط البياني للتابع f المعرفة على \mathbb{R}^*

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2}$$

وفق العلاقة

حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ و d مقارب مائل لـ C

① جد معادلة المستقيم d

② احسب قيمة كل من a و b و c

③ جد حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$

④ ما عدد حلول المعادلة $f(x) = -2$

الحل :

$$m_d = \frac{1-0}{0-1} = -1 \quad \text{①}$$

$$d: y = mx + p \Rightarrow \boxed{d: y = -x + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (ax + b)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{c}{x^2} = 0 \quad \text{②}$$

أي أن المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب مائل لـ C

ولدينا $d: y = -x + 1$ مقارب مائل لـ C وبالمطابقة نجد : $\boxed{a = -1}$ و $\boxed{b = 1}$

$$f(x) = -x + 1 + \frac{c}{x^2}$$

$$f(2) = -2 \Rightarrow -2 + 1 + \frac{c}{4} = -2 \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

③ حلول المتراجحة $f'(x) \geq 0$ هي : $S =]0, 2]$

④ للمعادلة $f(x) = -2$ حلان



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيد علي

إعداد المدرسة
براءة السماعيل

السؤال الثاني :

في معلم متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ لدينا النقطتان $B(3, 2, -1), A(-3, 0, -1)$

نقرن بكل نقطة $M(x, y, z)$ من الفراغ المقدار $f(M) = \overline{AM} \cdot \overline{BM}$

① احسب $f(M)$ بدلالة x و y و z

② أثبت أن مجموعة النقاط M التي تحقق $f(M) = -6$ هي كرة يُطلب تعيين مركزها Ω ونصف قطرها R

الحل :

$$\overline{AM}(x+3, y, z+1), \overline{BM}(x-3, y-2, z+1) \quad \text{①}$$

$$f(M) = x^2 - 9 + y^2 - 2y + (z+1)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2y + 1 - 1 + (z+1)^2 - 9 = -6 \quad \text{②}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 4$$

ومنه مجموعة النقاط M هي كرة مركزها $\Omega(0, 1, -1)$ ونصف قطرها $R = 2$



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيدعلي

إعداد المدرس
عدي الخميس

السؤال الثالث :

حل جملة المعادلتين :

$$2^x \times 2^y = 4 \quad \dots(1)$$

$$2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^y = 6 \quad \dots(2)$$

الحل :

من (1) نجد $2^{x+y} = 2^2$ ومنه $x+y=2$ وبالتالي نجد $x=2-y$ نعوض في (2) نجد :

$$2^{2-y} - \left(\frac{1}{2}\right)^y = 6 \Rightarrow 2^{2-y} - 2^{-y} = 6 \Rightarrow 2^2 \times 2^{-y} - 2^{-y} = 6$$

$$4 \times 2^{-y} - 2^{-y} = 6 \Rightarrow 3 \times 2^{-y} = 6 \Rightarrow 2^{-y} = 2 \Rightarrow \boxed{y = -1}$$

$$x = 2 - (-1) \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

ومنه مجموعة الحل هي : $S = \{(3, -1)\}$



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيدعلي

إعداد المدرس
أحمد أبو السل

السؤال الرابع :

لتكن المجموعة $S = \{0, 1, 2, \dots, 15\}$

① ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S ؟

② ما عدد المجموعات الجزئية المكونة من ثلاثة عناصر من S مجموعها ليس من مضاعفات العدد 3 ؟

الحل :

$$\textcircled{1} \text{ عدد المجموعات الكلي : } \binom{16}{3} = \frac{16 \times 15 \times 14}{3 \times 2 \times 1} = 560$$

② لنجزئ المجموعة S إلى ثلاث مجموعات جزئية وذلك تبعاً لقيمة باقي قسمة كل عدد على 3 كما يأتي :

$$A_0 = \{0, 3, 6, 9, 12, 15\}$$

$$A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13\}$$

$$A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14\}$$

عدد المجموعات الجزئية التي يكون مجموع عناصرها من مضاعفات العدد 3 هو :

$$\left[\binom{6}{3} + \binom{5}{3} + \binom{5}{3} \right] + \binom{6}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{5}{1} = 20 + 10 + 10 + 150 = 190$$

فيكون عدد المجموعات المطلوبة هو : $560 - 190 = 370$



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيد علي

إعداد المدرس
مازن الزعبي

ثانياً : حل التمارين الأربعة الآتية : (60 درجة لكل تمرين)

التمرين الأول :

ليكن f التابع المعرف على \mathcal{R} وفق : $f(x) = x^3 - 3x + 3$ خطه البياني C والمطلوب :

① ادرس تغيرات التابع f ونظم جدولاً بها

② أثبت أن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد $\alpha \in \mathcal{R}$ ثم بيّن أن $\alpha \in]-3, -2[$

