قوانين .. $A(x_1, y_1, z_1)$ $B(x_2, y_2, z_2)$

[1] ~~ايجاد~~ $\overrightarrow{AB}$ ع

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{K}$$

[2] مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB}\,(x_2 - x_1\,,\ y_2 - y_1\,,\ z_2 - z_1)$$

[3] احداثيات I منتصف AB

$$I\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\,,\ \frac{y_1 + y_2}{2}\,,\ \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$

[4] احداثيات G مركز ثقل المثلث ABC

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}\,,\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\,,\ \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

[5] المسافة بين A, B

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

[6] طويلة «النظيم» شعاع

$\vec{u}(a, b, c)$ $\quad \|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

[7] الارتباط الخطي لشعاعين.

$$\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{K}$$
$$\vec{v} = a'\vec{i} + b'\vec{j} + c'\vec{K}$$

المعنى الهندسي: أي أنهما متوازيان أو منطبقان.

المعنى الجبري: أي أن $\vec{u} = \lambda \vec{v}$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$

أو

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$$

الفائدة: 1) اثبات توازي.

2) اثبات ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة.

لإثبات ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة A, B, C

1) نشكل شعاعين $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ ويجب ان يكونا مرتبطين خطياً

2) احداهما مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الأخريين

3) وقوعهما على مستقيم واحد

4) " " في مستويين مختلفين في آن واحد.

[8] الارتباط الخطي لثلاث أشعة ...

الجبري: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ مرتبطة خطياً

$$\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$$

الفائدة: 1) اثبات اربع نقط تقع في مستوٍ واحد A, B, C, D

نشكل من هذه النقاط ثلاث أشعة مرتبطة خطياً.

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{AC} + \beta \overrightarrow{BD}$$

ويمكن ان نثبت ان النقاط الاربع تقع في مستوٍ واحد وذلك إن كانت إحداهن مركز أبعاد متناسبة للنقاط الثلاث الأخرى.

2) اثبات مستقيم يوازي مستوي.

حسب نقط A, B, C, D, E

$$\overrightarrow{AB} = \alpha \overrightarrow{DC} + \beta \overrightarrow{DE}$$

تعني ان الشعاع $\overrightarrow{AB}$ يوازي المستوي DCE

$$\overrightarrow{ED} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

تعني ان الشعاع $\overrightarrow{ED}$ يوازي المستوي ABC

[9] جمع الأشعة

1) شسال / نهاية - بداية /

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$$

ويفيد شسال في إدخال نقطة

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EB}$$

2) عكس شسال / بداية - نهاية /

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$$
$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LN}$$

3) متوازي الأضلاع / بداية - بداية /

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٢٤١٢١١٠٩

[1] معادلة الدائرة ...

* $x^2+y^2+ax+by+c=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-\frac{a}{2} \\ y_0=-\frac{b}{2} \end{array}\right\} \Omega(x_0,y_0)$$

$r^2=x_0^2+y_0^2-c$

1) $r>0$ تمثل معادلة دائرة مركزها $\Omega(x_0,y_0)$ ونصف قطرها r .

2) $r=0$ تمثل نقطة وحيدة .

3) $r<0$ مجموعة خالية .

* $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

معادلة دائرة مركزها (x_0,y_0) ونصف قطرها (r)

[2] معادلة الكرة

$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

$$\left.\begin{array}{l} x_0=-\frac{a}{2} \\ y_0=-\frac{b}{2} \\ z_0=-\frac{c}{2} \end{array}\right\} \Omega(x_0,y_0,z_0)$$

$r^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-d$

1) $r>0$ تمثل معادلة كرة مركزها Ω ونصف قطرها r

2) $r=0$ تمثل نقطة وحيدة .

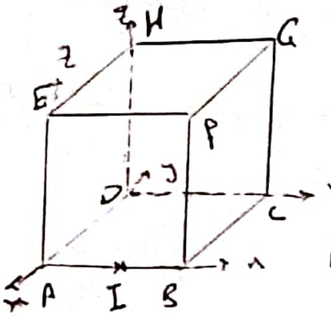
3) $r<0$ مجموعة خالية .

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

معادلة كرة $\Omega(x_0,y_0,z_0)$ ونصف قطرها r

[3] جمع شعاعين ..

1) شال 2) مع شال 3) متوازي الأضلاع 4) الاستبدال 5) ادخال نقطة



$\vec{AB}$ يستبدل $\vec{EF}$, $\vec{HG}$, $\vec{DC}$

$\vec{AE} \longrightarrow \vec{BF}$, $\vec{CG}$, $\vec{DH}$

$\vec{AC} \longrightarrow \vec{EG}$

$\vec{BG} \longrightarrow \vec{AH}$

[4] تعيين احداثيات رؤوس مكعب .

في المعلم المتجانس $(A;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$

$A(0,0,0)$ $B(1,0,0)$ $C(1,1,0)$

$D(0,1,0)$ $E(0,0,1)$ $F(1,0,1)$

$H(0,1,1)$ $G(1,1,1)$ $I(\frac{1}{2},0,0)$

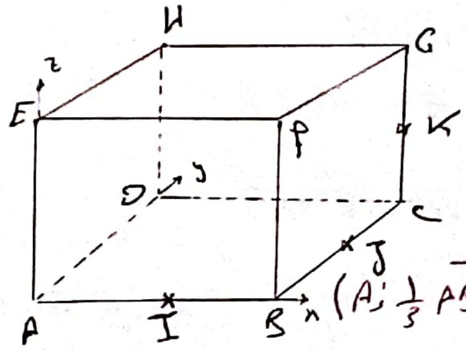
$(D;\vec{DA},\vec{DC},\vec{DH})$

$D(0,0,0)$ $A(1,0,0)$ $B(1,1,0)$

$C(0,1,0)$ $H(0,0,1)$ $E(1,0,1)$

$F(1,1,1)$ $G(0,1,1)$ $I(1,\frac{1}{2},0)$

تعيين نقاط في متوازي مستطيلات .



