البرمجة اللاخطية

مقدمة:

تتميز مسائل البرمجة اللاخطية بوجود مجموعة من المصطلحات التي تستدعي ضمنياً استخدام توابع لا خطية مثل e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln x$ ...

وقد تظهر اللاخطية أيضاً نتيجة التأثير المتبادل بين متحولين أو اكثر مثل x_1, x_2 أو $x_1 \ln x_2$ أو $x_1^{x_2}$ ...

إن دراسة تقنيات حلول مسائل البرمجة اللاخطية أدت إلى إيجاد بنية أساسية تستخدم لإيجاد هذه الحلول.

عند حل مسائل البرمجة اللاخطية قد يبدو الحل مستحيلاً لوجود عدد غير منتهٍ من الحلول وإمكانات الحصول على حلول مثلى متعددة ويمكن توضيح عدة مبرهنات أساسية يمكن استخدامها لتوجيه بحثنا بالإضافة إلى أنه عند مصادفة شروط كالتحدب والتقعر فإن معرفة الحل الأمثل يصبح أسهل بشكل كبير.

عندما نتعامل مع توابع مستمرة محدودة فإن مبرهنة فيرستراش تضمن لنا وجود نهاية عظمى أو صغرى إما عند نقطة داخل حدود منطقة الحلول أو على هذه الحدود نفسها لأن أي تابع محدود يجب أن يكون له قيمة عظمى أو صغرى في مكان ضمن المنطقة التي نهتم بها.

إذا كان التابع مستمراً على منطقة اهتمامنا يمكن تعيين النقاط المستقرة باستخدام حسابات تفاضلية تعطي جميع المشتقات التي يمكن إيجادها.

تبين الحسابات أنه ستوجد نقطة مستقرة في الداخل أو على الحدود إذا انعدمت المشتقات الجزئية لتابع غير مقيد عند شعاع حل خاص وبشكل مشابه نعالج الحالة المقيدة.

بالنتيجة إذا أردنا أن نبتكر إجراء لحل مسائل البرمجة اللاخطية فإننا نحتاج لاختبار الحالات الثلاثة التالية:

١ – جميع النقاط التي تكون عندها المشتقات المستمرة من الدرجة الأولى معدومة.

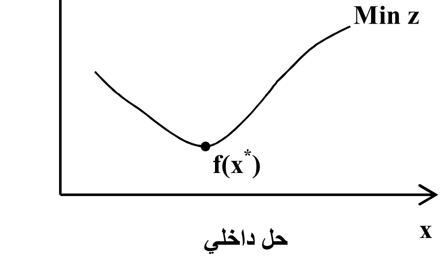
٢ – جميع النقاط داخل المنطقة التي تكون عندها المشتقات من الدرجة الأولى غير مستمرة.

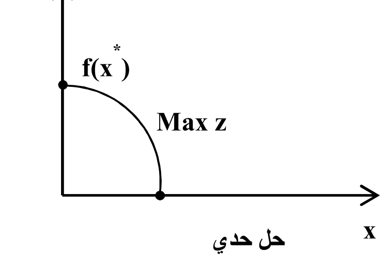
٣ – النقاط الواقعة على حدود فضاء الحل.

تأثير التقعر/ والتحدب في البحث عن الحلول المثلى:

١ – حد أعظمي أو حد أصغري غير مقيد:

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف فقط f(x) وكان التابع محدباً (مقعراً) فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع أولاً داخل المنطقة المقبولة حيث تنعدم جميع المشتقات وثانياً عند نقطة حدية.





٢ – قيمة أعظمية – مقيد:

إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة تابع الهدف ومجموعة القيود، فإذا كان تابع الهدف مقعراً وكانت مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسألة (لذا يجب أن تكون أي نقطة مستقرة حلاً أعظمياً شمولياً).

٣ – قيمة أصغرية – مقيد:

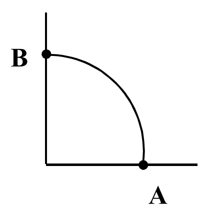
إذا كانت مسألة البرمجة اللاخطية تتألف من تابع هدف وقيود وكان تابع الهدف محدباً وكانت مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة فإن أي نقطة مستقرة ستكون حلاً أصغرياً شمولياً.

٤ – القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر (محدب):

إذا كنا نقوم بإيجاد القيمة الأصغرية (الأعظمية) لتابع مقعر (محدب) فإن الحل الأمثل سيؤخذ فقط عند إحدى النقاط الحدية لمجموعة القيود.

مثال:

إذا كنا نقوم بإيجاد القيمة الأصغرية للتابع المعطى بالشكل:



إيجاد القيمة الأصغرية

فإننا نحتاج لاختبار النقطتين A و B والمشكلة التي يمكن أن تواجهنا في مثل هذه المسائل هو أن نقاط الحل (الممكنة) قد تكون كبيرة جداً.

