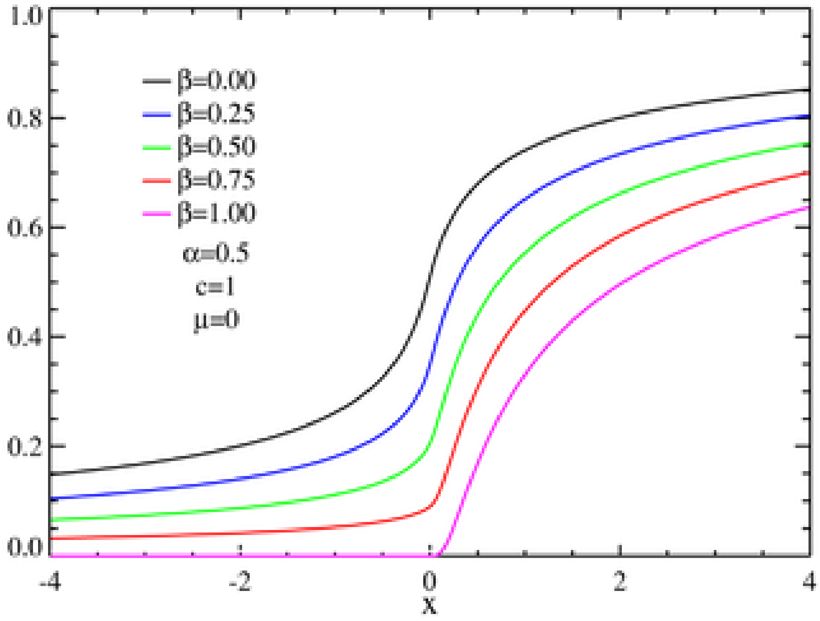
المحاضرة الثانية

السنة الرابعة -إحصاء رياضي

توزعات مستقرة



Stationary Distributions

الدالة المميزة لمجموع عدد عشوائي من المتغيرات العشوائية:

لتكن (X_n) متتالية من المتغيرات العشـــوائية المســـتقلة والتي لها نفس التوزيع الاحتمالي، وبدالة مميزة $\psi_X(t)$، وليكن Y متغير عشـــوائي منقطع يأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$، وبفرض أن Y مستقلة عن المتتالية (X_n) وله دالة مولدة تعطى بالعلاقة:

$$\varphi_Y(t) = Ee^{tY} = \sum_y e^{ty}\, p(Y = y)$$

وبفرض المتغير العشوائي Z معرف بالشكل:

$$Z = \sum_{k=1}^{Y} X_k$$

والهدف في هذه الفقرة هو حساب الدالة المميزة للمتغير Z، بالإضافة لمعالجة الحالة الخاصة التي يكون فيها Y متغير عشوائي بواسوني بالوسيط λ، من أجل ذلك لدينا:

$$\psi_Z(t) = Ee^{itZ} = E\ e^{it\sum_{k=1}^{Y} X_k} = \int_{Z} e^{it\sum_{k=1}^{Y} X_k}\, dp(\omega)$$

وبما أن Y متغير عشوائي منقطع أي يحدد تجزئة لـ Ω:

$$\Omega = \bigcup_n (Y = n)$$

أي أن فضـــاء الأحداث Ω ما هو إلا عبارة عن اجتماع لكل القيم التي تأخذها Y، وبالتالي تصبح الدالة المميزة لـ Z بالشكل:

$$\psi_Z(t) = \int_{Z} e^{it\sum_{k=1}^{Y} X_k}\, dp(\omega)$$

$$\overset{\text{توسيع المجال باستخدام الدالة المميزة}}{=============} \int_{\Omega} I_{(Y=y)}\, e^{it\sum_{k=1}^{Y} X_k}\, dp(\omega)$$

$$= \int_{\cup_n (Y=n)} I_{(Y=y)}\, e^{it\sum_{k=1}^{Y} X_k}\, dp(\omega)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\cup_n (Y=n)} I_{(Y=y)}\, e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\, dp(\omega)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\cup_n (Y=n)} I_{(Y=y)}\, e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\, dp(\omega)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} E\left(I_{(Y=y)}\, e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)$$

وبما أن Y مســـتقل عن المتتالية (X_n)، الأمر الذي يؤدي بالقول أن أي تركيب في المتغير Y يكون مســتقل عن (X_n)، أي دالة المجموعة $I_{(Y=y)}$ تكون مســتقلة عن المتتالية (X_n)، عندئذ:

$$\Rightarrow\ \psi_Z(t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} E\, I_{(Y=y)}.E\left(\, e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right)$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} E\, p(Y=y).\left(\,\psi_X(t)\right)^n$$

$$\xlongequal{\text{من تعريف الدالة المولدة}} \varphi\Big(\psi_X(t)\Big) = (\varphi o \psi)(t)$$