$(A;\frac{1}{3}\vec{AB},\frac{1}{2}\vec{AD},\vec{AE})$

$AB=3$ $AD=2$ $AE=1$

$A(0,0,0)$ $B(3,0,0)$ $D(0,2,0)$

$C(3,2,0)$ $E(0,0,1)$ $F(3,0,1)$

$H(0,2,1)$ $G(3,2,1)$ $I(\frac{3}{2},0,0)$

$J(3,1,0)$ $K(3,2,\frac{1}{2})$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٢٤١٢١١٥٩

[١٢] معادلة مستوٍ ...

$$ax + by + cz + d = 0$$

لإيجاد معادلة مستوٍ يلزمنا نقطة وناظم.
الناظم: العمودي على المستوي والمستوي له عدد غير منتهٍ من النواظم.

مثال: اوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(1,-2,0)$ ويقبل $\vec{n}(2,3,4)$ ناظماً له.

$2x + 3y + 4z + d = 0$ نعوض A

$2 - 6 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = 4$

$2x + 3y + 4z + 4 = 0$

طرائق إيجاد معادلة مستوٍ.

[1] نقطة وشعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً.

مثال: اوجد معادلة المستوي المار بالنقطة $A(2,3,-1)$ ويقبل شعاعي توجيه له $\vec{u}(0,1,1)$ ، $\vec{v}(1,0,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0 \Rightarrow 0 + b + c = 0$ ①

$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow a + 0 + c = 0$ ②

نفرض $c = 1$ ، $b = -1$ ، $a = -1$

$\vec{n}(-1,-1,1)$

$-x - y + z + d = 0$ نعوض A

$-2 - 3 - 1 + d = 0 \Rightarrow d = 6$

$-x - y + z + 6 = 0$

[2] ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.

مثال: لتكن لدينا النقاط $A(1,0,0)$ ، $B(1,1,0)$ ، $C(0,1,1)$

1) اثبت أن النقاط الثلاث ليست على استقامة واحدة.

2) أوجد معادلة المستوي ABC.

$\left.\begin{array}{l}\vec{AB}(0,1,0)\\ \vec{AC}(-1,1,1)\end{array}\right\}$ $\frac{0}{-1} \neq \frac{1}{1}$ غير مرتبطين خطياً وبالتالي النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

2) نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB} = 0 \Rightarrow 0 + b + 0 = 0$ $\boxed{b=0}$

$\vec{n}\cdot\vec{AC} = 0 \Rightarrow -a + b + c = 0$

نفرض $c = 1 \rightarrow a = 1$

$\vec{n}(1,0,1)$

$x + z + d = 0$ نعوض النقطة A.

$1 + 0 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

$P: x + z - 1 = 0$

[٣] بعد نقطة عن مستوٍ.

مثال: احسب بعد النقطة $H(2,1,-1)$ عن المستوي P الذي معادلته

$P: 3x + 4y - 5z + 6 = 0$

$$dist(H,P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

a, b, c, d من المستوي ، x, y, z من النقطة

$$dist = \frac{|6 + 4 + 5 + 6|}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{21}{\sqrt{50}}$$

[٤] الوضع النسبي لمستويين ...

$P_1: ax + by + cz + d = 0$

$P_2: a'x + b'y + c'z + d' = 0$

ادرس الوضع النسبي: نوجد $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_1}$ ثم نميز

- $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_1}$ غير مرتبطين خطياً ← فهما متقاطعان
  - مع تعامد: $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 0$
  - دون تعامد: $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} \neq 0$
- $\vec{n_2}$ ، $\vec{n_1}$ مرتبطين خطياً ← فهما متوازيان
  - دون انطباق: $\frac{a}{a'} \neq \frac{d}{d'}$
  - مع انطباق: $\frac{a}{a'} = \frac{d}{d'}$

أ. محمد رسول الصباغ
٠٩٢٤١٢١١٠٩

١٤| معادلة مستقيم ..

أولاً: في الهندسة المستوية ..

. الشكل العام لمعادلة مستقيم ...

$$ax + by + c = 0$$

ميله: $m = \frac{-a}{b}$

شعاع توجيه: هو شعاع يوازي المستقيم أو ينطبق عليه

$$\vec{v}(-b , a) = (1 , m)$$

. الشكل المختزل لمعادلة مستقيم ..

$$y = mx + p$$

$p = 0$ المستقيم مار بالمبدأ.

$y = x$ منصف الربعين الأول والثالث

$y = -x$ " " الثاني والرابع.

. معادلة مستقيم مار بنقطة معلومة وميله m معلوم.

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

ملاحظة: . ميل مستقيم مار بنقطتين (A , B)

$$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

. d_1 مستقيم ميله m_1 ، d_2 مستقيم ميله m_2

$$d_1 \parallel d_2 \iff m_1 = m_2$$

$$d_1 \perp d_2 \iff m_1 \times m_2 = -1$$

. بعد نقطة $A(x_0 , y_0)$ عن المستقيم.

$$dist(A , d) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ثانياً: في الهندسة الفراغية

. المعادلات الوسيطية للمستقيم:

لإيجاد المعادلات الوسيطية يلزمنا نقطة $A(x_0 , y_0 , z_0)$ وشعاع توجيه $\vec{u}(a , b , c)$

* طرائق إيجاد المعادلات الوسيطية.

١) المعطيات: نقطة $A(x_0 , y_0 , z_0)$

شعاع توجيه $\vec{u}(a , b , c)$

$$x = x_0 + at$$
$$y = y_0 + bt$$
$$z = z_0 + ct$$

$t \in \mathbb{R}$ مستقيم.

$t \in [0,1]$ قطعة مستقيمة

$t \in [0,+\infty[$ نصف مستقيم.

٢) المعطيات: نقطتين A , B.

أوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم AB.

$$\vec{u} = \vec{AB} \to x = x_A + at$$
$$y = y_A + bt \quad t \in \mathbb{R}$$
$$z = z_A + ct$$

٣) المعطيات: معادلتي مستويين

أوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك للمستويين P_1 , P_2.

