Me En
Math Team

تمَّ التحميل بواسطة بوت ملفات قناة

♾X-Math πac♾

فريق MeEn Math Team

يهتمّ بمادة الرياضيّات لطلاب البكالوريا

للوصول إلى بوت الملفات: اضغط هنا

للوصول إلى قناة التلغرام الخاصة: اضغط هنا

للوصول إلى قناة التلغرام العامة: اضغط هنا

للوصول إلى صفحة الفيس بوك: اضغط هنا

للوصول إلى قناة اليوتيوب: اضغط هنا

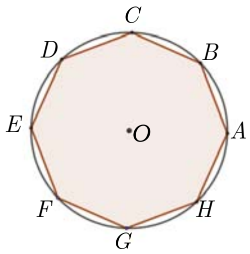
MeEn Math Team

X-Math πac

X-Math πac

سؤالين تم عرضهما على التربوية السورية بتاريخ 2024/5/5

السؤال 1. في معلم متجانس $(O,\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})$، ليكن $ABCDEFGH$ مثمّن منتظم مرسوم في دائرة نصف قطرها يساوي 1.



[1] ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

[2] ما عدد الرباعيات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

[3] ما عدد أقطار الدائرة التي يمكن أن نحصل عليها وطرفيها من رؤوس المثمن؟

[4] ما عدد أقطار المثمّن؟

[5] ما عدد المثلثات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من النقاط A,B,C,D,E,F,G,H,O؟

[6] ما عدد المستطيلات التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

[7] ما عدد المثلثات القائمة التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

[8] ما عدد المثلثات منفرجة التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

[9] ما عدد المثلثات حادة الزوايا التي يمكن أن نحصل عليها ورؤوسها من رؤوس المثمن؟

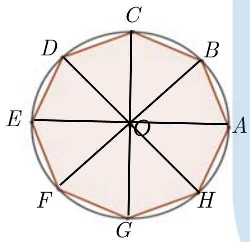
[10] جد $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$ ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{8}$.

[11] لتكن الاعداد العقدية a,b,c,d,e,f,g,h التي تمثل النقاط A,B,C,D,E,F,G,H بالترتيب.

a) جد بالشكل الجبري الاعداد العقدية a,b,c,d,e,f,g,h.

b) جد بالشكل الجبري العدد $\frac{d-a}{e-a}$. ثم استنتج $\cos\frac{\pi}{8}$.

[12] تقفز خنفساء بأسلوب عشوائي من إحدى النقاط A,B,C,D,E,F,G,H,O إلى نقطة أخرى مجاورة وذلك بافتراض أنها تسير على أضلاع المثلثات المرسومة فقط.



في البدء كانت الخنفساء في A. في حالة $n\geq 1$، نرمز بالرمز E_n إلى الحدث: « الخنفساء في O بعد القفزة رقم n »، وليكن $p_n=P(E_n)$.

a) أثبت أنّ $p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$.

b) ليكن α حلّ المعادلة $x=\frac{1}{3}(1-x)$، جده.

c) نضع أثبت أنّ المتتالية $(t_n)_{n\geq 1}$ المعرفة وفق $t_n=p_n-\alpha$ متتالية هندسية.

d) استنتج p_n بدلالة n واحسب $\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

[13] ندور القوس $\overset{\frown}{CG}$ حول المستقيم (CG) دورة كاملة تنتج كرة احسب حجمها.

[14] جد التابع f الذي يمثل القوس $\overset{\frown}{AC}$.

[15] جد معادلة المماس T في النقطة B من الدائرة.

[16] تحقق أن $T\perp(OB)$.

[17] ليكن التابع g المعرف وفق $g(x)=\ln f(x)$. جد مجموعة تعريف التابع g.

الحل:

[1] $\binom{8}{3}=\frac{8\times7\times6}{3\times2\times1}=56$.

[2] $\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1}=70$

[3] في حالة عدد اضلاع المضلع المنتظم زوجي يكون $\frac{n}{2}=\frac{8}{2}=4$.

[4] عدد أقطار المثمن = عدد القطع المستقيمة – عدد أضلاع المحيط

$$\Rightarrow \binom{n}{2}-n=\binom{8}{2}-8=28+8=20$$

[5] لدينا 9 نقاط ولكن لا يمكن أن نأخذ ثلاث نقاط واقعة على استقامة واحدة وتكون في أربع حالات $\binom{9}{3}-4=\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=84-4=80$.

