Fundamental of Math

Week 5

Telegram : @azizhelp

Factoring Polynomials

تحليل كثيرات الحدود

لتحليل كثيرات الحدود هناك عدة طرق :

أولاً : بإيجاد العامل المشترك الأكبر. (Great Common Factors) (GCF)

كيف نحلل الرقم إلى عوامله الأوليه ؟

لتحليل الرقم إلى عوامله الأوليه نقوم بقسمته على الأعداد (٢ أو ٣ أو ٥)

ملآحظه:

 # أي عدد آحاده زوجي يقبل القسمه على ٢ مثل (٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ....)

 # أي عدد ناتج مجموع أعداده عدد من جدول ضرب الـ٣ يقبل القسمه على ٣ مثل (١٥ ، ٢١ ، ٣٣ ، ٣٦ ..)

 # أي عدد آحاده صفر أو خمسه إذن يقبل القسمه على ٥ (٥، ١٠ ، ١٥ ، ٢٠ .....)

لذا فإنه عند تحليل أي عدد إلى عوامله الأوليه نختبر قابلية قسمته على ٢ فإن لم يكن يقبل القسمه على ٢ ننتقل إلى الـ ٣ ثم إلى الـ٥ وهكذا حتى يصل العدد إلى ١ .

مثال :

2	**24**
2	**12**
2	**6**
3	3
	1

إذاً

$24 = 2^3 . 3$ ويسمى ناتج التحليل Prime Factorization

أولا: التحليل بإستخدام (GCF) (العامل المشترك الأكبر) :

مثال:

Find GCF

$$16p^6q^4 \quad , \quad 32p^3\,q^3 \quad , \quad 48pq^2$$

المطلوب بالسؤال:

إيجاد العامل المشترك **الأكبر**

أولاً : لأيجاد العامل المشترك الأكبر نقوم بتحليل الأرقام الموجوده في المسأله بإستخدام الطريقه السابقه

ثم من خلال ذلك نبحث عن العامل المشترك الأكبر بين تلك الأرقام .:

16	2
8	2
4	2
2	2
1	

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

48	2
24	2
12	2
6	2
3	3
1	

نلاحظ أن العامل المشترك الأكبر في هذه الأرقام الثلاثه هو الـ 16

أما بالنسبه للمتغيرات فإنه لأستخراج العامل المشترك الأكبر نبحث عن العامل الذي يحمل الأس الأصغر :

$$16p^6q^4 \quad , \quad 32p^3\,q^3 \;,\; 48pq^2$$

إذن فإن لتحليل هذه المتغيره تكون النتيجه :

$$16\,pq^2$$

ثـانياً : التحليل عن طريق التوزيــع :

Factoring By Distribution :

للحل عن طريق التوزيع نوجد أولا العامل المشترك الأكبر ثم نقوم بإدراج ماتبقى من كثيرة الحدود بين قوسين.

مثال على ذلك :

$$x^2 + 5x$$

العامل المشترك الأكبر هو x إذاً نضع الـ x بالخارج وماتبقى من المسأله نضعه بين قوسين فيصبح الناتج هكذا :

$$x(x+5)$$

للتأكد من النتيجه نقوم بحل المسأله بضرب الـ x بكلا المعاملين اللذان داخل القوس وستعود المسأله لتصبح هكذا $x^2 + 5x$

مثـال آخر :

$$3x^4 - x^2$$

العامل المشترك الأكبر في هذه المسأله هو x^2 لذا نكتبه خارج القوس ونكتب ما تبقى من المسأله داخل القوس

$$x^2(3x^2 - 1)$$

ملآحظه مهمه : يجب إدراج 1- في المسأله كي لا يختفي الجزء الآخر منها فـ لو أكتفينا بـ $x^2(3x^2)$ لأصبح الناتج حينما نعوض $3x^4$ فقط .