مثال:

$$P_1 : x + y + 2z = 3$$
$$P_2 : 2x - y + z = 0$$

أوجد المعادلات الوسيطية لـ P_1 , P_2.

$$x + y + 2z = 3$$
$$2x - y + z = 0$$
$$+ \overline{\quad 3x + 3z = 3 \Rightarrow x + z = 1 \quad}$$

$$x = 1 - z$$

نعوض في ①

$$1 - z + y + 2z = 3 \Rightarrow y = 2 - z$$

نفرض $z = t$

$$x = 1 - t$$
$$y = 2 - t \quad t \in \mathbb{R}$$
$$z = t$$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٢٤٢٤١١٠٩

[115] دراسة وضع مستقيم مع مستقيم

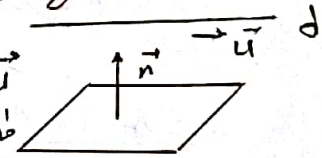
نوجد $\vec{u_1}$ شعاع توجيه للأول .
$\vec{u_2}$ = = الثاني .

$\vec{u_1}$ و $\vec{u_2}$ مرتبطان خطياً
فالمستقيمان متوازيان والقطعة في مستو واحد .

$\vec{u_1}$ ، $\vec{u_2}$ غير مرتبطان خطياً
- متقاطعان: يشتركان بنقطة واحدة والقطعة في مستو واحد .
- متخالفان: أي لا يقعان في مستو واحد .

ثم نجري مطابقة بين المعادلتين الوسيطيتين d_1 و d_2 فنحصل على ثلاث معادلات بمجهولين (الوسيطين) نوجد متغير المجهولين من معادلتين ونعوض في المعادلة الثالثة .
← حققا الثالثة متقاطعان
← لم يحققا الثالثة متخالفان

[116] دراسة وضع مستقيم مع مستو .



1) $\vec{n}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{n}\perp\vec{u}$ فالمستقيم يوازي المستوي .
2) $\vec{n}\cdot\vec{u}\neq 0$ فالمستقيم يقطع المستوي .

* ادرس تقاطع المستقيم مع المستوي ..
1) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم إن لم تكن معطاة .
2) نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي فنحصل على معادلة من الشكل $at=b$

1) $a\in\mathbb{R}^*$ ، $b\in\mathbb{R}$
للمعادلة حل وحيد أي أن المستقيم يشترك مع المستوي بنقطة واحدة .
لإيجاد إحداثيات هذه النقطة نعوض متغير t في المعادلات الوسيطية .

2) $a=b=0$
للمعادلة عدد لانهائي من الحلول أي أن المستقيم يشترك مع المستوي بعدد لانهائي من النقاط فهو محتوى فيه

3) $a=0$ ، $b\neq 0$
المعادلة مستحيلة الحل
أي أن المستقيم لا يشترك مع المستوي بأية نقطة فهو يوازيه

[117] دراسة وضع ثلاث مستويات ...

نحل جملة المعادلات الثلاث حلاً مشتركاً بالطريقة التي درسناها سابقاً / غاوس / .

- للمعادلات الثلاث: حل وحيد
المستويات الثلاث تتقاطع بنقطة واحدة .
- للمعادلات الثلاث: عدد لانهائي من الحلول
فالمستويات الثلاث تشترك بمستقيم (الفصل المشترك)
- المعادلات الثلاث: مستحيلة الحل .
فالمستويات الثلاث لا تشترك مع بعضها بأية نقطة .

مثال: حل باستخدام غاوس

$x+y+z=3 \quad L_1$
$2x+y-z=2 \quad L_2$
$3x-y+2z=4 \quad L_3$

الحل:

$-2L_1+L_2$ * $-3L_1+L_3$

$x+y+z=3 \quad L_1'$
$-y-3z=-4 \quad L_2'$
$-4y-z=-5 \quad L_3'$

$-4L_2'+L_3'$

$x+y+z=3 \quad (1)$
$-y-3z=-4 \quad (2)$
$11z=11 \quad (3)$

من (3) $z=1$
نعوض في (2) $-y-3=-4 \Rightarrow y=1$
- (1) $x+1+1=3 \Rightarrow x=1$

$(1,1,1)$ نقطة تقاطع المستويات الثلاث .

أ. محمد رسول الصباغ
0942121109

[118] مركز الأبعاد المتناسبة ...
أي مركز التوازن

• العلاقة الشعاعية لمركز الأبعاد ..

G م.أ.ن لـ (A,α)(B,β)(C,γ) فإن

$\alpha\vec{AG}+\beta\vec{BG}+\gamma\vec{CG}=\vec{0}$

$\alpha+\beta+\gamma\neq0$

تفيد • استخراج شعاعي التقاطع .

• اثبات ثلاث نقط تقع على استقامة واحدة

A ، B ، C على استقامة واحدة : اذا كانت إحداهن مركز أبعاد متناسبة للنقطتين الأخريين .

• اثبات اربع نقط تقع في مستوٍ واحد .

A ، B ، C ، D تقع في مستوٍ واحد : اذا كانت إحداهن مركز أبعاد متناسبة للنقط الثلاث الأخرى .

• تعيين موضع مركز الأبعاد المتناسبة

G م.أ.ن لـ (A,α)(B,β) فإن

$\vec{AG}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB}$ *

أو $\vec{BG}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\vec{BA}$

* اذا كانت المثقلات من إشارة واحدة .
G تقع بين النقطتين .

* اذا كانت المثقلات من إشارتين مختلفتين
G تقع خارج النقطتين

* اذا كانت المثقلات متساوية لنقطتين فإن
مركز الأبعاد يقع في المنتصف .

* اذا كانت المثقلات متساوية لثلاث نقط
G : هو مركز الأبعاد المتناسبة هو مركز ثقل المثلث

* اذا كانت المثقلات غير متساوية لثلاث نقط

G م.أ.ن لـ (A,α)(B,β)(C,γ)

لتكن I م.أ.ن لـ (B,β)(C,γ) إذاً

G م.أ.ن لـ (A,α)(I,β+γ) تجميع لـ *

* G م.أ.ن لـ اربع نقط
إما كل نقطتين بنقطتين
أو ثلاث نقط بنقطة .

• مجموعة نقط M

G م.أ.ن لـ (A,α)(B,β)(C,γ)

M نقطة ما من الفراغ .

