إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة وتمارين وتدريبات

كتاب الرياضيات

للصف الثاني عشر (العلمي)

الفصل الدراسي الثاني

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول التدريبات والتمارين

الصف : الثاني الثانوي العلمي **الكتاب : الرياضيات** **الفصل : الثاني**

الوحدة : الرابعة / تطبيقات التكامل

الفصل الأول : التكامل

أولًا : معكوس المشتقة

تدريب (١) :-

ق(س) متصل على ح لأنه طرح اقترانين متصلين

$م'(س) = ٤س^٣ - \text{جتا}س$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

تدريب (٢) :-

هـ(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ $م'(س) = ق(س)$

هـ(س) معكوس لمشتقة ق(س)

∴ $هـ'(س) = ق(س)$

$ل'(س) = ٣م'(س) - ٥هـ'(س)$

$ل'(س) = ٣ق(س) - ٥ق(س)$

$= -٢ق(س)$

تدريب (٣) :

$\int ق(س)\ \text{جا}\frac{٣\pi}{٢}\ دس = ١ + س^٣$ ، جد ق(س)

$ق(س) \times \text{جا}\frac{٣\pi}{٢} = ٣س^٢$

$ق(س) \times -١ = ٣س^٢$

∴ $ق(س) = -٣س^٢$.

تدريب (٤)

$ق'(س) = ٢\text{جا}س\,\text{جتا}س + أ\,\text{جا}س$

$ق'(\frac{\pi}{٤}) = \text{صفر} \Leftarrow ١ + أ\,\text{جا}\frac{\pi}{٤} = \text{صفر}$

$\boxed{أ = -\sqrt{٢}}$

تمارين ومسائل صفحة ٢٢٧ :

١) ق(س) متصل على ح - {-١} لأنه اقتران نسبي.

$م'(س) = \frac{(س+١) - س}{(س+١)^٢}$

$= \frac{١}{(س+١)^٢} = ق(س)$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٢) ق(س) متصل لأنه اقتران مثلثي

$م'(س) = ٢\text{جا}س\,\text{جتا}س = \text{جا}٢س = ق(س)$

∴ م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق(س)

٣) م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

$م'(س) = ق(س)$

$م'(س) = ٣س^٢ + ١٠س - ٣ = ق(س)$

$ق(-٢) = ٣ \times ٤ + ١٠ \times -٢ - ٣$

$= -١١$

٤) م(س) معكوس لمشتقة ق(س)

$م'(س) = ق(س)$

$ق(س) = ٨س^٣ + \frac{٢س}{٢\sqrt{س^٢+٣}}$

$ق(١) = ٨ + \frac{\cancel{٢}}{٢ \times \cancel{٢}} = ٨,٥$

٥) ق(س) = $٣س^{٢}$

م(س) = $س^{٣}$ + جـ

م(٢) = ٥ ⇐ ٥ = ٨ + جـ ⇐ جـ = −٣

∴ م(س) = $س^{٣} - ٣$

* * *

٦) بما أن $م_{١}(س)$ ، $م_{٢}(س)$ معكوسين لمشتقة الاقتران ق.

∴ $م_{١} - م_{٢} = جـ$

$٣س^{٢} - ٢س + ٥ - م_{٢}(س) = جـ$

$م_{٢}(س) = ٣س^{٢} - ٢س + ٥ - جـ$

ولكن $م_{٢}(٢) = ٤$ ⇐ $١٢ - ٤ + ٥ - جـ = ٤$

$\boxed{جـ = ٩}$

$م_{٢}(س) = ٣س^{٢} - ٢س - ٤$

* * *

٧) ص = $\int \sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}\ دس$ ، $\left.\frac{دص}{دس}\right|_{س=-٢} = ؟$

نشتق الطرفين

$\frac{دص}{دس} = \sqrt[٥]{٣س^{٢} - ٤س + ١٢}$

عندما س = −٢ ⇐ $\frac{دص}{دس} = \sqrt[٥]{١٢ + ٨ + ١٢}$

$= \sqrt[٥]{٣٢} = ٢$

* * *

٨) $\int ق(س)\ دس = س^{٣} - س^{٢} + ٢س + ١$ ، قَ(−٣) = ؟

نشتق الطرفين

ق(س) = $٣س^{٢} - ٢س + ٢$

قَ(س) = ٦س − ٢

قَ(−٣) = −١٨ − ٢ = −٢٠

* * *

٩) ∫ق(س) دس = جاس − جتاس + ٣

اثبت أن ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ٢

ق(س) = جتاس + جاس

ق($\frac{\pi}{٢}$) = ١

قَ(س) = − جاس + جتاس

قَ($\frac{\pi}{٢}$) = −١

ق($\frac{\pi}{٢}$) − قَ($\frac{\pi}{٢}$) = ١ − −١ = ٢ ✱

* * *

١٠) أ) ق(س) = $\frac{-١}{س^{٢}}$

م(س) = $\frac{١}{س}$ + جـ

ب) ق(س) = قاس جتاس

ق(س) = ١

م(س) = س + جـ

جـ) ق(س) = $\frac{١}{٢\sqrt{س}}$

م(س) = $\sqrt{س}$ + جـ

د) ق(س) = ٥ + ٥ $ظا^{٢}س$ = ٥(١ + $ظا^{٢}س$)

ق(س) = ٥ $قا^{٢}س$

∴ م(س) = ٥ ظاس + جـ

* * *

١١) م(س) معكوس لمشتقة الاقتران ق

مَ(س) = ق(س) = ظتاس + ١

$م''(س)$ = − $قتا^{٢}س$

$م''(\frac{\pi}{٤})$ = − $قتا^{٢}\frac{\pi}{٤}$

= −٢

ثانياً: التكامل غير المحدود

تدريب (١)

١) $\int \text{د س} = \text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int -\frac{١}{٤}\,\text{د ل} = -\frac{١}{٤}\,\text{ل} + \text{جـ}$

تدريب (٢):

١) $\int ١٠\,\text{د س} = ١٠\,\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{١}{\sqrt[٧]{\text{س}^{٢}}}\,\text{د س} = \int \text{س}^{-\frac{٢}{٧}}\,\text{د س}$

$= \frac{٧}{٥}\,\text{س}^{\frac{٥}{٧}} + \text{جـ}$

تدريب (٣):

١) $\int \frac{\text{س}^{٢} - ٩\text{س}}{\sqrt{\text{س}} - ٣}\,\text{د س}$

$= \int \frac{\text{س}(\text{س} - ٩)}{\sqrt{\text{س}} - ٣}\,\text{د س} = \int \frac{\text{س}\,\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٣)}(\sqrt{\text{س}} + ٣)}{\cancel{(\sqrt{\text{س}} - ٣)}}\,\text{د س}$

$= \int \text{س}^{\frac{٣}{٢}} + ٣\text{س}\ \ \text{د س}$

$\frac{٢}{٥}\,\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \frac{٣\text{س}^{٢}}{٢} + \text{جـ} = \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{س}^{٥}} + \frac{٣}{٢}\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{(٢ - \text{س})^{٣}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

$= \int \frac{٨ + ٦\text{س}^{٢} - ١٢\text{س} - \text{س}^{٣}}{\text{س}\sqrt{\text{س}}}\,\text{د س}$

$= \int ٨\,\text{س}^{-\frac{٣}{٢}} + ٦\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - ١٢\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} - \text{س}^{\frac{٣}{٢}}\ \text{د س}$

$= ٨ \times \frac{-٢}{١}\,\text{س}^{-\frac{١}{٢}} + ٦ \times \frac{٢}{٣}\,\text{س}^{\frac{٣}{٢}} - ١٢ \times \frac{٢}{١}\,\text{س}^{\frac{١}{٢}} - \frac{٢}{٥}\,\text{س}^{\frac{٥}{٢}} + \text{جـ}$

$= \frac{-١٦}{\sqrt{\text{س}}} + ٤\sqrt{\text{س}^{٣}} - ٢٤\sqrt{\text{س}} - \frac{٢}{٥}\sqrt{\text{س}^{٥}} + \text{جـ}$

تدريب (٤)

$\int \frac{٣}{(٧\text{س} + ٥)^{٤}}\,\text{د س} = \int ٣\,(٧\text{س} + ٥)^{-٤}\,\text{د س}$

$\frac{٣\,(٧\text{س} + ٥)^{-٣}}{-٣ \times ٧} + \text{جـ}$

$= \frac{-١}{٧\,(٧\text{س} + ٥)^{٣}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}^{٤}\left(٥ - \frac{٣}{\text{س}}\right)^{٤}\text{د س}$

$= \int \text{س}^{٤}\left(\frac{٥\text{س} - ٣}{\text{س}}\right)^{٤}\text{د س} = \int \cancel{\text{س}^{٤}}\,\frac{(٥\text{س} - ٣)^{٤}}{\cancel{\text{س}^{٤}}}\,\text{د س}$

$= \frac{(٥\text{س} - ٣)^{٥}}{٥ \times ٥} + \text{جـ} = \frac{(٥\text{س} - ٣)^{٥}}{٢٥} + \text{جـ}$

تدريب (٥):

١) $\int (\text{قتا } ٤\text{س ظتا } ٤\text{س} + \text{قتا}^{٢}\, ٣\text{س})\ \text{د س}$

$= -\frac{١}{٤}\,\text{قتا } ٤\text{س} - \frac{١}{٣}\,\text{ظتا } ٣\text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \left(\text{جتا } ٤\text{س ظا } ٤\text{س} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\, ٦\text{س}}\right)\text{د س}$

$= \int \cancel{\text{جتا } ٤\text{س}} \times \frac{\text{جا } ٤\text{س}}{\cancel{\text{جتا } ٤\text{س}}} + \text{قا}^{٢}\, ٦\text{س}\ \ \text{د س}$

$= -\frac{١}{٤}\,\text{جتا } ٤\text{س} + \frac{١}{٦}\,\text{ظا } ٦\text{س} + \text{جـ}$

تدريب (٦):

١) $\int (\text{قاس} + \text{ظاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س} + ٢\,\text{قاس ظاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س} \; \text{دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س دس} + ٢\int \text{قاس ظاس دس} + \int \text{ظا}^{٢}\text{س دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \int \text{قا}^{٢}\text{س} - ١ \; \text{دس}$

$= \text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{جـ}$

$= ٢\,\text{ظاس} + ٢\,\text{قاس} - \text{س} + \text{جـ}$

٢) $\int \frac{٣}{١ - \text{جتا}٢\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٣}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \frac{٣}{٢} \int \text{قتا}^{٢}\text{س دس}$

$= \frac{٣}{٢}\,\text{ظتاس} + \text{جـ}$

٣) $\int \frac{\text{جتا}٢\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس} = \int \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} - \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{قتا}^{٢}\text{س} - \text{قا}^{٢}\text{س}) \, \text{دس}$

$= -\text{ظتاس} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

٤) $\int (\text{جتاس} - \text{جاس})^{٢} \, \text{دس}$

$= \int \text{جتا}^{٢}\text{س} - ٢\,\text{جاس جتاس} + \text{جا}^{٢}\text{س} \; \text{دس}$

$= \int ١ - \text{جا}٢\text{س} \; \text{دس}$

$\text{س} + \frac{١}{٢}\,\text{جتا}٢\text{س} + \text{جـ}$

تمارين ومسائل (صفحة ٢٣٦)

١) أ) $\int \text{س}^{٦} + \frac{٣}{\text{س}^{٥}} - \sqrt[٥]{\text{س}^{٢}} \; \text{دس}$

$= \int \text{س}^{٦} + ٣\text{س}^{-٥} - \text{س}^{\frac{٢}{٥}} \; \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} + \frac{٣\text{س}^{-٤}}{-٤} - \frac{٥}{٧}\,\text{س}^{\frac{٧}{٥}} + \text{جـ}$

$= \frac{\text{س}^{٧}}{٧} - \frac{٣}{٤\text{س}^{٤}} - \frac{٥}{٧}\sqrt[٥]{\text{س}^{٧}} + \text{جـ}$

ب) $\int (٥ + ٣\text{ص})^{٤} \, \text{دص} = \frac{(٥ + ٣\text{ص})^{٥}}{١٥} + \text{جـ}$

جـ) $\int \frac{\text{س}^{٣} - ٨}{\text{س} - ٢} \, \text{دس} = \int \frac{\cancel{(\text{س} - ٢)}(\text{س}^{٢} + ٢\text{س} + ٤)}{\cancel{(\text{س} - ٢)}} \, \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}^{٢} + ٤\text{س} + \text{جـ}$

د) $\int (٤\text{س}^{٢} + ٢٠\text{س} + ٢٥)^{٥} \, \text{دس}$

$= \int ((٢\text{س} + ٥)^{٢})^{٥} \, \text{دس} = \int (٢\text{س} + ٥)^{١٠} \, \text{دس}$

$\frac{(٢\text{س} + ٥)^{١١}}{٢٢} + \text{جـ}$

هـ) $\int \frac{(\text{س} + ٣)^{٢} - ٩}{\text{س}} \, \text{دس}$

$\int \frac{(\cancel{\text{س}} + \cancel{٣} - \cancel{٣})(\text{س} + ٣ + ٣)}{\cancel{\text{س}}} \, \text{دس}$

$= \int (\text{س} + ٦) \, \text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢} + ٦\text{س} + \text{جـ}$

و) $\int (١ - \text{س})(\text{س} - ١)^{٥} \, \text{دس}$

$-\int (\text{س} - ١)(\text{س} - ١)^{٥} \, \text{دس} = -\int (\text{س} - ١)^{٦} \, \text{دس}$

$-\frac{(\text{س} - ١)^{٧}}{٧} + \text{جـ}$

ن) $\int س^{٣} \sqrt[٣]{\frac{٥}{س^{٣}} - \frac{١}{س^{٢}}}\ دس$

$= \int س \sqrt[٣]{\frac{٥ - س}{س^{٣}}}\ دس$

$= \int \cancel{س} \frac{(٥ - س)^{\frac{١}{٣}}}{\cancel{س}}\ دس$

$\frac{(٥ - س)^{\frac{٤}{٣}}}{\frac{٤}{٣} \times -١} + جـ = -\frac{٣}{٤} \sqrt[٣]{(٥ - س)^{٤}} + جـ$

ح) $\int \frac{س - \sqrt{س}}{\sqrt{س} - ١}\ دس$

$= \int \frac{\sqrt{س}\,(\sqrt{س} - ١)}{\sqrt{س} - ١}\ دس = \int س^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$= \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} + جـ = \frac{٢}{٣} \sqrt{س^{٣}} + جـ$

ط) $\int \sqrt[٣]{س} \left(\sqrt[٣]{س} + \frac{٥}{\sqrt[٣]{س}} \right) دس$

$= \int (س^{\frac{٢}{٣}} + ٥)\ دس$

$= \frac{٣}{٥} س^{\frac{٥}{٣}} + ٥س + جـ = \frac{٣}{٥} \sqrt[٣]{س^{٥}} + ٥س + جـ$

ي) $\int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}}\ دس$

$= \int \frac{٥س}{\sqrt{٧س + ٣} + \sqrt{٢س + ٣}} \times \frac{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}{\sqrt{٧س + ٣} - \sqrt{٢س + ٣}}\ دس$

$= \int \frac{٥س}{٧س + \cancel{٣} - ٢س - \cancel{٣}} \times (٧س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$\int \frac{\cancel{٥}\cancel{س}}{\cancel{٥}\cancel{س}} \times (٧س + ٣)^{\frac{١}{٢}} - (٢س + ٣)^{\frac{١}{٢}}\ دس$

$\frac{٢}{٢١} \sqrt{(٧س + ٣)^{٣}} - \frac{١}{٣} \sqrt{(٢س + ٣)^{٣}} + جـ$

س٢) $ق'(س) = ٣س^{٢} - ٣$

$\int ق'(س)\ دس = \int (٣س^{٢} - ٣)\ دس$

$ق(س) = س^{٣} - ٣س + جـ$

$ق(٠) = ١ \Leftarrow ١ = جـ$

$\therefore ق(س) = س^{٣} - ٣س + ١$

س٣) $ق''(س) = \frac{٦}{\sqrt{س}} = ٦س^{-\frac{١}{٢}}$

$ق(٤) = ٠ \qquad ق'(٤) = ١$

$\int ق''(س)\ دس = \int ٦س^{-\frac{١}{٢}}\ دس$

$ق'(س) = ١٢س^{\frac{١}{٢}} + جـ_{١}$

$ق'(٤) = ١ \Leftarrow ١ = ١٢\sqrt{٤} + جـ_{١}$

$جـ_{١} = -٢٣$

$\int ق'(س)\ دس = \int (١٢س^{\frac{١}{٢}} - ٢٣)\ دس$

$ق(س) = ٨\sqrt{س^{٣}} - ٢٣س + جـ$

$ق(٤) = ٠ \Leftarrow ٦٤ - ٩٢ + جـ = ٠ \Leftarrow جـ = ٢٨$

$ق(س) = ٨\sqrt{س^{٣}} - ٢٣س + ٢٨$

س٤) $\int (ق'(س) + ٢س)\ دس = س^{٣} + بس^{٢} + ١$

$ق'(١) = ٥$ ، $ق(٢) = ٧ \qquad ق(-٢) = ؟$

نشتق الطرفين:

$ق'(س) + ٢س = ٣س^{٢} + ٢بس$

$ق'(١) = ٥ \Leftarrow ٥ + ٢ = ٣ + ٢ب \Leftarrow ب = ٢$

$ق'(س) = ٣س^{٢} + ٤س - ٢س$

$\int ق'(س) = \int ٣س^{٢} + ٢س\ دس$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} + جـ$

$ق(٢) = ٧ \Leftarrow ٨ + ٤ + جـ = ٧ \Leftarrow جـ = -٥$

$ق(س) = س^{٣} + س^{٢} - ٥$

$ق(-٢) = -٨ + ٤ - ٥$

$= -٩$

٥) د''(س) = −٤ جتا٢س

د'($\frac{\pi}{٢}$) = صفر   د($\frac{\pi}{٢}$) = −٢

∫د''(س) = ∫−٤ جتا٢س دس

د'(س) = −٢ جا٢س + جـ$_{١}$

د'($\frac{\pi}{٢}$) = صفر ⟸ −٢ جا π + جـ = صفر

جـ$_{١}$ = صفر

∫د'(س) = ∫−٢ جا٢س دس

د(س) = جتا٢س + جـ

د($\frac{\pi}{٢}$) = −٢ ⟸ جتا π + جـ = −٢

جـ = −١

د(س) = جتا ٢س − ١

س أ) ∫ $\frac{٥}{\text{جا}^{٢}\text{س}}$ − $\frac{٣}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس

= ∫ ٥ قتا^{٢}س − ٣ قا^{٢}س دس

= − ٥ ظتاس − ٣ ظاس + جـ

ب) ∫ $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ + جتا٢س}}$ دس

= ∫ $\frac{١}{\text{٢جتا}^{٢}\text{س}}$ دس = ∫ $\frac{١}{٢}$ قا^{٢}س دس

= $\frac{١}{٢}$ ظاس + جـ

جـ) ∫(ظتاس − قتاس)^{٢} دس

= ∫(ظتا^{٢}س − ٢ ظتاس قتاس + قتا^{٢}س) دس

= ∫(قتا^{٢}س − ١ − ٢ ظتاس قتاس + قتا^{٢}س) دس

= ∫(٢ قتا^{٢}س − ٢ ظتاس قتاس − ١) دس

−٢ ظتاس + ٢ قتاس − س + جـ

د) ∫ $\frac{\text{جاس + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جاس + جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ + $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$ دس

∫ ظاس قاس + ١ دس

= قاس + س + جـ

هـ) ∫ $\frac{\text{١ − جا}^{٢}\text{س}}{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}\text{ جتا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\text{جا}\frac{\text{س}}{٢}\text{ جتا}\frac{\text{س}}{٢})^{٢}}$ دس = ∫ $\frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{(\frac{١}{٢}\text{ جاس})^{٢}}$ دس

= ∫ ٤ ظتا^{٢}س دس = ∫ ٤(قتا^{٢}س − ١) دس

= ٤(− ظتاس − س) + جـ

و) ∫ $\frac{\text{١ − جا٢س}}{\text{جاس − جتاس}}$ دس

= ∫ $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س + جتا}^{٢}\text{س − جا٢س}}{\text{جاس − جتاس}}$ دس

∫ $\frac{\text{جا}^{٢}\text{س − ٢جاس جتاس − جتا}^{٢}\text{س}}{\text{جاس − جتاس}}$ دس

= ∫ $\frac{(\text{جاس − جتاس})^{٢}}{\text{جاس − جتاس}}$ دس

= ∫ جاس − جتاس دس

= − جتاس − جاس + جـ

ز) $\int \frac{\text{جتا}٣\text{س}}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتا}(\text{س} + ٢\text{س})}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{جتاس جتا}٢\text{س} - \text{حاس حا}٢\text{س}}{\text{جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{جتاس}}\,\text{جتا}٢\text{س}}{\cancel{\text{جتاس}}} - \frac{\text{حاس} \times ٢\,\text{حاس}\,\cancel{\text{جتاس}}}{\cancel{\text{جتاس}}}\,\text{دس}$

$\int \text{جتا}٢\text{س}\,\text{دس} - ٢\int \text{حا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س} - \int \cancel{٢} \times \frac{١}{\cancel{٢}}(١ - \text{جتا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س} - (\text{س} - \frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س}) + \text{ج}$

$= \text{حا}٢\text{س} - \text{س} + \text{ج}$

ح) $\int \frac{\text{دس}}{\text{حا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٤}\text{س}}$

$= \int \frac{١}{\text{حا}^{٢}\text{س}(١ - \text{حا}^{٢}\text{س})}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\text{حا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{\frac{١}{٤}\text{حا}^{٢}٢\text{س}}\,\text{دس} = ٤\int \text{قتا}^{٢}٢\text{س}\,\text{دس}$

$= -٢\,\text{ظتا}٢\text{س} + \text{ج}$

ط) $\int \text{قاس}(\text{ظاس} + \text{جتاس})\,\text{دس}$

$= \int \text{قاس ظاس} + ١\,\text{دس}$

$= \text{قاس} + \text{س} + \text{ج}$

ي) $\int \text{جا}٦\text{س جا}٤\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا}٢\text{س} - \text{جتا}١٠\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س} - \frac{١}{١٠}\text{حا}١٠\text{س}) + \text{ج}$

ك) $\int \text{جتا}^{٢}\text{س}\,\text{دس} = \int \frac{١}{٢}(١ + \text{جتا}٢\text{س})\,\text{دس}$

$\frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س}) + \text{ج}$

ل) $\int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{١ - \text{حا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{جتا}^{٣}\text{س} - ٥}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جتاس} - ٥\,\text{قا}^{٢}\text{س}\,\text{دس}$

$\text{حاس} - ٥\,\text{ظاس} + \text{ج}$

م) $\int \text{جتا}٣\text{س جتا}٧\text{س}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا}(-٤\text{س}) + \text{جتا}١٠\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}(\text{جتا}٤\text{س} + \text{جتا}١٠\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}(\frac{١}{٤}\text{حا}٤\text{س} + \frac{١}{١٠}\text{حا}١٠\text{س}) + \text{ج}$

ن) $\int (\text{جتا}^{٤}\text{س} - \text{حا}^{٤}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int (\text{جتا}^{٢}\text{س} - \text{حا}^{٢}\text{س})(\text{جتا}^{٢}\text{س} + \text{حا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \text{جتا}٢\text{س}\,\text{دس} = \frac{١}{٢}\text{حا}٢\text{س} + \text{ج}$

س) $\int \frac{١}{\text{قاس} - ١}\,\text{دس} \times \frac{\text{قاس} + ١}{\text{قاس} + ١} = \int \frac{\text{قاس} + ١}{\text{قا}^{٢}\text{س} - ١}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{قاس} + ١}{\text{ظا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس} = \int (\text{قاس ظتا}^{٢}\text{س} + \text{ظتا}^{٢}\text{س})\,\text{دس}$

$= \int \frac{\cancel{١}}{\cancel{\text{جتاس}}} \times \frac{\text{جتا}^{٢}\text{س}}{\text{حا}^{٢}\text{س}} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١\,\text{دس}$

$= \int \text{ظتاس قتاس} + \text{قتا}^{٢}\text{س} - ١\,\text{دس}$

$= -\text{قتاس} - \text{ظتاس} - \text{س} + \text{ج}$

ع) $\int \frac{\text{حاس}}{١ - \text{حاس}}\,\text{دس} \times \frac{١ + \text{حاس}}{١ + \text{حاس}} = \int \frac{\text{حاس} + \text{حا}^{٢}\text{س}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$= \int (\text{ظاس قاس} + \text{ظا}^{٢}\text{س})\,\text{دس} = \text{قاس} + \text{ظاس} - \text{س} + \text{ج}$

ثالثاً: التكامل المحدود

تدريب (١)

$$\int_{١}^{٢} أ\,ق'(س)\,دس = أ\,ق(س)\Big|_{١}^{٢}$$

$$= أ\,ق(٢) - أ\,ق(١)$$

$$١٦ = ١٢أ - ٤أ \Rightarrow أ = ٢$$

تدريب (٢)

$$\int_{٢}^{٧} ٤س\,دس = ٢س^{٢}\Big]_{٢}^{٧} = ٢\times(٧)^{٢} - ٢(٢)^{٢}$$

$$= ٩٠$$

٢) $$\int_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}} قا^{٢}س\,دس = ظاس\Big]_{\frac{\pi}{٦}}^{\frac{\pi}{٤}}$$

$$= ظا\frac{\pi}{٤} - ظا\frac{\pi}{٦} = ١ - \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

تدريب (٣):

$$\int_{ب+١}^{٢+٣ب} ٥\,دس = ٤٠$$

$$٥(٢+٣ب-١-ب) = ٤٠ \Rightarrow ب = +\frac{٧}{٢}$$

تدريب (٤)

$$\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = ٢$$

$$\therefore \int_{\sqrt{٨}}^{٠} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -\int_{٠}^{\sqrt{٨}} \frac{س}{\sqrt{س^{٢}+١}}\,دس = -٢$$

تدريب (٥)

$$\int_{١}^{٣} ٤ق(س)\,دس + \int_{١}^{٣} ٧هـ(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} ٣ق(س)\,دس = ٩ \Rightarrow \int_{١}^{٣} ق(س)\,دس = ٣$$

$$\therefore ٤\times٣ + ٧\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١٩$$

$$\int_{١}^{٣} هـ(س)\,دس = ١ \Rightarrow \int_{٣}^{١} ٥هـ(س)\,دس = ٥\times-١$$

$$= -٥$$

تدريب (٦)

$$ع = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس \quad،\quad ل = \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$ع + ل = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس + \int_{\frac{٣\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س\,دس - \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ظتا^{٢}س\,دس$$

$$= \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} قتا^{٢}س - ظتا^{٢}س\,دس = \int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٤}} ١\,دس$$

$$= ١\left(\frac{٣\pi}{٤} - \frac{\pi}{٤}\right) = \frac{\pi}{٢}$$

تدريب (٧)

$$\int_{٩}^{٢} ٢ق(س)\,دس + \int_{٩}^{٢} ٣\,دس = -١٧$$

$$٢\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس + ٣(٢-٩) = -١٧$$

$$\int_{٩}^{٢} ق(س)\,دس = ٢$$

$$\int_{٢}^{٥} \frac{ق(س)}{٣}\,دس = -٢ \Rightarrow \int_{٢}^{٥} ق(س)\,دس = -٦$$

$$\int_{٥}^{٩} (٤ق(س) - ١)\,دس =$$

$$\int_{٥}^{٩} ٤ق(س) - \int_{٥}^{٩} ١\,دس$$

$$= ٤\left(\int_{٥}^{٢} ق(س)\,دس + \int_{٢}^{٩} ق(س)\,دس\right) - ١(٩-٥)$$

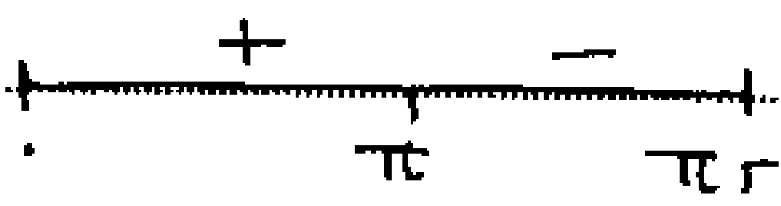
$$= ٤\,(٦ + -٢) - ٤$$

$$= ١٢$$

تدريب (٨)

$$\int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{١ - \text{جتا}\,٢\text{س}}{٢}}\ \text{دس}$$

$$= \int_{٠}^{٢\pi} \sqrt{\frac{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}{٢}}\ \text{دس} = \int_{٠}^{٢\pi} |\text{جاس}|\ \text{دس}$$



$$= \int_{٠}^{\pi} \text{جاس دس} + \int_{\pi}^{٢\pi} -\text{جاس دس}$$

$$-\text{جتاس}\Big]_{٠}^{\pi} + +\text{جتاس}\Big]_{\pi}^{٢\pi}$$

$$(-\text{جتا}\pi + \text{جتاصفر}) + \text{جتا}\,٢\pi - \text{جتا}\pi$$

$$(١ + ١) + (١ - - ١)$$

$$= ٤$$

تدريب (٩)

$\int_{١}^{٣}$ ق(س) دس موجبة لأن ق(س) $\geq$ صفر

إشارة $\int_{٣}^{٦}$ ق(س) دس سالبة لأن ق(س) $\leq$ ٠

تدريب (١٠)

١) $\int_{٠}^{١}$ ق(س) دس $\geq \int_{٠}^{١}$ هـ(س) دس

لأن ق(س) $\geq$ هـ(س) حسب الشكل ١

٢) من الشكل المجاور

هـ(س) $\geq$ ق(س) لكل س $\in [-١ ، ٠]$

$\therefore \int_{-١}^{٠}$ هـ(س) دس $\geq \int_{-١}^{٠}$ ق(س) دس

أي أن $\int_{-١}^{٠}$ ق(س) دس $\leq \int_{-١}^{٠}$ هـ(س) دس

تدريب (١١)

$$\text{م} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \text{ل}$$

$$٠ \leq \text{س} \leq ١$$

$$٠ \leq \text{س}^{٢} \leq ١$$

$$١ \leq \text{س}^{٢}+١ \leq ٢ \Rightarrow ١ \geq \frac{١}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{١}{٢}$$

$$٢ \geq \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}} \geq \frac{٢}{٢}$$

$$\int_{٠}^{١} ١\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq \int_{٠}^{١} ٢\ \text{دس}$$

$$١ \leq \int_{٠}^{١} \frac{٢}{١+\text{س}^{٢}}\ \text{دس} \leq ٢$$

م = ١ ، ل = ٢

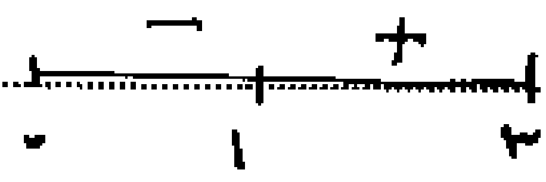
تمارين ومسائل صفحة (٢٥٠ - ٢٥١)

س١) أ) $\int_{٢}^{٨} \frac{١}{\text{س}^{٢}}\ \text{دس} = \int_{٢}^{٨} \text{س}^{-٢}\ \text{دس}$

$$= \frac{-١}{\text{س}}\Big]_{٢}^{٨} = \frac{-١}{٨} + \frac{١}{٢} = \frac{٣}{٨}$$

ب) $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^{٢} - |\text{س} - ١|)\ \text{دس}$

$$= \int_{٠}^{٣} \text{س}^{٢}\ \text{دس} - \int_{٠}^{٣} |\text{س} - ١|\ \text{دس}$$



$$= \frac{\text{س}^{٣}}{٣}\Big]_{٠}^{٣} - \left(\int_{٠}^{١} ١-\text{س}\ \text{دس} + \int_{١}^{٣} (\text{س}-١)\ \text{دس}\right)$$

$$(٩ - ٠) - \left(\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\Big]_{٠}^{١} + \frac{\text{س}^{٢}}{٢} - \text{س}\Big]_{١}^{٣}\right)$$

$$٩ - \left(\left(\left(١ - \frac{١}{٢}\right) - \text{صفر}\right) + \left(\frac{٩}{٢} - ٣\right) - \left(\frac{١}{٢} - ١\right)\right)$$

$$٩ - \frac{٥}{٢} = \frac{١٣}{٢}$$

ج) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \text{جا}2\text{س}\ \text{دس}$

$= -\frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}\text{جتا}\pi + \frac{1}{2}\text{جتا}\frac{\pi}{2}$

$= \frac{1}{2}$

د) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\text{س} + \text{جتاس})\ \text{دس}$

$\frac{\text{س}^2}{2} + \text{جاس}\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\text{صفر}}$

$= (\text{صفر} + \text{جاصفر}) - \left(\frac{\frac{\pi^2}{4}}{2} + \text{جا}\frac{\pi}{2}\right)$

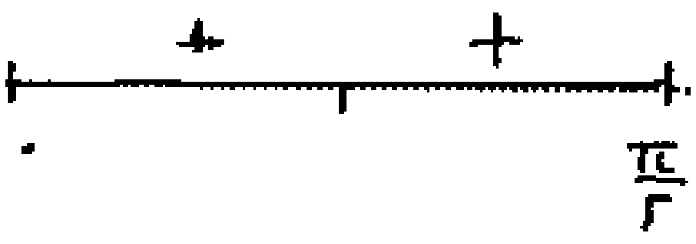
$= -\frac{\pi^2}{8} - 1$

هـ) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 + \text{جا}2\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\text{جا}^2\text{س} + 2\text{جاس}\,\text{جتاس} + \text{جتا}^2\text{س}}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{(\text{جاس} + \text{جتاس})^2}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\text{جاس} + \text{جتاس}|}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس}$



$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جاس} + \text{جتاس}}{\text{جاس} + \text{جتاس}}\ \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} 1\ \text{دس}$

$= 1\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = \frac{\pi}{2}$.

