تمرين رائع (متتاليتان متجاورتان)

نتأمّل المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ المعرّفتين تدريجيّاً وفق : $\begin{cases} v_0 = \frac{5}{8} \\ v_{n+1} = \frac{3u_n+7v_n}{10} \end{cases}$ ، $\begin{cases} u_0 = \frac{13}{8} \\ u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2} \end{cases}$ **المطلوب** :

1- لتكن المتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $w_n = u_n - v_n$ ، أثبت أنّ المتتالية w_n هندسيّة ، واكتب عبارة w_n بدلالة n .

2- أثبت أنّ المتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

3- أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ المعرّفة وفق $t_n = 3u_n + 5v_n$ ثابتة .

4- عيّن النهاية المشتركة للمتتاليتين $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$.

5- احسب بدلالة n المجموع $s_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_{n-1}$ ثم استنتج $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ بدلالة n .

الحل : الطلب الأوّل :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{3u_n + 7v_n}{10}$$

$$w_{n+1} = \frac{5u_n + 5v_n - 3u_n - 7v_n}{10} = \frac{2u_n - 2v_n}{10} = \frac{1}{5}w_n$$

فالمتتالية $(w_n)_{n\geq 0}$ هندسيّة أساسها $q = \frac{1}{5}$ و حدّها الأوّل

$$w_0 = u_0 - v_0 = \frac{13}{8} - \frac{5}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

$$w_n = w_0 q^n \quad \rightarrow \quad w_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

الطلب الثاني :

لندرس اطّراد المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{-u_n + v_n}{2}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2}w_n = \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n < 0$$

فالمتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ متناقصة تماماً .

لندرس اطّراد المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n + 7v_n}{10} - v_n = \frac{3u_n + 7v_n - 10v_n}{10}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{3u_n - 3v_n}{10} = \frac{3}{10}w_n = \frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n > 0$$

فالمتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ متزايدة تماماً ، و الشرط الأوّل محقّق .

$$\lim_{n\to\infty}(u_n - v_n) = \lim_{n\to\infty} w_n = 0 \quad ; \quad \left|q = \frac{1}{5}\right| < 1$$

الشرط الثاني محقّق ، فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متجاورتان .

الطلب الثالث :

$$t_n = 3u_n + 5v_n$$

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 5v_{n+1}$$

$$t_{n+1} - t_n = 3(u_{n+1} - u_n) + 5(v_{n+1} - v_n)$$

$$= 3\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) + 5\left(\frac{3}{10}\left(\frac{1}{5}\right)^n\right) = \left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}\right) = 0$$

فالمتتالية $(t_n)_{n\geq 0}$ ثابتة .

الطلب الرابع :

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 5v_0 = \frac{39}{8} + \frac{25}{8} = \frac{64}{8} = 8$$

المتتاليات الثلاث $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ و $(t_n)_{n\geq 0}$ متقاربة ، و عليه

فإنّ :

$$8 = \lim_{n\to\infty} t_n = 3\lim_{n\to\infty} u_n + 5\lim_{n\to\infty} v_n = 3l + 5l$$

$$8l = 8$$

$$l = 1$$

فالمتتاليتان $(u_n)_{n\geq 0}$ و $(v_n)_{n\geq 0}$ متقاربتان من العدد 1 .

الطلب الخامس :

$$s_n = w_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

بما أنّ :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{2}w_n$$

نجد :

$$u_1 - u_0 = \frac{-1}{2}w_0$$

$$u_2 - u_1 = \frac{-1}{2}w_1$$

$$\vdots$$

$$u_n - u_{n-1} = \frac{-1}{2}w_{n-1} \quad +$$

$$u_n - u_0 = -\frac{1}{2}s_n$$

$$u_n = u_0 - \frac{1}{2}s_n = \frac{13}{8} - \frac{5}{8}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$$u_n = u_0 - \frac{1}{2}s_n = 1 + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$

بالمثل نجد أنّ :

$$v_n = 1 - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{5}\right)^n$$