$\alpha\vec{AM}+\beta\vec{BM}+\gamma\vec{CM}=(\alpha+\beta+\gamma)\vec{MG}$

ونميز الحالات

1) $\|\vec{MA}\|=\|\vec{MB}\|$ تمثل مستوٍ محوري للقطعة AB .

2) $\|\vec{MA}\|=\|\vec{BD}\|$ تمثل كرة مركزها A
$r=\|BD\|$

3) $\|\vec{MA}\|=a\|\vec{MB}\|$ $a\neq0$
كرة

4) $\vec{MA}\cdot\vec{MB}=0$ كرة قطرها AB .

5) $MA=MB$ مستوٍ محوري لـ AB

6) $MA=r$ كرة مركزها A ونصف قطرها r .

• إحداثيات مركز الأبعاد ..

$$x_G=\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$y_G=\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

$$z_G=\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}$$

• ملاحظة ...

G م.أ.ن لـ (A,α)(B,β)(C,γ)

يبقى G م.أ.ن لـ (A,kα)(B,kβ)(C,kγ)

اذا ضربت المثقلات بعدد واحد لا يتغير مركز الأبعاد ..

* التثقيل عكس المسافة

أ. محمد رسول الصباغ
0932121109

[19] أوضاع تقاطع مستقيمين ...

[1] نوجد $\vec{u}$ شعاع توجيه المستقيم الأول } غير مرتبطة
$\vec{v}$ شعاع توجيه المستقيم الثاني } خطياً

[2] نكتب المعادلات الوسيطية لكل من d و d'

[3] نجري المطابقة. فنحصل على ثلاث معادلات بدلالة مجهولين (t , λ)
من معادلتين نوجد λ و t ونعوض في المعادلة ٣

[4] إذا حققت المعادلة الثالثة كانا متقاطعين ولإيجاد نقطة التقاطع نعوض في أحد الوسيطين في المعادلة.

• أما إن لم تحقق الثالثة فالمستقيمان متخالفان

تمرين: $A(3,-1,1)$, $B(3,-3,-1)$ والأشعة
$\vec{u}(1,0,-2)$, $\vec{v}(2,1,-3)$
d: مستقيم مار بـ A و $\vec{u}$ شعاع توجيه له
d': " " بـ B و $\vec{v}$ " " "
عين I نقطة تقاطعهما.

الحل: $\vec{u}(1,0,-2)$, $\vec{v}(2,1,-3)$ } $\frac{1}{2} \neq \frac{0}{1}$ غير مرتبطة خطياً

نكتب المعادلات الوسيطية لكل من d و d'.

$$d: \begin{cases} x = x_A + at = 3+t \\ y = y_A + bt = -1 \\ z = z_A + ct = 1-2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$d': \begin{cases} x = x_B + a\lambda = 3+2\lambda \\ y = y_B + b\lambda = -3+\lambda \\ z = z_B + c\lambda = -1-3\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

بالمطابقة:

$\cancel{3}+t = \cancel{3}+2\lambda$ (1)
$-1 = -3+\lambda$ (2)
$1-2t = -1-3\lambda$ (3)

من (2) $\boxed{\lambda = 2} \xrightarrow{(1)} \boxed{t=4}$
نعوض في (3)
$1-8 \overset{?}{=} -1-6 \Rightarrow -7 = -7$
فالمستقيمان متقاطعان

نعوض t:
$$\begin{cases} x = 3+4 = 7 \\ y = -1 \\ z = -1-8 = -7 \end{cases} \quad I(7,-1,-7)$$
نقطة تقاطع

وظيفة:
$d: A(2,0,5)$ $\vec{u}(2,5,-1)$
$d': B(2,2,-1)$ $\vec{v}(1,2,1)$
عين I نقطة تقاطعهما

---

[20] بعد نقطة عن مستقيم فراغياً ..

صيغة السؤال: احسب بعد النقطة M عن المستقيم AB

خطوات الحل: 1) نكتب المعادلات الوسيطية للمستقيم AB إن لم تكن معطاة.

2) نختار نقطة K من المستقيم AB وتكون إحداثياتها من المعادلات الوسيطة.

3) نحسب بعد M عن K (المسافة بين نقطتين)

4) نكتب ما تحت الجذر بالصيغة القانونية أي
$MK = \sqrt{a(t-b)^2+c}$

5) نختار أصغر مسافة وذلك من أجل $t=b$
$MK = \sqrt{c}$ وهو بعد M عن المستقيم AB.

تمرين: لتكن لدينا النقاط $A(2,3,0)$ $B(2,3,6)$ $M(4,-1,2)$ احسب بعد M عن المستقيم AB

الحل:
$\vec{u} = \vec{AB}(0,0,6)$

$$\begin{cases} x = x_A + at = 2 \\ y = y_A + bt = 3 \\ z = z_A + ct = 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

لتكن $K(2,3,6t)$ نقطة من AB

$MK = \sqrt{4+16+(6t-2)^2}$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٢٤٢١٢١٦٩

$MK = \sqrt{(6t-2)^2+20}$

نختار اقصر مسافة وذلك من اجل $t = \frac{1}{3}$

ومنه

$MK = \sqrt{20}$

وهو بعد M عن K.

٤) بعد نقطة عن فصل مشترك لمستويين.

خطوات الحل: ١) نوجد $\vec{n_2}$, $\vec{n_1}$ يجب ان يكونا غير مرتبطين خطياً و $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} \neq 0$

٢) نوجد المعادلات الوسيطية للفصل المشترك وذلك من خلال حل جملة معادلتي المستويين.

٣) نتابع الطريقة كما في الفقرة (20)

تمرين:

$P: 2x - y + z - 4 = 0$ $\quad A(3,-1,2)$

$Q: x + y + 2z - 5 = 0$

اثبت تقاطع المستويين P و Q واحسب بعد A عن المستقيم d الفصل المشترك.

