الخلاصة في المتتاليات

تعريف المتتالية : تابع منطلقه $\mathbb{N}$ (أو أي مجموعة غير منتهية من $\mathbb{N}$) مستقرها $\mathbb{R}$

عدد حدود المتتالية غير منتهية بغض النظر عن قيم هذه الحدود.

صياغة المتتالية(شكل المتتالية) يتم بإحدى الطرق التالية:

1. بذكر الحد العام (الحد الصريح) بدلالة n أو نكتب $U_n = f(n)$ **مثل:** $U_n=2n+2$ وذلك $\forall n \geq 0$
2. بذكر العلاقة التدريجية $\begin{Bmatrix} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{Bmatrix}$ **مثل:** $U_0=2\ ,\ U_{n+1}=3U_n-5$ وذلك $\forall n \geq 0$
3. بذكر المتتالية على شكل مجموع حدود(متتالية مجاميع) الحد الأخير يولد جميع حدود المجموع مثل:

$U_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$ حيث $U_0 = 1, U_1 = 1 + \frac{1}{1!}\ , U_2 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}$. $(0!=1)$

اطراد المتتالية :

متزايدة تماماً $U_{n+1} > U_n$	متزايدة $U_{n+1} \geq U_n$	متناقصة تماماً $U_{n+1} < U_n$	متناقصة $U_{n+1} \leq U_n$

ملاحظة :هناك متتاليات ليست مطردة ، مثال(المتناوبة) : $U_n=2+5.(-1)^n$ وذلك $\forall n \geq 0$

المتتالية الثابتة :هي التي تحقق واحداً مما يلي: $U_{n+1}-U_n=0$ أو $U_{n+1}=U_n$ أو $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$.

مثال: $U_n=7$ متتالية ثابتة مهما كانت قيم n وتبقى عدد حدودها غير منتهية.

مثال : أيضاً" المتتالية التالية هي متتالية ثابتة: $U_0 = 8\ , U_{n+1} = \frac{3}{4}U_n + 2$ وذلك $\forall n \geq 0$

كيف ندرس اطراد المتتالية؟ يتم بإحدى الطرق التالية:

1. دراسة إشارة الفرق $(U_{n+1}-U_n)$ ونميز الحالات التالية :

متزايدة تماماً $U_{n+1} - U_n > 0$	متزايدة $U_{n+1} - U_n \geq 0$	متناقصة تماماً $U_{n+1} - U_n < 0$	متناقصة $U_{n+1}-U_n \leq 0$

وإذا تحققت المساواة : $U_{n+1}-U_n = 0$ فإن المتتالية U_n ثابتة.

2. إذا كانت حدود المتتالية U_n **موجبة** يمكن مقارنة النسبة $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ مع الواحد ، ونميز الحالات :

متزايدة تماماً $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$	متزايدة $\frac{U_{n+1}}{U_n} \geq 1$	متناقصة تماماً $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$	متناقصة $\frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

وإذا تحققت المساواة : $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ فإن المتتالية U_n ثابتة.

3. إذا كانت المتتالية U_n معطاة بالحد الصريح (بدلالة n)يمكن تشكيل التابع $U_n=f(n)$ ومن ثم دراسة اطراد التابع f على المجال $]0,+\infty[$ واستنتاج نوع اطراد U_n مباشرة من اطراد التابع f.

ملاحظة: الأمر يختلف في حالة $\begin{Bmatrix} U_0 = a \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{Bmatrix}$ فمثلاً" تزايد التابع f(x) لا يعني أبداً" تزايد المتتالية U_n .