③ ارسم الخط C

الحل :

① التابع f معرف واشتقاقي على \mathcal{R}

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$f(1) = 1, f(-1) = 5$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	\nearrow	5	\searrow	1	\nearrow	$+\infty$

② التابع f مستمر ومنتزايد تماماً على المجال $]-\infty, -1[$ و $]-\infty, 5[$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$

حل وحيد في المجال $]-\infty, -1[$

وبما أن $f(1) = 1, f(+\infty) = +\infty$ فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في \mathcal{R}

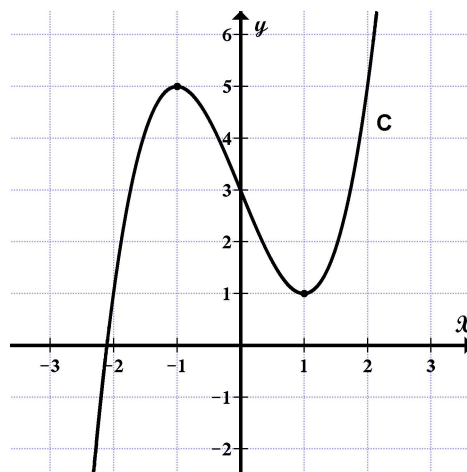
فإن للمعادلة $f(x) = 0$ حل وحيد في \mathcal{R}

$$f(-3) = (-3)^3 - 3(-3) + 3 = -15 < 0$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 3(-2) + 3 = 1 > 0$$

نلاحظ $f(-3), f(-2)$ من إشارتين مختلفتين فيكون $-3 < \alpha < -2$

③ الرسم :



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيد علي

إعداد المدرس
بلال أبو حصيني

التمرين الثاني :

في معلم متجانس (O, \bar{u}, \bar{v}) نتأمل النقطتين A و B اللتين يمثلهما على الترتيب العدديان العقديان $a = 1 + i$ و $b = 1 - i$ والمطلوب :

① عيّن العددين p و q حتى يكون a و b جذري المعادلة $Z^2 + pZ + q = 0$

② جد الشكل المثلثي للعدد a واستنتج منه الشكل المثلثي للعدد b

③ استنتج قيمة العدد w حيث $w = a^6 + b^6$

④ إذا علمت أن دوران R دوران مركزه O وزاويته θ وأن $R(A) = B$ احسب $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ واستنتج الصيغة العقدية للدوران R

الحل :

① $a + b = -p \Rightarrow 1 + i + 1 - i = -p \Rightarrow \boxed{p = -2}$

$a \cdot b = q \Rightarrow (1 + i)(1 - i) = q \Rightarrow 1 + 1 = q \Rightarrow \boxed{q = 2}$

② $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

$a = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

$b = \bar{a} = \sqrt{2} \left[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right]$

③ $a^6 = (\sqrt{2})^6 (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})^6 = 8(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}) = -8i$

$b^6 = (\bar{a})^6 = \overline{a^6} = 8i$

$w = -8i + 8i \Rightarrow \boxed{w = 0}$

④ $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \arg \left(\frac{Z_{OB}}{Z_{OA}} \right) = \arg \left(\frac{b}{a} \right)$

$= \arg(b) - \arg(a) = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{\theta = -\frac{\pi}{2}}$

وتكون الصيغة العقدية للدوران R هي $Z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} Z$



إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيد علي

إعداد المدرس
وائل عنيزان

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 \end{cases} \quad \text{لتكن المتتالية } (u_n)_{n \geq 0} \text{ المعرفة تدريجياً وفق :}$$

$$\text{ولتكن المتتالية } (t_n)_{n \geq 0} \text{ حسابية تحقق العلاقة : } t_{n+1} = 2t_n - 3n + 4$$

① جد t_n بدلالة n

② أثبت أن المتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ التي حددها العام $v_n = u_n - t_n$ هندسية ، اكتب v_n بدلالة n

③ استنتج u_n بدلالة n ، ثم بيّن فيما إذا كانت المتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متقاربة أم متباعدة .

الحل :

① بما أن $(t_n)_{n \geq 0}$ حسابية فإن $t_n = an + b$

$$\text{وبالتالي يكون } t_{n+1} = a(n+1) + b = an + a + b$$

نعوض في العلاقة نجد :

$$\begin{aligned} an + a + b &= 2(an + b) - 3n + 4 \\ &= (2a - 3)n + 2b + 4 \end{aligned}$$

$$a = 2a - 3 \Rightarrow \boxed{a = 3} \quad \text{ومنه يكون :}$$

$$a + b = 2b + 4 \Rightarrow \boxed{b = -1}$$

وبالتالي : $t_n = 3n - 1$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - t_{n+1} = 2u_n - 3n + 4 - 2t_n + 3n - 4 = 2(u_n - t_n) = 2v_n \quad \text{②}$$