$\vec{n_1}(2,-1,1)$, $\vec{n_2}(1,1,2)$ غير مرتبطين خطياً $\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1}$

متقاطعان دون تعامد

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 2-1+2 \neq 0$

$$2x - y + z - 4 = 0$$
$$x + y + 2z - 5 = 0 \quad +$$
$$3x + 3z - 9 = 0 \quad \div 3$$
$$x + z - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 - z$$

$③ \rightarrow 3 - z + y + 2z - 5 = 0$

$y = 2 - z$ نفرض $z = t$

$$d: \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

نأخذ النقطة $K(3-t, 2-t, t)$ من d.

$$AK = \sqrt{(3-t-3)^2 + (2-t+1)^2 + (t-2)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + (3-t)^2 + (t-2)^2}$$
$$= \sqrt{t^2 + 9 - 6t + t^2 + t^2 - 4t + 4}$$
$$= \sqrt{3t^2 - 10t + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t^2 - \frac{10}{3}t\right) + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t^2 - \frac{10}{3}t + \frac{25}{9} - \frac{25}{9}\right) + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{3} + 13}$$
$$= \sqrt{3\left(t - \frac{5}{3}\right)^2 + \frac{14}{3}}$$

نختار اقصر مسافة وذلك من اجل $t = \frac{5}{3}$

$AK = \sqrt{\frac{14}{3}}$ وهو بعد A عن المستقيم d.

$P: x - y + z = 0$ $\quad A(2,2,-1)$

$Q: 3x + z - 1 = 0$

احسب بعد A عن d المستقيم الفصل المشترك لـ P و Q.

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٢٤١٢١١٥٩

٢٢] البعد بين نقطة عن الفصل المشترك لمستويين متعامدين.

خطوات الحل:

١) نوجد $\vec{n_1}$ ، $\vec{n_2}$ يجب ان يكونا غير مرتبطين خطياً و $\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}=0$

٢) نوجد d_1 بعد النقطة عن المستوي الأول

٣) نوجد d_2 بعد النقطة عن المستوي الثاني

٤) فيكون بعد النقطة عن الفصل المشترك d حسب مبرهنة فيثاغورث

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2$$

تمرين: $A(2,1,2)$ والمستويين P , Q حيث

$P: x+y-2z-1=0$

$Q: x+y+z=0$

احسب بعد A عن الفصل المشترك للمستويين P, Q

غير مرتبطين خطياً

$\vec{n_1}(1,1,-2)$, $\vec{n_2}(1,1,1)$ $\quad \frac{1}{1} \neq \frac{-2}{1}$

وهما متعامدان

$\vec{n_1}\cdot\vec{n_2} = 1+1-2=0$

$$d_1 = dist(A,P) = \frac{|2+1-4-1|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{2}{\sqrt6}$$

$$d_2 = dis(A,Q) = \frac{|2+1+2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{5}{\sqrt3}$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 = \frac{4}{6} + \frac{25}{3} = \frac{54}{6} = 9$$

وهو بعد A عن الفصل المشترك $d=3$

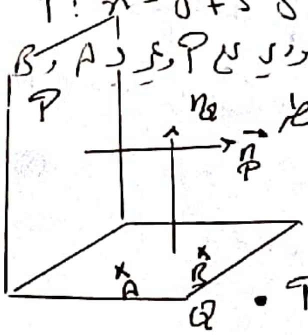
٢٣] جد معادلة مستوٍ يحوي مستقيماً ويعامد مستوٍ آخر معلوم

تمرين: $A(1,-1,2)$ $B(2,0,4)$

$P: x-y+3z-4=0$

جد معادلة المستوي Q العمودي على P والمار بـ A, B.

لإيجاد معادلة Q يلزمنا نقطة وناظم.



نفرض $\vec{n_Q}(a,b,c)$

• $P \perp Q \Rightarrow \vec{n_P} \perp \vec{n_Q}$

$\vec{n_P}\cdot\vec{n_Q}=0 \Rightarrow (1,-1,3)(a,b,c)=0$

$a-b+3c=0$ —①

$\vec{n_Q} \perp Q \Rightarrow \vec{n_Q} \perp \vec{AB} \Rightarrow \vec{n_Q}\cdot\vec{AB}=0$

$(a,b,c)(1,1,2)=0 \Rightarrow$

$a+b+2c=0$ —②

نفرض $c=2$

$a-b+6=0$

$+\ a+b+4=0$

$2a+10=0 \Rightarrow \boxed{a=-5}$

نعوض في ① $-5-b+6=0 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$\vec{n_Q}(-5,1,2)$

$Q: -5x+y+2z+d=0$ نعوض A

$-5-1+4+d=0 \Rightarrow d=2$

$Q: -5x+y+2z+2=0$

$A(1,0,0)$ $B(0,1,1)$ $P: x+y+z=2$

٢٤] مستقيم عمودي على مستوٍ

• نقول عن المستقيم d انه عمودي على المستوي P إذا وفقط إذا تحقق أحد الشرطين

١) $\vec{v}$, $\vec{n}$ مرتبطين خطياً.

٢) إذا كان عمودياً على مستقيمين متقاطعين منه

$A(2,5,3)$ $B(-1,0,-1)$ ومستوٍ P يقبل $\vec{v}(3,-1,-1)$ $\vec{u}(1,1,-2)$ شعاعي توجيه له

أثبت أن المستقيم AB عمودي على P

غير مرتبطين خطياً

$\vec{u}(1,1,-2)$

$\vec{v}(3,-1,-1)$

$\vec{AB}(-3,-5,-4)$

$\vec{AB}\cdot\vec{u} = -3-5+8=0$

$\vec{u} \perp \vec{AB}$

$\vec{AB}\cdot\vec{v} = (-3,-5,-4)(3,-1,-1)=0$

$= -9+5+4=0$

$\vec{v} \perp \vec{AB}$

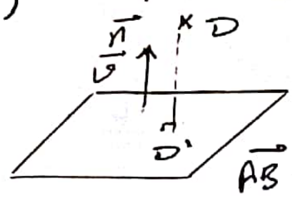
ومنه AB عمودي على المستوي P.

أ. محمد رسول الصباغ
٠٩٤٤١٤١١٥٠٩

٢٥) المسقط القائم لنقطة على مستوي ..