و) $\int_{2}^{2} (9\text{س} - 7)^5\ \text{دس} = \text{صفر}$

ز) $\int_{-1}^{3} (\text{س} - 1)(\text{س}^2 + \text{س} + 1)\ \text{دس}$

$\int_{-1}^{3} (\text{س}^3 - 1)\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^4}{4} - \text{س}\Big]_{-1}^{3}$

$\left(\frac{81}{4} - 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1\right) = 16$

ح) $\int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}}\,(\sqrt{\text{س}} + 2)^2\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \sqrt{\text{س}}\,(\text{س} + 4\sqrt{\text{س}} + 4)\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{1} \text{س}^{\frac{3}{2}} + 4\text{س} + 4\text{س}^{\frac{1}{2}}\ \text{دس}$

$\frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} + 2\text{س}^2 + \frac{8}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{1}$

$\left(\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right) - (\text{صفر})$

$= \frac{76}{15}$

ط) $\int_{2}^{4} \frac{1}{(\text{س} - 1)^2}\ \text{دس} = \int_{2}^{4} (\text{س} - 1)^{-2}\ \text{دس}$

$\frac{-1}{\text{س} - 1}\Big]_{2}^{4} = \frac{-1}{3} + 1 = \frac{2}{3}$

ي) $\int_{1}^{3} \frac{2\text{س}^3 - 4\text{س}^2 + 5}{\text{س}^2}\ \text{دس}$

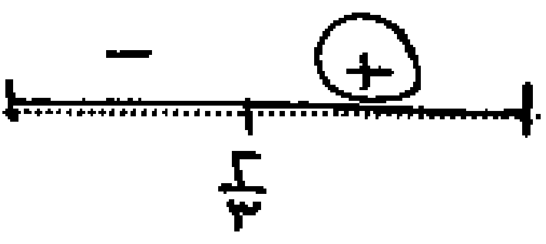
$= \int_{1}^{3} 2\text{س} - 4 + 5\text{س}^{-2}\ \text{دس}$

$\text{س}^2 - 4\text{س} - \frac{5}{\text{س}}\Big]_{1}^{3}$

$(9 - 12 - \frac{5}{3}) - (1 - 4 - 5) = \frac{10}{3}$

ك) $\int_{2}^{3} \sqrt{9\text{س}^2 - 12\text{س} + 4}\ \text{دس} = \int_{2}^{3} \sqrt{(3\text{س} - 2)^2}\ \text{دس}$

$= \int_{2}^{3} |3\text{س} - 2|\ \text{دس}$



$= \int_{2}^{3} 3\text{س} - 2\ \text{دس}$

$\frac{3\text{س}^2}{2} - 2\text{س}\Big]_{2}^{3}$

$\left(\frac{27}{2} - 6\right) - (6 - 4) = \frac{11}{2}$

ل) $\int_{.}^{\frac{\pi}{٤}} (\text{جتاس} - \text{جاس})\,\text{دس}$

$= \left[\text{جاس} + \text{جتاس}\right]_{.}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= (١ + \text{صفر}) - (\text{صفر} + ١) = \text{صفر}$

س٢) $\text{ق(س)} = \int \left(\int_{.}^{٢-} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^٢ \right)\text{دس}$

$\text{ق}'(-١) = ؟$

$\text{ق}'(\text{س}) = \int_{.}^{٢-} ٤\,\text{دس} - ٣\text{س}^٢$

$= ٤(-٢ - ٠) - ٣\text{س}^٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = -٨ - ٣\text{س}^٢$

$\text{ق}'(-١) = -٨ - ٣ = -١١$

س٣) $\int_{\text{ب}}^{٢} ٢\text{ب}\,\text{دس} = -٣٠$

$٢\text{ب}(٢ - \text{ب}) = -٣٠$

$-٢\text{ب}^٢ + ٤\text{ب} + ٣٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٢\text{ب} - ١٥ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٥)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر} \Rightarrow \boxed{\text{ب} = ٥} ، \boxed{\text{ب} = -٣}$

س٤) $\int_{.}^{\text{جـ}} \text{س}(١ - \text{س})\,\text{دس} = \text{صفر}$

$\int_{.}^{\text{جـ}} (\text{س} - \text{س}^٢)\,\text{دس} = \left[\frac{\text{س}^٢}{٢} - \frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{.}^{\text{جـ}} = \text{صفر}$

$\frac{\text{جـ}^٢}{٢} - \frac{\text{جـ}^٣}{٣} - \text{صفر} = \text{صفر}$

$\frac{٣\text{جـ}^٢ - ٢\text{جـ}^٣}{٦} = \text{صفر} \Rightarrow \text{جـ}^٢(٣ - ٢\text{جـ}) = \text{صفر}$

$\text{جـ} = \text{صفر} ، \text{جـ} = \frac{٣}{٢}$

س٥) $\int_{١-}^{٣} \left(٣\text{س}^٢ - ٢\int_{.}^{\text{جـ}} ٣\text{م}^٢\,\text{دم}\right)\text{دس} = -٣٠$

$= \int_{١-}^{٣} \left(٣\text{س}^٢ - \cancel{٢} \times \frac{٣\text{جـ}^٢}{\cancel{٢}}\right)\text{دس} = -٣٠$

$\left[\text{س}^٣ - ٣\text{جـ}^٢\text{س}\right]_{١-}^{٣} = -٣٠$

$(٢٧ - ٩\text{جـ}^٢) - (-١ + ٣\text{جـ}^٢) = -٣٠$

$٢٨ - ١٢\text{جـ}^٢ = -٣٠$

$\text{جـ}^٢ = ٤ \Rightarrow \text{جـ} = \pm ٢$

س٦) $\text{ق(س)} = \begin{cases} -\text{س} ، & ٠ \geq \text{س} > -٣ \\ \text{س} ، & ٤ \geq \text{س} > ٠ \end{cases}$

$\int_{٣-}^{٤} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \int_{٣-}^{٠} -\text{س}\,\text{دس} + \int_{٠}^{٤} \text{س}\,\text{دس}$

$= \left[-\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٣-}^{٠} + \left[\frac{\text{س}^٢}{٢}\right]_{٠}^{٤}$

$(\text{صفر} + \frac{٩}{٢}) + (٨ - \text{صفر}) = ١٢٫٥$

س٧) $\int_{٢}^{\text{ب}} (٢\text{س} - ٣)\,\text{دس} = ٢٠$

$\left[\text{س}^٢ - ٣\text{س}\right]_{٢}^{\text{ب}} = ٢٠$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ٤ + ٦ - ٢٠ = \text{صفر}$

$\text{ب}^٢ - ٣\text{ب} - ١٨ = \text{صفر}$

$(\text{ب} - ٦)(\text{ب} + ٣) = \text{صفر} \quad \boxed{\text{ب} = ٦} ، \boxed{\text{ب} = -٣}$

س٨) $٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \int_{١}^{٣} \text{س}^{-٢}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} ٦\,\text{دس} = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} + \left[\frac{-١}{\text{س}}\right]_{١}^{٣} - ٦(٣ - ١) = ١٢$

$٢\int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{٧٠}{٣} \Rightarrow \int_{١}^{٣} \text{ق(س)}\,\text{دس} = \frac{٣٥}{٣}$

$\int_{١}^{٣} \frac{\text{ق(س)}}{٢}\,\text{دس} - \int_{١}^{٣} \text{س}^٢\,\text{دس} = \frac{٣٥}{٦} - \left[\frac{\text{س}^٣}{٣}\right]_{١}^{٣}$

$= \frac{٣٥}{٦} - (٩ - \frac{١}{٣}) = -\frac{١٧}{٦}$

س٩) $\int_{٩}^{٢} ٢\,\text{ق}(س)\,\text{دس} + ٣(٢-٩) = -١٧$

$\int_{٩}^{٢} \text{ق}(س)\,\text{دس} = ٢$

$\int_{٢}^{٥} \text{ق}(س)\,\text{دس} = -٦$

$\int_{٥}^{٩} (٤\,\text{ق}(س) - ١)\,\text{دس} =$

$\left(\int_{٥}^{٢} ٤\,\text{ق}(س)\,\text{دس} + \int_{٢}^{٩} ٤\,\text{ق}(س)\,\text{دس}\right) - ١(٩-٥)$

$٢٤ - ٨ - ٤ = ١٢$

س١٠) $-١ \leq \text{جتاس} \leq ١$ لكل $س \in [٠ ، \pi]$

$\text{صفر} \leq \text{جتا}^٢س \leq ١$

$\text{صفر} \leq ٣\,\text{جتا}^٢س \leq ٣$

$٢ \leq ٢ + ٣\,\text{جتا}^٢س \leq ٥$

$\frac{١}{٥} \leq \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^٢س} \leq \frac{١}{٢}$

$\int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٥}\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^٢س}\,\text{دس} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

$\frac{\pi}{٥} \leq \int_{٠}^{\pi} \frac{١}{٢+٣\,\text{جتا}^٢س}\,\text{دس} \leq \frac{\pi}{٢}$

س١١) $-٣ \leq س \leq ٣$

$(٠ \leq س^٢ \leq ٩) \times -١$

$-٩ \leq -س^٢ \leq \text{صفر}$

$\text{صفر} \leq ٩-س^٢ \leq ٩$

$\text{صفر} \leq \sqrt{٩-س^٢} \leq \sqrt{٩}$

$\int_{-٣}^{٣} \text{صفر}\,\text{دس} \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-س^٢}\,\text{دس} \leq \int_{-٣}^{٣} ٣\,\text{دس}$

$\text{صفر} \leq \int_{-٣}^{٣} \sqrt{٩-س^٢}\,\text{دس} \leq ١٨$

م = صفر ، ك = ١٨

س١٢) $\text{ق}(س) = أس^٢ + ب\,س + جـ$

$\text{ق}'(س) = ٢أس + ب$

$\text{ق}''(س) = ٢أ$

$\text{ق}''(س) = ٤ \Rightarrow ٢أ = ٤ \Rightarrow \boxed{أ = ٢}$

$\text{ق}(٠) = ٥ \Rightarrow \boxed{جـ = ٥}$

$\int_{٠}^{١} \text{ق}'(س)\,\text{دس} = ٣ \Rightarrow \int_{٠}^{١} ٤س + ب\,\text{دس}$

$[٢س^٢ + بس]_{٠}^{١} = ٣$

$٢ + ب = ٣ \Rightarrow \boxed{ب = ١}$

$\therefore \text{ق}(س) = ٢س^٢ + س + ٥$

س١٣) $\text{ق}(س) = أ\,س + ب$

$\int_{-١}^{١} (أس+ب)\,\text{دس} = [\frac{أس^٢}{٢} + بس]_{-١}^{١}$

$= (\frac{أ}{٢} + ب) - (\frac{أ}{٢} - ب) = ٤$

$٢ب = ٤ \Rightarrow \boxed{ب = ٢}$

$\int_{١}^{٣} (أس+ب)\,\text{دس} = [\frac{أس^٢}{٢} + ٢س]_{١}^{٣}$

$= (\frac{٩أ}{٢} + ٦) - (\frac{أ}{٢} + ٢) = ٢$

$٤أ + ٤ = ٢ \Rightarrow \boxed{أ = -\frac{١}{٢}}$

$\text{ق}(س) = -\frac{١}{٢}س + ٢$

رابعاً: اقتران اللوغاريتم الطبيعي:

تدريب (1)

1) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(٢ - \text{جتا س})$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\text{جا س}}{٢ - \text{جتا س}}$

2) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢\text{س} + ٥|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢}{٢\text{س} + ٥}$

تدريب (٢):

1) $\int_{٢}^{٤} \frac{١}{٩ - ٢\text{س}} \text{ دس}$

$= \frac{١}{-٢} \int_{٢}^{٤} \frac{-٢}{٩ - ٢\text{س}} \text{ دس} = \frac{١}{-٢} \text{لو}_{\text{هـ}}|٩ - ٢\text{س}| \Big|_{٢}^{٤}$

$= \frac{١}{-٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ١ + \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ = \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

2) $\int_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}} \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{٢ + \text{ظاس}} \text{ دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢ + \text{ظاس}| \Big]_{-\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٤}}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١ = \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$

تمارين ومسائل صفحة (٢٥٦ - ٢٥٧)

حل)

أ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} ٢\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢}{٢\text{س}} = \frac{١}{\text{س}}$

ب) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا}^٣ ٥\text{س} = ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{جا} ٥\text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣ \times \frac{٥ \text{جتا} ٥\text{س}}{\text{جا} ٥\text{س}} = ١٥ \text{ ظتا} ٥\text{س}$

جـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٥|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٤}{\text{س}^٢ + ٤\text{س} - ٥}$

د) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٣)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٢\text{س} + ٥}{\text{س}^٢ + ٥\text{س} + ٣}$

هـ) $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^٣ \text{ لو}_{\text{هـ}} \text{س}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^٣ \times \frac{١}{\text{س}} + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} \times ٣\text{س}^٢$

$\text{ق}'(\text{س}) = \text{س}^٢ (١ + ٣ \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})$

و) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}|٢ + \sqrt{\text{س}}|$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{\frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}}{٢ + \sqrt{\text{س}}} = \frac{١}{٤\sqrt{\text{س}} + ٢\text{س}}$

ز) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ \text{ظاس}$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س}^٣ + \text{لو}_{\text{هـ}} \text{ظاس}$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣} + \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}$

$= \frac{٣}{\text{س}} + \frac{\text{قا}^٢\text{س}}{\text{ظاس}}$

ح) $\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}\right)$

$\text{ق}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \text{س} - \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^٢ + ١)$

$\text{ق}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}} - \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ + ١}$

ط) $\text{ق}(\text{س}) = (\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٣$

$\text{ق}'(\text{س}) = ٣(\text{لو}_{\text{هـ}} \text{س})^٢ \times \frac{١}{\text{س}}$

ي) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \dfrac{(٤\text{س}^٢+٥)^٦}{(٧-٢\text{س})^٥}$

$\text{د}(\text{س}) = ٦\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٤\text{س}^٢+٥) - ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٧-٢\text{س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{٦ \times ٨\text{س}}{٤\text{س}^٢+٥} - \dfrac{٥ \times -٢}{٧-٢\text{س}}$

$= \dfrac{٤٨\text{س}}{٤\text{س}^٢+٥} + \dfrac{١٠}{٧-٢\text{س}}$

ك) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}} \sqrt[٣]{٥\text{س}^٣+٤\text{س}}$

$\text{د}(\text{س}) = \frac{١}{٣}\,\text{لو}_{\text{هـ}}(٥\text{س}^٣+٤\text{س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{٣} \times \dfrac{١٥\text{س}^٢+٤}{٥\text{س}^٣+٤\text{س}}$

ل) $\text{د}(\text{س}) = \text{ظا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{١}{\text{س}}\,\text{قا}^٢(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})$.

م) $\text{د}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢-١})$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{١ + \dfrac{٢\text{س}}{٢\sqrt{\text{س}^٢-١}}}{\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢-١}}$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{\cancel{\sqrt{\text{س}^٢-١} + \text{س}}}{(\cancel{\text{س} + \sqrt{\text{س}^٢-١}})(\sqrt{\text{س}^٢-١})}$

$\text{د}'(\text{س}) = \dfrac{١}{\sqrt{\text{س}^٢-١}}$

س٣) $\int (\text{د}'(\text{س}) - \text{س})\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{قاس}+\text{ظاس}| + \text{س}^٢$

نشتق الطرفين

$\text{د}'(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس ظاس} + \text{قا}^٢\text{س}}{\text{قاس} + \text{ظاس}} + ٢\text{س}$

$\text{د}'(\text{س}) - \text{س} = \dfrac{\text{قاس}\cancel{(\text{قاس}+\text{ظاس})}}{\cancel{\text{قاس}+\text{ظاس}}} + ٣\text{س}$

$\text{د}'(\text{س}) = \text{قاس} + ٣\text{س}$

※

س٤) $\text{م}(\text{س}) = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ $\quad$ $\text{د}(\text{س}) = \text{ظتاس}$

د(س) متصل على مجاله

$\text{م}'(\text{س}) = \dfrac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس} = \text{د}(\text{س})$

∴ م(س) هو معكوس المشتقة للاقتران د

س٥)

أ) $\int \dfrac{٢\text{س}}{\text{س}^٢+٣}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٢+٣| + \text{جـ}$

ب) $\int \dfrac{١+\text{جتاس}}{\text{س}+\text{جاس}}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+\text{جاس}| + \text{جـ}$

جـ) $\int \dfrac{٥+٥\,\text{ظتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{٥(١+\text{ظتا}^٢\text{س})}{\text{ظتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \dfrac{٥\,\text{قتا}^٢\text{س}}{\text{ظتاس}}\,\text{دس} = -٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظتاس}| + \text{جـ}$

د) $\int \dfrac{٣\text{س}^٢}{\text{س}^٣+٥}\,\text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}^٣+٥| + \text{جـ}$

هـ) $\int \dfrac{\text{س}+٥}{\text{س}}\,\text{دس} = \int ١ + \dfrac{٥}{\text{س}}\,\text{دس}$

$= \text{س} + ٥\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{جـ}$

و) $\int_{٣}^{٥} \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - ٤} \, \text{دس}$

$= \int_{٣}^{٥} \frac{\cancel{\text{س} - ٢}}{(\text{س} + ٢)\cancel{(\text{س} - ٢)}} \, \text{دس} = \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٢| \right]_{٣}^{٥}$

$\text{لو}_{\text{هـ}} ٧ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

ز) $\int_{-١}^{٢} \frac{|٢\text{س}|}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس}$ $\quad -١ \;\; - \;\; ٠ \;\; + \;\; ٢$

$= \int_{-١}^{٠} \frac{-٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس} + \int_{٠}^{٢} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ١} \, \text{دس}$

$- \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ١| \right]_{-١}^{٠} + \left[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ١| \right]_{٠}^{٢}$

$- \text{لو}_{\text{هـ}} ١ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ \quad + \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ - \text{لو}_{\text{هـ}} ١$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + \text{لو}_{\text{هـ}} ٥$

ح) $\int \frac{\text{جا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= \frac{-١}{٣} \int \frac{-٣ \, \text{جا}٣\text{س}}{١ + \text{جتا}٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= \frac{-١}{٣} \text{لو}_{\text{هـ}} |١ + \text{جتا}٣\text{س}| + \text{جـ}$

ط) $\int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}(\text{س} - ١)} \, \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{س} - ١}{\text{س}^{٢} - \text{س}} \, \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} - \text{س}| + \text{جـ}$

ي) $\int \text{ظاس} \, \text{دس}$

$= - \int \frac{-\text{جاس}}{\text{جتاس}} \, \text{دس} = - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{جتاس}| + \text{جـ}$

س٦)

١) $\text{م}(\text{س}) = \int \text{د}(\text{س}) \, \text{دس}$

$= \int \frac{٢\text{س}}{\text{س}^{٢} + ٤} \, \text{دس} = \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}^{٢} + ٤| + \text{جـ}$

ب) $\text{م}(\text{س}) = \int \frac{٣ \, \text{جتا}٣\text{س}}{٥ + \text{جا}٣\text{س}} \, \text{دس}$

$= \text{لو}_{\text{هـ}} |٥ + \text{جا}٣\text{س}| + \text{جـ}$

خامساً: مشتقة وتكامل الاقتران الأسي الطبيعي

تدريب (١):

١) $ق(س) = هـ^{جاس}$

$قَ(س) = جتاس × هـ^{جاس}$

٢) $ق(س) = س^{٤} هـ^{٣س}$

$قَ(س) = س^{٤} × ٣هـ^{٣س} + هـ^{٣س} × ٤س^{٣}$

$٣س^{٣} هـ^{٣س} (س + ٢)$

تدريب (٢)

١) $ق(س) = س \, لو_{هـ} هـ^{س^{٢}}$

$= س × س^{٢} لو_{هـ} هـ$

$ق(س) = س^{٣} \Leftarrow قَ(س) = ٣س^{٢}$

٢) $ق(س) = هـ^{٣ لو_{هـ}(١+جاس)}$

$= هـ^{لو_{هـ}(١+جاس)^{٣}}$

$ق(س) = (١+جاس)^{٣}$

$قَ(س) = ٣(١+جاس)^{٢} × جتاس$

$= ٣جتاس (١+جاس)^{٢}$

تدريب (٣)

١) $\int_{.}^{١} (١+هـ^{س})^{٢} دس$

$= \int_{.}^{١} ١ + ٢هـ^{س} + هـ^{٢س} \, دس$

$= \Big[س + ٢هـ^{س} + \frac{١}{٢}هـ^{٢س} \Big]_{.}^{١}$

$\left(١ + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}\right) - \left(صفر + ٢ + \frac{١}{٢}\right)$

$- \frac{٣}{٢} + ٢هـ + \frac{١}{٢}هـ^{٢}$.

٢) $\int هـ^{٣س} (١ + هـ^{٢س}) \, دس$

$= \int (هـ^{٣س} + هـ^{٥س}) \, دس$

$= \frac{١}{٣}هـ^{٣س} + \frac{١}{٥}هـ^{٥س} + جـ$

تمارين ومسائل صفحة (٢٦٢ - ٢٦٣)

حل)

أ) $ص = س + هـ^{٩س}$

$\frac{دص}{دس} = ١ + ٩هـ^{٩س}$

ب) $ص = س^{٣} + هـ^{-٥س^{٤}}$

$صَ = ٣س^{٢} - ٢٠س^{٣} هـ^{-٥س^{٤}}$

جـ) $ص = جاهـ^{٢س}$

$صَ = ٢هـ^{٢س} جتاهـ^{٢س}$

د) $ص = \sqrt{١ + هـ^{٢س}}$

$\frac{دص}{دس} = \frac{\cancel{٢} هـ^{٢س}}{\cancel{٢}\sqrt{١+هـ^{٢س}}} = \frac{هـ^{٢س}}{\sqrt{١+هـ^{٢س}}}$

هـ) $ص = هـ^{\frac{١}{س}} + لو_{هـ}\sqrt{س}$

$ص = هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢} لو_{هـ} س$

$صَ = \frac{-١}{س^{٢}}هـ^{\frac{١}{س}} + \frac{١}{٢س}$

و) $ص = هـ^{٥} + لو_{هـ} قاس$

$صَ = صفر + \frac{قاس ظاس}{قاس}$

$=$ ظاس .

ز) $ص = هـ^{٤ لو_{هـ}(س^{٣}+٢)} \Leftarrow ص = (س^{٣}+٢)^{٤}$

$\frac{دص}{دس} = ٤(س^{٣}+٢)^{٣} × ٣س^{٢} \Leftarrow صَ = ١٢س^{٢}(س^{٣}+٢)^{٣}$

ح) $ص = \frac{١ + هـ^{٢س}}{هـ^{٥س}}$

$ص = هـ^{-٥س} + هـ^{-٣س}$

$صَ = -٥ هـ^{-٥س} - ٣ هـ^{-٣س}$

ط) $ص = هـ^{٢} + س^{٣} هـ^{جاس}$

$صَ = صفر + س^{٣} \times جتاس هـ^{جاس} + هـ^{جاس} \times ٣س^{٢}$

$صَ = س^{٢} هـ^{جاس} (س جتاس + ٣)$

ي) $ص = (هـ^{٤س+٥})^{٦}$

$ص = هـ^{٢٤س+٣٠}$

$صَ = ٢٤ هـ^{٢٤س+٣٠}$

س١) $ص = هـ^{ظاس} + أ لو_{هـ} جتاس + \int_{ب}^{\frac{\pi}{٣}} \frac{دس}{١+ظا^{٢}س}$

$صَ = قا^{٢}س هـ^{ظاس} + أ \times \frac{-جاس}{جتاس} + صفر$

عندما $س = \frac{\pi}{٤} \Leftarrow$

$٢هـ + ١ = قا^{٢} \frac{\pi}{٢} هـ^{١} + -أ \times ظا \frac{\pi}{٤}$

$٢هـ + ١ = ٢هـ - أ$

$\boxed{أ = -١}$

س٣) $دً(س) = جاس + هـ^{٢س}$

$\int دً(س) دس = \int جاس + هـ^{٢س} دس$

$دَ(س) = -جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + جـ_{١}$

$دَ(٠) = \frac{١}{٢} \Leftarrow \frac{١}{٢} = -١ + \frac{١}{٢} + جـ_{١}$

$جـ_{١} = ١$

$دَ(س) = -جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١$

$\int دَ(س) دس = \int (-جتاس + \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ١) دس$

$د(س) = -جاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س + جـ_{٢}$

$د(٠) = \frac{١}{٤} \Leftarrow صفر + \frac{١}{٤} + صفر + جـ_{٢} = صفر$

$جـ_{٢} = صفر$

$\therefore د(س) = -جاس + \frac{١}{٤} هـ^{٢س} + س$.

