الفصل الثالث

البنى الأساسية في الرياضيات المتقطعة

١ – المجموعات (Sets)

تعريف:

تعرف المجموعة بأنها جماعة غير مرتبة من الأغراض التي تتمتع بنفس الصفة.

ندعو الأغراض في المجموعة بعناصر المجموعة.

نرمز للمجموعات بأحرف كبيرة D, C, B, A...

ونرمز للعناصر بأحرف صغيرة d, c, b, a...

نستخدم أحد الرمزين للتعبير عن العلاقة بين المجموعة والعنصر:

١ – $\in$ تكتب $a \in A$ للدلالة على أن العنصر a من المجموعة A.

٢ – $\notin$ نكتب $a \notin A$ للدلالة على أن العنصر a ليس من المجموعة A.

طرق كتابة المجموعات:

نعبر عن المجموعات بإحدى الطريقتين التاليتين:

١ – طريقة القائمة: في هذه الطريقة نذكر جميع عناصر المجموعة مع وضع فاصلة بين كل عنصرين ونضع عناصر المجموعة بين قوسين كبيرين { } مثلاً $A = \{a,b,c,d\}$ مجموعة مكونة من العناصر الأربعة a,b,c,d.

ملاحظة:

عند كتابة المجموعات بطريقة القائمة لا نكرر العنصر أكثر من مرة واحدة.

مثال:

اكتب عناصر المجموعة التالية بطريقة القائمة:

مجموعة أحرف كلمة sets:

$$A = \{s,e,t\}$$

ملاحظة: لا تخضع عناصر المجموعة لترتيب خاص.

في المثال السابق يمكن أيضاً كتابة:

$$A = \{t,e,s\}$$

٢ – طريقة القاعدة (طريقة الخاصية المميزة): هنا نكتب عناصر المجموعة بالشكل:

A = {a: نضع هنا الخاصية المميزة لعناصر المجموعة}

مثال:

اكتب مجموعة أحرف كلمة sets بطريقة الخاصية المميزة:

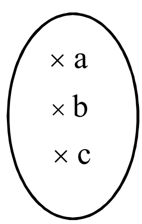
A = {a: حيث a حرف من أحرف كلمة sets}

تمثيل المجموعات: مخططات فن

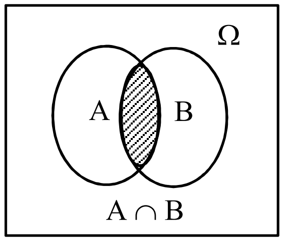
لتسهيل التعامل مع المجموعات نقوم بتمثيلها عن طريق مخططات ندعوها مخططات فن حيث نرسم منحني مغلق ونضع عناصر المجموعة داخله.

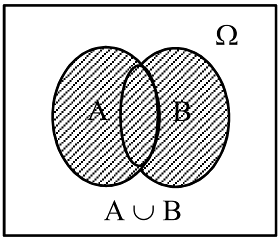
مثال:

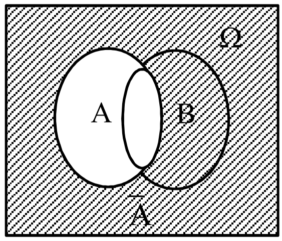
لتكن المجموعة $A = \{a,b,c\}$ تمثيل فن لها هو:

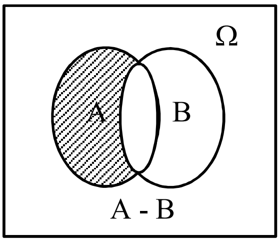


تمثل العمليات على المجموعات بمخططات فن كما يلي:









المستطيل هو تمثيل للمجموعة الشاملة.

مجموعات الأعداد:

a – مجموعة الأعداد الطبيعية:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,\ldots\}$$

b – مجموعة الأعداد الصحيحة:

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

c – مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة:

$$\mathbb{Z}^{+} = \{1,2,3,\ldots\}$$

d – مجموعة الأعداد النسبية:

$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$$

e – مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

ملاحظة:

يمكن أن تكون المجموعة مشكلة من عناصر هي مجموعات.

إن المجموعة $\{\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ هي مجموعة تعطي أربعة عناصر كل منها مجموعة.

f – المجموعة الخالية: هي مجموعة لا تحوي أي عنصر (empty set) ونرمز لها بأحد الرمزين ϕ, $\{\ \}$.