$A(1,2,0)$ $B(0,0,1)$ $C(1,5,5)$

أوجد إحداثيات 'D المسقط القائم للنقطة $D(-11,9,-4)$ على المستوي ABC



* نوجد معادلة المستوي ABC

ابدأ لم تكن نقطة .

$\vec{AB}(-1,-2,1)$, $\vec{AC}(0,3,5)$ } غير مرتبطين خطياً

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=0 \Rightarrow -a-2b+c=0$ —①

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=0 \Rightarrow 3b+5c=0$ —②

نفرض $c=1$

$-a-2b+1=0$

$3b+5=0 \Rightarrow b=\frac{-5}{3}$

نعوض في ① $-a+\frac{10}{3}+1=0 \Rightarrow$

$-a+\frac{13}{3}=0 \Rightarrow a=\frac{13}{3}$

$\vec{n}\left(\frac{13}{3},\frac{-5}{3},1\right) \Rightarrow \vec{n}(13,-5,3)$

$13x-5y+3z+d=0$ نعوض B

$0-0+3+d=0 \Rightarrow d=-3$

$ABC: 13x-5y+3z-3=0$

* نوجد المعادلات الوسيطية للمستقيم 'DD

وذلك باعتبار شعاع توجيه المستقيم هو ناظم المستوي

$\vec{n}=\vec{u}(13,-5,3)$

$x=x_0+at=-11+13t$

$y=y_0+bt=9-5t$ $\quad t\in\mathbb{R}$

$z=z_0+ct=-4+3t$

* نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي.

$13(-11+13t)-5(9-5t)+3(-4+3t)-3=0$

بفك الأقواس

$-143+169t-45+25t-12+9t-3=0$

$203t=203 \Rightarrow t=1$

نعوض t في المعادلات الوسيطية

$x=-11+13=2$

$y=9-5=4$

$z=-4+3=-1$ } $D'(2,4,-1)$

تمرين:

$A(2,4,3)$ $B(4,-2,3)$ $C(1,-1,1)$

$D(3,3,-3)$

① اثبت أن النقاط A، B، C ليست على استقامة واحدة.

② أوجد معادلة المستوي ABC

③ عين إحداثيات 'D المسقط القائم لـ D.

---

٢٦) : إذا تقاطع مستويين متقاطعين أوجد شعاع توجيه الفصل المشترك لهذين المستويين.

$P: x-2y+3z-5=0$

$Q: x+y+z+1=0$

① علل كون P، Q متقاطعين

② أعط المعادلات الوسيطية للفصل المشترك

③ اكتب معادلة المستوي R العمودي على P، Q ومار بالنقطة $A(2,5,-2)$

①

$\vec{n}_P(1,-2,3)$, $\vec{n}_Q(1,1,1)$ } $\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}$

غير مرتبطين خطياً فهما متقاطعان

②

$x-2y+3z-5=0$

$-x-y-z-1=0$

$-3y+2z-6=0$

$3y=2z-6 \Rightarrow y=\frac{2}{3}z-2$

تابع ثاني ②

$x + \frac{2}{3}z - 2 + z + 1 = 0$

$x + \frac{5}{3}z - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 - \frac{5}{3}z$

بفرض $z = t$

$x = 1 - \frac{5}{3}t$

$y = \frac{2}{3}t - 2 \quad t \in \mathbb{R}$

$z = t$

③ R: عمودي على المستويين المتقاطعين P ، Q

اذن $\vec{u} = \vec{n}\left(\frac{-5}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$

$\vec{n}(-5, 2, 3)$

ومنه معادلة المستوي R:

$-5x + 2y + 3z + d = 0$

نعوض A

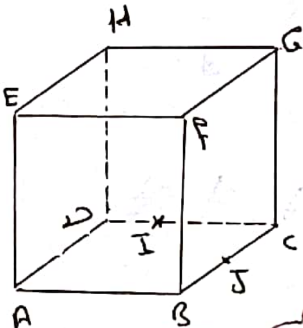
$-10 + 10 - 6 + d = 0 \Rightarrow d = 6$

$R: -5x + 2y + 3z + 6 = 0$

مسألة 1

$\vec{DI} = \frac{1}{4}\vec{DC}$

$\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC}$



اثبت ان المستقيم HI يوازي المستوي EGJ

ملاحظة: لاثبات مستقيم يوازي مستوي:

١) شعاع توجيه المستقيم يعامد الناظم

٢) مرتبط خطياً مع شعاعي توجيه غير مرتبطين خطياً للمستوي

نختار معلماً متجانساً $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$A(0,0,0) \quad B(1,0,0) \quad C(1,1,0) \quad D(0,1,0)$

$E(0,0,1) \quad F(1,0,1) \quad H(0,1,1) \quad G(1,1,1)$

$I(x,y,z)$

لدينا $\vec{DI} = \frac{1}{4}\vec{DC}$

$(x, y-1, z) = \frac{1}{4}(1,0,0)$

$= \left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$ بالمطابقة

$x = \frac{1}{4} \quad y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \quad z = 0$

$I\left(\frac{1}{4}, 1, 0\right)$

لدينا $\vec{BJ} = \frac{3}{4}\vec{BC} \quad J(x,y,z)$

$(x-1, y, z) = \frac{3}{4}(0,1,0)$

$= \left(0, \frac{3}{4}, 0\right)$ بالمطابقة

$x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = \frac{3}{4} \quad z = 0$

$J\left(1, \frac{3}{4}, 0\right)$

اذن شعاع توجيه المستقيم HI هو

$\vec{u} = \vec{HI}\left(\frac{1}{4}, 0, -1\right)$

لنوجد ناظم المستوي EGJ.