[6] $\binom{4}{2}=\frac{4\times3}{2}=6$

[7] لتشكيل مثلث قائم نحتاج الى قطر دائرة وعددهم 4 و رأس من الباقي وعددهم 6 ومنه عدد المثلثات القائمة $\binom{4}{1}\binom{6}{1}=24$

[8] كل رأس يصلح لكي يكون رأس لثلاثة مثلثات منفرجة الزاوية وتكون الزاوية المنفرجة في ذلك الرأس ومنه عدد المثلثات منفرجة التي يمكن أن نحصل عليها $3\times8=24$

[9] عدد المثلثات الحادة هو $56-24-24=8$.

[10] لدينا النقاط $A(1,0),E(-1,0),D(-\frac{\sqrt2}{2},\frac{\sqrt2}{2})$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt2}{2}-1\\ \frac{\sqrt2}{2}\end{pmatrix}=\sqrt2+2$$

$$AE=2,$$

$$AD=\sqrt{\left(\frac{-\sqrt2-2}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{2+4\sqrt2+4}{4}+\frac{2}{4}}=\sqrt{\sqrt2+2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt2+2}{2\sqrt{\sqrt2+2}}=\frac{\sqrt{\sqrt2+2}}{2}$$

[11] مضلع ثماني منتظم فتكون قياس الزاوية المركزية 360 مقسوما على 8. أي $\frac{\pi}{4}$

a) ومنه الاعداد العقدية

$$a=1,\ e=-1,\ c=i$$

$$b=e^{i\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$d=-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$h=\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$f=-\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$g=-i$$

b) $$\frac{d-a}{e-a}=\frac{-\frac{\sqrt2}{2}+i\frac{\sqrt2}{2}-1}{-1-1}=\frac{\sqrt2+2-i\sqrt2}{4}$$

$$\frac{d-a}{e-a}=\frac{\sqrt2+2}{4}-i\frac{\sqrt2}{4}$$

نلاحظ أن $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=\arg\left(\frac{d-a}{e-a}\right)$

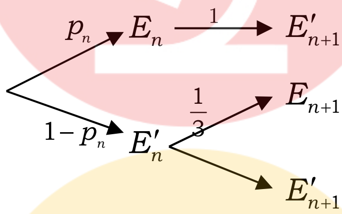
ومن الشكل نجد $(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD})=-\frac{\pi}{8}$

$$\left|\frac{d-a}{e-a}\right|=\frac{\sqrt{\sqrt2+2}}{2}$$

$$\cos\frac{\pi}{8}=\frac{a}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}+2}{4}}{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{2\sqrt{\sqrt{2}+2}}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

[12] وقوع الحدث E_n يعني أنّ الخنفساء في المركز O بعد القفزة رقم n، ومن ثَمّ ستقفز إلى أحد رؤوس المثمن ولن تبقى في المركز بعد القفزة $n+1$.

وقوع الحدث E'_n يعني أن الخنفساء في أحد رؤوس المثمن بعد القفزة رقم n، ومن ثم يمكنها القفز إلى المركز O أو إلى أحد الرأسين المجاورين في القفزة $n+1$. وهي تقفز إلى المركز باحتمال يساوي $\frac{1}{3}$.



a) $p_{n+1}=\mathrm{P}(E_{n+1})=\frac{1}{3}\times(1-p_n)$

b) العدد $\alpha=\frac{1}{4}$ هو حل المعادلة $x=\frac{1}{3}(1-x)$.

c) $t_{n+1}=p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}\times(p_n-\frac{1}{4})=-\frac{1}{3}t_n$

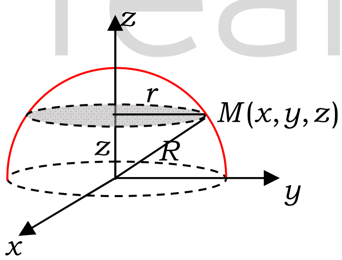
فالمتتالية $(t_n)_{n\geq1}$ هندسية أساسها $q=-\frac{1}{3}$ وحدها t_1

d) $t_1=p_1-\alpha=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$ ومنه

$$t_n=\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1},\ p_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

و $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}$.

[13] ندور القوس $\overset{\frown}{CA}$ حول المستقيم (CG) دورة كاملة تنتج نصف كرة. نقطع المجسم بمستوٍ



يعامد المحور Oz فيكون المقطع الناتج دائرة ولتكن C. $M(x,y,z)$ نقطة من الخط C.

مساحة دائرة المقطع هي $A(z)=\pi r^2$ بحسب مبرهنة فيثاغورث: $r^2+z^2=R^2=1$

ومنه $r^2=1-z^2$ أي $A(z)=\pi\left(1-z^2\right)$

$$\frac{1}{2}\mathcal{V}=\int_a^b A(z)\,dz=\int_0^1\pi\left(1-z^2\right)dx$$

$$=\left[\pi\left(z-\frac{z^3}{3}\right)\right]_0^1=\frac{2\pi}{3}$$

وهو حجم نصف الكرة فيكون حجم الكرة $\mathcal{V}=\frac{4\pi}{3}$

[14] التابع f الذي يمثل القوس $\overset{\frown}{AC}$.