من الخطأ الشائع التعبير عن المجموعة الخالية بهذا الرمز $\{\phi\}$، لأن الخالية ϕ لا تحوي أي عنصر، أما المجموعة $\{\phi\}$ فهي مجموعة وحيدة العنصر منها العنصر ϕ.

المجموعة الجزئية:

نقول عن المجموعة A إنها مجموعة جزئية من B إذا وفقط إذا كان كل عنصر من A هو عنصر من B ونستخدم لذلك الرمز $\subseteq$ ونكتبه $A \subseteq B$.

نتيجة:

من أجل مجموعة Ω يكون:

$$\Omega \subseteq \Omega \,,\, \phi \subseteq \Omega$$

المجموعات المتساوية:

تتساوى مجموعتان B, A إذا وفقط إذا كانت $B \subseteq A$, $A \subseteq B$.

المجموعات المنتهية:

إذا كانت Ω مجموعة فيها n عنصراً مختلفاً حيث n عدد صحيح غير سالب نقول في هذه الحالة إن Ω مجموعة منتهية وأن رئيسي هذه المجموعة يساوي n (أي عدد عناصر هذه المجموعة n) ونرمز لرئيسي المجموعة Ω بالرمز $|\Omega|$.

مثال:

إن رئيسي مجموعة الأحرف الصوتية V في اللغة الإنكليزية هو $|V| = 5$.

المجموعات غير المنتهية:

نقول عن مجموعة إنها غير منتهية إذا كان عدد عناصرها غير منتهي كما في مجموعات الأعداد: $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{W}$.

قوة مجموعة:

قوة مجموعة Ω هو مجموعة كل المجموعات الجزئية من المجموعة Ω ونرمز لقوة مجموعة Ω بالرمز $P(\Omega)$.

مثال:

لتكن المجموعة $A = \{0,1,2\}$ أوجد قوة A أي $P(A)$.

الحل:

نستطيع تشكيل المجموعات الجزئية التالية من المجموعة A:

$$\phi , \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}$$

ونكتب:

$$P(A) = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{0,2\}, \{0,1,2\}\}$$

ملاحظة (١):

عدد عناصر مجموعة المجموعات الجزئية من المجموعة Ω التي عدد عناصرها n هو 2^n أي:

$$|P(\Omega)| = 2^n$$

في المثال السابق:

$$|P(A)| = 2^3 = 8$$

ملاحظة (٢):

يبنى مفهوم نمط المعطيات في علوم الحاسب على المجموعات وخاصة data type أو type هو اسم لمجموعة من مجموعة العمليات التي تطبق على عناصر المجموعة.

مثال:

البوليان (Boolean) هو اسم المجموعة $\{0,1\}$ مع العمليات AND, OR, NOT على عناصر هذه المجموعة..

العمليات على المجموعات:

١ – اتحاد المجموعات:

لتكن B, A مجموعتان، إن اتحاد المجموعة B, A الذي نرمز له بالرمز $A \cup B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A أو المجموعة B ونكتب:

$$A \cup B = \{x|x \in A \text{ or } x \in B\}$$

٢ – تقاطع المجموعات:

لتكن B, A مجموعتين إن تقاطع المجموعتين B, A هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B معاً ونرمز له بالرمز $A \cap B$ ونكتب:

$$A \cap B = \{x|x \in A \text{ and } x \in B\}$$

٣ – فرق المجموعات:

لتكن B, A مجموعتان، إن فرق المجموعتين B, A والذي نرمز له بالرمز $A - B$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا تنتمي إلى B ونكتب:

$$A - B = \{x|x \in A \text{ and } x \notin B\}$$

٤ – الفرق التناظري:

هو المجموعة الناتجة من اتحاد المجموعتين $A - B$، $B - A$ ونرمز له بـ $\oplus$ ونكتب:

$$A \oplus B = \{x | x \in A - B \text{ or } x \in B - A\}$$

٥ – الجداء الديكارتي للمجموعات:

تستدعي الحاجة في كثير من الأحيان إلى تمثيل المعلومات على شكل متعددات، إن العناصر في كل متعدد تأتي من مجموعات معروفة.

مثل هذه المجموعة تدعى بالجداء الديكارتي.