س٤) $هـ^{صس} = س - ص$

$(ص + س صَ) هـ^{س ص} = ١ - صَ$

$هـ^{س ص} ص + س صَ هـ^{س ص} + صَ = ١$

$صَ (س هـ^{س ص} + ١) = ١ - هـ^{س ص} ص$

$صَ = \frac{١ - ص(س - ص)}{س(س - ص) + ١}$

$صَ = \frac{١ + س ص - ص^{٢}}{١ + س ص - س^{٢}}$

※

س٥) $ص = هـ^{أس}$

$صَ = أ هـ^{أس}$

$صً = أ^{٢} هـ^{أس}$

$أ^{٢} هـ^{أس} - ٥أ هـ^{أس} + ٦ هـ^{أس} = صفر$

$هـ^{أس} (أ^{٢} - ٥أ + ٦) = صفر$

$(أ - ٢)(أ - ٣) = صفر$

$\boxed{أ = ٢}$ ، $\boxed{أ = ٣}$

س٦) $د(س) = ٣^{ل(س)} \Leftarrow لو_{هـ} د(س) = لو_{هـ} ٣^{ل(س)}$

$لو_{هـ} د(س) = ل(س) \times لو_{هـ} ٣$

$\frac{دَ(س)}{د(س)} = لَ(س) \times لو_{هـ} ٣ \Leftarrow دَ(س) = ٣^{ل(س)} \times لَ(س) \times لو_{هـ} ٣$

※

٧) $\int د'(س)\,دس = هـ^{١-س^{٢}} + ٤هـ$

$د'(ب) = -٢ب$

نشتق الطرفين

$-٢س\, هـ^{١-س^{٢}} = د'(س)$

$-٢ب\, هـ^{١-ب^{٢}} = -٢ب$

$هـ^{١-ب^{٢}} = ١ \Leftarrow ١-ب^{٢} = صفر$

$ب = \mp ١$

ش) ١٢ $\int هـ^{٧س}\,دس = \frac{١}{٧} هـ^{٧س} + جـ$

ب) $\int_{٠}^{١} ٣هـ^{٣س}\,دس = \left[هـ^{٣س}\right]_{٠}^{١} = هـ^{٣} - ١$

جـ) $\int_{١}^{٣} هـ^{٤}\,دس = هـ^{٤}(٣-١)$

$= ٢هـ^{٤}$

د) $\int \frac{٤هـ^{٤س} - ٣}{هـ^{٤س} - ٣س}\,دس$

$= لو_{هـ}\left|هـ^{٤س} - ٣س\right| + جـ$

هـ) $\int \frac{هـ^{٣س} - ٢٧}{هـ^{س} - ٣}\,دس$

$= \int \frac{\cancel{(هـ^{س}-٣)}(هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩)}{\cancel{(هـ^{س}-٣)}}\,دس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{٢س} + ٣هـ^{س} + ٩س + جـ$

و) $\int هـ^{٥+لو_{هـ} جتا س}\,دس$

$= \int هـ^{٥} \times هـ^{لو_{هـ} جتا س}\,دس$

$= \int هـ^{٥}\, جتا س\,دس$

$= هـ^{٥}\, جا س + جـ$

ط) $\int هـ^{٥س} \sqrt{(هـ^{س}+٢)^{٢}}\,دس$

$= \int هـ^{٥} \left|هـ^{س}+٢\right|\,دس$

$= \int هـ^{٥}(هـ^{س}+٢)\,دس = \int هـ^{٦س} + ٢هـ^{٥س}\,دس$

$= \frac{١}{٦} هـ^{٦س} + \frac{٢}{٥} هـ^{٥س} + جـ$

ي) $\int \left(هـ^{٢س+٥}\right)^{٢}\,دس = \int هـ^{٤س+١٠}\,دس$

$= \frac{١}{٤} هـ^{٤س+١٠} + جـ$

الفصل الثاني : طرائق التكامل

أولاً : التكامل بالتعويض

تدريب (١)

١) $\int س^{٢}\,(٦س^{٣}+٥)^{٣}\,دس$

$ص = ٦س^{٣}+٥ \qquad دص = ١٨س^{٢}\,دس$

$\int س^{٢}\,(٦س^{٣}+٥)^{٣}\,دس = \frac{١}{١٨}\int (٦س^{٣}+٥)^{٣}\,(١٨س^{٢}\,دس)$

$= \frac{١}{١٨}\int ص^{٣}\,دص = \frac{١}{١٨}\,\frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{٧٢}\,(٦س^{٣}+٥)^{٤} + جـ$

٢) $\int (س+٣)\,\sqrt[٥]{س^{٢}+٦س-٤}\,\,دس$

$ص = س^{٢}+٦س-٤ \qquad دص = (٢س+٦)\,دس$

$\int (س+٣)\,(س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}}\,دس$

$= \frac{١}{٢}\int (س^{٢}+٦س-٤)^{\frac{١}{٥}}\,((٢س+٦)\,دس)$

$= \frac{١}{٢}\int ص^{\frac{١}{٥}}\,دص = \frac{١}{٢}\times\frac{٥}{٦}\,ص^{\frac{٦}{٥}} + جـ$

$\frac{٥}{١٢}\,\sqrt[٥]{(س^{٢}+٦س-٤)^{٦}} + جـ$

٣) $\int \frac{١٠س-٥}{\sqrt[٣]{(س^{٢}-س+١)^{٢}}}\,دس$

$ص = س^{٢}-س+١ \qquad دص = (٢س-١)\,دس$

$\int (١٠س-٥)\,(س^{٢}-س+١)^{-\frac{٢}{٣}}\,دس$

$= ٥\int (س^{٢}-س+١)^{-\frac{٢}{٣}}\,((٢س-١)\,دس)$

$= ٥\int ص^{-\frac{٢}{٣}}\,دص = ٥\times٣\,ص^{\frac{١}{٣}} + جـ$

$= ١٥\,\sqrt[٣]{س^{٢}-س+١} + جـ$

تدريب (٢)

١) $\int س^{٧}\,\sqrt{س^{٤}-٣}\,\,دس$

$ص = س^{٤}-٣ \qquad دص = ٤س^{٣}\,دس$

$\int س^{٧}\,(س^{٤}-٣)^{\frac{١}{٢}}\,دس = \frac{١}{٤}\int س^{٤}\,ص^{\frac{١}{٢}}\,(٤س^{٣}\,دس)$

$= \frac{١}{٤}\int س^{٤}\,ص^{\frac{١}{٢}}\,دص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص+٣)\,ص^{\frac{١}{٢}}\,دص$

$= \frac{١}{٤}\int (ص^{\frac{٣}{٢}} + ٣ص^{\frac{١}{٢}})\,دص$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢}{٥}\,ص^{\frac{٥}{٢}} + ٣\times\frac{٢}{٣}\,ص^{\frac{٣}{٢}}\right) + جـ$

$= \frac{١}{٤}\left(\frac{٢}{٥}\sqrt{(س^{٤}-٣)^{٥}} + ٢\sqrt{(س^{٤}-٣)^{٣}}\right) + جـ$

٢) $\int ٢س^{٥}\,(س^{٢}+٥)^{٤}\,دس$

$ص = س^{٢}+٥ \qquad دص = ٢س\,دس$

$\int س^{٤}\,ص^{٤}\,(٢س)\,دس$

$\int (ص-٥)^{٢}\,ص^{٤}\,دص$

$\int (ص^{٢}-١٠ص+٢٥)\,ص^{٤}\,دص$

$\int ص^{٦} - ١٠ص^{٥} + ٢٥ص^{٤}\,دص$

$\frac{ص^{٧}}{٧} - \frac{١٠ص^{٦}}{٦} + \frac{٢٥ص^{٥}}{٥} + جـ$

$= \frac{(س^{٢}+٥)^{٧}}{٧} - \frac{٥(س^{٢}+٥)^{٦}}{٣} + ٥(س^{٢}+٥)^{٥} + جـ$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٧}}\ دس$

$= \int \frac{(٢س+١)^{٥}}{س^{٥} \times س^{٢}}\ دس$

$= \int \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٥} دس$

$ص = \frac{٢س+١}{س}$ ، $ص = ٢ + \frac{١}{س}$

$دص = \frac{-١}{س^{٢}}\ دس$

$\int \frac{١}{س^{٢}} (ص)^{٥}\ دس = -\int ص^{٥}\ دص$

$= -\frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= -\frac{١}{٦} \left(\frac{٢س+١}{س}\right)^{٦} + جـ$

٢) $\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٧}+٥س^{٣}}\ دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س^{٢} \sqrt[٣]{س^{٣}} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\ دس$

$\int س^{٣} \sqrt[٣]{س^{٤}+٥}\ دس$

$ص = س^{٤}+٥$ $\quad$ $دص = ٤س^{٣}\ دس$

$\int س^{٣} (س^{٤}+٥)^{\frac{١}{٣}}\ دس = \frac{١}{٤} \int ص^{\frac{١}{٣}}\ دص$

$= \frac{١}{٤} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{١٦} \sqrt[٣]{(س^{٤}+٥)^{٤}} + جـ$

٣) $\int \sqrt[٣]{٤س^{٥}+٢س^{٣}}\ دس$

إخراج $س^{٣}$ عامل مشترك.

$\int س \sqrt[٣]{٤س^{٢}+٢}\ دس$

$ص = ٤س^{٢}+٢$ $\quad$ $دص = ٨س\ دس$

$\int س (٤س^{٢}+٢)^{\frac{١}{٣}} دس = \int \frac{١}{٨} ص^{\frac{١}{٣}}\ دص$

$= \frac{١}{٨} \times \frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + جـ$

$= \frac{٣}{٣٢} \sqrt[٣]{(٤س^{٢}+٢)^{٤}} + جـ$

٤) $\int (٧س^{٥}-٢س)^{٣}\ دس$

$\int س^{٣} (٧س^{٤}-٢)^{٣}\ دس$

$ص = ٧س^{٤}-٢$ $\quad$ $دص = ٢٨س^{٣}$

$\int \frac{١}{٢٨} ص^{٣}\ دص = \frac{١}{٢٨} \frac{ص^{٤}}{٤} + جـ$

$= \frac{١}{١١٢} (٧س^{٤}-٢)^{٤} + جـ$

تدريب (٤)

١) $\int_{٠}^{٤} س \sqrt{س^{٢}+٩}\ دس$

$ص = س^{٢}+٩$ $\quad$ $دص = ٢س\ دس$

$\frac{١}{٢} \int_{٩}^{٢٥} ص^{\frac{١}{٢}}\ دص$ $\quad$ $س=٠$ $ص=٩$ ، $س=٤$ $ص=٢٥$

$\frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \left[\sqrt{ص^{٣}}\right]_{٩}^{٢٥}$

$\frac{١}{٣} (١٢٥-٢٧) = \frac{٩٨}{٣}$

٢) $\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٧}}\, دس$

$\int_{١}^{٢} \frac{(س+١)^{٥}}{س^{٥}\, س^{٢}}\, دس$

$= \int_{١}^{٢} \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{س+١}{س}\right)^{٥} دس$

$ص = \frac{س+١}{س}$ ، $ص = ١ + \frac{١}{س}$ $\quad دص = \frac{-١}{س^{٢}}\, دس$

$-\int_{٢}^{\frac{٣}{٢}} ص^{٥}\, دص$ $\quad س=١$ ، $ص = ٢$

$س=٢$ ، $ص = \frac{٣}{٢}$

$-\left[\frac{ص^{٦}}{٦}\right]_{٢}^{\frac{٣}{٢}}$

$-\frac{١}{٦}\left(\left(\frac{٣}{٢}\right)^{٦} - (٢)^{٦}\right) = \frac{٣٣٦٧}{٣٨٤}$

* * *

<u>تدريب (٥)</u>

١) $\int (س^{٢}+١)\, جا(س^{٣}+٣س+١)\, دس$

$ص = س^{٣}+٣س+١$ $\quad دص = (٣س^{٢}+٣)\, دس$

$\int \frac{١}{٣}\, جاص\, دص = -\frac{١}{٣}\, جتاص + جـ$

$= -\frac{١}{٣}\, جتا(س^{٣}+٣س+١) + جـ$

٢) $\int س\, ظا^{٢}(س^{٢}+٥)\, دس$

$ص = س^{٢}+٥$ $\quad دص = ٢س\, دس$

$\int \frac{١}{٢}\, ظا^{٢}ص\, دص = \int \frac{١}{٢}(قا^{٢}ص - ١)\, دص$

$\frac{١}{٢}(ظاص - ص) + جـ = \frac{١}{٢}\left(ظا(س^{٢}+٥) - (س^{٢}+٥)\right) + جـ$

٣) $\int_{١}^{٢} \frac{هـ^{\frac{٣}{س}}}{س^{٢}}\, دس$

$ص = \frac{٣}{س}$ $\quad دص = -\frac{٣}{س^{٢}}\, دس$

$س = ١ \leftarrow ص = ٣$

$س = ٢ \leftarrow ص = \frac{٣}{٢}$

$\int_{٣}^{\frac{٣}{٢}} \frac{-١}{٣}\, هـ^{ص}\, دص$

$= -\frac{١}{٣}\left[هـ^{ص}\right]_{٣}^{\frac{٣}{٢}} = -\frac{١}{٣}\left(هـ^{\frac{٣}{٢}} - هـ^{٣}\right)$

* * *

<u>تدريب (٦) :</u>

١) $\int ظا^{٥}٣س\, قا^{٢}٣س\, دس$

$ص = ظا٣س$ $\quad دص = ٣\, قا^{٢}٣س\, دس$

$\int \frac{١}{٣}\, ص^{٥}\, دص = \frac{١}{٣}\, \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$= \frac{١}{١٨}\, ظا^{٦}٣س + جـ$

٢) $\int \frac{جتا٢س}{قتا^{٥}٢س}\, دس = \int جا^{٥}٢س\, جتا٢س\, دس$

$ص = جا٢س$ $\quad دص = ٢\, جتا٢س\, دس$

$\int \frac{١}{٢}\, ص^{٥}\, دص = \frac{١}{٢}\, \frac{ص^{٦}}{٦} + جـ$

$\frac{١}{١٢}\, جا^{٦}٢س + جـ$

٣) $\int جا^{٣}س\, دس = \int جاس \times جا^{٢}س\, دس$

$\int جاس(١ - جتا^{٢}س)\, دس$ $\quad ص = جتاس$

$-\int (١ - ص^{٢})\, دص$ $\quad دص = -جاس\, دس$

$= -ص + \frac{ص^{٣}}{٣} + جـ = -جتاس + \frac{جتا^{٣}س}{٣} + جـ$

٤) $\int \text{جا}^٤ ٥س \; \text{جتا}^٣ ٥س \; دس$

$ص = \text{جا} ٥س \quad ، \quad دص = ٥ \, \text{جتا} ٥س \, دس$

$\int \frac{١}{٥} ص^٤ \times \text{جتا}^٢ ٥س \; دص$

$\leftarrow (١ - \text{جا}^٢ ٥س)$

$\int \frac{١}{٥} ص^٤ (١ - ص^٢) \; دص$

$= \int \frac{١}{٥} (ص^٤ - ص^٦) \; دص$

$\frac{١}{٥} \left(\frac{ص^٥}{٥} - \frac{ص^٧}{٧} \right) + جـ$

$= \frac{\text{جا}^٥ ٥س}{٢٥} - \frac{\text{جا}^٧ ٥س}{٣٥} + جـ$

تمارين ومسائل صفحة (٢٧٣ ، ٢٧٤)

حل)

أ) $\int_{٠}^{٢} (س+٣) \sqrt{س^٢ + ٦س} \; دس$

$ص = س^٢ + ٦س \quad ، \quad دص = (٢س + ٦) \, دس$

$س = ٠ \Leftarrow ص = ٠$

$س = ٢ \Leftarrow ص = ١٦$

$\int_{٠}^{١٦} \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٢}} \; دص$

$= \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣} \left[ص^{\frac{٣}{٢}} \right]_{٠}^{١٦}$

$\frac{١}{٣} \left(\sqrt{١٦}^{٣} - \sqrt{٠}^{٣} \right) = \frac{٦٤}{٣}$

ب) $\int \frac{٣س - ٣}{٣س^٢ - ٦س - ٥} \; دس$

$ص = ٣س^٢ - ٦س - ٥ \quad ، \quad دص = (٦س - ٦) \, دس$

$= \int \frac{١}{٢} \times \frac{١}{ص} \; دص = \frac{١}{٢} \text{لو}_{هـ} |ص| + جـ$

$= \frac{١}{٢} \text{لو}_{هـ} |٣س^٢ - ٦س - ٥| + جـ$

جـ) $\int \frac{٣}{(٤س^٢ - ٢٠س + ٢٥)^٧} \; دس$

$= \int \frac{٣}{((٢س - ٥)^٢)^٧} \; دس$

$= \int ٣ (٢س - ٥)^{-١٤} \; دس$

$= \frac{٣ (٢س - ٥)^{-١٣}}{٢ \times -١٣} + جـ = \frac{-١}{١٣ (٢س - ٥)^{١٣}} + جـ$

د) $\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{س^٢ - ٤س + ٤} \; دس$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٧}{(س - ٢)^٢} \; دس = \int_{٣}^{٤} ٧ (س - ٢)^{-٢} \; دس$

$\left[\frac{-٧}{س - ٢} \right]_{٣}^{٤} = \frac{-٧}{٢} + \frac{٧}{١} = \frac{٧}{٢}$

هـ) $\int \frac{\text{ظا}^٢ \frac{١}{س}}{س^٢} \; دس$

$ص = \frac{١}{س} \quad ، \quad دص = \frac{-١}{س^٢} \, دس$

$= \int - \text{ظا}^٢ ص \; دص$

$= \int - (\text{قا}^٢ ص - ١) \; دص$

$= - (- \text{ظا} ص - ص) + جـ$

$= \text{ظا} \frac{١}{س} + \frac{١}{س} + جـ$

و) $\int \frac{(٥ + \sqrt{س})^٧}{\sqrt{س}} \; دس$

$ص = \sqrt{س} + ٥ \quad \quad دص = \frac{١}{٢\sqrt{س}} \; دس$

$\int ٢ ص^٧ \; دص = \frac{٢ ص^٨}{٨} + جـ$

$\frac{(٥ + \sqrt{س})^٨}{٤} + جـ$

ن) $\int \frac{١}{\text{س}^٢}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ٢ + \frac{١}{\text{س}}$ ، $\text{د ص} = \frac{-١}{\text{س}^٢}\,\text{د س}$

$\int \frac{١}{\text{س}^٢}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,.\,\text{د س} = \int -\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{د ص}$

$= -\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{جـ}$

$= -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^٣} + \text{جـ}$

ع) $\int_{١}^{\text{هـ}^٣} \frac{١}{\text{س}\sqrt{١+\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = ١ + \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{د ص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{د س}$

$\text{س} = ١$ ، $\text{ص} = ١$

$\text{س} = \text{هـ}^٣$ ، $\text{ص} = ٤$

$\int_{١}^{٤} \text{ص}^{-\frac{١}{٢}}\,\text{د ص} = ٢\left[\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\right]_{١}^{٤}$

$٢(\sqrt{٤} - \sqrt{١}) = ٢$

ط) $\int \text{هـ}^{\text{س}^٣ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{د س}$

$= \int \text{هـ}^{\text{س}^٣} \times \text{هـ}^{٢\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}\,\text{د س} = \int \text{هـ}^{\text{س}^٣} \times \text{هـ}^{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}^٢}\,\text{د س}$

$= \int \text{س}^٢\,\text{هـ}^{\text{س}^٣}\,\text{د س}$

$\text{ص} = \text{س}^٣$ $\text{د ص} = ٣\text{س}^٢\,\text{د س}$

$\int \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{د ص} = \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \frac{١}{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}^٣} + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{\text{س}^٣}{(\text{س}+١)^٥}\,\text{د س}$

$= \int \frac{١}{(\text{س}+١)^٢} \times \frac{\text{س}^٣}{(\text{س}+١)^٣}\,\text{د س}$

$= \int \frac{١}{(\text{س}+١)^٢}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+١}\right)^٣\text{د س}$

$\text{ص} = \frac{\text{س}}{\text{س}+١}$ ، $\text{د ص} = \frac{١}{(\text{س}+١)^٢}\,\text{د س}$

$= \int \text{ص}^٣\,\text{د ص} = \frac{\text{ص}^٤}{٤} + \text{جـ}$

$\frac{١}{٤}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+١}\right)^٤ + \text{جـ}$

ك) $\int \sqrt[٣]{\text{س}^{-\frac{٣}{٤}} + ١}\,\text{د س}$

$= \int \sqrt[٣]{\frac{١}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}} + ١}\,\text{د س} = \int \sqrt[٣]{\frac{١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}}{\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}}\,\text{د س}$

$= \int \frac{١}{\text{س}^{\frac{١}{٤}}}\sqrt[٣]{١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}}}\,\text{د س}$

$\text{ص} = ١ + \text{س}^{\frac{٣}{٤}}$ ، $\text{د ص} = +\frac{٣}{٤}\,\text{س}^{-\frac{١}{٤}}\,\text{د س}$

$= \int +\frac{٤}{٣}\,\text{ص}^{\frac{١}{٣}}\,\text{د ص} = +\frac{٤}{٣} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{جـ}$

$= \sqrt[٣]{(١+\text{س}^{\frac{٣}{٤}})^٤} + \text{جـ}$

ل) $\int \text{جتا}^٣\text{س}\,(١+\text{جا س})^٧\,\text{د س}$

$\text{ص} = ١ + \text{جا س}$ ، $\text{د ص} = \text{جتا س}\,\text{د س}$

$\int \text{جتا}^٢\text{س}\;\text{ص}^٧\,\text{د ص} = \int (١ - \text{جا}^٢\text{س})\,\text{ص}^٧\,\text{د ص}$

$= \int (١ - (\text{ص}-١)^٢)\,\text{ص}^٧\,\text{د ص}$

$= \int ٢\text{ص}^٨ - \text{ص}^٩\,\text{د ص} = \frac{٢\text{ص}^٩}{٩} - \frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

$= \frac{٢(١+\text{جا س})^٩}{٩} - \frac{(١+\text{جا س})^{١٠}}{١٠} + \text{جـ}$

س٢) إذا كان $\int_{1}^{8} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 18$

$\text{ص} = \text{س}^3 \qquad \text{دص} = 3\,\text{س}^2\,\text{دس}$

س = ١ ← ص = ١

ص = ٢ ص = ٨

$\int_{1}^{2} \text{س}^2\,\text{ق}(\text{س}^3)\,\text{دس} = \frac{1}{3}\int_{1}^{8} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{3} \times 18 = 6$

س٣) $\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} = 8$

$\text{ص} = \text{جا}2\text{س} \quad ، \quad \text{دص} = 2\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{دس}$

س = ٠ ← ص = ٠

$\text{س} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{ص} = 1$

$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} 3\,\text{جتا}2\text{س}\,\text{ق}(\text{جا}2\text{س})\,\text{دس}$

$= \frac{3}{2}\int_{0}^{1} \text{ق}(\text{ص})\,\text{دص} = \frac{3}{2} \times 8 = 12$

س٤) أ) $\int \text{هـ}^{\text{جاس} + \text{لوهـ جتاس}}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{جاس}} \times \text{هـ}^{\text{لوهـ جتاس}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جتاس}\,\text{هـ}^{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس} \qquad \text{دص} = \text{جتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{ص}} + \text{جـ}$

$= \text{هـ}^{\text{جاس}} + \text{جـ}$

ب) $\int_{0}^{2} \frac{\text{س}^3}{\sqrt{(\text{س}^2+9)^3}}\,\text{دس}$

$= \int_{0}^{2} \text{س}^3\,(\text{س}^2+9)^{-\frac{3}{2}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{س}^2 + 9 \quad ، \quad \text{دص} = 2\,\text{س}\,\text{دس}$

س = ٠ ، ص = ٩

س = ٢ ، ص = ١٣

$\frac{1}{2}\int_{9}^{13} \text{س}^2\,\text{ص}^{-\frac{3}{2}}\,\text{دص}$

$\frac{1}{2}\int_{9}^{13} (\text{ص}-9)\,\text{ص}^{-\frac{3}{2}}\,\text{دص} = \frac{1}{2}\int_{9}^{13} (\text{ص}^{-\frac{1}{2}} - 9\,\text{ص}^{-\frac{3}{2}})\,\text{دص}$

$= \frac{1}{2}\left[(2\,\text{ص}^{\frac{1}{2}} - 9 \times -2\,\text{ص}^{-\frac{1}{2}})\right]_{9}^{13}$

$= \frac{1}{2}\left((2\sqrt{13} + \frac{18}{\sqrt{13}}) - (2 \times 3 + \frac{18}{3})\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{13} + \frac{18}{\sqrt{13}} - 12\right)$

جـ) $\int \frac{1 - \text{ظا}^2\text{س}}{\text{جتا}^2\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \text{قا}^2\text{س}\,(1 - \text{ظا}^2\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس} \quad ، \quad \text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\,\text{دس}$

$= \int 1 - \text{ص}^2\,\text{دص}$

$= \text{ص} - \frac{\text{ص}^3}{3} + \text{جـ}$

$= \text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^3\text{س}}{3} + \text{جـ}$

د) $\int \frac{\text{جاس}\sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}+٤}}{\text{قاس}}\,\text{دس}$

$= \int \text{جاس جتاس}\sqrt{\text{جا}^{٢}\text{س}+٤}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جا}^{٢}\text{س} + ٤ \quad ، \quad \text{دص} = ٢\text{جاس جتاس دس}$

$\int \frac{١}{٢}\,\text{ص}^{\frac{١}{٢}}\,\text{دص} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٣}\sqrt{(\text{جا}^{٢}\text{س}+٤)^{٣}} + \text{ج}$

هـ) $\int \text{قتا}^{٤}\,٦\text{س}\ \text{ظتا}^{٣}\,٦\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{ظتا}\,٦\text{س} \quad ، \quad \text{دص} = -٦\,\text{قتا}^{٢}\,٦\text{س دس}$

$= \int -\frac{١}{٦}\,\text{قتا}^{٢}\,٦\text{س}\ \text{ص}^{٣}\,\text{دص}$

$= -\frac{١}{٦}\int (\text{ظتا}^{٢}\,٦\text{س}+١)\ \text{ص}^{٣}\,\text{دص}$

$= \int -\frac{١}{٦}(\text{ص}^{٥} + \text{ص}^{٣})\,\text{دص}$

$= -\frac{١}{٦}\left(\frac{\text{ص}^{٦}}{٦} + \frac{\text{ص}^{٤}}{٤}\right) + \text{ج}$

$= -\frac{١}{٦}\left(\frac{\text{ظتا}^{٦}\,٦\text{س}}{٦} + \frac{\text{ظتا}^{٤}\,٦\text{س}}{٤}\right) + \text{ج}$

و) $\int \text{جتا}^{٤}\text{س دس}$

$\int (\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \int \left(\frac{١}{٢}(١+\text{جتا}٢\text{س})\right)^{٢}\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٤}(١+٢\text{جتا}٢\text{س}+\text{جتا}^{٢}٢\text{س})\ \text{دس}$

$= \int \frac{١}{٤}\left(١+٢\text{جتا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}(١+\text{جتا}٤\text{س})\right)\text{دس}$

$= \frac{١}{٤}\left(\text{س} + \text{جا}٢\text{س} + \frac{١}{٢}(\text{س} + \frac{١}{٤}\text{جا}٤\text{س})\right) + \text{ج}$

ز) $\int \frac{\text{جا}٢\text{س}}{(١+\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٥}}\,\text{دس}$

$\int \text{جا}٢\text{س}\,(١+\text{جتا}^{٢}\text{س})^{-٥}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ١ + \text{جتا}^{٢}\text{س} \quad ، \quad \text{دص} = -٢\text{جتاس جاس دس}$

$\int -\text{ص}^{-٥}\,\text{دص} = -\frac{\text{ص}^{-٤}}{-٤} + \text{ج}$

$= \frac{١}{٤(١+\text{جتا}^{٢}\text{س})^{٤}} + \text{ج}$

ح) $\int \text{جا}٢\text{س}\ \text{هـ}^{\text{جتا}٢\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{جتا}٢\text{س} \quad ، \quad \text{دص} = -٢\text{جا}٢\text{س دس}$

$\int -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص}$

$= -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{ص}} + \text{ج} = -\frac{١}{٢}\,\text{هـ}^{\text{جتا}٢\text{س}} + \text{ج}$

ط) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}}}{٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = ٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}} \quad ، \quad \text{ص} = ٥ - \text{س}^{\frac{٤}{٣}}$

$\text{دص} = -\frac{٤}{٣}\,\text{س}^{\frac{١}{٣}}\,\text{دس}$

$\int -\frac{٣}{٤} \times \frac{١}{\text{ص}}\,\text{دص} = -\frac{٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= -\frac{٣}{٤}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٥ - \text{س}\sqrt[٣]{\text{س}}| + \text{ج}$

ي) $\int \text{قا}^{٤}\text{س دس} = \int \text{قا}^{٢}\text{س} \times \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$= \int \text{قا}^{٢}\text{س}\,(\text{ظا}^{٢}\text{س}+١)\,\text{دس}$

$= \int \text{ص}^{٢}+١\ \text{دص}$ $\quad \text{ص} = \text{ظاس}$

$= \frac{\text{ص}^{٣}}{٣} + \text{ص} + \text{ج}$ $\quad \text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$= \frac{\text{ظا}^{٣}\text{س}}{٣} + \text{ظاس} + \text{ج}$

ك) $\int \frac{1}{\sqrt{\text{س}}\,(٢+\sqrt{\text{س}})}\ \text{د س}$

$\text{ص} = ٢ + \sqrt{\text{س}}$ ، $\text{د ص} = \frac{1}{٢\sqrt{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\int \frac{٢}{\text{ص}}\ \text{د ص} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{ج}$

$= ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}|٢+\sqrt{\text{س}}| + \text{ج}$

ل) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس} + ٣}}{٢ - ٢\,\text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢\,(١ - \text{جتا}^٢\text{س})}\ \text{د س}$

$= \int \frac{\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}}{٢\,\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{د س} = \frac{1}{٢}\int \text{قتا}^٢\text{س}\,\sqrt[٣]{\text{ظتاس}+٣}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{ظتاس} + ٣$ ، $\text{د ص} = -\text{قتا}^٢\text{س}\ \text{د س}$

$-\frac{1}{٢}\int \text{ص}^{\frac{1}{٣}}\ \text{د ص} = -\frac{1}{٢} \times \frac{٣}{٤}\,\text{ص}^{\frac{٤}{٣}} + \text{ج}$

$= -\frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(\text{ظتاس}+٣)^٤} + \text{ج}$

م) $\int \text{جاس}\,(١ + \text{جتا}٢\text{س})^٥\ \text{د س}$

$= \int \text{جاس}\,(٢\,\text{جتا}^٢\text{س})^٥\ \text{د س}$

$= ٣٢\int \text{جاس}\,\text{جتا}^{١٠}\text{س}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{د ص} = -\text{جاس}\ \text{د س}$

$-٣٢\int \text{ص}^{١٠}\ \text{د ص}$

$= -٣٢\,\frac{\text{ص}^{١١}}{١١} + \text{ج}$

$= -٣٢\,\frac{\text{جتا}^{١١}\text{س}}{١١} + \text{ج}$

ن) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس} - \text{جتا}^٢\text{س}}\ \text{د س}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}\,(١ - \text{جتا}^٢\text{س})}\ \text{د س}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \sqrt{\text{جتاس}} \times \sqrt{\text{جا}^٢\text{س}}\ \text{د س}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} |\text{جاس}|\,\sqrt{\text{جتاس}}\ \text{د س}$

$\overset{+\quad +}{\underset{٠ \qquad\quad \frac{\pi}{٢}}{\vdash\!\!\text{———}\!\!\dashv}}$

$= \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{جاس}\,(\text{جتاس})^{\frac{1}{٢}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{جتاس}$ ، $\text{د ص} = -\text{جاس}\ \text{د س}$

$-\int_{١}^{٠} \text{ص}^{\frac{1}{٢}}\ \text{د ص}$

$\text{س} = ٠ \rightarrow \text{ص} = ١$

$\text{س} = \frac{\pi}{٢} \rightarrow \text{ص} = ٠$

$= -\frac{٢}{٣}\left[\sqrt{\text{ص}^٣}\right]_{١}^{٠}$

$= \text{صفر} + \frac{٢}{٣} = \frac{٢}{٣}$

س) $\int \frac{1}{\text{س}^٢}\sqrt{\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}}\ \text{د س}$

$\text{ص} = \frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}$ ، $\text{ص} = ٢ + \frac{1}{\text{س}}$ ، $\text{د ص} = \frac{-1}{\text{س}^٢}\ \text{د س}$

$-\int \text{ص}^{\frac{1}{٢}}\ \text{د ص}$

$-\frac{٢}{٣}\,\text{ص}^{\frac{٣}{٢}} + \text{ج} = -\frac{٢}{٣}\sqrt{\left(\frac{٢\text{س}+١}{\text{س}}\right)^٣} + \text{ج}$

ع) $\int \text{جتا}٢\text{س}\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{د س}$

$= \int (\text{جتا}^٢\text{س} - \text{جا}^٢\text{س})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{د س}$

$= \int (\text{جتاس} + \text{جاس})\,(\text{جتاس} - \text{جاس})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٨\ \text{د س}$

$= -\int (\text{جتاس} + \text{جاس})\,(\text{جاس} - \text{جتاس})^٩\ \text{د س}$

$\text{ص} = \text{جاس} - \text{جتاس}$ ، $\text{د ص} = (\text{جتاس} + \text{جاس})\ \text{د س}$

$= -\int \text{ص}^٩\ \text{د ص} = -\frac{\text{ص}^{١٠}}{١٠} + \text{ج}$

$= -\frac{(\text{جاس} - \text{جتاس})^{١٠}}{١٠} + \text{ج}$

س٥) $\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س - ١)^{ن}}{س^{ن} \times س^{٢}} \, دس$

$= \int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{١}{س^{٢}} \left(\frac{س - ١}{س}\right)^{ن} دس$