حيث أن:

$$E\left(e^{it\sum_{k=1}^{n} X_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \psi_X(t) = \left(\psi_X(t)\right)^n$$

$$\boxed{\Longrightarrow \psi_Z(t) = \varphi\left(\psi_X(t)\right)}$$

وفي الحالة الخاصة، إذا كان Y بواسوني بوسيط λ عندئذ الدالة المولدة له:

$$\varphi_Y(t) = Ee^{tY} = e^{-\lambda(1-t)} = e^{\lambda(t-1)}$$

عندئذ الدالة المميزة للمجموع تصبح بالشكل:

$$\psi_Z(t) = e^{\lambda(\psi_X(t)-1)}$$

القوانين الاحتمالية القابلة للقسمة بشكل لامتناهي:

تعريف: نقول عن متغير عشوائي X حقيقي إنه قابل للقسمة بشكل لامتناهي، إذا كان من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يوجد n متغير عشوائي حقيقي ولهم نفس القانون الاحتمالي، نرمز لهم بالرموز التالية:

$$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$$

أي أن:

$$X \sim X_{n,1} + X_{n,2} + \ldots + X_{n,n}$$

الأمر الذي يؤدي بالقول بأن:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

وهذا يعني أننا نستطيع أن نكتب:

$$\begin{aligned} P_X(x) &= P_{X_{n,1},X_{n,2},\ldots,X_{n,n}}(x) \\ &= P_{X_{n,1}}(x) * P_{X_{n,2}}(x) * \ldots * P_{X_{n,n}}(x) \\ &= (P_{X_{n,1}}(x))^n \end{aligned}$$

تمرين:

أي من القوانين الاحتمالية التالية قابلة للقسمة بشكل لامتناهي، ولماذا؟

$1 -\quad X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$2 -\quad X \sim Po(\lambda)$

$3 -\quad X \sim G(\lambda, \alpha)$

$4 -\quad X \sim Ky(\lambda)$

الحل:

-1 القانون الطبيعي هو قانون قابل للقسمة بشكل لانهائي لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نستطيع إيجاد n متغير عشوائي $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n})$، لدينا:

الدالة المميزة لمتغير طبيعي

$$\psi_X(t) = e^{\mu it - \frac{\sigma^2}{2}t^2}$$

وبالتالي الدالة المميزة لـ n متغير:

$$\psi_{X_{n,k}}(t) = e^{\frac{\mu}{n}it - \frac{\sigma^2}{2n}t^2}$$

وبالتالي العلاقة التالية محققة:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

لأن:

$$e^{\mu it - \frac{\sigma^2}{2}t^2} = \left(e^{\frac{\mu}{n}it - \frac{\sigma^2}{2n}t^2}\right)^n$$

أي أن القانون الطبيعي قسوم بشكل لامتناهي.

-2 القانون البوا سوني هو قانون قابل للقسمة بشكل لانهائي لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نستطيع إيجاد n متغير عشوائي

$X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ ، لدينا الدالة المميزة لبواسون:

$$\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{-\lambda(1-e^{it})}}$$

وبالتالي الدالة المميزة لـ n متغير بواسوني:

$$\psi_{X_{n,k}}(t) = \boldsymbol{e^{-\frac{\lambda}{n}(1-e^{it})}}$$

وبالتالي العلاقة التالية محققة:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

لأن:

$$\boldsymbol{e^{-\lambda(1-e^{it})}} = \left(\boldsymbol{e^{-\frac{\lambda}{n}(1-e^{it})}}\right)^n$$

أي أن القانون البواسوني قسوم بشكل لامتناهي.

-3 **قانون غاما هو قانون قابل للقسمة بشكل لانهائي** لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نستطيع إيجاد n متغير عشوائي $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim G(\lambda, \alpha)$، لدينا الدالة المميزة لغاما:

$$\psi_X(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda}$$

وبالتالي الدالة المميزة لـ n متغير بواسوني:

$$\psi_{X_{n,k}}(t) = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\frac{\lambda}{n}}$$

وبالتالي العلاقة التالية محققة:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

لأن:

$$\left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\lambda} = \left(\left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-\frac{\lambda}{n}}\right)^n$$

أي أن القانون الغماوي قسوم بشكل لامتناهي.

-4 قانون كوشـــي هو قانون قابل للقســـمة بشـــكل لانهائي لأنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$، نســـتطـيـع إيجـاد n مـتـغـير عشـــوائـي $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$ بحيث أن $X_{n,k} \sim \mathrm{Ky}(\lambda)$ ، لدينا الدالة المميزة لكوشي:

$$\boldsymbol{\psi_X(t) = e^{-\lambda|t|}}$$

وبالتالي الدالة المميزة لـ n متغير بواسوني:

$$\psi_{X_{n,k}}(t) = \boldsymbol{e^{-\frac{\lambda}{n}|t|}}$$

وبالتالي العلاقة التالية محققة:

$$\psi_X(t) = (\psi_{X_{n,1}}(t))^n$$

لأن:

$$\boldsymbol{e^{-\lambda|t|} = \left(e^{-\frac{\lambda}{n}|t|}\right)^{n}}$$

أي أن لقانون لكوشي قسوم بشكل لامتناهي.