تعريف:

إذا كانت A ,B مجموعتين نعرف الجداء الديكارتي لـ A في B ونرمز له بالرمز $A \times B$ هو مجموعة كل الأزواج المرتبة (a,b) بحيث يكون $b \in B, a \in A$ ونعبر عنه كما يلي:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ and } b \in B\}$$

مثال: لتكن $B = \{0,1\}, A = \{x,y\}$ أوجد $A \times B$.

الحل:

$$A \times B = \{(0,x), (0,y), (1,x), (1,y)\}$$

ملاحظة:

إذا كانت $B = \{0,1\}, A = \phi$ فإن $A \times B = \phi$ لأنه لا توجد أزواج مرتبة حدها الأول من A لأن A خالية وعليه تكون المجموعة $A \times B$ غير خالية إذا وفقط إذا كانت المجموعتان A ,B غير خاليتين معاً.

الجداء الديكارتي لعدد من المجموعات:

لتكن لدينا المجموعات $A_1, A_2, \ldots, A_n$ فإن:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \mid x_i \in A_i\}$$

ملاحظة:

إذا كانت كل المجموعات A_i في الجداء الديكارتي هي نفس المجموعة A فإننا نستخدم:

$$A^n = A \times A \times \ldots \times A$$

وعليه فإن:

$A^0 = \{(\ )\}$
$A^1 = \{(a) \mid a \in A\}$

ينتج أن $A^0 \neq \phi,\ A^1 \neq 1$.

مثال:

لتكن $A = \{a,b,c\}$ أوجد: A^0, A^1, A^2, A^3

الحل:

$A^0 = \{(\ )\}$
$A^1 = \{(a), (b), (c)\}$
$A^2 = \{(a,a), (a,b), (a,c), (b,a), (b,b), (b,c), (ca), (c,b), (c,c)\}$
$A^3 = \{(a,a,a), (a,a,b), (a,a,c), (a,b,a), (a,b,b), (a,b,c), (a,c,a), (a,c,b), (a,c,c), (b,a,a), (b,a,b), (b,a,c), (b,b,a), (b,b,b), (b,b,c), (b,c,a), (b,c,b), (b,c,c), (c,a,a), (c,a,b), (c,a,c), (c,b,a), (c,b,b), (c,b,c), (c,c,a), (c,c,b), (c,c,c)\}$

إن A^3 هي مجموعة كبيرة تتكون من ثلاثيات مرتبة عددها 27.

مثال:

لتكن:

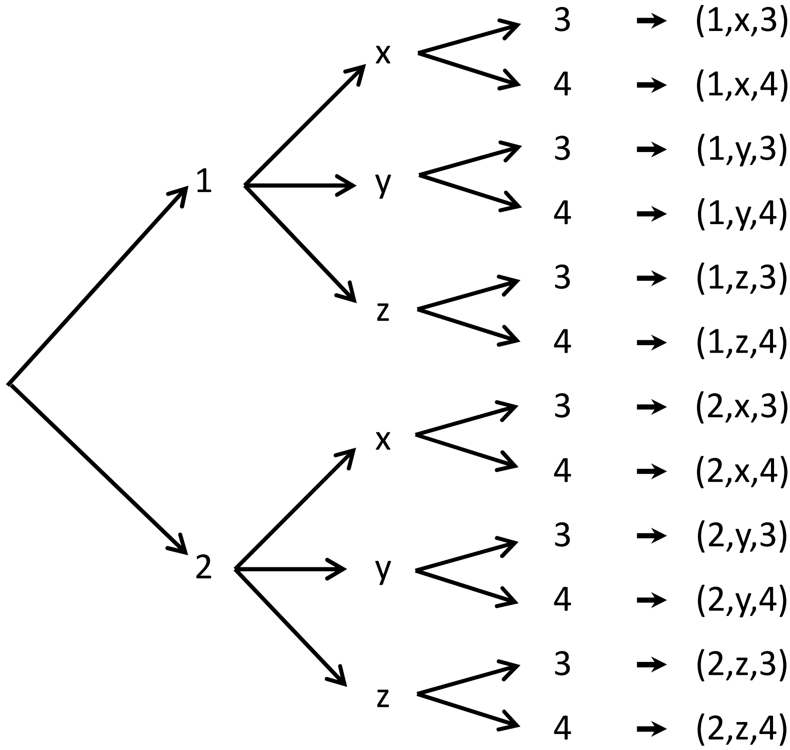
$A = \{1,2\}$، $B = \{x,y,z\}$، $C = \{3,4\}$.