٥ – التابع الخطي:

التابع الخطي محدب ومقعر في آن معاً لذا إذا كان فضاء الحل محدباً يمكن إيجاد الحل عند الحدود.

التوابع المحدبة والمقعرة:

نقول عن التابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ذي الـ n متحول إنه تابع محدب إذا وفقط إذا تحقق الشرط:

$$f(\lambda x^{(1)} + (1 - \lambda)\, x^{(2)}) \le \lambda f(x^{(1)}) + (1 - \lambda) f(x^{(2)})$$

من أجل كل نقطتين $x^{(1)}$، $x^{(2)}$ ومن أجل $0 \le \lambda \le 1$

نقول عن التابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ إنه تابع مقعر إذا كان التابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ محدباً.

تعريف تدرج التابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

يعرف تدرج التابع بالعلاقة:

$$\nabla f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

ونعرف المصفوفة الهيسية للتابع $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ والتي نرمز لها بـ $H(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بالعلاقة:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_n) = \left[\frac{\partial 2f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

وهي مصفوفة مربعة متناظرة ذات الأبعاد $n \times n$.

اختبار تحدب تابع ما:

يكون التابع f تابعاً محدباً إذا كانت مصفوفة هيسيان لهذا التابع معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة من أجل كل القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

والسؤال المطروح هنا متى تكون المصفوفة معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة ومتى تكون معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة.

اختبار تقعر تابع ما:

يكون التابع f مقعراً إذا كانت مصفوفة هيسيان لهذا التابع معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة من أجل كل القيم $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

والسؤال المطروح هنا متى تكون المصفوفة معرفة موجبة أو شبه معرفة موجبة ومتى تكون معرفة سالبة أو شبه معرفة سالبة.

اختبار المصفوفات المعرفة الموجبة:

١ – يجب أن تكون جميع العناصر القطرية موجبة.

٢ – يجب أن تكون المحددات الأساسية الرئيسية موجبة.

اختبار المصفوفة شبه معرفة موجبة:

١ – يجب أن تكون جميع العناصر القطرية غير سالبة.

٢ – يجب أن تكون المحددات الأساسية غير سالبة.

ملاحظة:

لإثبات أن المصفوفة Q معرفة سالبة (أو شبه معرفة سالبة) يجب أن تكون (Q-) معرفة موجبة (أو شبه معرفة موجبة).

المصفوفات الصغرى الأساسية:

إذا كانت المصفوفة Q ذات أبعاد $n \times m$ فإن المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة k هي مصفوفة صغرى ذات أبعاد $(k\times k)$ نحصل عليها بإهمال أي $(n - k)$ سطر والأعمدة المقابلة من المصفوفة Q.

مثال:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

إن المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 1 هي عناصر القطر الرئيسي 1 ,5 ,9
أما المصفوفات الصغرى الأساسية من المرتبة 2 فهي (2×2) التالية:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الصغرى الأساسية من المرتبة 3 هي Q.

يدعى محدد المصفوفة الصغرى الأساسية المحدد الأساسي:

لكل مصفوفة مربعة $(n\times n)$ $2^n - 1$ محدداً أساسياً.

ملاحظة:

نحصل على المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة k للمصفوفة $(n\times n)$ بإهمال الأسطر $(n - k)$ الأخيرة والأعمدة المقابلة لها.

في المثال السابق تكون المصفوفة الأساسية الرئيسية من المرتبة 1 هي 1 (نهمل السطرين الأخيرين والأعمدة المقابلة). أما المصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 2 هي: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ والمصفوفة الصغرى الأساسية الرئيسية من المرتبة 3 هي Q.

ملاحظة:

يبلغ عدد المصفوفات الصغرى الأساسية الرئيسية في مصفوفة $n\times n$ القيمة n.

بالعودة إلى تحديد نوع التابع محدب/ مقعر من خلال المثال التالي:

مثال: لدينا التابع:

$$f(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 2x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6x_1 - 4x_2 - 3x_3$$

بين نوع هذا التابع.

$$\nabla f(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 6 \\ 4x_2 - 2x_1 + 2x_3 - 4 \\ 2x_3 - 2x_1 + 2x_2 - 2 \end{bmatrix}$$

$$H_{f(x_1,x_2,x_3)} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

١ – المصفوفة متناظرة.

٢ – جميع العناصر القطرية موجبة.

$$|6| > 0 \qquad \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 20 > 0$$

$$|H| = 16 > 0$$

وعليه المصفوفة H معرفة موجبة.

أي أن التابع f تابع محدب.

المجموعات المحدبة:

نقول عن المجموعة S أنها مجموعة محدبة إذا كان الخط الواصل بين أي نقطتين بها منتمياً إلى المجموعة أيضاً.