$ص = \frac{س - ١}{س}$ ، $ص = ١ - \frac{١}{س}$

$دص = + \frac{١}{س^{٢}}$ $\quad$ $س = \frac{١}{٢}$ $\quad$ $ص = -١$

$س = ١$ $\quad$ $ص = ٠$

$\int_{-١}^{٠} ص^{ن} \, دص = \left[\frac{ص^{ن+١}}{ن+١} \right]_{-١}^{٠}$

$= صفر - \frac{(-١)^{ن+١}}{ن+١}$

ن: فردي ⟸ ن+١ زوجي $\quad (-١)^{ن+١} = ١$

$= \frac{-١}{ن+١}$

ن: زوجي ⟸ ن+١ فردي $\quad (-١)^{ن+١} = -١$

$= - \times \frac{-١}{ن+١} = \frac{١}{ن+١}$.

$$\int_{\frac{١}{٢}}^{١} \frac{(س - ١)^{ن}}{س^{ن+٢}} \, دس = \begin{cases} \frac{-١}{ن+١} \text{ ، } & ن: فردي \\ \frac{١}{ن+١} & ن: زوجي \end{cases}$$

س٦)

أ) $\int جتا^{١١} س \; جا^{٧} س \; دس$

نفرض ص = جتا س

ب) $\int جتا^{٥} س \; جا^{٧} س \; دس$

نفرض ص = جا س

جـ) $\int ظا^{٥} س \; قا^{٤} س \; دس$

ص = ظا س

د) $\int ظا^{٣} س \; قا^{٥} س \; دس$

ص = قا س

هـ) $\int ظتا^{٦} س \; قتا^{٤} س \; دس$

ص = ظتا س

و) $\int ظتا^{٧} س \; قتا^{٤} س \; دس$

ص = ظتا س

الفصل الثاني : طرائق التكامل

ثانياً: التكامل بالأجزاء

تدريب (١)

١) $\int \text{س جتاس دس}$

$\text{ص} = \text{س}$ $\qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جتاس دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{جاس}$

$\int \text{س جتاس دس} = \text{س جاس} - \int \text{جاس دس}$

$= \text{س جاس} + \text{جتاس} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س جا٥س دس}$

$\text{ص} = \text{س}$ $\qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جا٥س دس}$ $\qquad \text{هـ} = -\frac{١}{٥}\,\text{جتا٥س}$

$\int \text{س جا٥س دس} = -\frac{١}{٥}\,\text{س جتا٥س} + \frac{١}{٥}\int \text{جتا٥س دس}$

$= -\frac{١}{٥}\,\text{س جتا٥س} + \frac{١}{٢٥}\,\text{جا٥س} + \text{جـ}$

٣) $\int (\text{٢س} - ٣)\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{٢س} - ٣$ $\qquad \text{دص} = ٢\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int (\text{٢س} - ٣)\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = (\text{٢س} - ٣)\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= (\text{٢س} - ٣)\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٤) $\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{س}$ $\qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{قا}^{٢}\text{س دس}$ $\qquad \text{هـ} = \text{ظاس}$

$\int \text{س قا}^{٢}\text{س دس} = \text{س ظاس} - \int \text{ظاس دس}$

$= \text{س ظاس} + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتاس}| + \text{جـ}$

تدريب (٢)

١) $\int \text{س جا}^{٢}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{س}$ $\qquad \text{دص} = \text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جا}^{٢}\text{س} = \frac{١}{٢}(١ - \text{جتا٢س})\,\text{دس}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س})$

$\int \text{س جا}^{٢}\text{س دس} = \frac{١}{٢}\,\text{س}\,(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س}) - \int \frac{١}{٢}(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س})\,\text{دس}$

$= \frac{١}{٢}\,\text{س}(\text{س} - \frac{١}{٢}\,\text{جا٢س}) - \frac{١}{٢}(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} + \frac{١}{٤}\,\text{جتا٢س}) + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س لو}_{\text{هـ}}\text{س}^{٣}\,\text{دس} = \int \text{٣س لو}_{\text{هـ}}\text{س دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad \text{دص} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{٣س دس}$ $\qquad \text{هـ} = \frac{\text{٣س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{٣س لو}_{\text{هـ}}\text{س دس} = \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{٣}{٢}\,\text{س دس}$

$= \frac{٣}{٢}\,\text{س}^{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{٣}{٤}\,\text{س}^{٢} + \text{جـ}$

٣) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٣س جاس دس}$

$\text{ص} = \text{٣س}$ $\qquad \text{دص} = ٣\,\text{دس}$

$\text{دهـ} = \text{جاس دس}$ $\qquad \text{هـ} = -\text{جتاس}$

$\int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} \text{٣س جاس دس} = \left[-\text{٣س جتاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} + \int_{٠}^{\frac{\pi}{٢}} ٣\,\text{جتاس دس}$

$= (-٣ \times \frac{\pi}{٢}\,\text{جتا}\,\frac{\pi}{٢} + ٣ \times ٠\,\text{جتا}\,٠) + \left[٣\,\text{جاس}\right]_{٠}^{\frac{\pi}{٢}}$

$\text{صفر} + ٣\,\text{جا}\,\frac{\pi}{٢} - ٣\,\text{جا}\,٠$

$= ٣$

٤) $\int \frac{\text{س}}{١ - \text{جتا}\,٢\text{س}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}}{٢\,\text{جا}^{٢}\text{س}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{١}{٢}\,\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$

$\text{ع} = \frac{١}{٢}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{١}{٢}\,\text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\,\text{ظتا س}$

$\int \frac{١}{٢}\text{س}\ \text{قتا}^{٢}\text{س}\ \text{دس} = -\frac{١}{٢}\text{س ظتا س} + \int \frac{١}{٢}\,\text{ظتا س دس}$

$= -\frac{١}{٢}\text{س ظتا س} + \frac{١}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جا س}| + \text{جـ}$

* * *

تدريب (٣) :

١) $\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}^{٢}$ $\qquad$ $\text{دع} = ٢\text{س}\ \text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \underbrace{\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\text{ع} = ٢\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = ٢\ \text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\int ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - \int ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$= ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\,\text{هـ}^{\text{س}}$

$\therefore \int \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٢\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس}$

$\text{ع} = (\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}$ $\qquad$ $\text{دع} = ٢\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \underbrace{\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس}}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{١}{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{د هـ} = \text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}$

$\int \text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}\ \text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \int \frac{١}{٢}\,\text{س}\ \text{دس}$

$= \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} - \frac{\text{س}^{٢}}{٤}$

$\therefore \int \text{س}\,(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢}\,\text{دس} = \frac{\text{س}^{٢}}{٢}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})^{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} + \frac{\text{س}^{٢}}{٤} + \text{جـ}$

* * *

تدريب (٤)

١) $\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

ع		د هـ
$\text{س}^{٣}$	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
$٣\text{س}^{٢}$	−	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦س	+	$\text{هـ}^{\text{س}}$
٦	−	$\text{هـ}^{\text{س}}$
صفر		$\text{هـ}^{\text{س}}$

$\int \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس} = \text{س}^{٣}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٣\text{س}^{٢}\,\text{هـ}^{\text{س}} + ٦\text{س}\,\text{هـ}^{\text{س}} - ٦\,\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جـ}$

٢) $\int \text{س}^{٢}\,\text{جتا}\,٤\text{س}\ \text{دس}$

ع		د هـ
$\text{س}^{٢}$	+	$\text{جتا}\,٤\text{س}$
٢س	−	$\frac{١}{٤}\,\text{جا}\,٤\text{س}$
٢	+	$-\frac{١}{١٦}\,\text{جتا}\,٤\text{س}$
صفر		$-\frac{١}{٦٤}\,\text{جا}\,٤\text{س}$

$\int \text{س}^{٢}\,\text{جتا}\,٤\text{س}\ \text{دس} = \frac{١}{٤}\text{س}^{٢}\,\text{جا}\,٤\text{س} + \frac{١}{٨}\text{س}\,\text{جتا}\,٤\text{س} - \frac{١}{٣٢}\,\text{جا}\,٤\text{س} + \text{جـ}$

٣) $\int (س^{٢} - س)\ جا٢س\ دس$

ع		د هـ
$س^{٢} - س$		$جا٢س$
$٢س - ١$	+	$-\frac{١}{٢}\ جتا٢س$
٢	−	$-\frac{١}{٤}\ جا٢س$
صفر	+	$\frac{١}{٨}\ جتا٢س$

$$\int (س^{٢}-س)\ جا٢س\ دس = -\frac{١}{٢}(س^{٢}-س)\ جتا٢س + \frac{١}{٤}(٢س-١)\ جا٢س$$

$$+ \frac{١}{٤}\ جتا٢س + جـ$$

٤) $\int س^{٢}\ (٢س+١)^{٥}\ دس$

ع		د هـ
$س^{٢}$		$(٢س+١)^{٥}$
$٢س$	+	$\frac{(٢س+١)^{٦}}{١٢}$
٢	−	$\frac{(٢س+١)^{٧}}{١٦٨}$
صفر	+	$\frac{(٢س+١)^{٨}}{٢٦٨٨}$

$$\int س^{٢}(٢س+١)^{٥}\ دس = \frac{س^{٢}}{١٢}(٢س+١)^{٦} - \frac{س}{٨٤}(٢س+١)^{٧}$$

$$+ \frac{(٢س+١)^{٨}}{١٣٤٤} + جـ$$

تدريب (٥) :

١) $\int قا^{٢}س\ هـ^{\sqrt{ظاس}}\ دس$

$ص = \sqrt{ظاس}$ ، $ص^{٢} = ظاس$ ، $٢ص\ دص = قا^{٢}س\ دس$

$\int ٢ص\ هـ^{ص}\ دص$

$ع = ٢ص$ $\quad$ $دع = ٢\ دص$

$د هـ = هـ^{ص}\ دص$ $\quad$ $هـ = هـ^{ص}$

$\int ٢ص\ هـ^{ص}\ دص = ٢ص\ هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

$= ٢\sqrt{ظاس}\ هـ^{\sqrt{ظاس}} - ٢هـ^{\sqrt{ظاس}} + جـ$

٢) $\int جا٢س\ هـ^{جاس}\ دس$

$ص = جاس$ ، $دص = جتاس\ دس$

$\int ٢جاس\ هـ^{جاس}\ جتاس\ دس$

$\int ٢ص\ هـ^{ص}\ دص$ (تكامل بالأجزاء)

$= ٢ص\ هـ^{ص} - ٢هـ^{ص} + جـ$

$= ٢جاس\ هـ^{جاس} - ٢هـ^{جاس} + جـ$

٣) $\int جتا\sqrt{٢س+١}\ دس$

$ص = \sqrt{٢س+١}$ ، $ص^{٢} = ٢س+١$ ، $٢ص\ دص = ٢\ دس$

$\int ص\ جتاص\ دص$

$ع = ص$ $\quad$ $دع = دص$

$د هـ = جتاص\ دص$ $\quad$ $هـ = جاص$

$\int ص\ جتاص\ دص = ص\ جاص + جتاص + جـ$

$= \sqrt{٢س+١}\ جا\sqrt{٢س+١} + جتا\sqrt{٢س+١} + جـ$

٤) $\int_{\frac{\pi}{٤}}^{\frac{\pi}{٣}} ٣قا^{٤}س\ لو_{هـ}ظاس\ دس$

$ص = ظاس$ $\quad$ $دص = قا^{٢}س\ دس$

$س = \frac{\pi}{٤}$ $\quad$ $ص = ١$

$س = \frac{\pi}{٣}$ $\quad$ $ص = \sqrt{٣}$

$$\int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣\underset{(ظا^{٢}س+١)}{قا^{٢}س}\ لو_{هـ}ص\ دص = \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(ص^{٢}+١)\ لو_{هـ}ص\ دص$$

$ع = لو_{هـ}ص$ $\quad$ $دع = \frac{١}{ص}\ دص$

$د هـ = ٣(ص^{٢}+١)\ دص$ $\quad$ $هـ = ٣(\frac{ص^{٣}}{٣}+ص)$

$$= ٣(\frac{ص^{٣}}{٣}+ص)\ لو_{هـ}ص\Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - \int_{١}^{\sqrt{٣}} ٣(\frac{ص^{٢}}{٣}+١)\ دص$$

$$= ٣(\frac{ص^{٣}}{٣}+ص)\ لو_{هـ}ص\Big]_{١}^{\sqrt{٣}} - ٣(\frac{ص^{٣}}{٩}+ص)\Big]_{١}^{\sqrt{٣}}$$

$$٣(\frac{(\sqrt{٣})^{٣}}{٣}+\sqrt{٣})\ لو_{هـ}\sqrt{٣} - (صفر) - ٣\left((\frac{(\sqrt{٣})^{٢}}{٩}+\sqrt{٣}) - (\frac{١}{٩}+١)\right)$$

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٢

س١) أ) $\int_{٠}^{\pi} (٢س+١)\,جتا٣س \,دس$

ع = ٢س + ١ $\qquad$ دع = ٢ دس

د هـ = جتا٣س دس $\qquad$ هـ = $\frac{١}{٣}$ جا٣س

$\int_{٠}^{\pi} (٢س+١)\,جتا٣س\,دس =$

$\left[\frac{١}{٣}(٢س+١)\,جا٣س\right]_{٠}^{\pi} - \frac{٢}{٣}\int_{٠}^{\pi} جا٣س\,دس$

$\left(\frac{١}{٣}(٢\pi+١)\,جا٣\pi\right) - \left(\frac{١}{٣}(٢\times٠+١)\,جا٠\right) + \left[\frac{٢}{٩}\,جتا٣س\right]_{٠}^{\pi}$

صفر + $\frac{٢}{٩}$ جتا٣π − $\frac{٢}{٩}$ جتا صفر

$-\frac{٢}{٩} - \frac{٢}{٩} = -\frac{٤}{٩}$

ب) $\int س^٢\,لو_{هـ}س\,دس$

ع = $لو_{هـ}س$ $\qquad$ دع = $\frac{١}{س}$ دس

د هـ = $س^٢$ دس $\qquad$ هـ = $\frac{س^٣}{٣}$

$\int س^٢\,لو_{هـ}س\,دس = \frac{س^٣}{٣}\,لو_{هـ}س - \int \frac{س^٢}{٣}\,دس$

$= \frac{س^٣}{٣}\,لو_{هـ}س - \frac{س^٣}{٩} + ث$

جـ) $\int_{-٢}^{١} ٥س\sqrt{س+٣}\,دس$

ع = ٥س $\qquad$ دع = ٥ دس

د هـ = $(س+٣)^{\frac{١}{٢}}$ $\qquad$ هـ = $\frac{٢}{٣}(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}$

$\int_{-٢}^{١} ٥س\sqrt{س+٣}\,دس = \left[\frac{١٠س}{٣}\sqrt{(س+٣)^٣}\right]_{-٢}^{١} - \int_{-٢}^{١}\frac{١٠}{٣}(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}\,دس$

$\left(\frac{١٠}{٣}\times٨ + \frac{٢٠}{٣}\times١\right) - \left[\frac{١٠}{٣}\times\frac{٢}{٥}\sqrt{(س+٣)^٥}\right]_{-٢}^{١}$

$\frac{١٠٠}{٣} - \left(\frac{٤}{٣}\times٣٢ - \frac{٤}{٣}\times١\right)$

$\frac{١٠٠}{٣} - \frac{١٢٤}{٣} = -٨$

د) $\int \frac{س\,جاس}{جتا^٣س}\,دس = \int س\,ظاس\,قا^٢س\,دس$

ع = س $\qquad$ دع = دس

د هـ = ظاس قا^{٢}س $\qquad$ هـ = $\frac{١}{٢}$ قا^{٢}س

تكامل بالتعويض

$\int س\,ظاس\,قا^٢س\,دس = \frac{١}{٢}س\,قا^٢س - \int\frac{١}{٢}\,قا^٢س\,دس$

$= \frac{١}{٢}س\,قا^٢س - \frac{١}{٢}\,ظاس + ث$

هـ) $\int قا^٢س\,لو_{هـ}ظاس\,دس$

نفرض ص = ظاس ، دص = قا^{٢}س دس

$\int لو_{هـ}ص\,دص$

ع = $لو_{هـ}ص$ $\qquad$ دع = $\frac{١}{ص}$ دص

د هـ = دص $\qquad$ هـ = ص

$\int لو_{هـ}ص\,دص = ص\,لو_{هـ}ص - \int دص$

$= ص\,لو_{هـ}ص - ص + ث$

$= ظاس\,لو_{هـ}ظاس - ظاس + ث$

و) $\int \frac{س}{هـ^{٢س}}\,دس = \int س\,هـ^{-٢س}\,دس$

ع = س $\qquad$ دع = دس

د هـ = $هـ^{-٢س}$ دس $\qquad$ هـ = $-\frac{١}{٢}هـ^{-٢س}$

$\int س\,هـ^{-٢س}\,دس = -\frac{١}{٢}س\,هـ^{-٢س} + \int\frac{١}{٢}هـ^{-٢س}\,دس$

$= -\frac{١}{٢}س\,هـ^{-٢س} - \frac{١}{٤}هـ^{-٢س} + ث$

ن) $\int \text{جتا}\sqrt[3]{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[3]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^{3} = \text{س} \Leftarrow 3\text{ص}^{2}\text{دص} = \text{دس}$

$\int 3\text{ص}^{2}\ \text{جتا ص}\ \text{دص}$

ع		ده
3ص^{2}	+	جتا ص
6ص	−	جا ص
6	+	$-\text{جتا ص}$
صفر		$-\text{جا ص}$

$= 3\text{ص}^{2}\ \text{جا ص} + 6\text{ص جتا ص} - 6\text{جا ص} + \text{ج}$

$= 3\sqrt[3]{\text{س}}^{2}\ \text{جا}\sqrt[3]{\text{س}} + 6\sqrt[3]{\text{س}}\ \text{جتا}\sqrt[3]{\text{س}} - 6\text{جا}\sqrt[3]{\text{س}} + \text{ج}$

ح) $\int \text{جتاس لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{جاس}$ $\qquad$ $\text{دص} = \text{جتاس دس}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{ده} = \text{دص}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{ص}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص} = \text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \text{ص} + \text{ج}$

$= \text{جاس لو}_{\text{هـ}}\text{جاس} - \text{جاس} + \text{ج}$

ط) $\int \text{س}\ (\text{جاس} + \text{جتاس})^{2}\ \text{دس}$

$= \int \text{س}\ (1 + \text{جا}2\text{س})\ \text{دس}$

$\text{ع} = \text{س}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{دس}$

$\text{ده} = 1 + \text{جا}2\text{س}\ \text{دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \text{س} - \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س}$

$\int \text{س}(1 + \text{جا}2\text{س})\text{دس} = \text{س}^{2} - \frac{1}{2}\text{س جتا}2\text{س} - \int(\text{س} - \frac{1}{2}\text{جتا}2\text{س})\text{دس}$

$= \text{س}^{2} - \frac{1}{2}\text{س جتا}2\text{س} - (\frac{\text{س}^{2}}{2} - \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س}) + \text{ج}$

$= \frac{\text{س}^{2}}{2} - \frac{1}{2}\text{س جتا}2\text{س} + \frac{1}{4}\text{جا}2\text{س} + \text{ج}$

ي) $\int \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{جتا}3\text{س دس}$

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\text{ده} = \text{جتا}3\text{س دس}$ $\qquad$ $\text{هـ} = \frac{1}{3}\text{جا}3\text{س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س دس} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا}3\text{س} - \int \frac{1}{3}\text{جا}3\text{س هـ}^{\text{س}}\text{دس}$

أجزاء مرة أخرى

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad$ $\text{دع} = \text{هـ}^{\text{س}}$

$\text{ده} = \frac{1}{3}\text{جا}3\text{س}$ $\qquad$ $\text{هـ} = -\frac{1}{9}\text{جتا}3\text{س}$

$\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س دس} =$

$\frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا}3\text{س} + \frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س} - \int \frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س دس}$

$\frac{10}{9}\int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س دس} = \frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا}3\text{س} + \frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س}$

$\therefore \int \text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س دس} = \frac{9}{10}(\frac{1}{3}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جا}3\text{س} + \frac{1}{9}\text{هـ}^{\text{س}}\text{جتا}3\text{س}) + \text{ج}$

ك) $\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}+3)}{\sqrt{\text{س}+3}}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س}+3}$ ، $\text{ص}^{2} = \text{س} + 3$

$2\text{ص دص} = \text{دس}$

$\int \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}^{2}}{\text{ص}}\cdot 2\text{ص دص} = \int 4\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\qquad$ $\text{دع} = \frac{1}{\text{ص}}\ \text{دص}$

$\text{ده} = 4\text{دص}$ $\qquad$ $\text{هـ} = 4\text{ص}$

$\int 4\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص دص} = 4\text{ص لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - 4\text{ص} + \text{ج}$

$= 4\sqrt{\text{س}+3}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\sqrt{\text{س}+3} - 4\sqrt{\text{س}+3} + \text{ج}$

ل) $\int (س^{٢} - ٢س)\sqrt{س+٣}\ دس$

ع		د هـ
$س^{٢} - ٢س$	+	$(س+٣)^{\frac{١}{٢}}$
$٢س - ٢$	−	$\frac{٢}{٣}(س+٣)^{\frac{٣}{٢}}$
٢	+	$\frac{٤}{١٥}(س+٣)^{\frac{٥}{٢}}$
صفر		$\frac{٨}{١٠٥}(س+٣)^{\frac{٧}{٢}}$

$\int (س^{٢} - ٢س)\sqrt{س+٣}\ دس =$

$\frac{٢}{٣}(س^{٢} - ٢س)\sqrt{(س+٣)^{٣}} - \frac{٤}{١٥}(٢س-٢)\sqrt{(س+٣)^{٥}}$

$+ \frac{١٦}{١٠٥}\sqrt{(س+٣)^{٧}} + جـ$

م) $\int قا^{٢}س\ لو_{هـ} جاس\ دس$

$ع = لو_{هـ} جاس$ $\qquad دع = \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$د هـ = قا^{٢}س\ دس$ $\qquad هـ = ظاس$

$\int قا^{٢}س\ لو_{هـ} جاس\ دس = ظاس\ لو_{هـ} جاس - \int ظاس \times \frac{جتاس}{جاس}\ دس$

$= ظاس\ لو_{هـ} جاس - س + جـ$

ن) $\int ٢\ هـ^{س}\ جاس\ جتاس\ دس$

$= \int هـ^{س}\ جا٢س\ دس$

$ع = جا٢س$ $\qquad دع = ٢\ جتا٢س\ دس$

$د هـ = هـ^{س}\ دس$ $\qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - \int ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س\ دس$

أجزاء مرة أخرى

$ع = ٢\ جتا٢س$ $\qquad دع = -٤\ جا٢س\ دس$

$د هـ = هـ^{س}\ دس$ $\qquad هـ = هـ^{س}$

$\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س - \int ٤\ هـ^{س}\ جا٢س\ دس$

$٥\int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س$

$\therefore \int هـ^{س}\ جا٢س\ دس = \frac{١}{٥}\left(هـ^{س}\ جا٢س - ٢\ هـ^{س}\ جتا٢س\right) + جـ$

س) $\int (س^{٣} + ٢س)\ هـ^{س}\ دس$

ع		د هـ
$(س^{٣} + ٢س)$	+	$هـ^{س}$
$٣س^{٢} + ٢$	−	$هـ^{س}$
$٦س$	+	$هـ^{س}$
٦	−	$هـ^{س}$
صفر		$هـ^{س}$

$\int (س^{٣} + ٢س)\ هـ^{س}\ دس =$

$(س^{٣} + ٢س)\ هـ^{س} - (٣س^{٢} + ٢)\ هـ^{س} + ٦س\ هـ^{س} - ٦\ هـ^{س} + جـ$

ع) $\int \frac{س\ هـ^{س}}{(١+س)^{٢}}\ دس = \int س\ هـ^{س}(١+س)^{-٢}\ دس$

$ع = س\ هـ^{س}$ $\qquad دع = هـ^{س}(س+١)\ دس$

$د هـ = (١+س)^{-٢}$ $\qquad هـ = \frac{-١}{س+١}$

$\int س\ هـ^{س}(١+س)^{-٢}\ دس = \frac{-س\ هـ^{س}}{س+١} + \int هـ^{س}\ دس$

$= \frac{-س\ هـ^{س}}{س+١} + هـ^{س} + جـ$

س^{٢}) $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ٣

ق(١) = ٥ ، ق(٢) = ٨

$\int_{١}^{٢}$ س قَ(س) د س

ع = س   د ع = د س

د ه = قَ(س) د س   ه = ق(س)

$\int_{١}^{٢}$ س قَ(س) د س = $\Big[$س ق(س)$\Big]_{١}^{٢}$ − $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س

= ٢ ق(٢) − ١ ق(١) − ٣

= ١٦ − ٥ − ٣ = ٨

س^{٣}) $\int_{١}^{٢}$ ق(س) د س = ١٠

ق(٢) = ٣ ، ق(١) = −١

$\int_{٠}^{١}$ س^{٥} قَ(س^{٣} + ١) د س

نفرض ص = س^{٣} + ١   د ص = ٣ س^{٢} د س

س = ٠ ، ص = ١

س = ١   ص = ٢

$\int_{١}^{٢}$ $\frac{١}{٣}$ س^{٣} قَ(ص) د ص

= $\int_{١}^{٢}$ $\frac{١}{٣}$ (ص − ١) قَ(ص) د ص

ع = $\frac{١}{٣}$ (ص − ١)   د ع = $\frac{١}{٣}$ د ص

د ه = قَ(ص) د ص   ه = ق(ص)

$\int_{١}^{٢}$ $\frac{١}{٣}$ (ص − ١) قَ(ص) د ص =

$\Big[$$\frac{١}{٣}$ (ص − ١) ق(ص)$\Big]_{١}^{٢}$ − $\int_{١}^{٢}$ $\frac{١}{٣}$ ق(ص) د ص

= $\frac{١}{٣}$ × ١ ق(٢) − $\frac{١}{٢}$ × ٠ × ق(١) − $\frac{١}{٣}$ × ١٠

$\frac{٣}{٣}$ − $\frac{١٠}{٣}$ = − $\frac{٧}{٣}$.

ثالثاً: التكامل بالكسور الجزئية

تدريب (١)

$$\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣} \, دس$$

$$\frac{٥}{(س-٣)(س-١)} = \frac{أ}{س-٣} + \frac{ب}{س-١}$$

$$٥ = أ(س-١) + ب(س-٣)$$

$س = ١$	$س = ٣$
$٥ = -٢ب$	$٥ = ٢أ$
$ب = \frac{-٥}{٢}$	$أ = \frac{٥}{٢}$

$$\int \frac{٥}{س^٢ - ٤س + ٣} \, دس = \int \frac{+\frac{٥}{٢}}{س-٣} \, دس + \int \frac{-\frac{٥}{٢}}{س-١} \, دس$$

$$= \frac{٥}{٢} لو_هـ |س-٣| - \frac{٥}{٢} لو_هـ |س-١| + جـ$$

تدريب (٢)

$$\int \frac{س-١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} \, دس$$

$$\frac{س-١٣}{(٢س-١)(س-٣)} = \frac{أ}{٢س-١} + \frac{ب}{س-٣}$$

$$س - ١٣ = أ(س-٣) + ب(٢س-١)$$

$س = ٣$	$س = \frac{١}{٢}$
$-١٠ = ٥ب$	$-١٢٫٥ = -٢٫٥ أ$
$ب = -٢$	$أ = ٥$

$$\int \frac{س-١٣}{٢س^٢ - ٧س + ٣} \, دس = \int \frac{٥}{٢س-١} \, دس + \int \frac{-٢}{س-٣} \, دس$$

$$= \frac{٥}{٢} لو_هـ |٢س-١| - ٢ لو_هـ |س-٣| + جـ$$

تدريب (٣)

١) $\int \frac{س^٢ + س + ٥}{س^٢ + س} \, دس$

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline س^٢ + س + ٥ & س^٢ + س \\ -(س^٢ + س) & \\ \hline ٥ & \end{array}$$

$$\int ١ \, دس + \int \frac{٥}{س^٢ + س} \, دس$$

كسور جزئية

$$\frac{٥}{س(س+١)} = \frac{أ}{س} + \frac{ب}{س+١}$$

$$٥ = أ(س+١) + ب س$$

$س = -١$	$س = صفر$
$-ب = ٥$	$\boxed{أ = ٥}$
$\boxed{ب = -٥}$	

$$\int ١ \, دس + \int \frac{٥}{س} \, دس + \int \frac{-٥}{س+١} \, دس$$

$$س + ٥ لو_هـ |س| - ٥ لو_هـ |س+١| + جـ$$

٢) $\int_{٢}^{٣} \frac{س^٣ + س}{س - ١} \, دس$

$$\begin{array}{r|l} س^٢ + س + ٢ & \\ \hline س^٣ + س & س - ١ \\ -(س^٣ - س^٢) & \\ \hline س^٢ + س & \\ س^٢ - س & \\ \hline ٢س & \\ ٢س - ٢ & \\ \hline ٢ & \end{array}$$

$$= \int_{٢}^{٣} س^٢ + س + ٢ \, دس + \int_{٢}^{٣} \frac{٢}{س-١} \, دس$$

$$\left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٢س + ٢ لو_هـ |س-١| \right]_{٢}^{٣}$$

$٩ + \frac{٩}{٢} + ٦ + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢ - \frac{٨}{٣} - ٢ - ٤ - ٢\text{لو}_{\text{هـ}}١$

$\frac{٦٥}{٦} + ٢\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

* * *

تدريب (٤)

١) $\int \frac{\text{قا}^{٢}\text{س}}{٥\text{ظا}^{٢}\text{س} - ٣\text{ظاس} - ٢}\,\text{دس}$

نفرض ص = ظاس $\text{دص} = \text{قا}^{٢}\text{س دس}$

$\int \frac{١}{٥\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} - ٢}\,\text{دص}$

$\frac{١}{(٥\text{ص} + ٢)(\text{ص} - ١)} = \frac{\text{أ}}{٥\text{ص} + ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} - ١}$

$١ = \text{أ}(\text{ص} - ١) + \text{ب}(٥\text{ص} + ٢)$

ص = ١	$\text{ص} = \frac{-٢}{٥}$
٧ب = ١	$-\frac{٧}{٥}\text{أ} = ١$
$\text{ب} = \frac{١}{٧}$	$\text{أ} = \frac{-٥}{٧}$

$\int \frac{١}{٥\text{ص}^{٢} - ٣\text{ص} - ٢}\,\text{دص} = \int \frac{-\frac{٥}{٧}}{٥\text{ص} + ٢}\,\text{دص} + \int \frac{\frac{١}{٧}}{\text{ص} - ١}\,\text{دص}$

$= \frac{-١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}|٥\text{ص} + ٢| + \frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ١| + \text{جـ}$

$= -\frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}|٥\text{ظاس} + ٢| + \frac{١}{٧}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ظاس} - ١| + \text{جـ}$

* * *

٢) $\int \frac{\sqrt[٣]{\text{س}} - ١}{\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}} - ٤}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt[٣]{\text{س}}$ ، $\text{ص}^{٣} = \text{س}$ ، $٣\text{ص}^{٢}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int \frac{٣\text{ص}^{٢}(\text{ص} - ١)}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص} = \int \frac{٣\text{ص}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص}$