مثال آخر

$$2x^7 - 2x^6 - 64x^5 + 4x^3$$

نختار 2 كعامل مشترك أكبر لآن جميع الحدود تقبل القسمه عليه

ونختار ال X ذات الاس الأصغر (x^3) لآن جميع الحدود تحتوي عليه

اذا العامل المشترك الأكبر (GCF) هو عباره عن $2x^3$

لإيجاد الناتج النهائي نقوم بقسمه $2x^3$ على اطراف كثيره الحدود

$$2x^3(x^4 - x^3 - 32x^2 + 2)$$

✓ تذكير :- في القسمه نقوم بطرح الاسس

ثالثا :- التحليل باستخدام المجموعات

Factor by grouping

عندما يكون لدينا كثيره حدود تتكون من ٤ أطرف أو أكثر وتلك الأطراف لا يجمع بين جميع أطرافهم عامل مشترك .. لذا نقوم باخذ الاطراف التي بينها اشياء مشتركه وجعلها مع بعضها وتحليل كل حدين على حدى مع مراعاه ان يكون ناتج التحليل لكل حد مطابق للأخر .

مثال للتوضيح :-

$$10x^3 - 25x^2 + 4x - 10$$

نقوم بأخذ الاطراف التي بينها عوامل مشتركه

نلاحظ في هذا المثال ان هناك أكثر من طريقه للتقسيم مثلا

$$(-25x^2 + 4x)(10x^3 - 10)$$

X(-25x+4)10(x^3-1)

هذا التقسيم خاطئ لآن ناتج التحليل مابين القوسين مختلف ودائما في عمليه التحليل باستخدام القروبينج يكون مابين القوسين متشابهه تماما .

وان لم يكن كذلك يجب ان نستخدم طريقه اخرى للتحليل .

التحليل الصحيح هو

$$(10x^3-25x^2)(4x-10)$$

$$5x^2(2x-5)+2(2x-5)$$

والان لكتابه التحليل الناتج بصوره نهائيه نقوم بوضع العوامل المشتركه في قوس مضروب في ناتج التحليل

(2x-5)$(5x^2+2)$

وللتأكد من الحل نقوم بعمل طريقه فويل .. (تأكد\ي كـ تمرين)

مثال آخر :

$$3x^3+2x^2+3x+2$$

في المثال المكتوب نجد أنه يمكننا أختيار أكثر من عاملين مشتركين .،

$3x^3$+ 3x

بينهما عامل مشترك ، وهو الـ 3x ونفس الشيئ مع

$$2x^2+2$$

بينهما عامل مشترك ألا وهو الـ 2

إذا قمنا بإختيارهم فإن النتيجة ستكون :

3x(x^2+1) $2(x^2+1)$

الحل هو :

(3x+2) (x^2+1)

***ملاحظه: مع كثيرة الحدود نقوم بإختيار أي زوجين بينهما عامل مشترك ثم نقوم بالتحليل .، فإذا ظهر أن العامل المشترك الأكبر لكلا الطرفين نفسه فإن العمليه التي قمنا بها صحيحه ، وأذا ظهر أن العامل المشترك الأكبر مختلف في أحد الأطراف فإن العمليه التي قمنا بها خاطئه.**

وللتـــأكد من صحة تحليلنا النهائي نقوم بحل المسأله بطريقة فويل فإذا أصبح الناتج هو نفسه كثيرة الحدود قبل التحليل فإن ما قمنا به صحيح.

مثآل آخر:

$$2x^3 - 8x^2 - 9x + 36$$

من الواضح في المثال السابق أن $2x^3 - 8x^2$ بينهما عامل مشترك و$-9x + 36$ بينهما عامل مشترك ..

لذا نبدأ بالتحليل:

$$2x^3 - 8x^2 = 2x^2\,(x-4)$$

$$-9x + 36 = -9\,(x-4)$$

العامل المشترك الأكبر للحد الثاني هو 9- لأن ***-9 . -2 = 36***

تشابه العامل المشترك الأكبر في كلا الطرفين لذا فإن العمليه التي قمنا بها صحيحه والحل هو :

$$(x-4)(\,2x^2 - 9)$$

رابِعـاً: تحليل كثيرة الحدود ذات الثلاث أطراف ***(Trinomials)*** والتي تحمل صيغة $x^2 + bx + c$

هذه الصيغه هي ببساطه نتيجة ضرب الطرفين في الوسطين (طريقة فويل) لذا كما تعلمنا كيف نقوم بضرب المعادله $(x+3)$ $(x+5)$ مثلاً .. ليصبح الناتج $x^2 + 8x + 15$

فإننا نقوم بالعملية بالعكس .