والمتتالية $(v_n)_{n \geq 0}$ هندسية أساسها 2 وحدها الأول $v_0 = u_0 - t_0 = 2 + 1 = 3$

$$\text{ومنه نجد : } v_n = 3(2)^n$$

$$\text{③ } u_n = v_n + t_n = 3(2)^n + 3n - 1$$

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} 3(2)^n = +\infty \text{ هندسية أساسها } 2 > 1 \right) \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

والمتتالية $(u_n)_{n \geq 0}$ متباعدة



إشراف المدرس

عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس

محمد السيدعلي

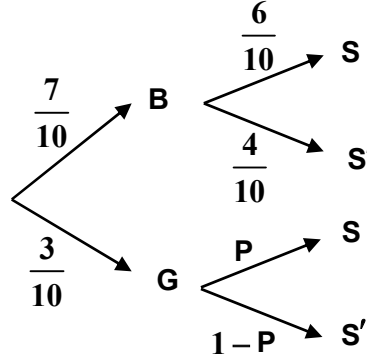
إعداد المدرس

أحمد البقي

في نادٍ رياضي يمارس 45% من أعضائه لعبة كرة الطاولة ونعلم أن 70% من أعضائه ذكور وأن 40% منهم لا يمارسون لعبة كرة الطاولة نختار عشوائياً أحد أعضاء النادي احسب :

- ① احتمال أن يكون ذكر يمارس لعبة كرة الطاولة
- ② احتمال أن يكون لا يمارس لعبة كرة الطاولة علماً أنه أنثى
- ③ احتمال أن يكون أنثى علماً أنه يمارس لعبة كرة الطاولة

الحل :



S : يمارس لعبة كرة الطاولة
B : ذكر
G : أنثى

$$P(B \cap S) = P(S | B) \cdot P(B) = \frac{6}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{21}{50} \quad ①$$

$$P(S' | G) = 1 - P \quad ②$$

$$P(S) = P(S \cap B) + P(S \cap G)$$

$$\frac{45}{100} = \frac{42}{100} + \frac{30}{100} P \Rightarrow \frac{30}{100} P = \frac{3}{100} \Rightarrow \boxed{P = \frac{1}{10}}$$

$$P(S' | G) = \frac{9}{10} \text{ ومنه نجد}$$

$$P(G | S) = \frac{P(G \cap S)}{P(S)} \quad ③$$

$$P(G \cap S) = \frac{30}{100} P = \frac{30}{100} \times \frac{1}{10} = \frac{3}{100}$$

$$P(G | S) = \frac{\frac{3}{100}}{\frac{45}{100}} \Rightarrow \boxed{P(G | S) = \frac{1}{15}}$$

ملاحظة : يمكن الحل بدون المخطط الشجري

إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيدعلي

إعداد المدرس
أحمد الكليش

ثالثاً : حل المسألتين الآتيتين : (100 درجة لكل مسألة)

المسألة الأولى :

ليكن التابع g المعرفة على $I =]0, +\infty[$ وفق : $g(x) = x - 1 + \ln x$

وليكن C_r الخط البياني للتابع f المعرفة على $I =]0, +\infty[$ وفق : $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x$

① بيّن أن $g(1) = 0$ ثم ادرس تغيرات g ونظم جدولاً بها واستنتج إشارة $g(x)$

② جد نهاية التابع f عند أطراف مجموعة تعريفه

③ بيّن أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ونظم جدول تغيرات f وبيّن أن $f(x) \geq 0$ أيّاً كانت $x \in I$

④ أثبت أن التابع F المعرفة على I وفق : $F(x) = x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln^2 x$ هو تابع أصلي للتابع f

⑤ احسب مساحة السطح المحصور بين C_r ومحور الفواصل والمستقيمين $x = 1$ و $x = e$

الحل :

$$g(1) = 1 - 1 + 0 = 0 \quad \text{①}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{وذلك لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{وذلك لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

التابع g اشتقائي على I

$$g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	+
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow 0	\nearrow $+\infty$

نلاحظ من الجدول :

$$x \in]0, 1[\quad \text{عندما} \quad g(x) < 0$$

$$x \in]1, +\infty[\quad \text{عندما} \quad g(x) > 0$$

$$g(1) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{وذلك لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \text{②}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{وذلك لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{x-x+1}{x^2} \ln x + \frac{x-1}{x^2} = \frac{x-1+\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \quad \text{③}$$

من الجدول السابق نلاحظ أن $f'(x) = 0$ عندما $x = 1$ و $f(1) = 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	\searrow 0	\nearrow $+\infty$