أوجد الجداء الديكارتي $A \times B \times C$.

الحل:

$A \times B \times C$ يتكون من الثلاثيات المرتبة (a,b,c) حيث: $a \in A$، $b \in B$، $c \in C$

يمكن الحصول على $A \times B \times C$ بشكل منظم باستخدام المخطط الشجري.



ملاحظة (**١**):

يمكن لمكونات متعدد – n أن نكتب بأشكال مختلفة وفقاً للمسألة التي نقوم بمعالجتها.

مثال:

إذا كان $t \in A \times B \times C$ فإننا نستطيع أن نمثل t في أي من الأساليب الآتية:

(t_1,t_2,t_3), $(t(1), t(2), t(3))$, $(t[1], t[2], t[3])$, $(t(A),t(B),t(C))$, $(A(t),B(t),C(t))$

٦ – متمم مجموعة:

لتكن Ω هي المجموعة الشاملة، إن متمم المجموعة A والذي نرمز له $\overline{A}$ هو مجموعة العناصر التي تنتمي إلى Ω ولا تنتمي إلى A ونكتب: $\overline{A} = \Omega - A$.

جدول العمليات على المجموعات:

المطابقة	الاسم
$A \cup \phi = A$ $A \cap \Omega = A$	قوانين التطابق
$A \cup \Omega = \Omega$ $A \cap \phi = \phi$	قوانين السيطرة
$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	قوانين تساوي القوى
$\overline{\overline{A}} = A$	قانون الإتمام
$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	القوانين التبديلية
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	القوانين التجميعية
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	قوانين التوزيع
$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	قوانين دومورغان
$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	قوانين الامتصاص
$A \cup \overline{B} = \Omega$ $A \cap \overline{A} = \phi$	قوانين الاتمام

ملاحظة: في الجدول السابق Ω هي المجموعة الشاملة.

تعميم الاتحاد والتقاطع:

نفرض أن $A_1, \quad A_2,\ldots,A_n$ هي مجموعات عددها n، نعبر عن اتحاد هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=2}^{n} A_i$$

ونعبر عن تقاطع هذه المجموعات بالرمز:

$$A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

مثال:

لتكن $A_i = \{i, i+1, i+2, \ldots\}$ عندئذ:

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{i, i+1, i+2, \ldots\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

يمكن توسيع مفهوم الاتحاد والتقاطع لعدد غير منتهٍ من المجموعات ونستخدم:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$$

وبشكل أكثر عمومية $\bigcup_{i=1} A_i$ و $\bigcap_{i=1} A_i$ يستخدمان للإشارة إلى الاتحاد والتقاطع للمجموعات A_i من أجل $i \in I$ وتمثل I مجموعة قيم الدليل i.

مثال:

لتكن $A_i = \{1,2,3,\ldots,i\}$ من أجل $i = 1,2,3,\ldots$ عندئذ يكون اتحاد هذه المجموعات هو المجموعة:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty}\{1,2,3,\ldots,i\} = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{Z}^+$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty}\{1,2,3,\ldots,i\} = \{1\}$$

مثال:

ليكن من أجل كل عدد طبيعي i لدينا المجموعة:

$$A_i = \{-i, -i + 1, \ldots, -1, \ldots, i - 1, i\}$$

مثلاً: A_4

$$A_4 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$$

العد باستخدام مبدأ الإضافة والحدث:

نفرض أننا نريد عدد عناصر اتحاد المجموعتين:

$$A = \{1,2,3,4,5\} \qquad B = \{2,4,6,8\}$$

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$$

رئيسي الاتحاد $|A \cup B| = 7$

$$A \cap B = \{2,4\}$$

رئيسي التقاطع $|A \cap B| = 2$.

ملاحظة: إذا تمت معرفة أي ثلاثة أعداد من الأعداد الأربعة:

$$|A|, |B|, |A \cap B|, |A \cup B|$$

عندها يمكننا معرفة العدد الرابع باستخدام القاعدة التالية:

من أجل المجموعات المنتهية بعدد العناصر $|A \cup B|$, $|A \cap B|$, $|B|$, $|A|$.