مثـــال على ذلك:

$$x^2 + 8x + 15$$

لحل كثيرة الحدود هذه نفتح قوسين بداخل كل منهما x وهي ناتج تحليلنا لـ x^2

(x   ) (x   )

الخطوة الثانيه هي التفكير في عددين ناتج ضربهما يساوي +15 وناتج جمعهما يساوي +8

وذلك بالبحث في جدول ضرب الـ 15

وبعد التفكير نجد أن

3*5=15

3+5=8

لذا فإن العددين المطلوبين هنا هما 5 & 3

وتحليل كثيرة الحدود هو : (x+5) (x+3)

*وللتأكد نقوم بالضرب بإستخدام طريقة فويل..

مثال آخر:

$$x^2 - 4x - 21$$

نقوم كما فعلنا في المثال السابق .،

نفتح قوسين بداخل كل منهما x

(x   )(x   )

الخطوه الثانيه : نبحث عن عددين ناتج ضربهما -21 وناتج جمعهما -4

بما أن العدد يجب أن يكون سالب نقوم بتذكر قاعدة الأشارات والتي تنص على أن العدد الموجب أذا ضرب في العدد السالب يكون الناتج عدداً سالباً :

-3 * 7 = -21 ولكن $7-3 \neq -4$

لذا نقوم بالعكس وهو 3 * -7 = -21 لأن 3 – 7 = -4

لذا فإن حل كثيرة الحدود هذه هو : (x-7)(x+3)

(x+3)(x-7) هل بإمكانك التأكد بالتعويض واستخدام طريقة فويل؟!

إذا ظهر لك الناتج هو نفسه كثيرة الحدود الأصليه فإنك تتقدم ،. وإذا لا ((راجع\ي الفصل الرابع))

حل كثيرات الحدود ذات الثلاث أطراف والتي تحتوي على x^3 or y^3 (أي أن القوى لعاملها هي 3

مثال على ذلك:

$$y^3 - 4\,y^2 - 45y$$

لو نلاحظ في كثيرة الحدود هذه تحتوي على المعامل Y في جميع أطرافها كما أنها من الدرجة الثالثة ولتحليلها نقوم بالخطوات التاليه:

أولاً نقوم بالبحث عن العامل المشترك الأكبر ولو لاحظنا فأن الـ y هو العامل المشترك الوحيد الموجود فيها ..

ثانياً ندرجه خارج القوس ونقوم بكتابة ماتبقى من كثيرة الحدود بالداخل ((مع مراعاة الإشارااات)) لـتصبح هكذا:

$$y\ (\ y^2 - 4y - 45)$$

الآن نقوم بتحليل كثيرة الحدود الموجوده بين قوسين كما تعودنا ، أن نفتح قوسين بداخل كل منهما y

(y) (y)

والآن نبدأ بالتفكير بالعددين اللذان مجموع ضربهما يساوي -45 ومجموع جمعهما يساوي -4

وبما أن العدد -45 فهذا يعني أنه مضروب بعدد سالب وعدد موجب : -9 و 5

لنتأكد من جمع العددين : -4 = -9+5

لذا كان حل كثيرة الحدود :

(y-9) (y +5)

ولا ننســـــــــــــــى إدراج الـ y التي حللناها من قبل ليصبح الحل النهائي:

y(y-9) (y +5)

*** هل بإمكانك التأكد من المسأله على طريقة فويـــل ؟؟**

مثال آخر:

$$x^3 - x^2 - 42x$$

~ ناخذ العامل المشترك في كثيرة الحدود وكما نلاحظ أنه x

$$x\,(x^2 - x - 42)$$

والآن الخطوه الثانيه نجد عددين ضربهم يساوي -42 وجمعها -1 بعد أن نفتح قوسين للـ x

وهما -7 و 6

لذا فإن حل المسأله هو :

x (x-7)(x+7)

قومي بالتأكد!!

ملآحظه : هذه النوعيه من التمارين لا تخـــلو أبدا من أي أمتحان شهري أو نهائي ،.