نلاحظ من الجدول أن $f(x) \geq 0$ أيّاً كانت $x \in I$



④ التابع F اشتقاقي على I

$$\begin{aligned} F'(x) &= \ln x + \frac{1}{x}(x) - 1 - \frac{2}{2}(\ln x)\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x - \frac{1}{x} \ln x \\ &= \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = f(x) \end{aligned}$$

أي أن التابع F هو تابع أصلي للتابع f على I

⑤ لدينا $f(x) \geq 0$ أيًا كانت $x \in I$ وبالتالي فإن C_r فوق محور الفواصل ومنه

$$S = \int_1^e f(x) dx = \left[x \ln x - x - \frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e = -\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$$

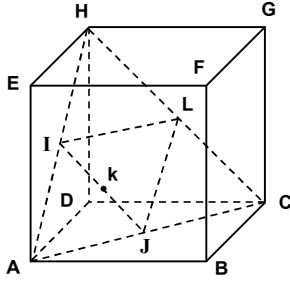


إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيدعلي

إعداد المدرس
محي الدين إسماعيل

ABCDEFGH مكعب طول ضلعه 4 ، I مركز الوجه ADHE ، J مركز الوجه ABCD ، L مركز الوجه DCGH ، k منتصف [IJ]



نتأمل المعلم المتجانس $(A, \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{4}\overrightarrow{AE})$

① هل A, k, G على استقامة واحدة

② أثبت أن الرباعي AJLI معين

③ أثبت أن النقاط A و k و G و D تقع في مستو واحد

④ استنتج أن النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة D و G و k يُطلب إيجاد تثقيلاتها

⑤ أثبت أن $\vec{n}(1,1,0)$ ناظم على المستوي (BDH) واكتب معادلة المستوي (BDH)

الحل :

① لدينا $A(0,0,0), C(4,4,0), H(0,4,4), G(4,4,4)$ ونجد $I(0,2,2), J(2,2,0)$ و k منتصف [IJ] ومنه نجد

$k(1,2,1)$ وبالتالي $\overrightarrow{Ak}(1,2,1), \overrightarrow{AG}(4,4,4)$

الشعاغان $\overrightarrow{Ak}, \overrightarrow{AG}$ غير مرتبطين خطياً لأن مركباتهما غير متناسبة $(\frac{1}{4} \neq \frac{2}{4})$ فالنقاط A, k, G ليست على استقامة واحدة

② لدينا L منتصف [HC] ومنه $L(2,4,2)$

$\overrightarrow{AJ}(2,2,0), \overrightarrow{IL}(2,2,0), \overrightarrow{AI}(0,2,2)$ فالرباعي متوازي الأضلاع

$AJ = AI$ ومنه $AJ = \sqrt{4+4+0} = 2\sqrt{2}, AI = \sqrt{0+4+4} = 2\sqrt{2}$

مما سبق نجد أن الرباعي AJLI معين

③ لدينا $D(0,4,0)$ ومنه $\overrightarrow{AD}(0,4,0)$ والشعاغان $\overrightarrow{Ak}, \overrightarrow{AG}$ غير مرتبطين خطياً

$$\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AG} + \beta \overrightarrow{Ak}$$

$$0 = 4\alpha + \beta \dots\dots\dots (1)$$

$$4 = 4\alpha + 2\beta \dots\dots\dots (2)$$

$$0 = 4\alpha + \beta \dots\dots\dots (3)$$

من (1) أو (3) نجد $\beta = -4\alpha$ نعوض في (2) نجد $4 = 4\alpha - 8\alpha$ ومنه $\alpha = -1$ و $\beta = 4$

وبالتالي نجد $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{Ak}$ إذاً النقاط A و k و G و D تقع في مستو واحد

④ من عبارة الارتباط الخطي السابقة لدينا $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AG} + 4\overrightarrow{Ak}$ ومنه نجد $4\overrightarrow{Ak} - \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

وبالتالي النقطة A مركز الأبعاد المتناسبة للنقاط المثقلة $(D, -1)$ و $(G, -1)$ و $(k, 4)$

⑤ لدينا $B(4,0,0), H(0,4,4)$

$$\overrightarrow{BD}(-4,4,0), \overrightarrow{BH}(-4,4,4), \vec{n}(1,1,0)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -4 + 4 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BH} = -4 + 4 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{BH}$$

أي أن الشعاع \vec{n} ناظم على المستوي (BDH) والنقطة B من المستوي (BDH) ومعادلة المستوي من الشكل :

$$a(x - x_B) + b(y - y_B) + c(z - z_B) = 0 \text{ بالتعويض نجد : } (BDH) : x + y - 4 = 0 \Rightarrow (x - 4) + (y - 0) = 0$$

إشراف المدرس
عبد الحميد السيد

تنسيق وتدقيق المدرس
محمد السيدعلي

إعداد المدرس
عمار قدوري

تم كتابة وتنسيق وتدقيق هذا النموذج بواسطة