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

نوسع القاعدة السابقة من أجل ثلاث مجموعات:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

إن تعميم القاعدة السابقة من أجل ثلاثة مجموعات أو أكثر يدعى بمبدأ الإضافة والحذف والذي يمكن صياغته على النحو الآتي:

لتكن $A_1, A_2, \dots, A_n$ مجموعات منتهية عندئذ:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{1\le i\le n}|A_i| - \sum_{1\le i<j\le n}|A_i \cap A_j| + \\ \sum_{1\le i<j<k\le n}|A_i \cap A_j \cap A_k| - \ldots + (-1)^{n+1}|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|\end{aligned}$$

مثال:

اكتب مبدأ الإضافة والحذف من أجل أربع مجموعات منتهية A_1, A_2, A_3, A_4.

الحل:

$$\begin{aligned}|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \\ |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| \\ + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_3| \\ + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|\end{aligned}$$

من الواضح أن هذه العلاقة تتضمن 15 حداً مختلفاً ناتجة من تقاطع المجموعات الجزئية من المجموعة $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

ملاحظة:

إن الكثير من مسائل العد تحل باستخدام مبدأ الإضافة والحذف وأن العديد من المسائل يمكن أن تحل من خلال معرفة عدد أعداد التوابع من مجموعة منتهية إلى أخرى هنا نستخدم مبدأ الإضافة والحذف لمعرفة عدد هذه التوابع.

٢ – الحاويات (Bags)

تعريف: الحاوية مجموعة من الأغراض التي يمكن أن تتضمن حدوث تكرار لهذه الأغراض التي تمثل العناصر فيها نضع عناصر الحاوية بين قوسين متوسطين [ ] لتمييزها عن المجموعات.

مثلاً الحاوية [h, u, g, h] تتضمن أربعة عناصر.

بعض الحقائق المتعلقة بالحاويات:

١ – نقول عن الحاويتين B, A إنهما متساويتان إذا كان عدد مرات حدوث كل عنصر في A أو B ذاته في كلتا الحاويتين.

٢ – إذا كانت الحاويتان B, A متساويتين فإننا نكتب $A = B$.

مثلاً: $[h, u, g, h] = [h, h, g, u]$ لكن $[h, u, g, h] \neq [h, u, g]$.

٣ – إن للحاويات ميزتان أساسيتان:

a – يمكن حدوث تكرار العناصر في الحاويات.

b – لا يوجد ترتيب خاص لعناصر الحاوية.

٤ – نقول عن A إنها حاوية جزئية من B ونكتب $A \subset B$ إذا كان عدد مرات حدوث أي عنصر x من A أصغر أو يساوي عدد مرات حدوثه في الحاوية B.

مثلاً: $[a, b] \subset [a,b,a]$ بينما $[a,b,a] \not\subset [a,b]$.

٥ – ينتج من تعريف الحاوية الجزئية أن الحاويتين B, A متساويتان إذا كانت A حاوية جزئية من B وكانت B حاوية جزئية من A.

العمليات على الحاويات:

١ – جمع الحاويات:

نعرف جمع الحاويتين B, A على النحو الآتي:

إذا كان x يحدث m مرة في A ويحدث n مرة في B فإنه يحدث $n + m$ مرة في حاوية الجمع التي نرمز لها بـ $A + B$.

مثال:

$$[2,2,3] + [2,3,3,4] = [2,2,2,3,3,3,4]$$

٢ – اتحاد الحاويات:

نرمز لاتحاد حاويتين B, A بالرمز $A \cup B$ ونعرف بالشكل الآتي:

إذا كان n,m عدد مرات حدوث العنصر x في كل من B, A على الترتيب فإننا نضع العدد الأكبر من بين العددين n,m ليمثل عدد مرات حدوث x في حاوية الاتحاد $A\cup B$

مثال:

$$[2,2,3] \cup [2,3,3,4] = [2,2,3,3,4]$$

٣ – تقاطع الحاويات:

إذا كانت B, A حاويتين فإن تقاطعهما $A \cap B$ يعرف على النحو الآتي:

إذا كان n,m عدد مرات حدوث العنصر x في كل من B,A على الترتيب فإننا نضع العدد الأصغر من بين العددين n,m ليمثل عدد مرات حدوث x في $A \cap B$.

مثال: $[2,2,3] \cap [2,3,3,4] = [2,3]$

مثال: بفرض $P(x)$ هي حاوية الأعداد الأولية التي تنشأ من تحليل العدد الطبيعي x إلى عوامله الأولية، نجد أن:

$$P(12) = [2,2,3] \qquad P(54) = [2,3,3,3]$$

أوجد $P(12) \cup P(54)$، $P(12) \cap P(54)$.