متى نقول عن كثيرة حدود أنها Prime؟

أذا كانت لا تتحلل مثل :

$$x^2 + x + 1$$

هل نستطيع تحليل كثيرة الحدود هذه؟

لو فرضنا أننا سنقول أن تحليلها هو (x+1) (x-1)

فهل عندما نتأكد من ذلك سيكون جوابنا صحيح؟ بالتأكيد لا ..

لأنه حين نحل ما أفترضناه ستكون النتيجه $x^2 - 1$

Factoring Trinomials of the type $ax^2 + bx + c$

تحليل كثيرة الحدود من فئة : $ax^2 + bx + c$

لتحليل كثيرة الحدود هذه فإننا نستخدم طريقة فويل

مثال على ذلك :

$$3x^2 - x - 4$$

بما أن كان للـ x معامل وهو 3

فإن أحد أطراف التحليل هو -4

والطرف الآخر هو -1 =3-4

لماذا نستخدم طريقة فويل في كثيره الحدود من تلك النوع؟

لأنه لا يوجد أي عامل مشترك بين أطرافها فلا يمكننا أختيار عامل مشترك وجعل الباقي بقوس ، ولا يمكننا حلها بطريقة Grouping لأنها تحتوي على ٣ أطراف فقط وطريقة قروبنج يجب أن تكون ٤ أطراف أو أكثر ، لذا نستخدم هنا طريقة فويل ، وهي عن طريق فتح قوسين :

(x) (x)

وبما أن كثيرة الحدود بدأت بـ الـ $3x^2$ أي أنها لم تخلو من معامل x نقوم بإدراج 3 مع الـ x في أحد الأقواس لتصبح :

(3x) (x)

والآن أختلف الوضع ،، أي أنه لا نستطيع البحث عن عددين مضروبهم يساوي 4- ومجموعهم يساوي 1-

لماذا؟!

لوجود الـ 3 ك معامل للـ x في بدايه كثيره الحدود ،،

لذا كان حل المسأله :

(3x-4) (x+1)

مثال آخــــر:

$$14y^2+35y+14$$

كما نلاحظ في المثال الســابق:

 # يوجد عـــــامل مشترك بينهم وهو الـ 7

لذا نقوم بوضعه خارج القوس وإدراج باقي العمليه داخل القوس:

$$7\,(2y^2+5y+2)$$

الآن نقوم بتحليل ما بداخل القوس

ولو لاحظنا فإنه :

 # لا يوجد عامل مشترك .

 # لا يمكننا حلها عن طريق Grouping لآنها أقل من ٤ أطراف .

لذا نستخدم طريقة فويل وهي فتح قوسين ((ملاحظه مهمه : يتم فتح القوسين لأن القصد منه y^2 أي أن y مكرره مرتين .))

(y) (y)

ولا ننسى الـ 7 التي تم تحليلها من قبل لتصبح المسأله :

7 (y) (y)

وبما أن انه كان للـ y معامل وهو الـ 2 وهي غير قابله لتحليل أكثر لذا ستصبح المسأله هكذا:

7 (2y   ) (y   )

كان هناك حد واضح نستطيع أدراجه في المسأله بعد التحليل : $7\,(2y^2+5y+2)$ وهو الـ 2

لذا أصبحت هكذا:

7 (2y   ) (y+2)

ولكتشف العامل الأخير نقوم بجمع 4 =2+2 وبقي لدينا 1 لكي تصبح 5 لذا فإن العامل هو 1

7 (2y+1) (y+2)

مثال آخــر للتمرين :

Factor:

$$2x^2+3x+1$$

((ملاحظه : الحل النهائي للمسأله في نهاية الملخص))

تحليل كثيرة الحدود من فئة : ax^2+bx+c بإستخدام ac- Method

يمكننا حل كثيرة الحدود بطريقة قد تكون أسهل من طريقة فويل .:

مثال على ذلك :

$$15x^2+19x-10$$

لحل كثيرة الحدود هذه نقوم أولاً:

ضرب 15 * -10 = -150

ثانياً نبحث عن عددين ضربهم يساوي -150 وجمعهم يساوي 19

ولتسهيل المهمه نستخدم الآله الحاسبه ونقوم بقسمة -150 في الأعداد الفرديه التي تخطر ببالنا ،. وبعد البحث سنكتشف أن :

6*25= 150

ولأننا نحتاج أن تكون -150 و نحتاج أن يكون مجموع العددين 19 لذا سنجعلها -6 25

الآن نقوم بكتابة كثيرة الحدود بعد تحليلها لتصبح هكذا:

$$15x^2 - 6x + 25x - 10$$

وكما نلاحظ أصبحت كثيرة الحدود هذه مكونه من أربعة أطراف

#لذا نستطيع حلها عن طريق Grouping

$$15x^2 - 6x + 25x - 10$$

نبحث عن العامل المشترك لكل حدين على حده:

3x(5x-2) +5(5x-2)

تطابق بقية مابداخل الحدود لذا الحل صحيح:

(3x+5) (5x-2)

تحليل كثيرة الحدود المربعه Factoring Trinomial Squares:

ما معنى ذلك ؟

هي كثيرات الحدود التي يحتوي طرفها الأول على عدد مربع وطرفها الأخير على عدد مربع ولها قـــاعده وشكل محدد وهو :

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

أو

$$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$$

ملآحظه: يجب ويجب ويجب حفظ هذه الصيغه لأنها ستسهل عليك عملية التعويض .

مثال على ذلك :

$$x^2 - 20x + 100$$

أولاً نشاهد هل أستوفت كثيره الحدود شرط أن يكون طرفها الأول مربع وطرفها الأخير مربع؟

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{100} = 10$$

مما يعني أنها أستوفت الشروط ، الآن نعوض بالقانون :

$$x^2 - 20x + 100$$

$$A^2 - 2AB + B^2 =$$

$$(A - B)^2$$

$(x\text{-}10)^2$

مثال آخر :

$46+16a^2 + a^4$

كثيرة الحدود أستوفت الشروط لأن ٨×٨= ٦٤

$$a^4 = a^2 * a^2$$

الآن نعوض بالقانون:

$$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$$

$(8+a^2)^2$

ملاحظه: تم تربيعها مرتين لأنها كانت بالأساس a^4

مثال للتمرين والحل نهاية الملخص:

Factor:

$$16a^2 - 9$$

بالإمتحان راح تجي بدايه الأسئله من هذا النوع : **Factor**

مثال آخر:

$$8x^2 - 98$$

نجد العامل المشترك ونكتب ماتبقى داخل القوس:

$$2(4x^2 - 49)$$

الآن نقوم بتحليل ما بداخل القوس لأنها من فئه **Trinomial Squares**

2(2x-7)(2x+7)

قواعــد رئيسيه لتخليص الفصل والتمكن من تحليل كثيرة الحدود:

1. **دائماً نبحث عن العامل المشترك الاكبر داخل كثيرة الحدود.**
2. **نركز على إشارات السالب والموجب فكثيراً ما يقع الطلاب في خطأ كبير بسبب الإشاره.**
3. **إذا كانت كثيرة الحدود تحتوي على ٤ حدود أو أكثر نقوم بتحليلها بإستخدام طريقة Grouping**
4. **دائماً نتأكد من الحل بإستخدام طريقة الضرب.**

أمثله للتمرين تجدين حلها نهاية الملخص:

Factor:

$5t^4 - 80$

Solve equations (already factored) using the principle of zero products:

حل كثيرات الحدود التي تم تفكيكها بإستخدام العامل صفـر

سهله جِداً ::

مثال :

Solve :

(x+3)(x-2)

أولا نفترض أن كلا القيميتين تساوي صفر

(x+3)(x-2)=0

الآن نحل المعادلتين كلٌ على حِده:

x+3=0

x= -3

or

x-2= 0

x=2

والآن نعوض بقيمة x مره بـ ٢ ومره بـ -٣ للتأكد من الحل.

حل التمارين :

$2x^2 + 3x + 1$

$=(2x+1)(x+1)$

$16a^2 - 9$

$=(4a+3)(4a-3)$

$5t^4 - 80$

$=5\,(t^2 + 4)\,(t + 2)(t - 2)$