نعلم أن $x^2+y^2=1$ هي معادلةٌ للدائرة C التي مركزها O ونصف قطرها 1. وعليه فإنّ ربع الدائرة C الذي يمثل القوس $\overset{\frown}{AC}$، هو الخط البياني للتابع f المعرف على المجال $[0,1]$ وفق $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

[15] معادلة المماس T في النقطة B من الدائرة.

لدينا $B(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ و $f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ ومنه

$$y=f'(\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+f(\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$y=-1(x-\frac{\sqrt{2}}{2})+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y=-x+\sqrt{2}$$

[16] نلاحظ $m_T\cdot m_{(OB)}=-1$. ومنه $T\perp(OB)$

[17] $g(x)=\ln\sqrt{1-x^2}$. الشرط $\sqrt{1-x^2}>0$

ومن $x\neq1$ أي مجموعة التعريف $D_g=[0,1[$.

السؤال 2. ليكن X المتحوّل العشوائي الذي يمثل عدد الاشخاص الذين يجرون فحص PCR في عيادة. نفترض أنّ عدد الاشخاص لا يتجاوز 2 في اليوم. والمتحوّل العشوائي X كما في الجدول:

k	0	1	2
$P(X=k)$	0.1	0.5	0.4

احتمال أن يكون فحص الشخص ايجابي يساوي 0.4 .

الحدث E «في اليوم شخص واحد فقط يكون ايجابي».

a) احسب $P(X=1\cap E)$.

b) احسب $P(E|X=2)$، واستنتج $P(X=2\cap E)$.

c) استنتج مما سبق قيمة $P(E)$.

d) ليكن Y المتحوّل العشوائي الذي يعطي عدد الاشخاص الذين فحصهم ايجابي. ما هي القيم التي يأخذها Y ؟

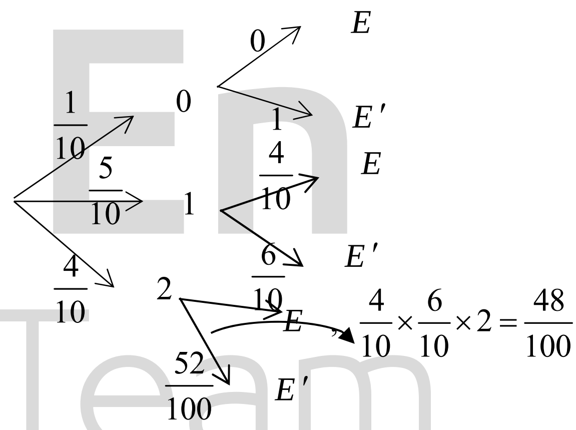
e) اكتب القانون الاحتمالي للمتحوّل العشوائي Y.

f) اكتب في جدول القانون الاحتمالي للزوج (X,Y).

g) أيكون المتحولان العشوائيان X و Y مستقلين احتمالياً؟

الحل:

a)



$\Leftarrow$ $\boxed{P(x=1\cap E)=\frac{20}{100}}$

b)

$$P(E\mid x=2)=\frac{4}{10}\times\frac{6}{10}\times 2=\frac{48}{100}$$

$$P(E\cap x=2)=\frac{4}{10}\times\frac{48}{100}=\frac{192}{1000}$$

c) $$P(E)=P(x=0\cap E)+P(x=1\cap E)+P(x=2\cap E)$$
$$=0+\frac{200}{1000}+\frac{192}{1000}=\frac{392}{1000}$$

d) $$Y=\{0,1,2\}$$

e) $$P(Y=0)=\frac{1}{10}+\frac{30}{100}+\frac{4}{10}\times\frac{36}{100}=\frac{100+300+144}{1000}=\frac{544}{1000}$$

$$P(Y=1)=P(E)=\frac{392}{1000}$$

$$P(Y=2)=\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}\times\frac{4}{10}=\frac{64}{1000}$$

y_i	0	1	2
p_i	$\frac{544}{1000}$	$\frac{392}{1000}$	$\frac{64}{1000}$

f)

X/Y	0	1	2	Xق
0	0.1	0	0	0.1
1	0.3	0.2	0	0.5
2	0.144	0.192	0.064	0.4
Yق	$\frac{544}{1000}$	$\frac{392}{1000}$	$\frac{64}{1000}$	1

g) $$P(X=0\cap Y=0)=0.1$$
$$P(X=0)=\cdot P(Y=0)=0.0544$$

غير متساويين فالمتحولين X , Y غير مستقلين احتمالياً .