الحل:

$$P(12) \cap P(54) = [2,2,3] \cap [2,3,3,3] = [2,3] = P(6)$$

يمثل العدد 6 القاسم المشترك الأكبر للعددين 12, 54.

$$P(12) \cup P(54) = [2,2,3,3,3] = P(108)$$

يمثل 108 المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12, 54.

من المثال السابق نلاحظ أن $P(x) \cup P(y)$ هو المضاعف المشترك الأصغر لـ y,x و $P(x) \cap P(y)$ هو القاسم المشترك الأعظم لـ y,x.

٣ – متعددات العناصر (Tuples)

تعريف:

نعرف متعدد العناصر (tuple) على أنه جماعة من الأشياء ندعوها بعناصر المتعدد وتوضع بترتيب ثابت، العنصر الأول يليه الثاني وهكذا...

تسمى أيضاً عناصر المتعدد بأسماء مختلفة أعضاء (members)أو أغراض (objects) أو مكونات (components) نرمز للمتعدد من خلال كتابة عناصره بين قوسين صغيرين ( ) ونفصل بينها بفاصلة، مثلاً إن للمتعدد (2,3,7) ثلاثة عناصر الأول 2 والثاني 3 والثالث7.

بعض خصائص المتعددات:

١ – إذا كان للمتعدد n عنصراً فإننا نقول إن طوله n وندعوه متعدد – n (أي طوله n).

مثال:

إن المتعدد (7,k,hello) هو متعدد – 3.

المتعدد $(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ هو متعدد – 8.

المتعدد ( ) الخالي هو متعدد – 0.

٢ – يدعى المتعدد الذي طوله 2 وهو متعدد – 2 بأنه زوج مرتب ونقول عن متعدد – 3 إنه ثلاثية مرتبة.

٣ – نشير إلى استخدام كلمات وتسميات أخرى للمتعدد مثل المتجه والمتتالية.

٤ – إذا كان لدينا متعددان لهما نفس الطول:

$(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ $\qquad$ $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$

فإننا نقول إنهما متساويان إذا كان:

$x_i = y_i$ من أجل $1 \le i \le n$ ونكتب:

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (y_1,y_2,\ldots,y_n)$$

مثال:

الزوجان المرتبان (3,7)، (7,3) غير متساويين ونكتب $(7,3) \neq (3,7)$.

٥ – تحمل المتعددات فكرة الترتيب لذلك فهي مختلفة عن المجموعات والحاويات.

مثال:

نوضح من خلال هذا المثال الاختلاف بين المجموعات والحاويات (الحافظات) والمتعددات.

المجموعات $\{t,a,b\} = \{b,a,t\}$ الترتيب لا يهم لا نكرر العنصر أكثر من مرة واحدة.

الحاويات (الحافظات) $[0,t,t,0] = [t,0,0,t]$ الترتيب لا يهم ولكن يمكن أن نكرر العنصر.

المتعددات: $(b,a,t) \neq (t,a,b)$, $(t,0,0,t) \neq (0,t,t,0)$ الترتيب مهم.

٦ – لمتعددات العناصر ميزتان أساسيتان:

a – يمكن حدوث تكرار في عناصر المتعددات.

b – هنالك ترتيب محدد لعناصر المتعددات.

ملاحظة:

إن الجداءات الديكارتية والمتعددات مرتبطة ببعض الأغراض البرمجية المألوفة.

نوضح الملاحظة السابقة من خلال المثال الآتي:

مثال:

نوضح في هذا المثال بعض الأغراض البرمجية مثل:

الصفيفات (arrays).

المصفوفات (Matrices).

السجلات (Records).

١ – الصفيفة أحادية البعد من القياس n وبعناصر من المجموعة A عبارة عن متعدد – n من الجداء الديكارتي A^n، لذلك نستطيع أن نقول إن الجداء الديكارتي A^n هو مجموعة كل الصفيفات الاحادية البعد من القياس n على المجموعة A إذا كان:

$$A = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

عادة يرمز للمكون x_i بلغة البرمجة بالرمز x[i].