$\vec{EG}(1,1,0) \quad \vec{n}(a,b,c)$

$\vec{EJ}\left(1, \frac{3}{4}, -1\right)$

$\vec{n}\cdot\vec{EG} = 0 \Rightarrow a + b = 0$ ①

$\vec{n}\cdot\vec{EJ} = 0 \Rightarrow a + \frac{3}{4}b - c = 0$ ②

بفرض $\boxed{b = 4}$ نعوض في ① $\boxed{a = -4}$

نعوض في ② $a + 3 - c = 0 \Rightarrow -4 + 3 - c = 0$

$\boxed{c = -1} \quad \vec{n}(-4, 4, -1)$

المستقيم // المستوي $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{u}\cdot\vec{n} = \frac{1}{4}(-4) + 0(4) - 1(-1)$

$= -1 + 0 + 1 = 0$

ومنه المستقيم HI يوازي المستوي EGJ

مسألة 2: $A(3,2,1) \quad B(1,2,0) \quad C(3,1,-2)$

① اثبت ان النقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة.

② اوجد معادلة المستوي ABC

③ عين احداثيات النقطة m التي تجعل النقطة $M(m,1,3)$ تنتمي الى المستوي ABC

④ ما العلاقة بين x و y لتقع النقاط A ، B ، C ، D حيث $D(x,y,3)$ في مستوٍ واحد.

$\vec{AB}(-2, 0, -1)$
$\vec{AC}(0, -1, -3)$
$\Big\}\ \frac{-2}{0} \neq \frac{0}{-1}$ غير مرتبطين خطياً

فالنقاط A ، B ، C ليست على استقامة واحدة

• اوجد معادلة الكرة التي مركزها $A(2,-2,2)$ وتمس المستوي :

$P: x+2y+3z=5$

$$R=dist(A,P)=\frac{|2-4+6-5|}{\sqrt{1+4+9}}=\frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$(x-2)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=\frac{9}{14}$$

• عين طبيعة مجموعة النقاط ذات الاحداثيات

$x^2+y^2+z^2-2x+6y-2=0$

$a=-2$ $b=6$ $c=0$ $d=-2$

$x_0=-\frac{a}{2}=1$

$y_0=-\frac{b}{2}=-3$ $\Omega(1,-3,0)$

$z_0=0$

$R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-d$

$=1+9+0+2=12$

وهي معادلة كرة مركزها $(1,-3,0)$, $R=\sqrt{12}$

$x^2+y^2+z^2+x+y+z=0$

$a=1$ $b=1$ $c=1$ $d=0$

$x_0=-\frac{a}{2}=-\frac{1}{2}$

$y_0=-\frac{b}{2}=-\frac{1}{2}$ $\Omega(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$

$z_0=-\frac{c}{2}=-\frac{1}{2}$

$R^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2-d=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

وهي معادلة كرة

$r=0$ تمثل نقطة

$r<0$ مجموعة خالية

• $x^2+y^2+z^2-10x+2z+26=0$

$a=-10$ $b=0$ $c=2$ $d=26$

$\Omega(5,0,1)$ $R^2=25+0+1-26=0$

تمثل مجموعة خالية .

• $x^2+y^2+z^2-4x-2z+5=0$

$a=-4$ $b=0$ $C=1$ $d=5$

$\Omega(2,0,1)$

$R^2=4+1-5=0$

تمثل نقطة $\Omega(2,0,1)$

نفرض $\vec{n}(a,b,c)$ منه

$\vec{n}\cdot\vec{AB}=-2a-c=0$

$\vec{n}\cdot\vec{AC}=-b-3c=0$

نفرض $c=1$

$a=-\frac{1}{2}$

$b=-3$

$\vec{n}(-\frac{1}{2},-3,1)\xrightarrow{\times 2}\vec{n}(-1,-6,2)$

$-x-6y+2z+d=0$

نعوض B

$d=-2-1-12+0+d=0$

منه $d=13$

$ABC: -x-6y+2z+13=0$

$M(m,1,3)\in ABC$ ⇐

$-m-6+6+13=0$

$-m+13=0 \Rightarrow \boxed{m=13}$

[٤]

نعوض $D(x,y,3)$ في معادلة المستوي ABC

$-x-6y+6+13=0$

$-x-6y+19=0$ وهي العلاقة بين x , y

معادلة الكرة ..

• اوجد معادلة الكرة التي مركزها $\Omega(2,-1,3)$ وتمر بالنقطة $A(-1,0,1)$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=R^2$

نعوض النقطة A في معادلة الكرة

$(-3)^2+(1)^2+(-2)^2=R^2$

$9+1+4=R^2 \Rightarrow R^2=14$

$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=14$

• اوجد معادلات الكرة التي مركزها $\Omega(0,5,-1)$ $R=\sqrt{3}$

$(x-0)^2+(y-5)^2+(z+1)^2=(\sqrt{3})^2$

$x^2+(y-5)^2+(z+1)^2=3$

أ. محمد رسول الصباغ
٠٩٤٤١٢١١٠٩

تمثيل مجموعة نقط ..

مسألة ١ :

$A(2,1,2)$ $\quad B(-2,0,2)$

١) أوجد معادلة للمجموعة ع المكونة من النقط $M(x,y,z)$ التي تحقق $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$

٢) ما طبيعة المجموعة ع .

الحل :

$\overrightarrow{MA}(2-x,1-y,2-z)$

$\overrightarrow{MB}(-2-x,-y,2-z)$

$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff (2-x)(-2-x)-y(1-y)+(2-z)^2=0$

$-4-\cancel{2x}+\cancel{2x}+x^2-y+y^2+\cancel{4}-4z+z^2=0$

$x^2+y^2+z^2-y-4z=0$ وهي معادلة كرة

$\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ $\quad R^2=0+\frac{1}{4}+4-0$

$\Omega\left(0,\frac{1}{2},2\right)$ $\quad =\frac{17}{4}$

مسألة ٢ : تأمل النقطتين $A(1,1,1)$ $B(0,-1,-1)$

١) أوجد معادلة المجموعة ع المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=2MB$

ما طبيعة ع

٢) أوجد معادلة للمجموعة P المكونة من النقاط $M(x,y,z)$ التي تحقق $MA=MB$

ما طبيعة P .