$٣\text{ص} - ٣$

$\text{ص}^{٢} - ٤ \;\big)\; ٣\text{ص}^{٣} - ٣\text{ص}^{٢}$

$\overset{-}{}\;٣\text{ص}^{٣} - ١٢\text{ص}$

$-٣\text{ص}^{٢} + ١٢\text{ص}$

$\overset{-}{}\;-٣\text{ص}^{٢} + ١٢$

$١٢\text{ص} - ١٢$

$\int (٣\text{ص} - ٣)\,\text{دص} + \int \frac{١٢\text{ص} - ١٢}{\text{ص}^{٢} - ٤}\,\text{دص}$

← كسور جزئية

$\frac{١٢\text{ص} - ١٢}{(\text{ص} - ٢)(\text{ص} + ٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{ص} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{ص} + ٢}$

$١٢\text{ص} - ١٢ = \text{أ}(\text{ص} + ٢) + \text{ب}(\text{ص} - ٢)$

ص = ٢	ص = −٢
١٢ = ٤أ	−٣٦ = −٤ب
أ = ٣	ب = ٩

$\int (٣\text{ص} - ٣)\,\text{دص} + \int \frac{٣}{\text{ص} - ٢}\,\text{دص} + \int \frac{٩}{\text{ص} + ٢}\,\text{دص}$

$\frac{٣\text{ص}^{٢}}{٢} - ٣\text{ص} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} - ٢| + ٩\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ٢| + \text{جـ}$

$= \frac{٣\sqrt[٣]{\text{س}^{٢}}}{٢} - ٣\sqrt[٣]{\text{س}} + ٣\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[٣]{\text{س}} - ٢| + ٩\text{لو}_{\text{هـ}}|\sqrt[٣]{\text{س}} + ٢| + \text{جـ}$

٣) $\int_{٠}^{٣} \frac{\sqrt{\text{س} + ١} - ١}{\sqrt{\text{س} + ١} + ١}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \sqrt{\text{س} + ١}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{س} + ١$ $٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{دس}$

$\int_{١}^{٢} \frac{٢\text{ص}(\text{ص} - ١)}{\text{ص} + ١}\,\text{دص}$

$٢\text{ص} - ٤$

$\text{ص} + ١ \;\big)\; ٢\text{ص}^{٢} - ٢\text{ص}$

$\overset{-}{}\;٢\text{ص}^{٢} + ٢\text{ص}$

-٤ص

$\overset{-}{}\;-٤\text{ص} - ٤$

٤

$\int_{١}^{٢} (٢\text{ص} - ٤)\,\text{دص} + \int_{١}^{٢} \frac{٤}{\text{ص} + ١}\,\text{دص}$

$\left[\text{ص}^{٢} - ٤\text{ص}\right]_{١}^{٢} + ٤\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص} + ١|\right]_{١}^{٢}$

$-١ + ٤\text{لو}_{\text{هـ}}٣ - ٤\text{لو}_{\text{هـ}}٢$

تمارين ومسائل صفحة ٢٨٩

١) $\int \frac{٧}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠} \, \text{دس}$

$$\frac{٧}{(\text{س} - ٥)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٥} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$٧ = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س} - ٥)$$

$\text{س} = -٢$ $\qquad$ $\text{س} = ٥$

$٧ = -٧\text{ب}$ $\qquad$ $٧ = ٧\text{أ}$

$\text{ب} = -١$ $\qquad$ $\text{أ} = ١$

$$\int \frac{٧}{\text{س}^٢ - ٣\text{س} - ١٠} \, \text{دس} = \int \frac{١}{\text{س} - ٥} \, \text{دس} + \int \frac{-١}{\text{س}+٢} \, \text{دس}$$

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٥| - \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+٢| + \text{جـ}$$

٢) $\int_{١}^{٣} \frac{٢\text{س}}{\text{س}^٢ - ٤\text{س} - ١٢} \, \text{دس}$

$$\frac{٢\text{س}}{(\text{س} - ٦)(\text{س}+٢)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٦} + \frac{\text{ب}}{\text{س}+٢}$$

$$٢\text{س} = \text{أ}(\text{س}+٢) + \text{ب}(\text{س} - ٦)$$

$\text{س} = -٢$ $\qquad$ $\text{س} = ٦$

$-٤ = -٨\text{ب}$ $\qquad$ $١٢ = ٨\text{أ}$

$\text{ب} = \frac{١}{٢}$ $\qquad$ $\text{أ} = \frac{٣}{٢}$

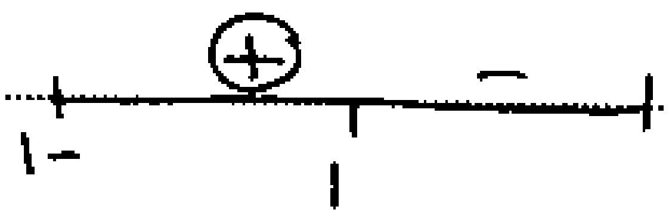
$$\int_{١}^{٣} \frac{\frac{٣}{٢}}{\text{س} - ٦} \, \text{دس} + \int_{١}^{٣} \frac{\frac{١}{٢}}{\text{س}+٢} \, \text{دس}$$

$$= \frac{٣}{٢} \Big[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٦|\Big]_{١}^{٣} + \frac{١}{٢} \Big[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س}+٢|\Big]_{١}^{٣}$$

$$\frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \frac{٣}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ + \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ - \frac{١}{٢} \text{لو}_{\text{هـ}} ٣$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٥ \; .$$

٣) $\int_{-١}^{١} \frac{|\text{س} - ١|}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} \, \text{دس}$



$$\int_{-١}^{١} \frac{١ - \text{س}}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} \, \text{دس}$$

$$\frac{١ - \text{س}}{(\text{س} - ٢)(\text{س} - ٣)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} - ٢} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ٣}$$

$$١ - \text{س} = \text{أ}(\text{س} - ٣) + \text{ب}(\text{س} - ٢)$$

$\text{س} = ٣$ $\qquad$ $\text{س} = ٢$

$\boxed{-٢ = \text{ب}}$ $\qquad$ $-١ = -\text{أ}$

$\boxed{\text{أ} = ١}$

$$\int_{-١}^{١} \frac{١ - \text{س}}{\text{س}^٢ - ٥\text{س} + ٦} \, \text{دس} = \int_{-١}^{١} \frac{١}{\text{س} - ٢} \, \text{دس} + \int_{-١}^{١} \frac{-٢}{\text{س} - ٣} \, \text{دس}$$

$$= \Big[\text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٢|\Big]_{-١}^{١} + \Big[-٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٣|\Big]_{-١}^{١}$$

$$\text{لو}_{\text{هـ}} ١ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ - ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ + ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٤$$

$$= ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٤ - ٢ \, \text{لو}_{\text{هـ}} ٢ - \text{لو}_{\text{هـ}} ٣ \; .$$

٤) $\int \frac{\text{س}^٣ + ٤\text{س} - ٨}{\text{س}^٢ - ٩} \, \text{دس}$

بالقسمة الطويلة $\Leftarrow \int \text{س} \, \text{دس} + \int \frac{١٣\text{س} - ٨}{\text{س}^٢ - ٩} \, \text{دس}$

$$= \int \text{س} \, \text{دس} + \int \frac{\frac{٣١}{٦}}{\text{س} - ٣} \, \text{دس} + \int \frac{\frac{٤٧}{٦}}{\text{س} + ٣} \, \text{دس}$$

$$\frac{\text{س}^٢}{٢} + \frac{٣١}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} - ٣| + \frac{٤٧}{٦} \text{لو}_{\text{هـ}} |\text{س} + ٣| + \text{جـ}$$

٥) $\int_{٠}^{١} \frac{٣س^{٢}+٣}{٣س^{٢}-س-٤}\,دس$

بالقسمة الطويلة $\Leftarrow \int_{٠}^{١} ١\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{س+٧}{٣س^{٢}-س-٤}\,دس$

↲ كسور جزئية

$= \int_{٠}^{١} ١\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{\frac{٢٥}{٧}}{(٣س-٤)}\,دس + \int_{٠}^{١} \frac{\frac{-٦}{٧}}{س+١}\,دس$

$س]_{٠}^{١} + \frac{٢٥}{٢١} لو_{هـ}|٣س-٤|]_{٠}^{١} + \frac{-٦}{٧} لو_{هـ}|س+١|]_{٠}^{١}$

$١ + \cancel{\frac{٢٥}{٢١} لو_{هـ} ١} - \frac{٢٥}{٢١} لو_{هـ} ٤ - \frac{٦}{٧} لو_{هـ} ٢ + \cancel{\frac{٦}{٧} لو_{هـ} ١}$

$١ - \frac{٢٥}{٢١} لو_{هـ} ٤ - \frac{٦}{٧} لو_{هـ} ٢$

* * *

٦) $\int \frac{ظاس}{٢٥-(لو_{هـ} جتاس)^{٢}}\,دس$

نفرض $ص = لو_{هـ} جتاس$ ، $دص = \frac{-جاس}{جتاس}\,دس$

$\int \frac{١}{ص^{٢}-٢٥}\,دص$

$\frac{١}{(ص-٥)(ص+٥)} = \frac{أ}{ص-٥} + \frac{ب}{ص+٥}$

$١ = أ(ص+٥) + ب(ص-٥)$

$ص = ٥$ $\qquad أ = \frac{١}{١٠}$

$ص = -٥$ $\qquad ب = -\frac{١}{١٠}$

$\int \frac{\frac{١}{١٠}}{ص-٥}\,دص + \int \frac{-\frac{١}{١٠}}{ص+٥}\,دص$

$= \frac{١}{١٠} لو_{هـ}|ص-٥| - \frac{١}{١٠} لو_{هـ}|ص+٥| + جـ$

$\frac{١}{١٠} لو_{هـ}|لو_{هـ} جتاس-٥| - \frac{١}{١٠} لو_{هـ}|لو_{هـ} جتاس+٥| + جـ$

٧) $\int \frac{١}{هـ^{س}+١}\,دس$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\qquad دص = هـ^{س}\,دس$

$\int \frac{١}{ص(ص+١)}\,دص = \int \frac{١}{ص}\,دص + \int \frac{-١}{ص+١}\,دص$

$= لو_{هـ}|ص| - لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

$= لو_{هـ}|هـ^{س}| - لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

* * *

٨) $\int \frac{هـ^{٣س}}{هـ^{٢س}-٣هـ^{س}-٤}\,دس$

نفرض $ص = هـ^{س}$ $\qquad دص = هـ^{س}\,دس$

$\int \frac{ص^{٢}}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,دص$ بالقسمة الطويلة

$= \int ١\,دص + \int \frac{٣ص+٤}{ص^{٢}-٣ص-٤}\,دص$

↲ كسور جزئية

$= \int ١\,دص + \int \frac{\frac{١٦}{٥}}{ص-٤}\,دص + \int \frac{\frac{-١}{٥}}{ص+١}\,دص$

$ص + \frac{١٦}{٥} لو_{هـ}|ص-٤| - \frac{١}{٥} لو_{هـ}|ص+١| + جـ$

$هـ^{س} + \frac{١٦}{٥} لو_{هـ}|هـ^{س}-٤| - \frac{١}{٥} لو_{هـ}|هـ^{س}+١| + جـ$

* * *

٩) $\int_{٩}^{١٦} \frac{\sqrt{س}}{س-٤}\,دس$ نفرض $ص = \sqrt{س}$

$ص^{٢} = س$ ، $٢ص\,دص = دس$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص^{٢}}{ص^{٢}-٤}\,دص = \int_{٣}^{٤} ٢\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{٨}{ص^{٢}-٤}\,دص$

$= \int_{٣}^{٤} ٢\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{٢}{ص-٢}\,دص + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{ص+٢}\,دص$

$= ٢(٤-٣) + ٢ لو_{هـ}|ص-٢|]_{٣}^{٤} - ٢ لو_{هـ}|ص+٢|]_{٣}^{٤}$

$٢ + ٢ لو_{هـ} ٢ - ٢ لو_{هـ} ٦ + ٢ لو_{هـ} ٥$

١٠) $\int \frac{جتاس}{١ + ٣جاس - جتا٢س}\, دس$

$= \int \frac{جتاس}{٢جا^{٢}س + ٣جاس}\, دس$

نفرض $ص = جاس$ $دص = جتاس\, دس$

$\int \frac{١}{٢ص^{٢}+٣ص}\, دص = \int \frac{\frac{١}{٣}}{ص}\, دص + \int \frac{\frac{-٢}{٣}}{٢ص+٣}\, دص$

$= \frac{١}{٣} لو_{ه}|ص| - \frac{١}{٣} لو_{ه}|٢ص+٣| + ج$

$= \frac{١}{٢} لو_{ه}|جاس| - \frac{١}{٣} لو_{ه}|٢جاس+٣| + ج$

* * *

١١) $\int لو_{ه}(س^{٢}-٩)\, دس$

$ع = لو_{ه}(س^{٢}-٩)$ $دع = \frac{٢س}{س^{٢}-٩}\, دس$

$دهـ = دس$ $هـ = س$

$\int لو_{ه}(س^{٢}-٩)\, دس = س لو_{ه}(س^{٢}-٩) - \int \frac{٢س^{٢}}{س^{٢}-٩}\, دس$

$= س لو_{ه}(س^{٢}-٩) - \int ٢\, دس - \int \frac{١٨}{س^{٢}-٩}\, دس$

$= س لو_{ه}(س^{٢}-٩) - ٢س - \left(\int \frac{٣}{س-٣}\, دس + \int \frac{-٣}{س+٣}\, دس\right)$

$= س لو_{ه}(س^{٢}-٤) - ٢س - ٣لو_{ه}|س-٣| + ٣لو_{ه}|س+٣| + ج$

* * *

١٢) $\int \frac{س}{س^{٤}+س^{٢}}\, دس$

$= \int \frac{س}{س^{٤}(١+س^{-٢})}\, دس$

$= \int \frac{س^{-٣}}{١+س^{-٢}}\, دس$

نفرض $ص = ١+س^{-٢}$

$دص = -٢س^{-٣}\, دس$

$= \int -\frac{١}{٢} \times \frac{١}{ص}\, دص = -\frac{١}{٢}لو_{ه}|ص| + ج$

$= -\frac{١}{٢} لو_{ه}|١+س^{-٢}| + ج$

* * *

١٣) $\int_{٩}^{١٦} \frac{دس}{س - ٣\sqrt{س} + ٢}$

نفرض $ص = \sqrt{س}$ ، $ص^{٢} = س$ ، $٢ص\, دص = دس$

$\int_{٣}^{٤} \frac{٢ص\, دص}{ص^{٢} - ٣ص + ٢} = \int_{٣}^{٤} \frac{٤}{ص-٢}\, دص + \int_{٣}^{٤} \frac{-٢}{ص-١}\, دص$

$\Big[٤لو_{ه}|ص-٢|\Big]_{٣}^{٤} + \Big[-٢لو_{ه}|ص-١|\Big]_{٣}^{٤}$

$٤لو_{ه}٢ - \cancel{٤لو_{ه}١} - ٢لو_{ه}٣ + ٢لو_{ه}٢$

$٦لو_{ه}٢ - ٢لو_{ه}٣$

* * *

١٤) $\int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{\sqrt{٤س-٨} - ٢}\, دس = \int \frac{\sqrt{س-٢}+١}{٢\sqrt{س-٢} - ٢}\, دس$

نفرض $ص = \sqrt{س-٢}$ ، $ص^{٢} = س-٢ \Rightarrow ٢ص\, دص = دس$

$\int \frac{ص+١}{٢ص-٢} \times ٢ص\, دص = \int \frac{٢ص^{٢}+٢ص}{٢ص-٢}\, دص$

$= \int \frac{ص^{٢}+ص}{ص-١}\, دص = \int (ص+٢)\, دص + \int \frac{٢}{ص-١}\, دص$

$= \frac{ص^{٢}}{٢} + ٢ص + ٢لو_{ه}|ص-١| + ج$

$= \frac{(س-٢)}{٢} + ٢\sqrt{س-٢} + ٢لو_{ه}|\sqrt{س-٢} - ١| + ج$

15) $\int \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، $\text{ص}^2 = 1-\text{هـ}^{\text{س}}$

$2\,\text{ص}\ \text{دص} = -\text{هـ}^{\text{س}}\ \text{دس}$

$\int \frac{2\,\text{ص}^2}{\text{ص}^2-1}\ \text{دص} = \int 2\ \text{دص} + \int \frac{2}{\text{ص}^4-1}\ \text{دص}$

$= \int 2\ \text{دص} + \int \frac{-1}{\text{ص}+1}\ \text{دص} + \int \frac{1}{\text{ص}-1}\ \text{دص}$

$2\,\text{ص} - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+1| + \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-1| + \text{جـ}$

$2\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}+1\right| + \text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{1-\text{هـ}^{\text{س}}}-1\right| + \text{جـ}$

* * *

16) $\int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-\text{قا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{5-(\text{ظا}^2\text{س}+1)}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{قا}^2\text{س}}{4-\text{ظا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{ظاس}$ ، $\text{دص} = \text{قا}^2\text{س}\ \text{دس}$

$\int \frac{1}{4-\text{ص}^2}\ \text{دص} = \int \frac{\frac{1}{4}}{2+\text{ص}}\ \text{دص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{2-\text{ص}}\ \text{دص}$

$= \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ص}| - \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ص}| + \text{جـ}$

$= \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2+\text{ظاس}| - \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|2-\text{ظاس}| + \text{جـ}$

* * *

17) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+\text{جتا}^2\text{س}}\ \text{دس} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{8+1-\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{جتاس}}{9-\text{جا}^2\text{س}}\ \text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{جاس}$ ، $\text{دص} = \text{جتاس}\ \text{دس}$

$\text{س} = 0$ ، $\text{ص} = 0$ ، $\text{س} = \frac{\pi}{2}$ ، $\text{ص} = 1$

$\int_{0}^{1} \frac{1}{9-\text{ص}^2}\ \text{دص} = \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3-\text{ص}}\ \text{دص} + \int_{0}^{1} \frac{\frac{1}{6}}{3+\text{ص}}\ \text{دص}$

$= -\frac{1}{6}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|3-\text{ص}|\right]_{0}^{1} + \frac{1}{6}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}|3+\text{ص}|\right]_{0}^{1}$

$-\frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2 + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}3 + \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}4 - \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}3$

$= \frac{1}{6}\,\text{لو}_{\text{هـ}}2$

* * *

18) $\int \frac{\text{دس}}{\text{س}(\text{لوس})^2-4\text{س}} = \int \frac{\text{دس}}{\text{س}((\text{لوس})^2-4)}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ ، $\text{دص} = \frac{1}{\text{س}}\ \text{دس}$

$= \int \frac{\text{دص}}{\text{ص}^2-4} = \int \frac{-\frac{1}{4}}{\text{ص}+2}\ \text{دص} + \int \frac{\frac{1}{4}}{\text{ص}-2}\ \text{دص}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+2| + \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}-2| + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}+2| + \frac{1}{4}\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}-2| + \text{جـ}$

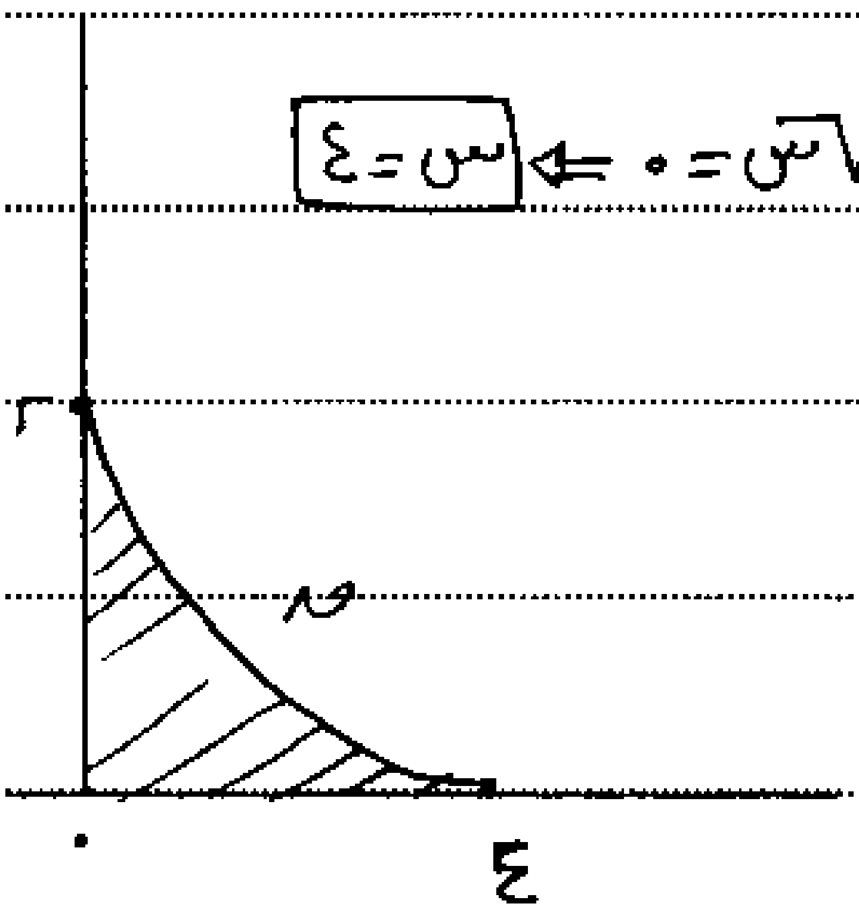
* * *

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

أولاً : المساحة

تدريب (١)

د(س) = ٢ − √س ، ٢ − √س = ٠ ⇐ $\boxed{\text{س} = ٤}$



م = $\int_{٠}^{٤}$ ٢ − √س دس

= ٢س − $\frac{٣}{٣}$ √س^٣ $]_{٠}^{٤}$

= (٢×٤ − $\frac{٣}{٣}$ × ٨) − صفر

= $\frac{٨}{٣}$ وحدة مساحة

تدريب (٢) :

$\int_{أ}^{ب}$ د(س) دس = $\int_{أ}^{٠}$ د(س) دس + $\int_{٠}^{ب}$ د(س) دس

= − ٨ + ٥ = −٣

تدريب (٣)

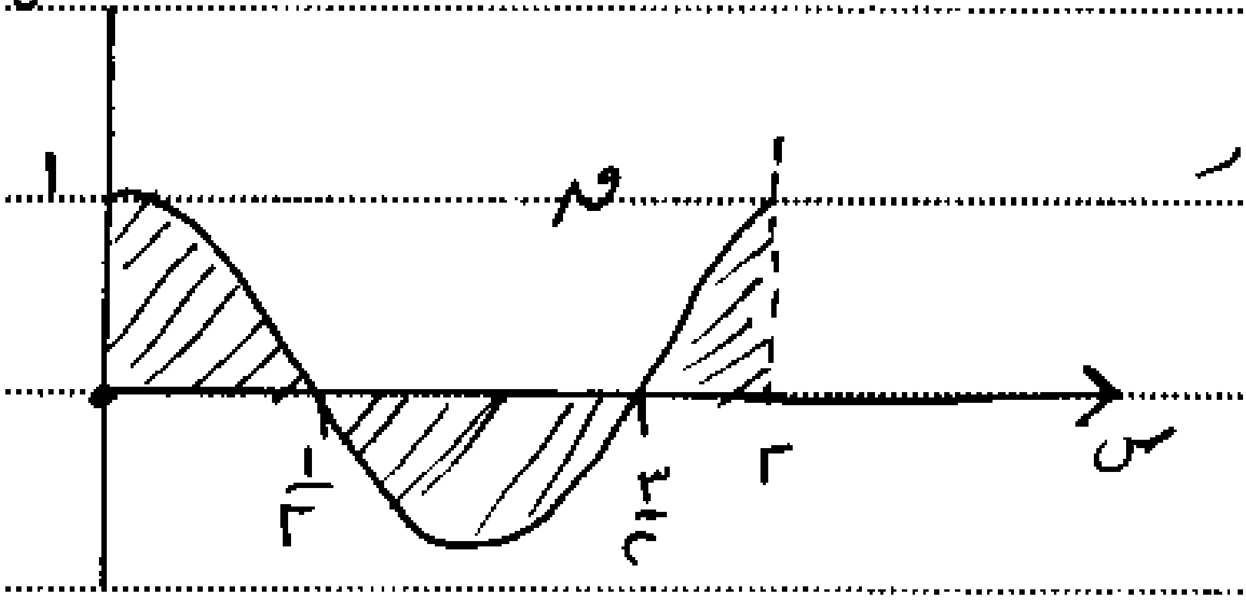
$\int_{٠}^{٢}$ | حتاπس − ٠ | دس = $\int_{٠}^{٢}$ | حتاπس | دس

= $\int_{٠}^{\frac{١}{٢}}$ حتاπس دس + $\int_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$ −حتاπس دس + $\int_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$ حتاπس دس

= [$\frac{١}{\pi}$ حاπس$]_{٠}^{\frac{١}{٢}}$ ⊕ [$-\frac{١}{\pi}$ حاπس$]_{\frac{١}{٢}}^{\frac{٣}{٢}}$ ⊕ [$\frac{١}{\pi}$ حاπس$]_{\frac{٣}{٢}}^{٢}$

($\frac{١}{\pi}$ − صفر) ⊕ ($\frac{١}{\pi}$ + $\frac{١}{\pi}$) ⊕ (صفر − $-\frac{١}{\pi}$)

$\frac{١}{\pi}$ + $\frac{٢}{\pi}$ + $\frac{١}{\pi}$ = $\frac{٤}{\pi}$ وحدة مساحة



انظر الشكل الجاور

تدريب (٤) :

د(س) = ٤س^٢ − ٣س ، هـ(س) = ٥س

نجد نقاط التقاطع ⇐ د = هـ

٤س^٢ − ٣س = ٥س ⇐ س = صفر ، س = ٢

م = $\int_{٠}^{٢}$ هـ(س) − د(س) دس

م = $\int_{٠}^{٢}$ ٥س − ٤س^٢ + ٣س دس = $\int_{٠}^{٢}$ (٨س − ٤س^٢) دس

٤س^٢ − $\frac{٤}{٣}$ س^٣ $]_{٠}^{٢}$ = (١٦ − $\frac{٣٢}{٣}$) − صفر

= $\frac{١٦}{٣}$ وحدة مساحة.

تدريب (٥)

د(س) = ١ + حاس ، هـ(س) = ١ + جتاس

نجد نقاط التقاطع ⇐ ١ + حاس = ١ + جتاس

س = $\frac{٥\pi}{٤}$ ∈ [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$]

س = $\frac{\pi}{٤}$ ∉ [$\frac{\pi}{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٢}$] تهمل

م = $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$ (د − هـ) دس + $\int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ (هـ − د) دس

= $\int_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$ (حاس − جتاس) دس ⊕ $\int_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$ جتاس − حاس دس

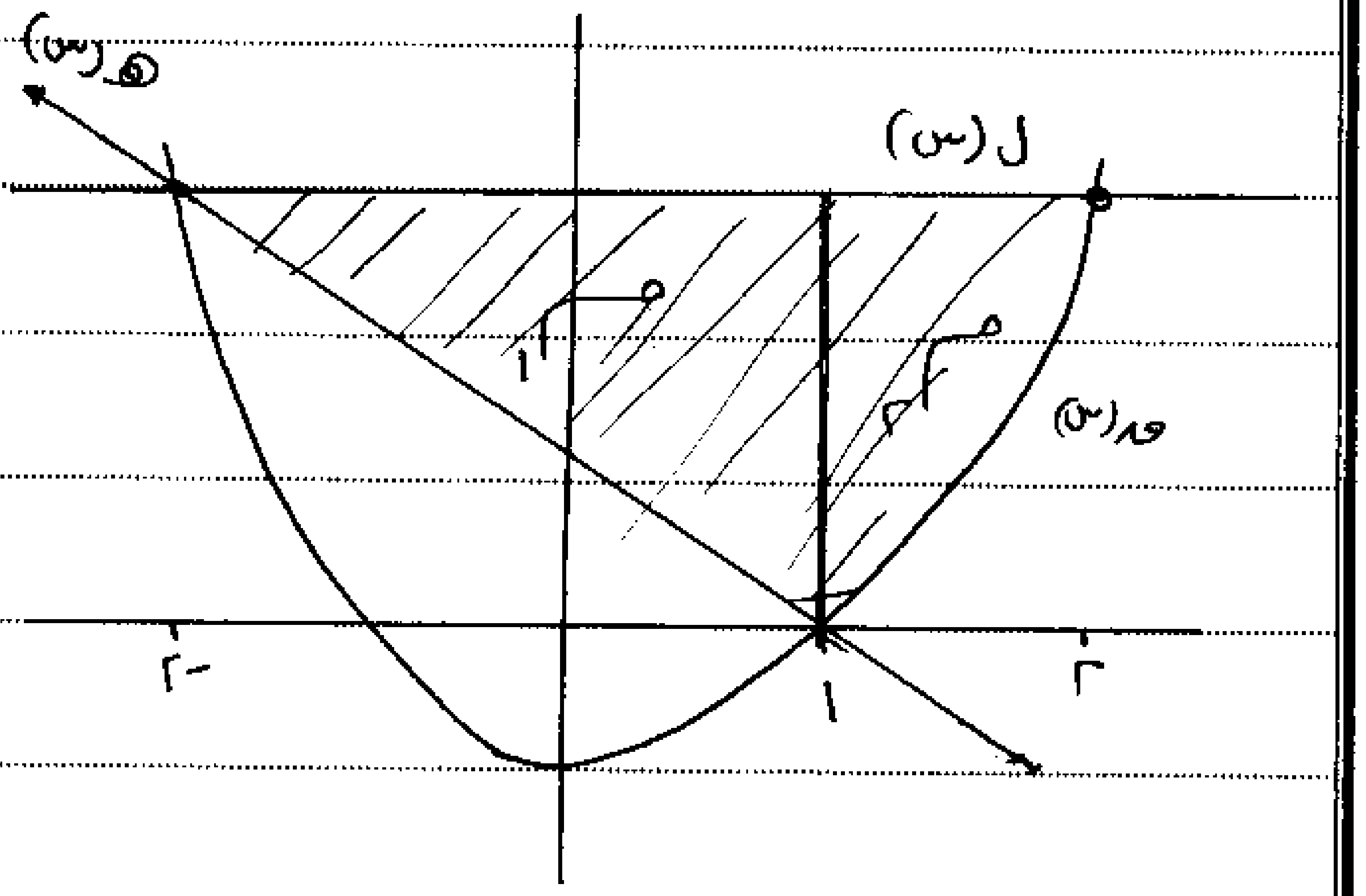
−جتاس − حاس $]_{\frac{\pi}{٢}}^{\frac{٥\pi}{٤}}$ ⊕ حاس + جتاس $]_{\frac{٥\pi}{٤}}^{\frac{٣\pi}{٢}}$

(+$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ + $\frac{١}{\sqrt{٢}}$) − (−١) ⊕ (−١ + ٠) − (−$\frac{١}{\sqrt{٢}}$ − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$)