٢ – الصفيفة ثنائية البعد: تدعى بالمصفوفة التي يمكن أن ننظر إليها على أنها جدول من الأغراض التي تحدد من خلال الأسطر والأعمدة، فإذا كانت المصفوفة X لها m سطر و n عمود فإننا نمثلها من خلال الشكل الآتي:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

فمثلاً إذا كانت X من المرتبة 4×3 أي أن $n = 4, m = 3$ عندها نمثل X بالشكل:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$$

بالإضافة إلى أننا يمكن أن نمثل X من خلال متعدد – 3 مكوناته هي متعددات من الطول 4 كما يلي:

$$X = ((x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}), (x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}), (x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}))$$

ملاحظة:

يستخدم عادة في لغات البرمجة الرمز x[i,j] لتمثيل x_{ij}.

٣ – يمكن النظر إلى $A \times B$ على أنها مجموعة من السجلات (records) أو البنى ذات حقلين B, A.

مثلاً:

من أجل السجل $r = (a,b) \in A \times B$ نستخدم الرموز r.A و r.B لتمثيل مكوناته b,a على الترتيب.

التمثيل الحاسوبي للمتعددات:

تمثل المتعددات في الحواسيب في خلايا مستمرة من الذاكرة بحيث يتم الدخول إلى أي مكون بسرعة.

مثلاً: ١ – من أجل المتعددات:

نحتاج من أجل كل مكون من المتعدد $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ إلى M من خلايا الذاكرة لتخزينه.

إذا كان B عنوان البدء في الذاكرة حيث يتوضع المتعدد فإن x_1 في الموضع B، أما x_2 فيكون في الموضع $B + M$ وبشكل عام يكون x_k في الموضع BM(k-1) حيث أن كل مكون x_k من X يمكن الدخول إليه بالزمن المستغرق لحساب $B + M(k-1)$.

٢ – من أجل الصفيفات المتعددة الأبعاد: يكون زمن الدخول سريعاً أيضاً.

نفرض أنه لدينا المصفوفة ذات 3 أسطر و 4 أعمدة السابقة:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{bmatrix}$$

نفرض أن كل مكون في X يحتاج M من خلايا الذاكرة إذا كان عنوان البدء B في الذاكرة لتوضع X فإن x_{11} يتوضع عند B و x_{12} يتوضع في $B + 4M$ و x_{31} يتوضع في $B + 8M$ وبالتالي يكون توضع أي عنصر كيفي x_{jk} معطى بالتعبير:

$$B + 4M(j - 1) + M(k - 1)$$

ملاحظة:

ندعو التعابير من النمط السابق بكثيرات حدود العنوان، حيث يمكن الدخول إلى كل مكون بزمن قدره الزمن المستغرق لحساب كثير حدود العنوان التي تقرب إلى ثابت من أجل k,j.

٤ – القوائم (Lists)

تعريف:

هي متتالية مرتبة من العناصر عددها صفر أو أكثر هذه العناصر يمكن أن تتكرر.

من تعريف القائمة نجد أنها مشابهة للمتعدد والسؤال المطروح هنا ما هو وجه الاختلاف.

هناك اختلاف في علوم الحاسب بين القائمة والمتعدد يتعلق بتحديد الأجزاء التي يتم الدخول إليها عشوائياً. في المتعدد يمكن الدخول عشوائياً إلى أي مكون في زمن ثابت، أما في القائمة فإننا نستطيع الدخول عشوائياً إلى شيئين فقط في زمن ثابت.

مكونات القائمة:

١ – المكون الأول للقائمة يدعى الرأس (head).

٢ – المكون الثاني ندعوه الذيل وهو قائمة تتشكل من كل شيء في القائمة الأساسية ما عدا المكون الأول.

حقائق عن القوائم:

١ – نكتب عناصر القائمة بين قوسين < , > ونضع فاصلة بين كل عنصرين.

٢ – نرمز للقائمة الخالية بالرمز < >.

٣ – طول القائمة هو عدد عناصر القائمة.

مثال:

نأخذ القائمة <p,q,r,s> طولها 4.

رأسها p والذيل هو القائمة <q,r,s>.

٤ – يستخدم الرمز head (L) للإشارة إلى رأس القائمة. tail (L) للإشارة إلى الذيل.

ففي المثال السابق نكتب:

head (<p,q,r,s>) = p

tail (<p,q,r,s>) = <q,r,s>

٥ – ليس للقائمة الخالية < > رأس أو ذيل.