ونعبر عن ذلك رياضياً بالقول إن S محدبة إذا كان الشعاع X المعرف بالعلاقة.

$$X = \lambda(X)^{(1)} + (1 - \lambda)(X)^{(2)}$$

منتمياً إلى هذه المجموعة من أجل أي شعاعين $X^{(2)}, X^{(1)}$ في المجموعة S ومن أجل أي قيمة λ محصورة بين 0 و 1.

مبرهنة (١): إن مجموعة كل الحلول المقبولة لمسألة برمجة خطية هي مجموعة محدبة.

مبرهنة (٢): تقاطع مجموعات محدبة هو مجموعة محدبة.

مبرهنة (٣): إيجاد مجموعة محدبة لا يكون بالضرورة مجموعة محدبة.

مضاريب لاغرانج:

في معظم المسائل الهندسية (وخصوصاً الواقعية منها) يكون الهدف هو أمثلة (إيجاد القيمة الأعظمية – الأصغرية) لتابع معياري (أو تابع هدف) خاضع لعدة قيود.

إن إدخال الشروط الجانبية التي يجب تحقيقها في مسألة أمثلة لا يشكل أي صعوبة حقيقية إذ إن منطقة الحلول المقبولة ستكون محدودة أو مقيدة بهذه الشروط الجانبية.

يبدو أو تقليص فضاء الحل الممكن سيكون مفيداً بشكل كبير رياضياً، ولكن لذلك أحياناً آثار تخريبية على تقنيات الحل العقلانية فمثلاً يكون من السهل نسبياً حل مسألة أمثلة بسيطة لا خطية وغير مقيدة ولكن إذا فرضت عدة قيود لا خطية على المسألة ستكون تقنيات الحل المعروفة قليلة جداً.

في الواقع هناك عدد قليل نسبياً من تقنيات الحل الفعالة طورت تقنية مضاريب لاغرانج الرياضية لتقوم بتحويل مسائل الأمثلة المقيدة إلى مسائل أمثلة غير مقيدة.

يمكن إتمام ذلك فقط لإيجاد مسألة جديدة وبأبعاد أعلى. نوضح ما سبق كما يلي:

المسألة المطروحة: هي إيجاد القيمة الأعظمية لتابع مستمر وقابل للاشتقاق (للتفاضل) $y_0 = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ خاضع للقيد $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $g(x)$ أيضاً تابع مستمر وقابل للتفاضل، هنا نختار المتحول x_n في القيد ونعبر عنه بدلالة المتحولات $(n-1)$ الباقية:

$$x_n = H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

ونعوض عنه في تابع الهدف نحصل على:

$$y_0 = \bar{f}[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, H(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})]$$

مثال: أوجد القيمة الأصغرية للتابع:

$$f(x) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2$$

مع مراعاة القيد:

$$2x_1 - x_2 = 4$$

الحل:

نشكل تابع لاغرانج:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1 + 2x_2 - \lambda[2x_1 - x_2 - 4]$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 6x_1 + 2x_2 + 6 - 2\lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 2x_1 + 2x_2 + 2 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x_1 - x_2 - 4 = 0$$

بحل جملة المعادلات السابقة نحصل:

$$x_1^* = \frac{7}{11} \qquad x_2^* = \frac{30}{11} \qquad \lambda^* = \frac{24}{11}$$

نعوض في تابع الهدف نحصل:

$$f(x_1^*, x_2^*) = 85.7$$

إن شعاع الحل (x_1^*, x_2^*) يمكن أن يكون حلاً أعظمياً أو حلاً أصغرياً، وهنا إذا كان تابع الهدف محدباً وكانت القيود تشكل مجموعة محدبة فإن القيمة صغرى شمولية.

- إذا كانت المصفوفة الهيسية للتابع معرفة موجبة فإن التابع محدب:

$$H(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial 2f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial 2f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial 2f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial 2f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$H(x) = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

هذه المصفوفة متناظرة وجميع عناصر القطر الرئيسي موجبة وبالتالي فهي معرفة موجبة وعليه يكون تابع الهدف محدب.

القيد تابع خطي فهو محدب ومقعر في آن معاً وعليه تكون القيمة التي حصلنا عليها قيمة صغرى.

مثال (١): أوجد القيمة الأصغرية للتابع مع مراعاة القيد المرفق:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + x_2^2 + 6x_1x_2 + 4x_1 - x_2 + 5$$
$$2x_1 + 3x_2 = 4$$

مثال (٢): أوجد القيمة الأصغرية للتابع مع مراعاة القيد المرفق:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2)^2 + (x_1 + x_2)^2 + 4$$
$$g(x) = x_1 + 2x_2 - 3 = 0$$

– انتهت المحاضرة –

د. ميسم جديد