= $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ + ١ − ١ + $\frac{٢}{\sqrt{٢}}$ = ٢√٢ وحدة مساحة

تدريب (٦)

ص = هـ	ص = ل	هـ = ل
$\text{س}^2 - ١ = ١ - \text{س}$	$\text{س}^2 - ١ = ٣$	$١ - \text{س} = ٣$
$\text{س}^2 + \text{س} - ٢ = ٠$	س = ٢ ، (٢، ٣)	س = −٢
$(\text{س} + ٢)(\text{س} - ١) = ٠$	س = −٢ (−٢، ٣)	(−٢، ٣)
س = −٢ (−٢، ٣)		
س = +١ (١، ٠)		



$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} (\text{ل} - \text{هـ})\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} (\text{ل} - \text{ص})\,\text{دس}$$

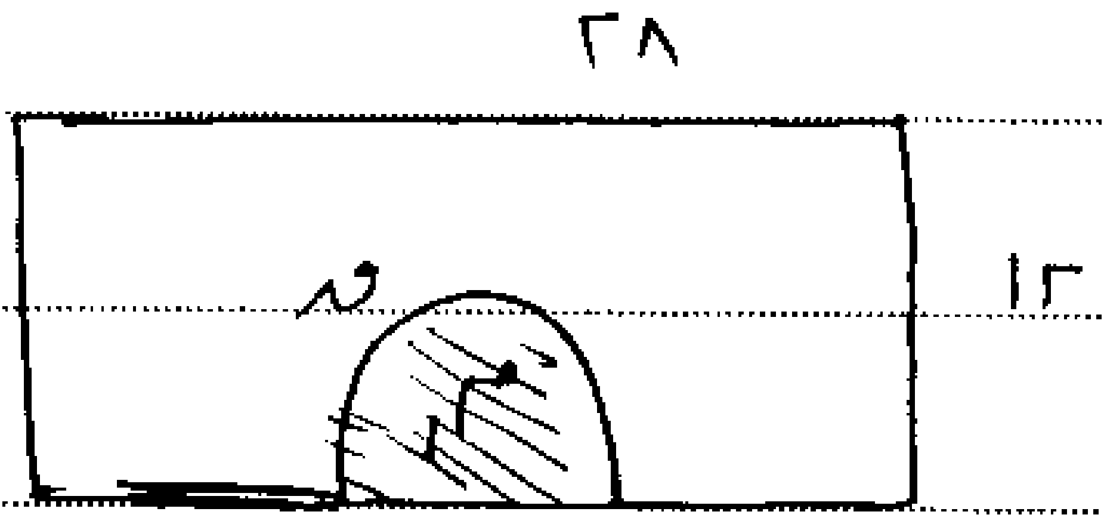
$$\text{م} = \int_{-٢}^{١} (٢ + \text{س})\,\text{دس} \oplus \int_{١}^{٢} (٤ - \text{س}^2)\,\text{دس}$$

$$\left[٢\text{س} + \frac{\text{س}^2}{٢}\right]_{-٢}^{١} \oplus \left[٤\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٣}\right]_{١}^{٢}$$

$$\left(٢ + \frac{١}{٢}\right) - (-٤ + ٢) \oplus \left(٨ - \frac{٨}{٣}\right) - \left(٤ - \frac{١}{٣}\right)$$

$$٤,٥ + \frac{٥}{٣} = \frac{٣٧}{٦} \text{ وحدة مساحة}$$

تدريب (٧)



أولاً نجد مساحة المنطقة الملونة بالأزرق

= مساحة المستطيل − مساحة المنطقة المظللة

$$= ١٢ \times ٢٨ - \int_{-٤}^{٤} ٨ - \frac{\text{س}^2}{٢}\,\text{دس}$$

لإيجاد حدود التكامل نضع $٨ - \frac{\text{س}^2}{٢} = \text{صفر}$

$$\text{م} = ٣٣٦ - \left[٨\text{س} - \frac{\text{س}^3}{٦}\right]_{-٤}^{٤}$$

$$٣٣٦ - \left(\left(٣٢ - \frac{٦٤}{٦}\right) - \left(-٣٢ + \frac{٦٤}{٦}\right)\right)$$

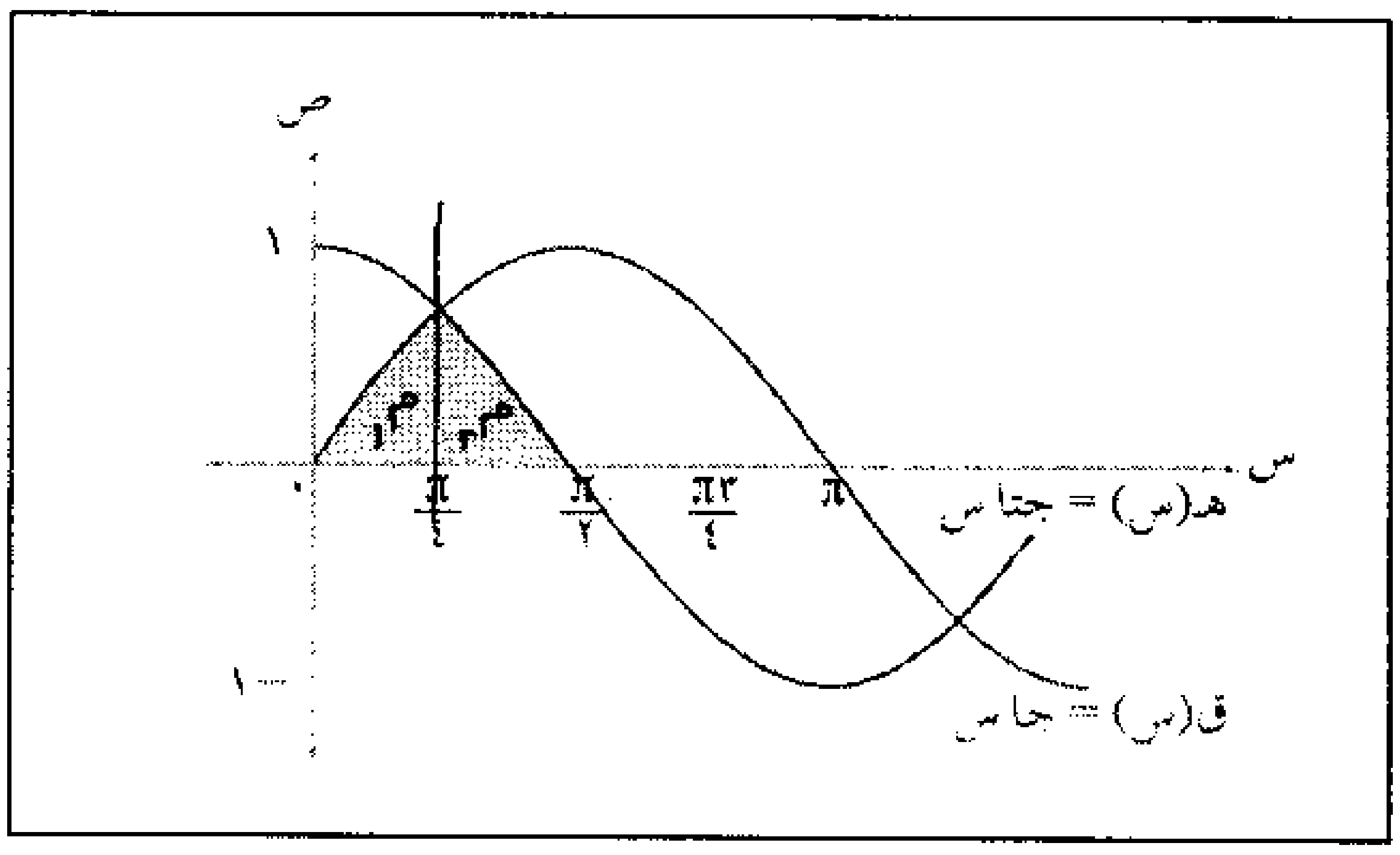
$$\text{م} = \frac{٨٨٠}{٣}$$

التكلفة الكلية للدهان $= \frac{٨٨٠}{٣} \times ٤٠$

$= \frac{٣٥٢٠٠}{٣}$ قرشاً

تمارين ومسـائل صفحة (٣٠١ ـ ٣٠٣)

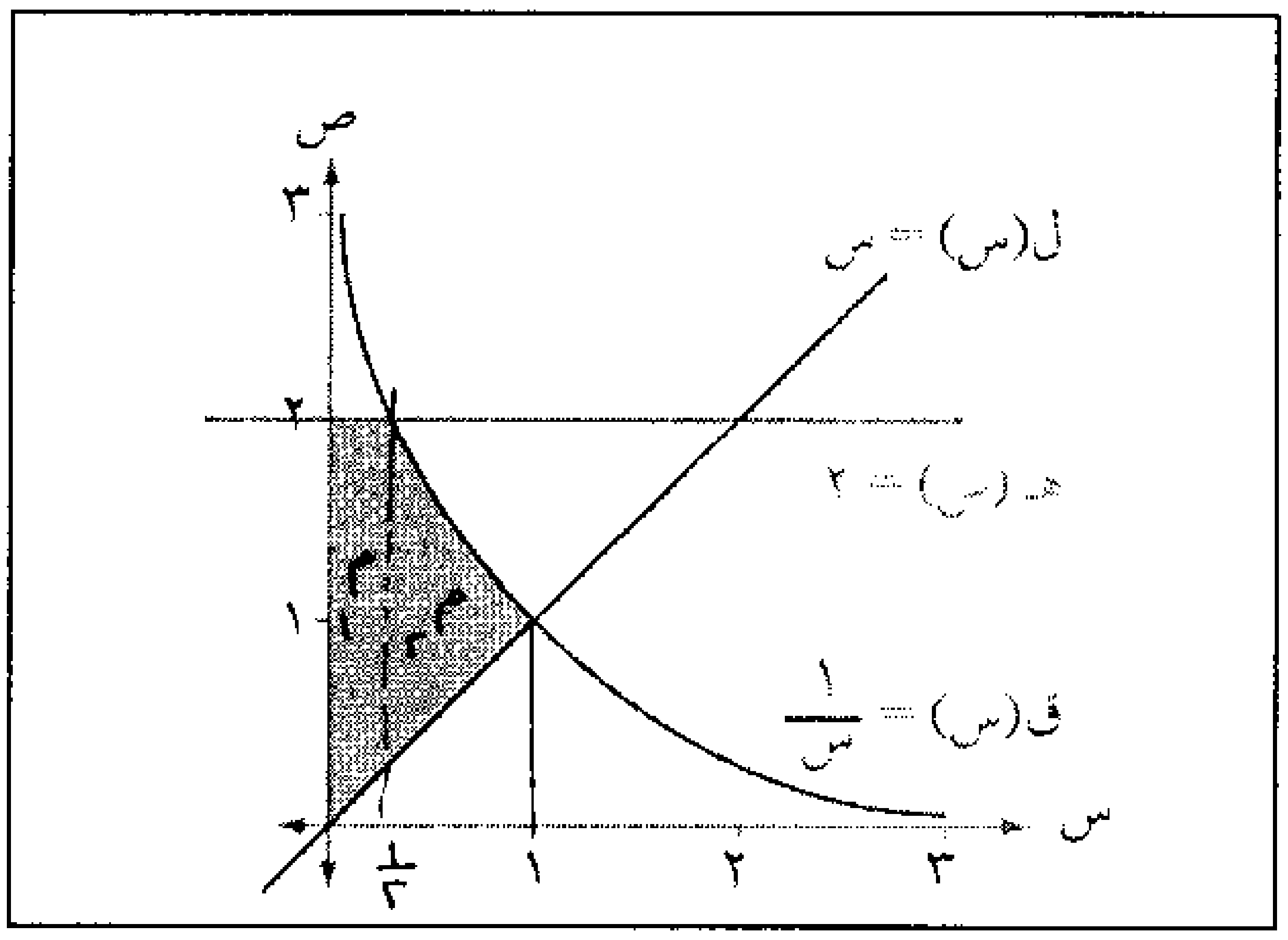
١) اكتب التكامل المحدود الذي يعبر عن مساحة المنطقة المظللة في كلٍّ من الأشكال الآتية:



الشكل (٤ ـ ٢٤)

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} ق(س)\,دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} هـ(س)\,دس$$

$$م = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} جاس\ دس + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} جتاس\ دس$$



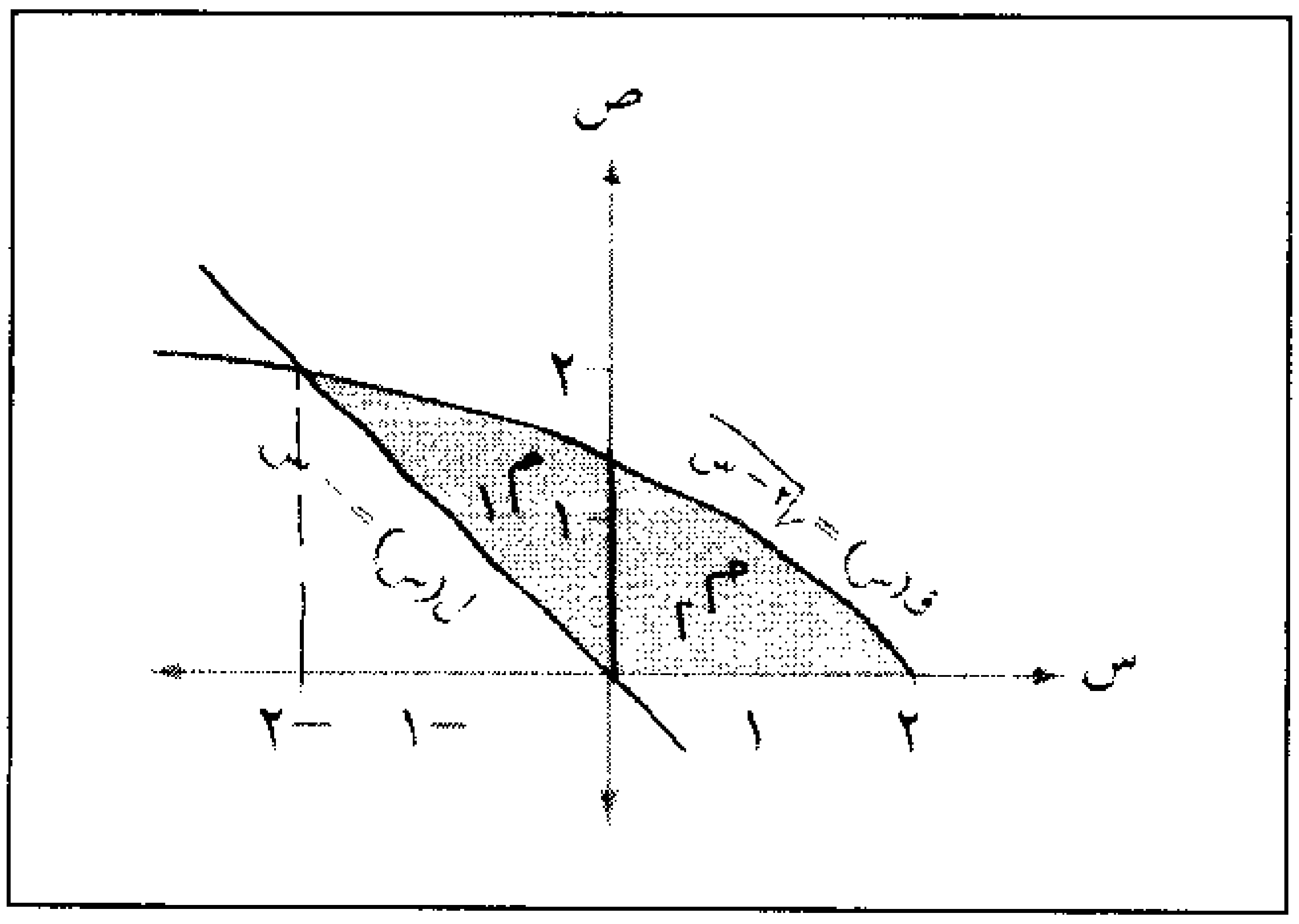
الشكل (٤ ـ ٢٥)

$$هـ(س) = ق(س) \Leftarrow \frac{1}{س} = ٢ \Leftarrow س = \frac{1}{2}$$

$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} هـ(س) - ل(س)\,دس + \int_{\frac{1}{2}}^{1} ق(س) - ل(س)\ دس$$

$$= \int_{0}^{\frac{1}{2}} ٢ - س\ \ دس \oplus \int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{س} - س\ دس$$

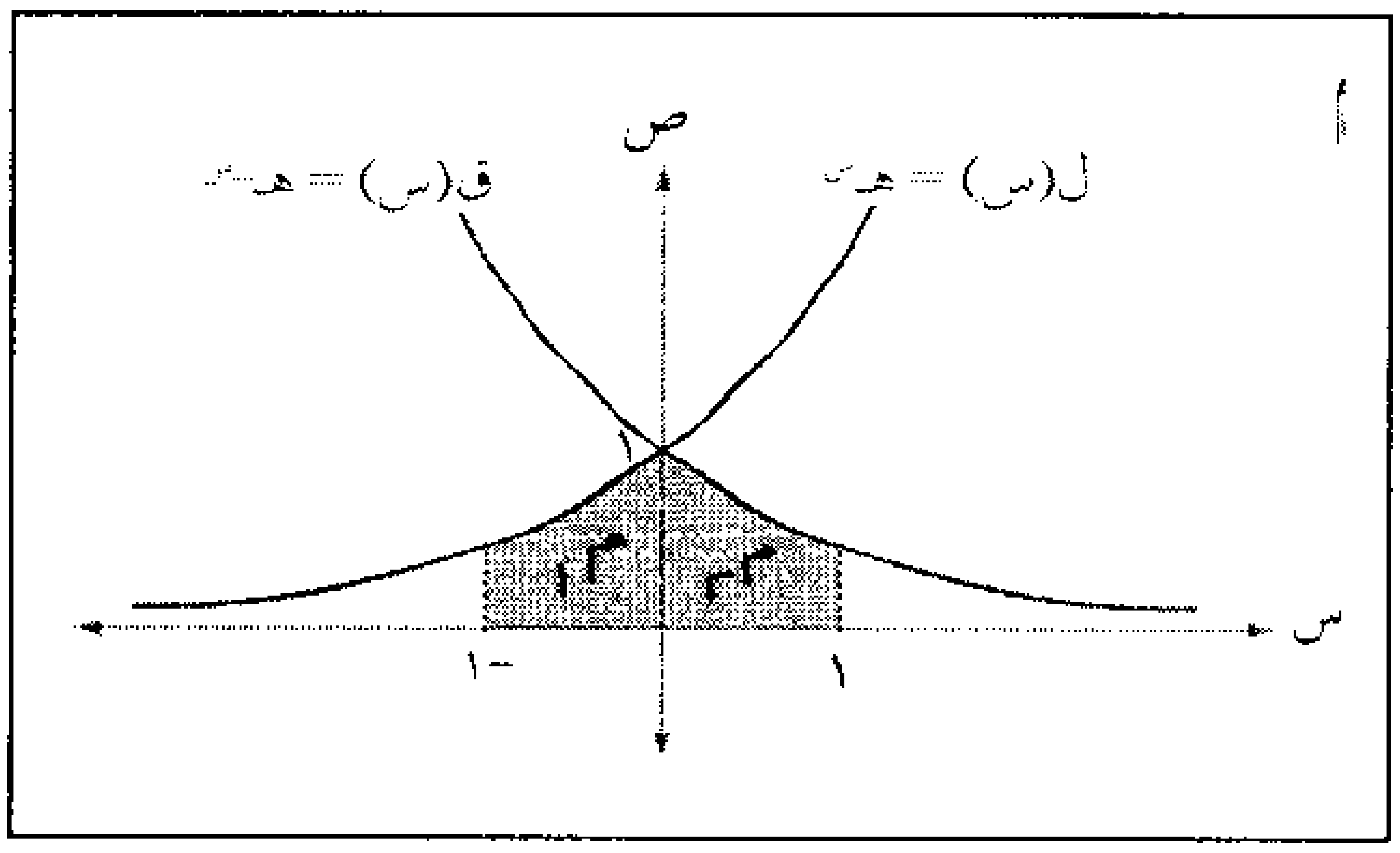


الشكل (٤ ـ ٢٦)

$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{-2}^{0} (ق - ل)\,دس + \int_{0}^{2} (ق - صفر)\ دس$$

$$= \int_{-2}^{0} \sqrt{٢-س} + س\ دس \oplus \int_{0}^{2} \sqrt{٢-س}\ دس$$

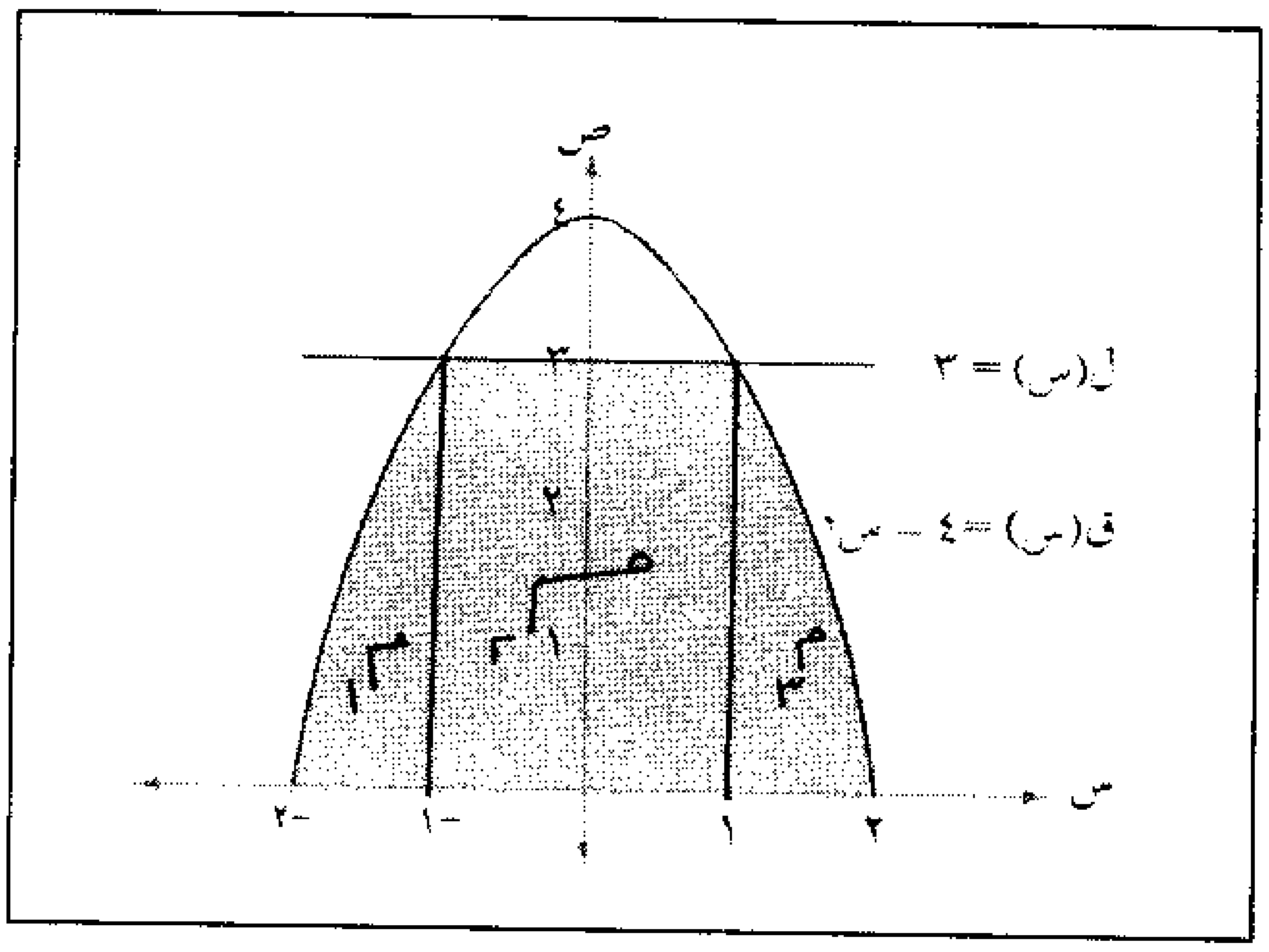


الشكل (٤ ـ ٢٧)

$$م = م_1 + م_2$$

$$= \int_{-1}^{0} ل(س)\ دس + \int_{0}^{1} ق(س)\,دس$$

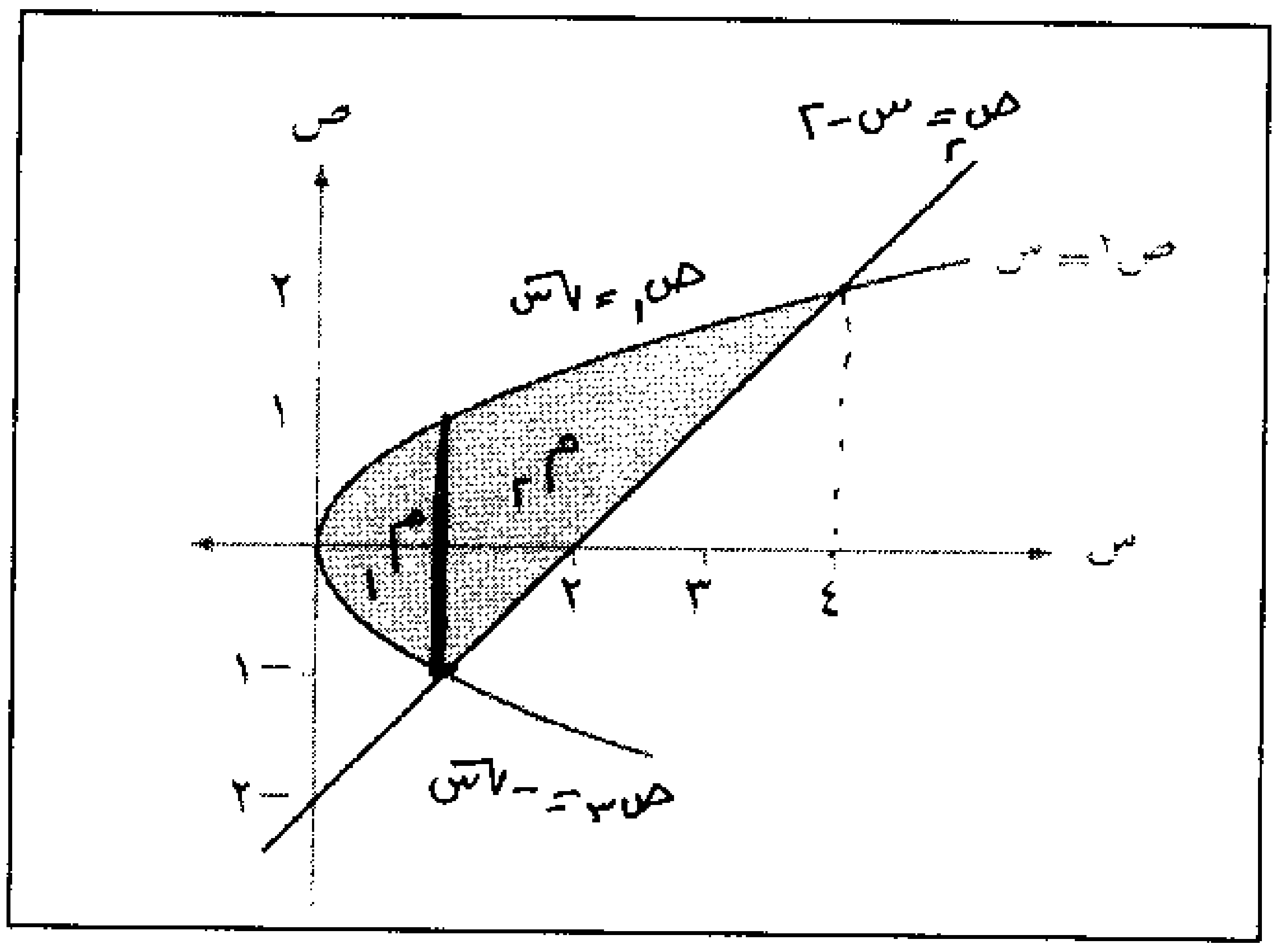
$$= \int_{-1}^{0} هـ^{س}\ دس + \int_{0}^{1} هـ^{-س}\ دس$$



الشكل (٤ – ٢٨)

$م = \int_{-٢}^{-١} ق(س)\,دس + \int_{-١}^{١} ل(س)\,دس + \int_{١}^{٢} ق(س)\,دس$

$= \int_{-٢}^{١} ٤ - س^{٢}\,دس + \int_{-١}^{١} ٣\,دس + \int_{١}^{٢} (٤ - س^{٢})\,دس$



الشكل (٤– ٢٩)

$م = م_{١} + م_{٢}$

$= \int_{٠}^{١} \sqrt{س} - -\sqrt{س}\,دس + \int_{١}^{٤} \sqrt{س} - س + ٢\,دس$

$= \int_{٠}^{١} ٢\sqrt{س}\,دس + \int_{١}^{٤} \sqrt{س} - س + ٢\,دس$

---

٢) $ق(س) = ٤س^{٣} - ٤س$ محور السينات $ص = ٠$

$٤س^{٣} - ٤س = ٠ \Leftarrow س = ٠ ، س = ١ ، س = -١$

$م = \int_{-١}^{٠} (٤س^{٣} - ٤س)\,دس + \int_{٠}^{١} (-٤س^{٣} + ٤س)\,دس$

$= \left[س^{٤} - ٢س^{٢}\right]_{-١}^{٠} \oplus \left[-س^{٤} + ٢س^{٢}\right]_{٠}^{١}$

$(صفر) - (١ - ٢) \oplus (-١ + ٢) - (صفر)$

$١ \oplus ١ = ٢$ وحدة مساحة

٣) أولاً نجد نقاط التقاطع

$٤س^{٣} - ٣س = ٥س \Leftarrow ٤س^{٣} - ٨س = صفر$

$س = ٠ ، س = \sqrt{٢} ، س = -\sqrt{٢}$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (ق - هـ)\,دس + \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (هـ - ق)\,دس$

$م = \int_{-\sqrt{٢}}^{٠} (٤س^{٣} - ٨س)\,دس \oplus \int_{٠}^{\sqrt{٢}} (٨س - ٤س^{٣})\,دس$

$= \left[س^{٤} - ٤س^{٢}\right]_{-\sqrt{٢}}^{٠} \oplus \left[٤س^{٢} - س^{٤}\right]_{٠}^{\sqrt{٢}}$

$(صفر) - (٤ - ٨) \oplus (٨ - ٤) - صفر$

$٤ + ٤ = ٨$ وحدة مساحة

٤) $ق(س) = ٣س^{٢} - ٣$ محور السينات ← $ص = ٠$

$٣س^{٢} - ٣ = ٠ \Leftarrow س = \mp ١$

$م = \int_{-٣}^{-١} (٣س^{٢} - ٣)\,دس \oplus \int_{-١}^{١} (٣ - ٣س^{٢})\,دس \oplus \int_{١}^{٢} (٣س^{٢} - ٣)\,دس$