مسألة ٣ : لتكن G مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,2)$ $(B,1)$ $(C,-1)$

G' مركز أبعاد متناسبة للنقاط $(A,2)$ $(B,-1)$ $(C,1)$

١) عيّن المجموعة ع المكونة من النقاط M التي تحقق

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|$

٢) عيّن المجموعة F المكونة من النقط M التي تحقق

$\|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|=\|2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}\|$

تذكر : G م.أ.م للنقاط $(A,\alpha)(B,\beta)(C,\gamma)$ و M نقطة ما

$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}+\gamma\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$

١)

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ — ①

لأن G م.أ.م للنقاط $(A,2)(B,1)(C,-1)$

$2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG'}$ — ②

لأن G' م.أ.م للنقاط $(A,2)(B,-1)(C,1)$

نعوض ① ، ② بعلاقة المسألة

$\|2\overrightarrow{MG}\|=\|2\overrightarrow{MG'}\| \iff$

$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{MG'}\|$ وهي معادلة المستوي المحوري للقطعة المستقيمة $[GG']$

٢)

$2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MG}$ — ①

لأن G م.أ.م للنقاط $(A,2)(B,1)(C,-1)$

لدينا $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-2\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MB}$

$=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}$

$2\overrightarrow{MG}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MB}$

$2\overrightarrow{MG}-2\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

$2(\overrightarrow{MG}-\overrightarrow{MB})=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

$2(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{BM})=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$ — ③

$2\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}$

نعوض ① ، ③ بنص المسألة

$\|2\overrightarrow{MG}\|=\|2\overrightarrow{BG}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\|=\|\overrightarrow{BG}\|$ وهي معادلة كرة مركزها G ونصف قطرها

$R=|BG|$

مسألة : G م.أ.م للنقاط

$(B,1)$ $(C,1)$ $(D,1)$

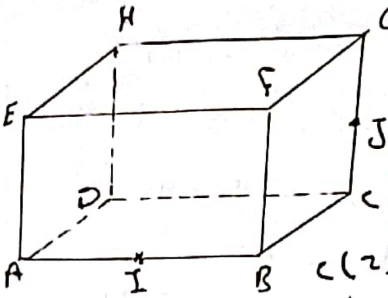
حدد مجموعة نقط الفراغ M التي تحقق .

$\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\|=\|3\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MD}\|$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٣٤١٢١١٠٩

متوازي مستطيلات / مكعب مستطيل $ABCDEFGH$

نقابل المعلم المتجانس $(A; \frac{1}{2}\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$



① احسب الطولين IJ, DJ

$A(0,0,0)$ $B(2,0,0)$ $C(2,1,0)$ $D(0,1,0)$

$E(0,0,1)$ $H(0,1,1)$ $F(2,0,1)$ $J(2,1,\frac{1}{2})$

$G(2,1,1)$ $I(1,0,0)$

$IJ = \sqrt{1+1+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$DJ = \sqrt{4+0+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16+1}{4}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

② اثبت ان المستقيمين ID , IJ متعامدان

$\vec{IJ}(1,1,\frac{1}{2})$, $\vec{DI}(1,-1,0)$ $\Big\}$ $\vec{DI}\cdot\vec{IJ} = 1-1+0=0$

$\vec{IJ} \perp \vec{DI}$ واحسب $\cos \hat{J}$

$\cos J = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{IJ}{DJ}$

$= \frac{\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{17}}$

③ a) اعط معادلة للمستوي DIJ

$\vec{DI}(1,-1,0)$ $\quad \vec{n}(a,b,c)$

$\vec{IJ}(1,1,\frac{1}{2})$

$\vec{n}\cdot\vec{DI}=0 \Rightarrow a-b=0$ ①

$\vec{n}\cdot\vec{IJ}=0 \Rightarrow a+b+\frac{1}{2}c=0$ ②

بفرض $a=1$ $\quad b=1$

$1+1+\frac{1}{2}c=0 \Rightarrow c=-4$

$\vec{n}(1,1,-4)$

$ax+by+cz+d=0$ نعوض I

$x+y-4z+d=0$

$1+0+0+d=0 \Rightarrow d=-1$

$DIJ: x+y-4z-1=0$

b) احسب بعد H عن المستوي DIJ.

$dist(H-DIJ) = \frac{|0+1-4-1|}{\sqrt{1+1+16}} = \frac{4}{\sqrt{18}}$

$= \frac{4}{3\sqrt{2}}$

④ احسب حجم رباعي الوجوه $HDIJ$

$v = \frac{1}{3}S\cdot h$

$S_{DIJ} = \frac{1}{2}DI\cdot IJ = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+0}\times\frac{3}{2}$

$= \frac{3\sqrt{2}}{4}$

$v = \frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{2}}{4}\times\frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{3}$

⑤ a) اعط تمثيلا وسيطيا للمستقيم d المار بـ J والعمودي على المستوي HDI

d العمودي على المستوي $\Leftrightarrow$ $\vec{n}_{HDI} = \vec{u}_d$ لتوجيه $\vec{n}$

$\vec{HD}(0,0,-1)$ $\quad \vec{n}(a,b,c)$

$\vec{HI}(1,-1,-1)$

$\vec{n}\cdot\vec{HD}=0 \Rightarrow -c=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$\vec{n}\cdot\vec{HI}=0 \Rightarrow a-b-c=0 \Rightarrow a=b$

بفرض $a=1=b$ $\quad \vec{n}(1,1,0)$

$x+y+d=0$ نعوض H

$0+1+0+d=0 \Rightarrow d=-1$

$HDI: x+y-1=0$ $\quad \vec{n}=\vec{u}(1,1,0)$

$d: \begin{cases} x = x_J + at = 2+t \\ y = y_J + bt = 1+t \\ z = z_J + ct = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad t\in\mathbb{R}$

b) احسب احداثيات J' نقطة تقاطع d مع HDI

لايجادها نعوض المعادلات الوسيطية في معادلة المستوي

$2+t+\cancel{1}+t-\cancel{1}=0$

$2t=-2 \Rightarrow \boxed{t=-1}$ بتعويضها في المعادلات الوسيطية

$\left.\begin{array}{l} x=2-1=1 \\ y=1-1=0 \\ z=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow J'(1,0,\frac{1}{2})$

⑥ البعد J عن المستوي HDI

$dist(J,HDI) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

$= \sqrt{2}$

أ. محمد رسول الصباغ ٠٩٣٤١٢١١٠٩