تذكّر دائماً يمكنك التواصل مع المدرس عصمت مصطفى على برنامج تلغرام 0993267255

المتتالية	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
التعريف	كل حد ينتج عن سابقه بإضافة عدد ثابت يسمى العدد الثابت بالأساس r	كل حد ينتج عن سابقه بضربه بعدد ثابت يسمى العدد الثابت بالأساس q
العلاقة التدريجية	$U_{n+1} = U_n + r$	$U_{n+1} = U_n . q$
الحد العام(الصريح)	$U_n = U_0 + n.r$	$U_n = U_0 . q^n$
العلاقة بين حدين	$U_n - U_p + (n-p).r$	$U_n = U_p . q^{n-p}$
لإيجاد الأساس	$r = \frac{Un - Up}{n-p}$	$\frac{U_n}{U_p} = q^{n-p}$
مجموع n حداً	$S_n = \frac{n(a+\ell)}{2}$ a الحد الأول في المجموع، ℓ الحد الأخير في المجموع n عدد الحدود في المجموع نوجده بالشكل (الدليل الأخير – الدليل الأول +1)	$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$ a الحد الأول في المجموع، q أساس المتتالية الهندسية n عدد الحدود في المجموع نوجده بالشكل (الدليل الأخير – الدليل الأول +1)
علاقات هامة	$1 + 2 + 3 + 4 \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$	$1 + q + q^2 + q^3 \dots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$
ملاحظة	إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود من متتالية حسابية فإن $2b = a + c$	إذا كانت a, b, c ثلاثة حدود من متتالية هندسية فإن $b^2 = a \times c$

ملاحظة هامة:

- عندما تكون المتتالية المعطاة بالعلاقة التدريجية فإنه لإثبات صحة علاقة أو متراجحة نستخدم (عادة) الإثبات بالتدريج.
- لدراسة اطراد المتتالية المعطاة بالعلاقة التدريجية نفترض ان المتتالية متزايدة أو متناقصة حسب قيم ... U_1, U_2, U_3 ثم نثبت صحة الفرضية باستخدام الاثبات بالتدريج.
- يمكن تشكيل تابعاً من الشكل $U_{n+1} = f(U_n)$ ودراسة اطراد التابع f والاستفادة من:

f' موجب ⬅ f تابع متزايد ⬅ إذا كان $(a \leq b)$ فإن $f(a) \leq f(b)$ لم نغير جهة المتراجحة.

f' سالب ⬅ f تابع متناقص ⬅ إذا كان $(a \leq b)$ فإن $f(a) \geq f(b)$ غيّرنا جهة المتراجحة.

عند الانتقال من مرحلة فرضية الاثبات بالتدريج إلى إثبات صحة العلاقة من أجل n+1.

الله ولي التوفيق

تذكّر دائماً يمكنك التواصل مع المدرس عصمت مصطفى على برنامج تلغرام 0993267255

الخواص الهامة في المتراجحات

$a \le b \Leftrightarrow a \pm c \le b \pm c$	$0 < a \le b \Rightarrow \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b} > 0$	$a \le b \Leftrightarrow -a \ge -b$
$a \le b, c < 0 \Rightarrow a.c \ge b.c \ \wedge \ \frac{a}{c} \ge \frac{b}{c}$	$a \le b < 0 \Rightarrow 0 > \frac{1}{a} \ge \frac{1}{b}$	$a \le b \Leftrightarrow a^n \le b^n \quad ; n > 0$
$a \le b, c > 0 \Rightarrow a.c \le b.c \ \wedge \ \frac{a}{c} \le \frac{b}{c}$	$a < 0 < b \Rightarrow \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{b}$	$a \le b \Leftrightarrow a^{-n} \ge b^{-n} \quad ; n > 0$
$e^x > x > lnx$	$a \le b \Leftrightarrow \sqrt{a} \le \sqrt{b}$	$a \le b \Leftrightarrow lna \le lnb$

قواعد مفيدة في المتراجحات :

1) لا تتغير جهة المتراجحة إذا أضفنا (أو طرحنا) أي عدد حقيقي من طرفي المتراجحة.
2) لا تتغير جهة المتراجحة إذا ضربنا (أو قسمنا) طرفي المتراجحة بعدد موجب تماماً.
3) تتغير جهة المتراجحة إذا ضربنا (أو قسمنا) طرفي المتراجحة بعدد سالب تماماً.
4) تربيع طرفي متراجحة موجبان لا يغير جهة المتراجحة.
5) أخذ الجذر التربيعي لطرفي المتراجحة الموجبان لا يغير جهة المتراجحة .
6) إذا قلبنا طرفي المتراجحة و كان طرفي المتراجحة موجبان أو سالبان معاً نغير جهة المتراجحة .
7) إذا قلبنا طرفي المتراجحة و كان طرفي المتراجحة مختلفان بالإشارة لا نغير جهة المتراجحة .
8) مجموع أعداد حقيقية موجبة سيكون أكبر من أي منها. مثال: $U_n = n^3 + 3n + 5$ فإن $U_n > n^3$

تذكّر دائماً يمكنك التواصل مع المدرس عصمت مصطفى على برنامج تلغرام 0993267255