$= \left[س^{٣} - ٣س\right]_{-٣}^{-١} \oplus \left[٣س - س^{٣}\right]_{-١}^{١} \oplus \left[س^{٣} - ٣س\right]_{١}^{٢}$

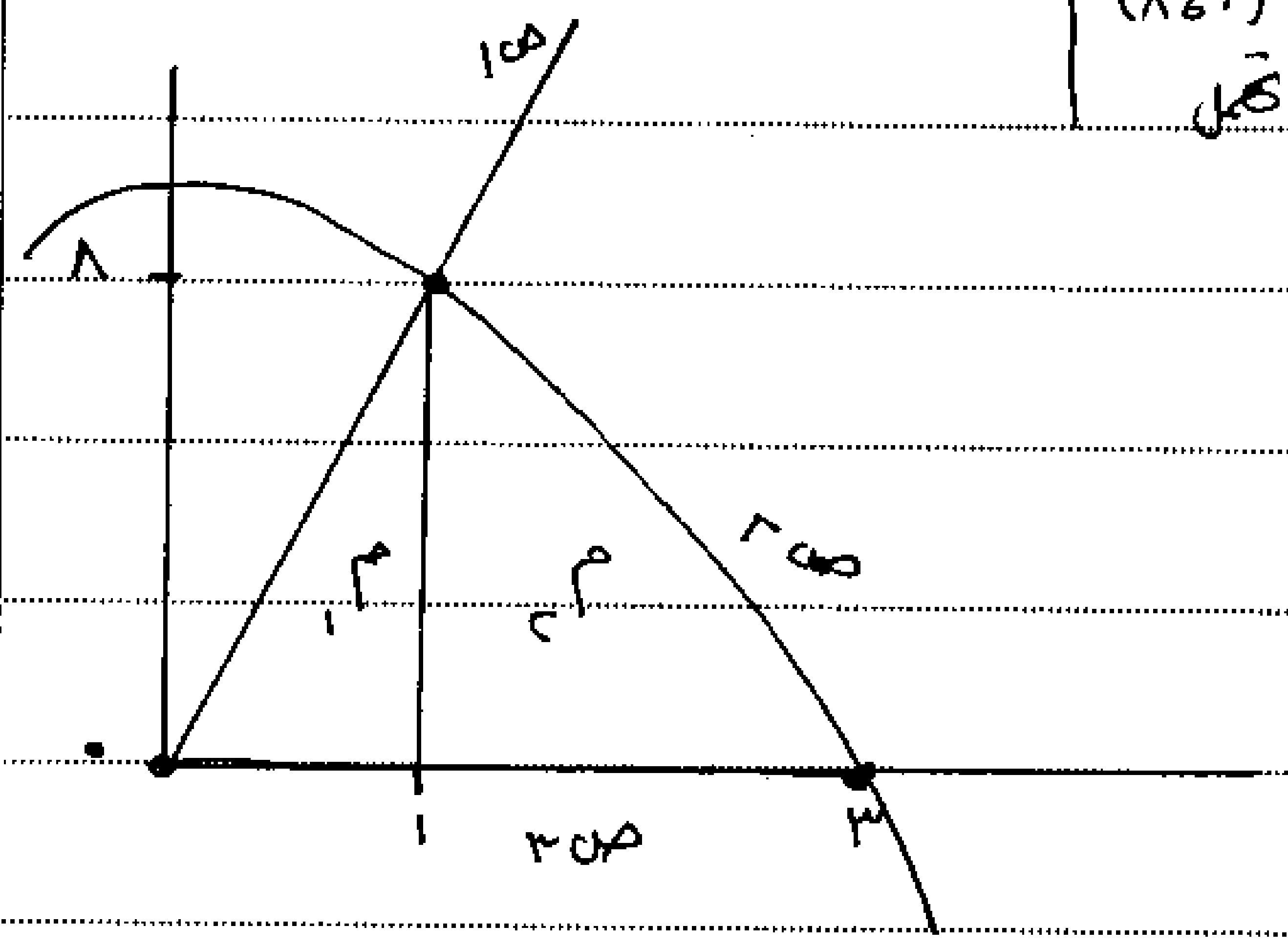
$(-١ + ٣) - (-٢٧ + ٩) \oplus (٣ - ١) - (-٣ + ١) \oplus (٨ - ٦) - (١ - ٣)$

$٢٠ \oplus ٤ \oplus ٤$

$= ٢٨$ وحدة مساحة

ش٥) $ص_1 = ٨س$ ، $ص_2 = ٩ - س^2$ ، $ص_3 = ٠$

$ص_1 = ص_2$	$ص_1 = ص_3$	$ص_2 = ص_3$
$٩ - س^2 = ٨س$	٨ س = صفر	$٩ - س^2 = ٠$
$س^2 + ٨س - ٩ = ٠$	$\boxed{س = صفر}$	$\boxed{س = ٣}$ (٣، ٠)
(س - ١)(س + ٩) = ٠		س = -٣ تهمل
س = ١ (١، ٨) س = -٩ تهمل		



$م = \int_٠^١ ص_1 \, دس + \int_١^٣ ص_2 - ص_3 \, دس$

$= \int_٠^١ ٨س \, دس + \int_١^٣ ٩ - س^2 \, دس$

$[٤س^2]_٠^١ \oplus [٩س - \frac{س^3}{٣}]_١^٣$

٤ - صفر ⊕ (٢٧ - ٩) - (٩ - $\frac{١}{٣}$)

٤ ⊕ ٩ + $\frac{١}{٣}$ = ١٣ $\frac{١}{٣}$ وحدة مساحة

ش٦) س ∈ [٠، $\frac{\pi}{٢}$]

نجد نقاط التقاطع

جاس = جا٢س ⟸ جاس - ٢جاس جتاس = ٠

جاس = ٠ ، جتاس = $\frac{١}{٢}$

س = ٠ ، س = $\frac{\pi}{٣}$

$م = \int_٠^{\frac{\pi}{٣}} (جا٢س - جاس) دس + \int_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}} (جاس - جا٢س) دس$

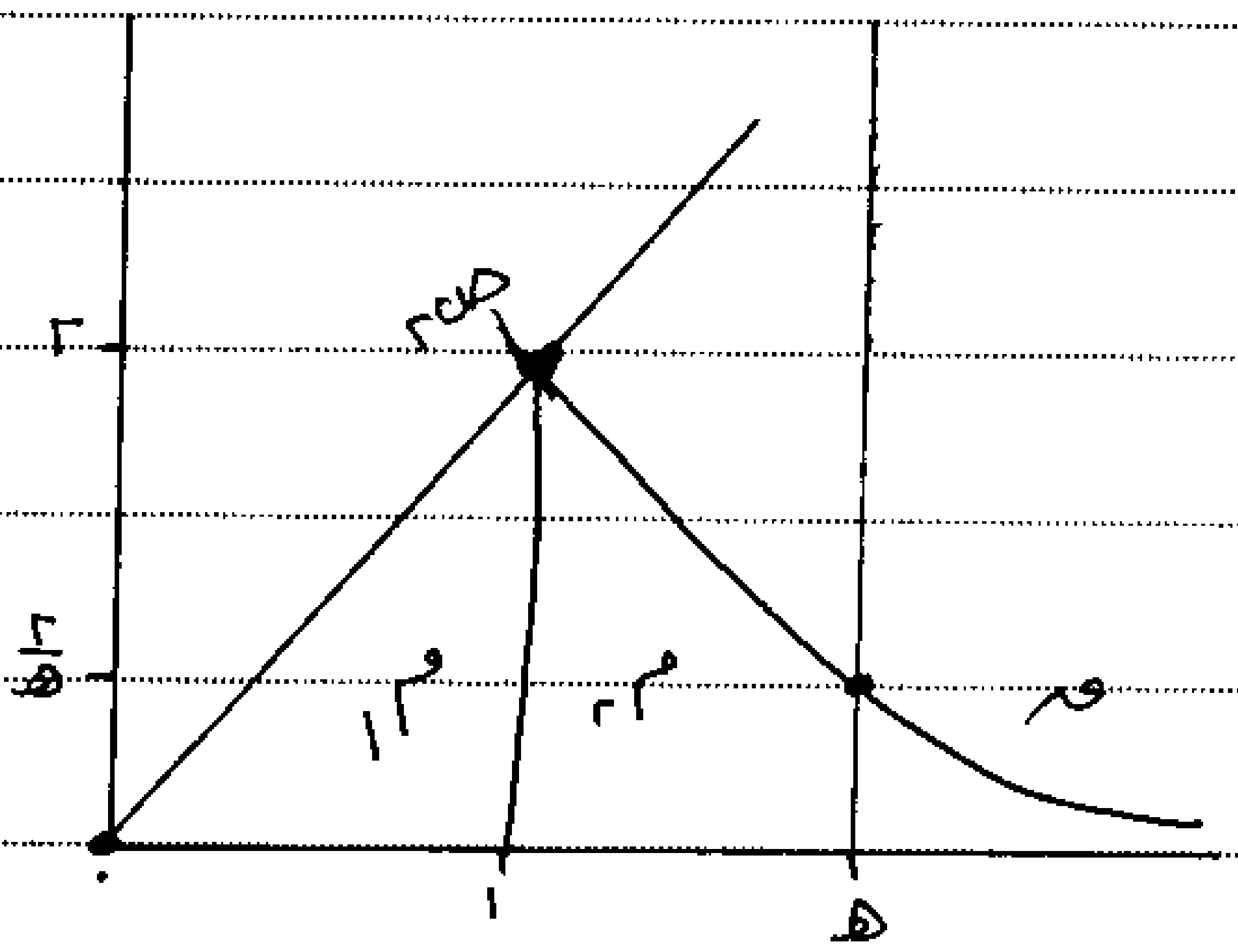
$[-\frac{١}{٢} جتا٢س + جتاس]_٠^{\frac{\pi}{٣}} \oplus [-جتاس + \frac{١}{٢} جتا٢س]_{\frac{\pi}{٣}}^{\frac{\pi}{٢}}$

$(\frac{١}{٤} + \frac{١}{٢}) - (-\frac{١}{٢} + ١) \oplus (٠ - \frac{١}{٢}) - (-\frac{١}{٢} - \frac{١}{٤})$

$\frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$ وحدة مساحة

ش٧) $د(س) = \frac{٢}{س}$ ، $ص_1 = صفر$ ، $ص_2 = ٢س$

$د = ص_1$	$د = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$\frac{٢}{س} = ٠$ لا يوجد نقط تقاطع	$\frac{٢}{س} = ٢س$	٠ = ٢س
	$س^2 = ١$	$\boxed{س = ٠}$
	س = ١ ، س = -١ تهمل (١، ٢)	(٠، ٠)



$م = \int_٠^١ (ص_2 - ص_1) دس + \int_١^{هـ} (د - ص_1) دس$

$= \int_٠^١ ٢س \, دس \oplus \int_١^{هـ} \frac{٢}{س} \, دس$

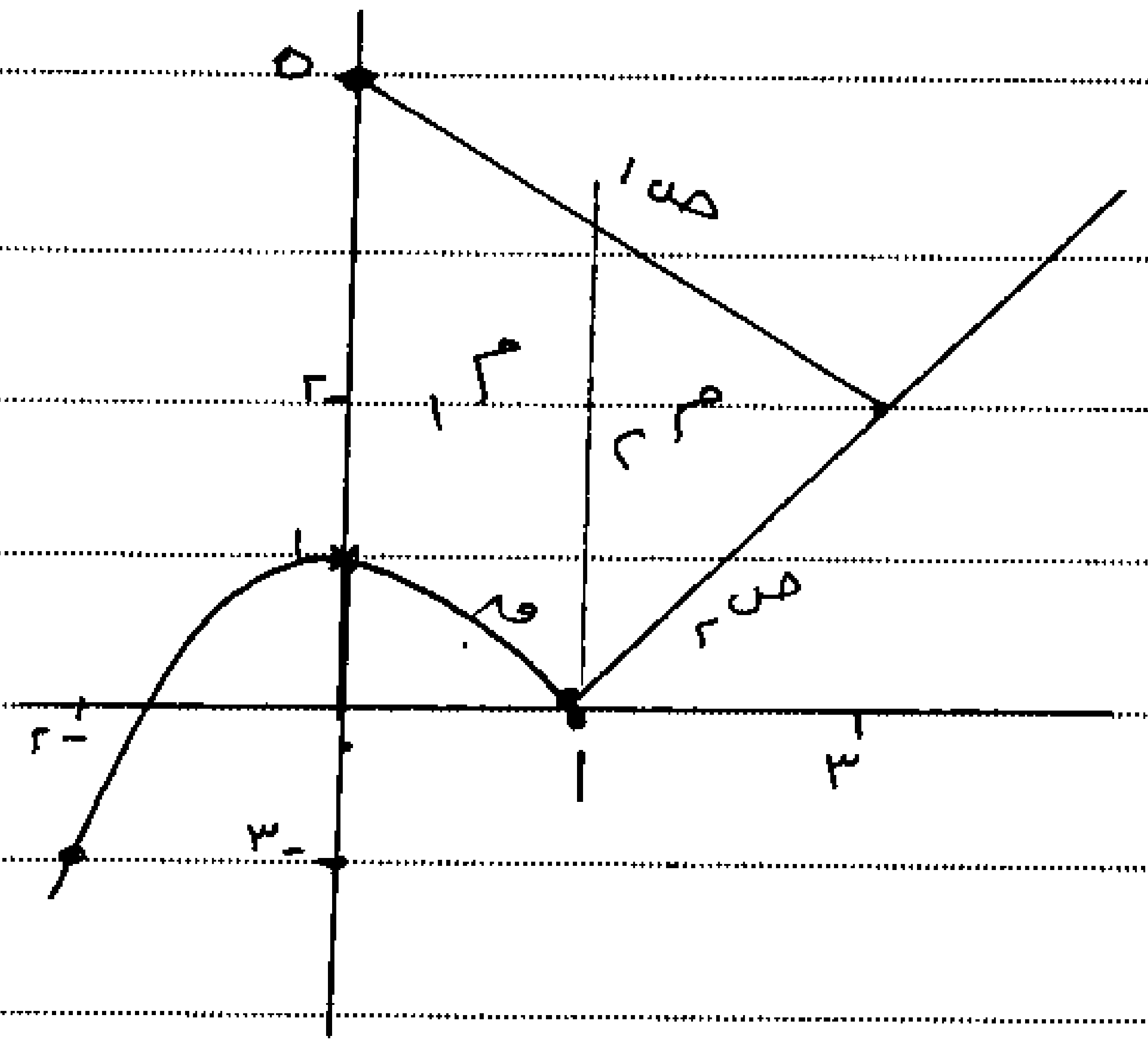
$[س^2]_٠^١ \oplus [٢ لو_{هـ}|س|]_١^{هـ}$

$١ \oplus ٢لو_{هـ} هـ - ٢لو_{هـ} ١$

١ + ٢ = ٣ وحدة مساحة

ش٨) $د(س) = ١ - س^2$ ، $ص_1 = ٥ - س$ ، $ص_2 = س - ١$

$د = ص_1$	$د = ص_2$	$ص_1 = ص_2$
$١ - س^2 = ٥ - س$	$١ - س^2 = س - ١$	٥ - س = س - ١
$س^2 - س + ٤ = ٠$	$س^2 + س - ٢ = ٠$	٢س = ٦
لا تحل	(س + ٢)(س - ١) = ٠	س = ٣
	س = ١ (١، ٠) س = -٢	(٣، ٢)



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_{٠}^{١} ص_١ - د \, دس + \int_{١}^{٣} ص_١ - ص_٢ \, دس$

$= \int_{٠}^{١} ٥ - س - ١ + س^٢ \, دس + \int_{١}^{٣} ٥ - س - س + ١ \, دس$

$= \int_{٠}^{١} س^٢ - س + ٤ \, دس \oplus \int_{١}^{٣} ٦ - ٢س \, دس$

$\left[\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{٠}^{١} \oplus \left[٦س - س^٢\right]_{١}^{٣}$

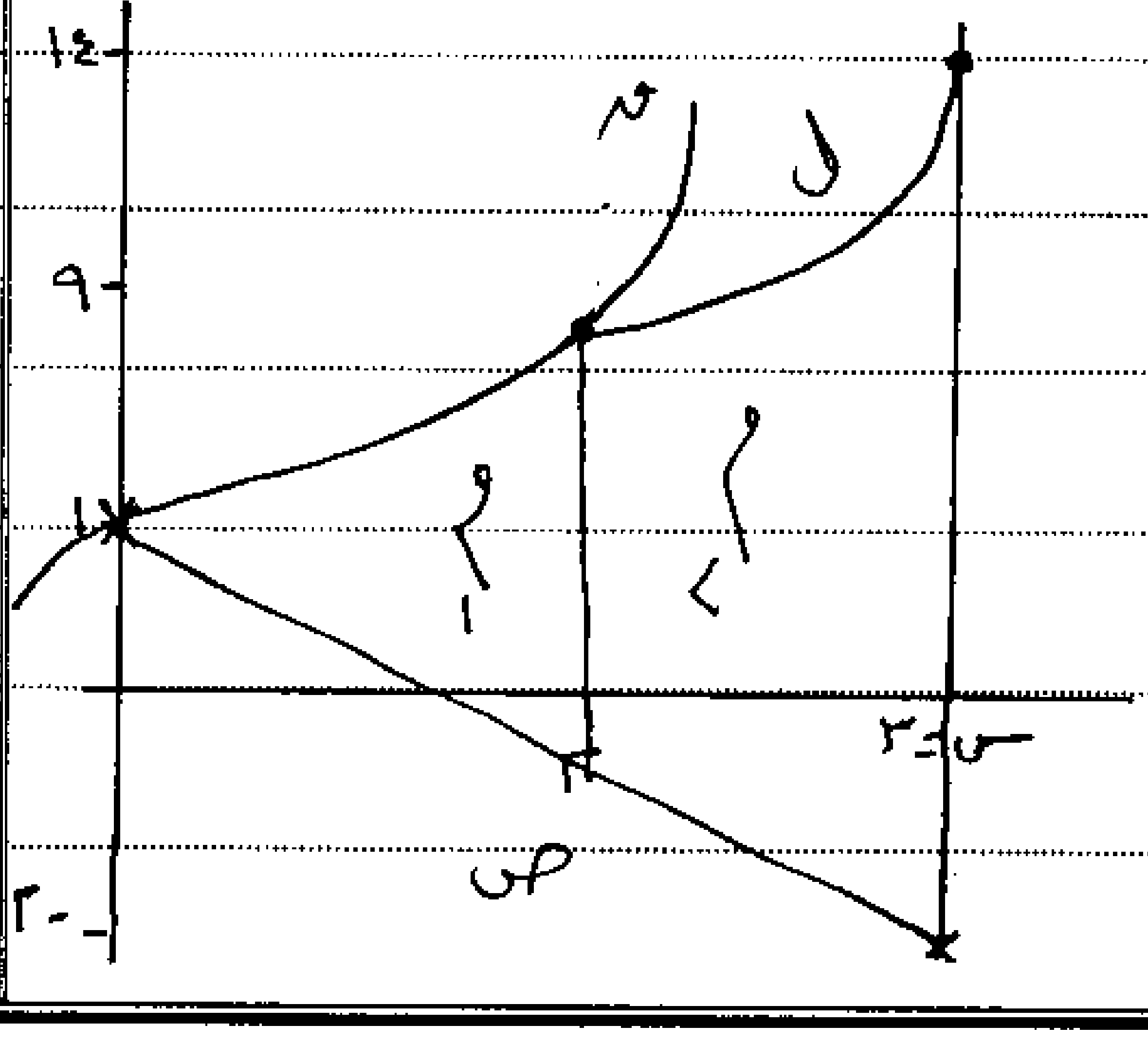
$\left(\frac{١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٤\right) - صفر \oplus (١٨ - ٩) - (٦ - ١)$

$\frac{٢٣}{٦} + ٤ = \frac{٤٧}{٦}$ وحدة مساحة

* * *

$\overset{٩}{س}$) $د(س) = ١ + س^٣$ ، $ل(س) = س^٢ + ٥$ ، $ص = ١ - س$

$د = ل$	$د = ص$	$ل = ص$
$١ + س^٣ = س^٢ + ٥$	$١ + س^٣ = ١ - س$	$س^٢ + ٥ = ١ - س$
$س^٣ - س^٢ - ٤ = ٠$	$س^٣ + س = ٠$	$س^٢ + س + ٤ = ٠$
$\boxed{س = ٢}$	$س(س^٢ + ١) = ٠$	لا تحلل
$(٢ ، ٩)$	$\boxed{س = ٠}$ $(٠ ، ١)$	



$م = \int_{٠}^{٢} (د - ص) \, دس + \int_{٢}^{٣} (ل - ص) \, دس$

$= \int_{٠}^{٢} ١ + س^٣ - ١ + س \, دس \oplus \int_{٢}^{٣} س^٢ + ٥ - ١ + س \, دس$

$= \int_{٠}^{٢} (س^٣ + س) \, دس \oplus \int_{٢}^{٣} س^٣ + س + ٤ \, دس$

$\left[\frac{س^٤}{٤} + \frac{س^٢}{٢}\right]_{٠}^{٢} \oplus \left[\frac{س^٣}{٣} + \frac{س^٢}{٢} + ٤س\right]_{٢}^{٣}$

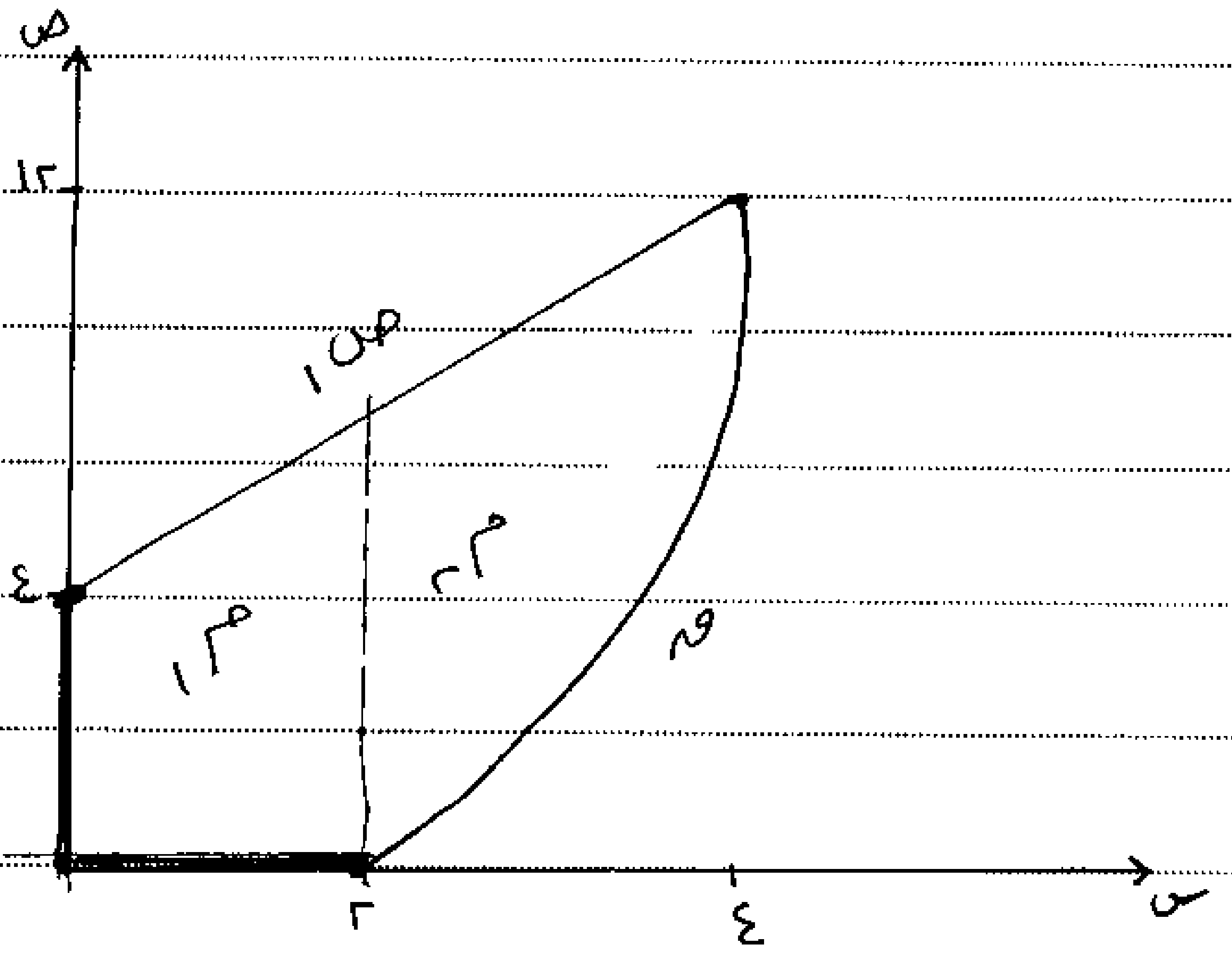
$(٤ + ٢) - صفر \oplus \left(٩ + \frac{٩}{٢} + ١٢\right) - \left(\frac{٨}{٣} + ٢ + ٨\right)$

$٦ + \frac{٧٧}{٦} = \frac{١١٣}{٦}$ وحدة مساحة

* * *

ن) $د(س) = س^٢ - ٤$ ، $ص_١ = ٢س + ٤$ ، $ص_٢ = ٠$

$د = ص_١$	$ص_١ = ص_٢$	$د = ص_٢$
$س^٢ - ٤ = ٢س + ٤$	$٢س + ٤ = ٠$	$س^٢ - ٤ = ٠$
$س^٢ - ٢س - ٨ = ٠$	$س = -٢$	$(س - ٢)(س + ٢) = ٠$
$(س - ٤)(س + ٢) = ٠$	تُهمل	$س = ٢$ $(٢ ، ٠)$
$س = ٤$ $(٤ ، ١٢)$		$س = -٢$ تُهمل
$س = -٢$ تُهمل		



$م = \int_{٠}^{٢} ص_١ - ص_٢ \, دس + \int_{٢}^{٤} (ص_١ - د) \, دس$

$م = \int_{٠}^{٢} ٢س + ٤ \, دس \oplus \int_{٢}^{٤} ٢س + ٤ - س^٢ + ٤ \, دس$

$\left[س^٢ + ٤س\right]_{٠}^{٢} \oplus \int_{٢}^{٤} ٢س - س^٢ + ٨ \, دس$

$٤ + ٨ \oplus \left[(س^٢ - \frac{س^٣}{٣} + ٨س)\right]_{٢}^{٤}$

$١٢ \oplus \left(١٦ - \frac{٦٤}{٣} + ٣٢\right) - \left(٤ - \frac{٨}{٣} + ١٦\right)$

$١٢ \oplus \frac{٢٨}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

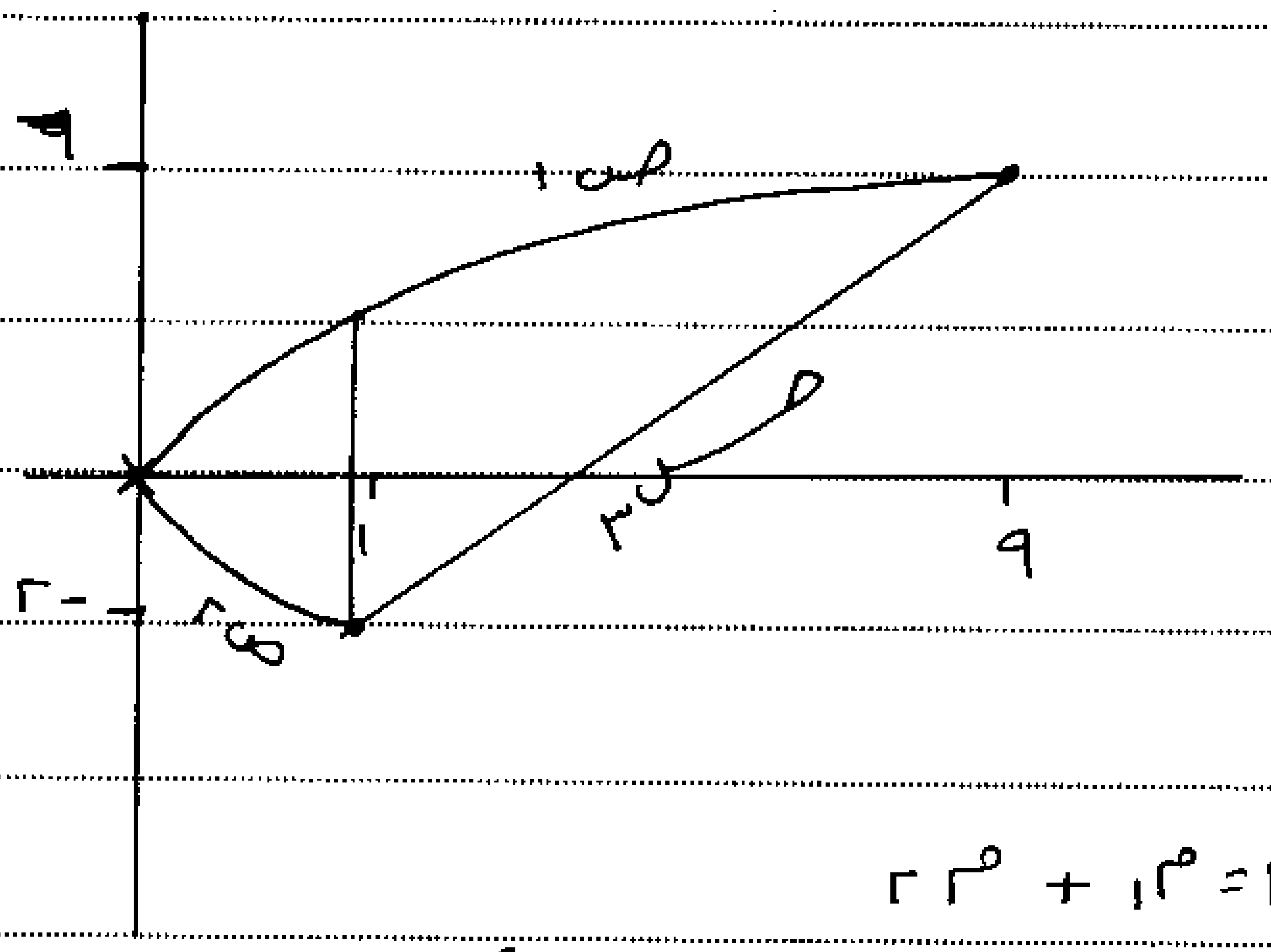
١١) $ص^٢ = ٤س$ ، $ص = س - ٣$

⇓

$ص_١ = ٢\sqrt{س}$ $ص_٣ = س - ٣$

$ص_٢ = -٢\sqrt{س}$

$ص_١ = ص_٢$	$ص_١ = ص_٣$	$ص_٢ = ص_٣$
$٢\sqrt{س} = -٢\sqrt{س}$	$٢\sqrt{س} = س - ٣$	$-٢\sqrt{س} = س - ٣$
$س = صفر$	$س - ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$	$س + ٢\sqrt{س} - ٣ = ٠$
(٠ ، ٠)	$(\sqrt{س} - ٣)(\sqrt{س} + ١) = ٠$	$(\sqrt{س} - ١)(\sqrt{س} + ٣) = ٠$
	$\sqrt{س} = ٣ \rightarrow \boxed{س = ٩}$	$\sqrt{س} = ١ \Leftarrow \boxed{س = ١}$
	$\sqrt{س} = -١$ تهمل	$\sqrt{س} = -٣$ تهمل