٦ – تتميز القوائم بصفة حسابية وهي قدرتها على إنشاء قائمة جديدة بإضافة عنصر جديد عند رأس القائمة الموجودة، ونستخدم الرمز cons للإشارة إلى عملية الإنشاء.

في المثال السابق إذا كان m عنصر من نمط ما وكانت L قائمة فإن:

cons (m,L)

تعني قائمة جديدة رأسها m وذيلها L.

مثال:

نورد بعض الحالات لاستخدام العملية cons:

cons (p, <q,r,s>) = <p,q,r,s>

cons (a, < >) = <a>

cons (this, <is, helpful>) = <this, is, helpful>

٧ – تقوم العمليات الثلاثة head, tail, cons بعمل فعّال وديناميكي أثناء تنفيذ البرنامج.

ملاحظة:

ترتبط العمليات الثلاثة السابقة فيما بينها بالمعادلة التالية:

cons(head(L), tail(L)) = L

وذلك من أجل أي قائمة L غير خالية.

٨ – لا يوجد أي تقييد على نوع الغرض الذي يمكن للقائمة أن تحويه، ويمكن أن تكون عناصر القائمة أيضاً عبارة عن قوائم.

مثال:

نعرض بعض الحالات لقوائم مع تحديد رأس وذيل كل منها:

L	head (L)	tail(L)
<a,<b>>	a	<<b>>
<< >, a, < >, b, < >>	<< >, a, < >>	<<b,< >>

٩ – إذا كانت كل عناصر القائمة L من مجموعة خاصة A فإننا نقول إن L قائمة على A.

مثال:

إن كل قائمة من القوائم الآتية هي قائمة على المجموعة {a,b,c}.

<b,c,a,b,c> <a,b> < >

<a,b,bb,c,a> <b,a> <a>

١٠ – نرمز لمجموعة كل القوائم على المجموعة A بالرمز Lists (A).

تمثيل القوائم حاسوبياً:

أسهل أسلوب لتمثيل القائمة في الحاسب هو وضع بلوك ذاكرة لكل عنصر من القائمة يتضمن العنصر مع عنوان بلوك الذاكرة التالي من أجل العنصر التالي في القائمة.

بذلك لا نكون بحاجة إلى قائمة تقع عناصرها خلف بعضها بشكل متتالٍ.

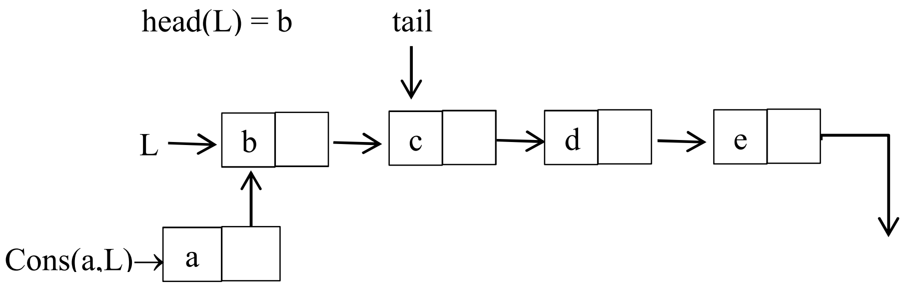
عندها يكون حذف عناصر القائمة يمكن أن يتم ديناميكياً أثناء تنفيذ البرنامج.

مثال:

إذا كانت L قائمة معطاة بالشكل: L = <b,c,d,e>

مثّل هذه القائمة في الذاكرة ثم مثُل العملية cons(a,L).

الحل:



شرح الشكل:

نضع L يخرج منها سهم (مؤشراً) إلى صندوق يمثل بلوك ذاكرة يتضمن عنصراً من القائمة ويشير السهم إلى عنوان الصندوق التالي.

إن السهم في الصندوق الأخير e يشير إلى رمز الأرضية لتحديد نهاية القائمة.

تشير القوائم الفارغة أيضاً إلى رمز الأرضية فيظهر على الشكل أيضاً.

$$\text{tail}(L) = \langle c,d,e \rangle \text{ , head}(L) = b$$

لذا فإن الرأس والذيل يحسبان بسهولة من L نظهر على الشكل كيف تبنى العملية cons القائمة الجديدة.

$$\text{cons}(a,L) = \langle a,b,c,d,e \rangle$$

وذلك بوضع بلوك جديد يحتوي a ومؤشراً L.