$م = م_١ + م_٢$

$= \int_٠^١ (ص_١ - ص_٢)\,دس + \int_١^٩ (ص_١ - ص_٣)\,دس$

$= \int_٠^١ (٢\sqrt{س} + ٢\sqrt{س})\,دس \oplus \int_١^٩ ٢\sqrt{س} - س + ٣\,دس$

$= \int_٠^١ ٤\,س^{\frac{١}{٢}}\,دس \oplus ٢ \times \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٣س \Big]_١^٩$

$= ٤ \times \frac{٢}{٣}\,س^{\frac{٣}{٢}} \Big]_٠^١ \oplus (\frac{٤}{٣} \times ٢٧ - \frac{٨١}{٢} + ٢٧) - (\frac{٤}{٣} - \frac{١}{٢} + ٣)$

$= \frac{٨}{٣} \oplus \frac{٥٦}{٣} = \frac{٦٤}{٣}$ وحدة مساحة

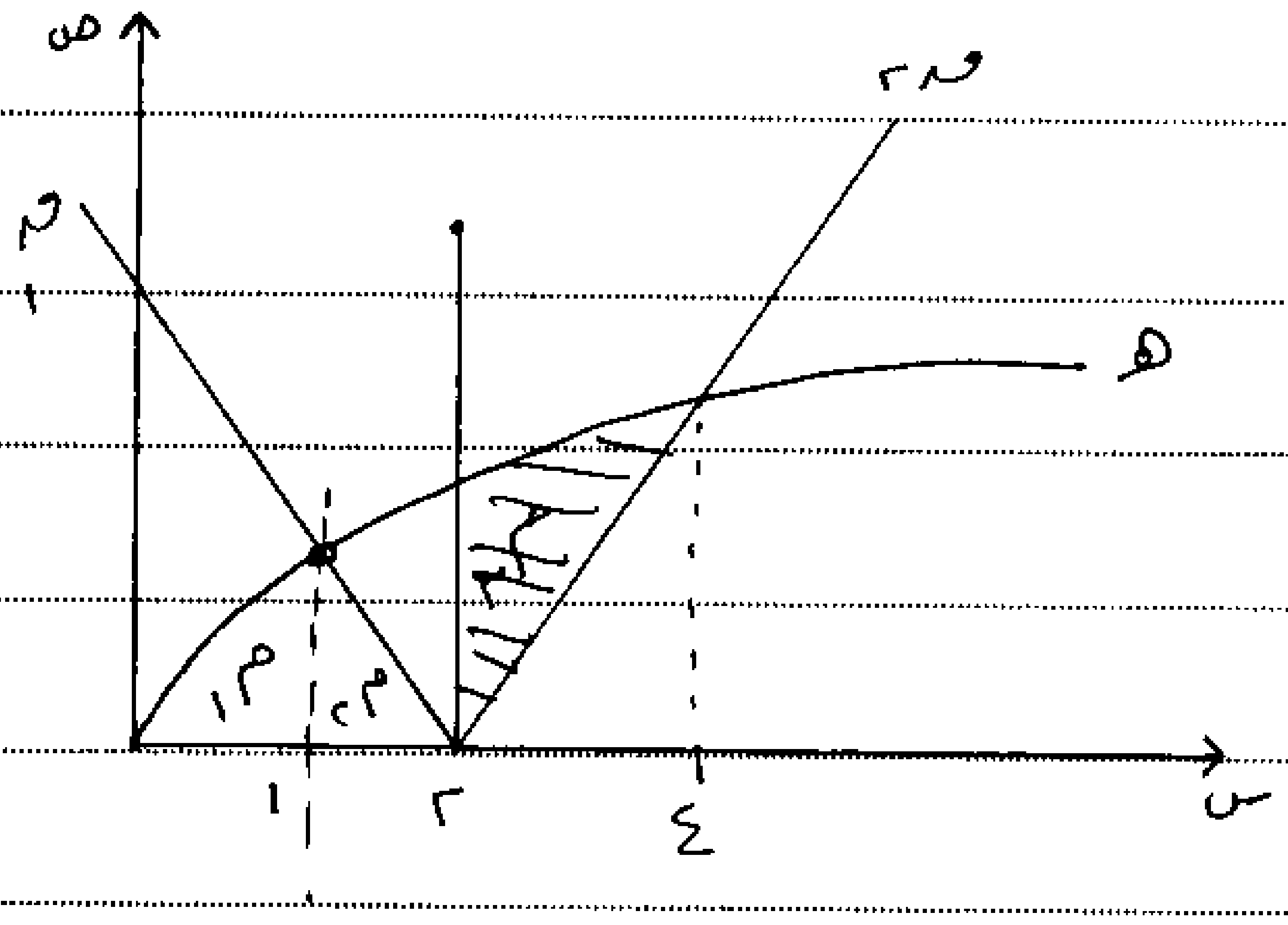
١٢) $و(س) = \begin{cases} ٢ - س & ، س < ٢ \\ س - ٢ & ، س \geq ٢ \end{cases}$

$هـ(س) = \sqrt{س}$ $هـ = و_٢$

$و_١ = هـ$ $\sqrt{س} = س - ٢$

$\sqrt{س} = ٢ - س$ $\boxed{س = ٤}$

$\boxed{س = ١}$



$م = م_١ + م_٢ + م_٣$

$= \int_٠^١ (هـ - صفر)\,دس + \int_١^٢ (و_١ - صفر)\,دس + \int_٢^٤ هـ - و_٢$

$= \int_٠^١ س^{\frac{١}{٢}}\,دس \oplus \int_١^٢ (٢ - س)\,دس \oplus \int_٢^٤ س^{\frac{١}{٢}} - س + ٢\,دس$

$= \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} \oplus ٢س - \frac{س^٢}{٢} \Big]_١^٢ \oplus \frac{٢}{٣}\sqrt{س^٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س$

$= \frac{٢}{٣} \oplus (٤ - ٢) - (٢ - \frac{١}{٢}) + (\frac{١٦}{٣} - ٨ + ٨) - (\frac{٤\sqrt{٢}}{٣} - ٢ + ٤)$

$= \frac{٢}{٣} + \frac{١}{٢} + \frac{١٦}{٣} - \frac{٤\sqrt{٢}}{٣} + -٢$

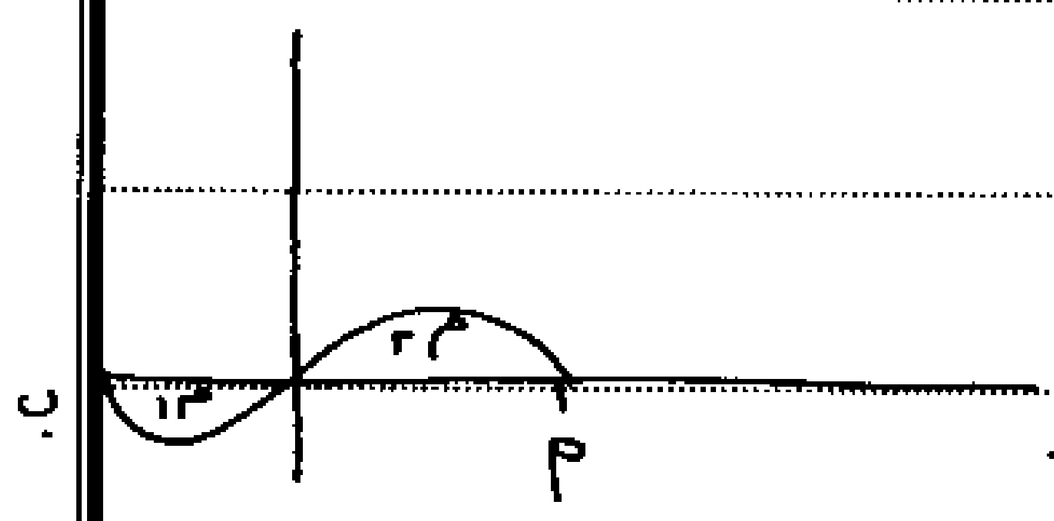
$= \frac{٢٧ - ٨\sqrt{٢}}{٦}$

١٣) $\int_٠^٣ (٢ - و(س))\,دس$

$= \int_٠^٣ ٢\,دس - \int_٠^٣ و(س)\,دس$

$٢(٣ - ٠) - -٦ = ١٢$

١٤) $\int_ب^٠ و(س)\,دس = -م_١$



$\int_٠^ب و(س)\,دس = م_١ = ٦$

$م = م_١ + م_٢ \Leftarrow ١٤ = ٦ + م_٢ \Leftarrow \boxed{م_٢ = ٨}$

$\int_٠^م و(س)\,دس = ٨ \Leftarrow \int_م^٠ و(س)\,دس = -٨$

الفصل الثالث : تطبيقات التكامل

ثانياً : المعادلات التفاضلية

تدريب (١) :

(س٢ − ٣س) دص = $هـ^{-ص}$ (س٢ + س − ١٢) دس

$هـ^{ص}$ دص = $\frac{\cancel{(س-٣)}(س+٤)}{س\cancel{(س-٣)}}$ دس

∫ $هـ^{ص}$ دص = ∫ $\frac{س+٤}{س}$ دس

$هـ^{ص}$ = ∫ ١ + $\frac{٤}{س}$ دس

$هـ^{ص}$ = س + ٤ $لو_{هـ}$ |س| + جـ

ص = $لو_{هـ}$ (س + ٤ $لو_{هـ}$ |س| + جـ)

تدريب (٢) ميل العمودي = س $\sqrt{٣ + لو_{هـ} س}$

ميل المماس = $\frac{-١}{ميل\ العمودي}$

$\frac{دص}{دس}$ = $\frac{-١}{س \sqrt{٣ + لو_{هـ} س}}$

∫ دص = ∫ $\frac{-١}{س \sqrt{٣ + لو_{هـ} س}}$ دس   ع = $\sqrt{٣ + لو_{هـ} س}$

ع٢ = ٣ + $لو_{هـ}$ س

ص = ∫ $\frac{-٢ع}{ع}$ دع   ٢ع دع = $\frac{١}{س}$ دس

ص = ∫ −٢ دع ⇐ ص = −٢ $\sqrt{٣ + لو_{هـ} س}$ + جـ

(هـ ، ٤) ⇐ ٤ = −٢ $\sqrt{٣ + لو_{هـ} هـ}$ + جـ

$\boxed{جـ = ٨}$

ص = −٢ $\sqrt{٣ + لو_{هـ} س}$ + ٨

تدريب (٣)

نَ = $\sqrt{ع}$ ⇐ $\frac{دع}{دن}$ = $\sqrt{ع}$ ع(٠) = ٩

∫ $ع^{-\frac{١}{٢}}$ دع = ∫ دن   ف(٤) = ٨٠

٢ $ع^{\frac{١}{٢}}$ = ن + جـ   ف(٢) = ؟

٢ $\sqrt{٩}$ = ٠ + جـ

$\boxed{جـ = ٦}$

٢ $ع^{\frac{١}{٢}}$ = ن + ٦

$\sqrt{ع}$ = $\frac{ن+٦}{٢}$ ⇐ ع = $\frac{(ن+٦)^{٢}}{٤}$

∫ دف = ∫ $\frac{(ن+٦)^{٢}}{٤}$ دن

ف = $\frac{(ن+٦)^{٣}}{١٢}$ + جـ

ف(٤) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = $\frac{١٠٠٠}{١٢}$ + جـ

جـ = − $\frac{٤٠}{١٢}$

ف(ن) = $\frac{(ن+٦)^{٣}}{١٢}$ − $\frac{٤٠}{١٢}$

ف(٢) = $\frac{٥١٢}{١٢}$ − $\frac{٤٠}{١٢}$ = $\frac{٤٧٢}{١٢}$ = $\frac{١١٨}{٣}$ م

تدريب (٤)   ع(٠) = ٤٠م/ث

نَ = −١٠

∫ دع = ∫ −١٠ دن ⇐ ع = −١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ⇐ جـ = ٤٠

$\frac{دف}{دن}$ = −١٠ن + ٤٠ ⇐ ∫ دف = ∫ −١٠ن + ٤٠ دن

ف = −٥ن٢ + ٤٠ن + جـ

ف(٠) = ٤٥ ⇐ جـ = ٤٥

ف(ن) = −٥ن٢ + ٤٠ن + ٤٥

ف = صفر   ن = ؟؟

−٥ن٢ + ٤٠ن + ٤٥ = ٠

ن٢ − ٨ن − ٩ = ٠   (ن + ١)(ن − ٩) = ٠

ن = −١ يهمل $\boxed{ن = ٩}$

تمارين ومسائل صفحة (٣٠٨ - ٣٠٩)

س١)

أ) س^{٣} دص - ص دس = صفر

س^{٣} دص = ص دس

$\int \frac{١}{\text{ص}}$ دص = $\int$ س$^{-٣}$ دس

لو$_{\text{هـ}}$ |ص| = $\frac{\text{س}^{-٢}}{-٢}$ + جـ

|ص| = هـ$^{\frac{١}{-٢\text{س}^{٢}} + \text{جـ}}$

ب) دس - ٣ دص = جتاس دس

$\int$ ٣ دص = $\int$ دس - $\int$ جتاس دس

٣ ص = س - جاس + جـ١

ص = $\frac{١}{٣}$ س - $\frac{١}{٣}$ جاس + جـ .

جـ) هـ$^{-\text{ص}}$ جاس - $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ جتا^{٢}س = صفر

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{هـ}^{-\text{ص}}\ \text{جاس}}{\text{جتا}^{٢}\text{س}}$

$\int$ هـ$^{\text{ص}}$ دص = $\int$ قاس ظاس دس

هـ$^{\text{ص}}$ = قاس + جـ

ص = لو$_{\text{هـ}}$ (قاس + جـ) .

د) قا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ دص - جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ دس = صفر

قا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ دص = جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ دس

دص $\frac{\text{جا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}{\text{قا}^{٢}\frac{\text{س}}{٢}}$ دس

دص = جا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا^{٢} $\frac{\text{س}}{٢}$ دس

دص = (جا $\frac{\text{س}}{٢}$ جتا $\frac{\text{س}}{٢}$)^{٢} دس

$\int$ دص = $\frac{١}{٤}$ $\int$ جا^{٢} س دس

ص = $\int$ $\frac{١}{٨}$ (١ - جتا٢س) دس

ص = $\frac{١}{٨}$ (س - $\frac{١}{٢}$ جا٢س) + جـ

هـ) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ١ - ص + س^{٢} - ص س^{٢}

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (١ - ص) + س^{٢}(١ - ص)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = (١ - ص) (س^{٢} + ١)

$\int \frac{١}{١ - \text{ص}}$ دص = $\int$ (س^{٢} + ١) دس

- لو$_{\text{هـ}}$ |١ - ص| = $\frac{\text{س}^{٣}}{٣}$ + س + جـ

و) (س^{٢} + ٣س) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = هـ$^{-٢\text{ص}}$ (س + ١)(س^{٢} - ٩)

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\frac{\text{هـ}^{-٢\text{ص}}\ (\text{س}+١)(\text{س}^{٢}-٩)}{\text{س}\ (\text{س}+٣)}$

هـ$^{٢\text{ص}}$ دص = $\frac{(\text{س}+١)(\text{س}-٣)\cancel{(\text{س}+٣)}}{\text{س}\ \cancel{(\text{س}+٣)}}$ دس

$\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢\text{ص}}$ = $\int$ س - ٢ - $\frac{٣}{\text{س}}$ دس

$\frac{١}{٢}$ هـ$^{٢\text{ص}}$ = $\frac{\text{س}^{٢}}{٢}$ - ٢س - ٣لو$_{\text{هـ}}$ |س| + جـ

هـ$^{٢\text{ص}}$ = س^{٢} - ٤س - ٦لو$_{\text{هـ}}$ |س| + جـ

٢ص = لو$_{\text{هـ}}$ (س^{٢} - ٤س - ٦لو$_{\text{هـ}}$ |س| + جـ)

ص = $\frac{١}{٢}$ لو$_{\text{هـ}}$ (س^{٢} - ٤س - ٦لو$_{\text{هـ}}$ |س| + جـ)

س٢) $\frac{\text{دم}}{\text{دن}} = \frac{-٥٠٠}{(\text{ن}+١)^{٢}}$

$\int \text{دم} = \int -٥٠٠(\text{ن}+١)^{-٢}\,\text{دن}$

$\text{م} = \frac{٥٠٠}{\text{ن}+١} + \text{جـ}$

$\text{م}(٠) = ٢٥٠٠ \Leftarrow ٢٥٠٠ = \frac{٥٠٠}{١} + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ٢٠٠٠$

$\text{م}(\text{ن}) = \frac{٥٠٠}{\text{ن}+١} + ٢٠٠٠$

$\text{م}(٣) = \frac{٥٠٠}{٤} + ٢٠٠٠ = ٢١٢٥$ دينار

س٣) $\frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}$

$\text{دص} = \frac{\text{هـ}^{\text{س}} \times \text{هـ}^{-\text{ص}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{دس}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\,\text{دص} = \int \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{\text{س}}+١}\,\text{دس}$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + \text{جـ}$

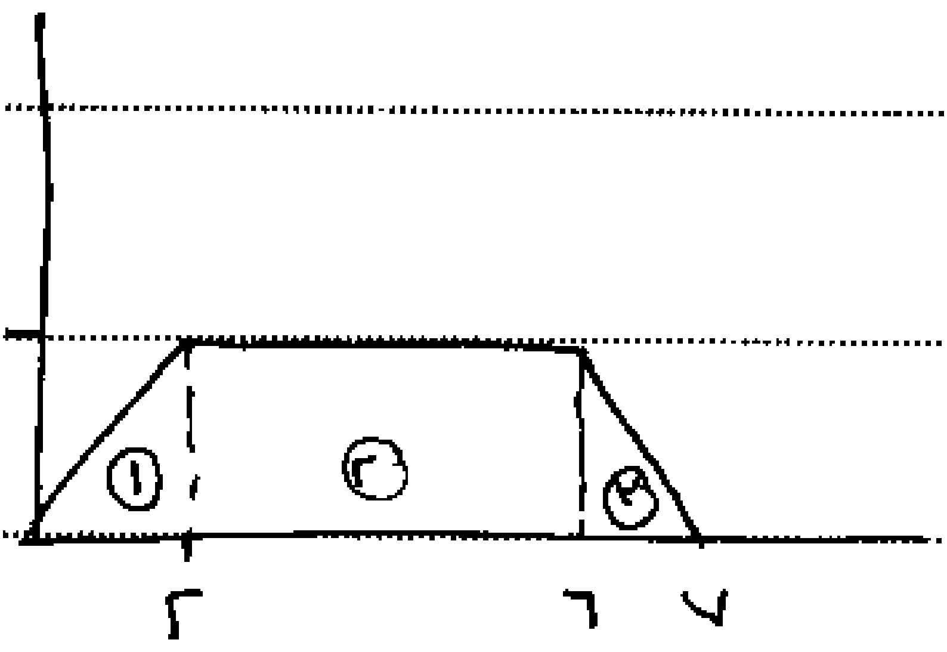
$(١،٠) \Leftarrow \text{هـ}^{٠} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}+١| + \text{جـ}$

$\text{جـ} = ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}+١|$

$\text{هـ}^{\text{ص}} = \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}+١|$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\left(\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}^{\text{س}}+١| + ١ - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{هـ}+١|\right)$

س٤)



المسافة المقطوعة في [٠، ٧]

= المساحة تحت المنحنى

$\text{ف}_{١} = \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢}\times٢\times٣٠ = ٣٠$

$\text{ف}_{٢} = \text{مساحة المستطيل} = (٦-٢)\times٣٠ = ١٢٠$

$\text{ف}_{٣} = \text{مساحة المثلث} = \frac{١}{٢}\times١\times٣٠ = ١٥$

المسافة المقطوعة = ٣٠ + ١٢٠ + ١٥ = ١٦٥م

س٥) $\text{ت} = -٤\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}} \Leftarrow \frac{\text{دع}}{\text{دن}} = -٤\,\text{ع}^{\frac{٣}{٢}}$

$\int \text{ع}^{-\frac{٣}{٢}}\,\text{دع} = \int -٤\,\text{دن}$

$-٢\,\text{ع}^{-\frac{١}{٢}} = -٤\text{ن} + \text{جـ} \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{\text{ع}}} = -٤\text{ن}+\text{جـ}$

$\text{ع}(٠) = ٤ \Leftarrow \frac{-٢}{\sqrt{٤}} = -٤\times٠ + \text{جـ} \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = -١}$

$\frac{-٢}{\sqrt{\text{ع}}} = -٤\text{ن} - ١ \Leftarrow \sqrt{\text{ع}} = \frac{٢}{٤\text{ن}+١}$

$\text{ع} = \frac{٤}{(٤\text{ن}+١)^{٢}} \Leftarrow \int \text{دف} = \int \frac{٤}{(٤\text{ن}+١)^{٢}}\,\text{دن}$

$\text{ف} = \frac{-٤(٤\text{ن}+١)^{-١}}{٤} + \text{جـ}$

$\text{ف}(٠) = ٠ \Leftarrow \frac{-١}{١} + \text{جـ} = ٠ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ١}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{-١}{٤\text{ن}+١} + ١ \Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = \frac{٤\text{ن}}{٤\text{ن}+١}$

$\text{ف}(\text{ن}) = \frac{٢}{٤\text{ن}+١}\times٢\text{ن} \Leftarrow \text{ف}(\text{ن}) = ٢\text{ن}\sqrt{\text{ع}}$ #

س٦) ع(٠) = ٤٠ م/ث

ف(١) = ٨٠   ف = ؟؟ عندما ع = ٠

ت(ن) = − ١٠ م/ث^2

$\int$ دع = $\int$ −١٠ دن

ع = −١٠ن + جـ

ع(٠) = ٤٠ ⇐ ٤٠ = جـ

$\int$ دف = $\int$ (−١٠ن + ٤٠) دن

ف = −٥ن^2 + ٤٠ن + جـ

ف(١) = ٨٠ ⇐ ٨٠ = −٥ + ٤٠ + جـ

جـ = ٤٥

ف(ن) = −٥ن^2 + ٤٠ن + ٤٥

عند أقصى ارتفاع ع = ٠

−١٠ن + ٤٠ = ٠ ⇐ $\boxed{ن = ٤}$

ف(٤) = −٥×١٦ + ٤٠×٤ + ٤٥

= ١٢٥ م

س٧) $\frac{دع}{دن}$ = ٠.٠٢٥ ع

ع(٠) = ٢×١٠^{٥} ع(٤٠) = ؟؟

$\int \frac{دع}{ع}$ = $\int$ ٠.٠٢٥ دن

لو$_ه$|ع| = ٠.٠٢٥ن + جـ$_1$

|ع| = ه$^{٠.٠٢٥ن + جـ_1}$ ⇐ ع = ه$^{٠.٠٢٥ن}$ × ه^{جـ_1}

ع = جـ ه$^{٠.٠٢٥ن}$

ع(٠) = ٢×١٠^{٥} ⇐ ٢×١٠^{٥} = جـ × ه^{٠}

جـ = ٢×١٠^{٥}

ع(ن) = ٢×١٠^{٥} ه$^{٠.٠٢٥ن}$

ع(٤٠) = ٢×١٠^{٥} ه$^{٠.٠٢٥×٤٠}$

= ٢×١٠^{٥} ه

= ٥٤٠٠٠٠ نسمة

أسئلة الوحدة

حل) أ) $\int_{2}^{3}(\text{٤س}+1)^{\frac{1}{2}}\,\text{دس} = \frac{2}{3}\left[\frac{(\text{٤س}+1)^{\frac{3}{2}}}{4}\right]_{2}^{3}$

$= \frac{2}{12}\sqrt{13^{3}} - \frac{54}{12} = \frac{1}{6}\left(\sqrt{13^{3}} - 27\right)$

* * *

ب) $\int \frac{\text{س قا}^{2}\text{س} - \text{س ظا}^{2}\text{س}}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}\,(\text{قا}^{2}\text{س} - \text{ظا}^{2}\text{س})}{\sqrt[3]{\text{س}}}\,\text{دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{س}^{\frac{1}{3}}}\,\text{دس} = \int \text{س}^{\frac{2}{3}}\,\text{دس}$

$= \frac{3}{5}\sqrt[3]{\text{س}^{5}} + \text{جـ}$

* * *

جـ) $\int \frac{\sqrt{\text{س}^{6} - \text{س}^{4}}}{\text{س}^{5}}\,\text{دس}$ إخراج س^{4} عامل مشترك.

$\int \frac{\sqrt{\text{س}^{4}(\text{س}^{-2} - 1)}}{\text{س}^{5}}\,\text{دس} = \int \frac{\text{س}^{2}}{\text{س}^{5}}\sqrt{\text{س}^{-2} \rightarrow 1}\,\text{دس}$

$\int \text{س}^{-3}(\text{س}^{-2} - 1)^{\frac{1}{2}}\,\text{دس}$

نفرض $\text{ص} = \text{س}^{-2} - 1$

$-\frac{1}{2}\int \text{ص}^{\frac{1}{2}}\,\text{دص}$ $\quad \text{دص} = -2\text{س}^{-3}\,\text{دس}$

$= -\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\,\text{ص}^{\frac{3}{2}} + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{3}\sqrt{\text{ص}^{3}} + \text{جـ} = -\frac{1}{3}\sqrt{(\text{س}^{-2} - 1)^{3}} + \text{جـ}$

* * *

د) $\int \text{ظتاس}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس}$ ، $\text{دص} = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}}\,\text{دس}$

$\text{دص} = \text{ظتاس}\,\text{دس}$

$\int \text{ص}\,\text{دص} = \frac{\text{ص}^{2}}{2} + \text{جـ} = \frac{(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{جاس})^{2}}{2} + \text{جـ}$

هـ) $\int (\text{س}^{8} - \text{٤س})^{6}\,\text{دس}$

$= \int (\text{س}(\text{س}^{7} - 4))^{6}\,\text{دس}$

$= \int \text{س}^{6}(\text{س}^{7} - 4)^{6}\,\text{دس}$ نفرض $\text{ص} = \text{س}^{7} - 4$

$\text{دص} = 7\text{س}^{6}\,\text{دس}$

$= \frac{1}{7}\int \text{ص}^{6}\,\text{دص} = \frac{1}{49}\text{ص}^{7} + \text{جـ}$

$= \frac{(\text{س}^{7} - 4)^{7}}{49} + \text{جـ}$

* * *

و) $\int \text{قا}^{4}\text{س}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس}\ \text{دس}$

$\text{ص} = \text{ظاس}$ $\quad \text{دص} = \text{قا}^{2}\text{س}\,\text{دس}$

$\int \underbrace{\text{قا}^{2}\text{س}}_{(\text{ظا}^{2}\text{س}+1)}\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\int (\text{ص}^{2} + 1)\ \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\ \text{دص}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}$ $\quad \text{دع} = \frac{1}{\text{ص}}\,\text{دص}$

$\text{دهـ} = (\text{ص}^{2} + 1)\,\text{دص}$ $\quad \text{هـ} = \frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{ص}$

$\int (\text{ص}^{2} + 1)\,\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص}\,\text{دص} = \left(\frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \int \left(\frac{\text{ص}^{2}}{3} + 1\right)\text{دص}$

$= \left(\frac{\text{ص}^{3}}{3} + \text{ص}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ص} - \frac{\text{ص}^{3}}{9} - \text{ص} + \text{جـ}$

$= \left(\frac{\text{ظا}^{3}\text{س}}{3} + \text{ظاس}\right)\text{لو}_{\text{هـ}}\text{ظاس} - \frac{\text{ظا}^{3}\text{س}}{9} - \text{ظاس} + \text{جـ}$

* * *

ز) $\int \sqrt[3]{\text{٢س}^{5} - \text{س}^{3}}\,\text{دس} = \int \text{س}\sqrt[3]{\text{٢س}^{2} - 1}\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{٢س}^{2} - 1 \Leftarrow \text{دص} = \text{٤س}\,\text{دس}$

$\frac{1}{4}\int \text{ص}^{\frac{1}{3}}\,\text{دص} = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4}\,\text{ص}^{\frac{4}{3}} + \text{جـ}$

$= \frac{3}{16}\sqrt[3]{(\text{٢س}^{2} - 1)^{4}} + \text{جـ}$

ح) $\int_{0}^{1} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{\text{هـ}^{2\text{س}}+2\text{هـ}^{\text{س}}+1}\, \text{د}\text{س}$

$= \int_{0}^{1} \frac{\text{هـ}^{\text{س}}}{(\text{هـ}^{\text{س}}+1)^{2}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}} + 1 \qquad \text{د}\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{س} = 0 \qquad \text{ص} = 2$

$\text{س} = 1 \qquad \text{ص} = \text{هـ} + 1$

$\int_{2}^{\text{هـ}+1} \text{ص}^{-2}\, \text{د}\text{ص} = \left[\frac{-1}{\text{ص}}\right]_{2}^{\text{هـ}+1}$

$= \frac{-1}{\text{هـ}+1} + \frac{1}{2} = \frac{\text{هـ}-1}{2(\text{هـ}+1)}$

ط) $\int \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\, \text{د}\text{س}$

نفرض $\text{ص} = \text{لو}_{\text{هـ}}\text{س} \rightarrow \text{د}\text{ص} = \frac{1}{\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{س} = \text{هـ}^{\text{ص}}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص}$

$\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}} \qquad \text{د}\text{ع} = \text{هـ}^{\text{ص}}\, \text{د}\text{ص}$

$\text{د}\text{هـ} = \text{جا}\,\text{ص} \qquad \text{هـ} = -\text{جتا}\,\text{ص}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتا}\,\text{ص} + \underbrace{\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص}}_{\text{أجزاء مرة أخرى}}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتا}\,\text{ص} + \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص} - \int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص}$

$2\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = -\text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتا}\,\text{ص} + \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}$

$\int \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = \frac{1}{2}\left(-\text{هـ}^{\text{ص}} \text{جتا}\,\text{ص} + \text{هـ}^{\text{ص}} \text{جا}\,\text{ص}\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(-\text{س}\, \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) + \text{س}\, \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\right) + \text{جـ}$

$= \frac{1}{2}\left(\text{س}\, \text{جا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}) - \text{س}\, \text{جتا}(\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س})\right) + \text{جـ}$

ي) $\int \frac{\text{س}^{3}}{2\text{س}^{4}+\text{س}^{8}}\, \text{د}\text{س}$

$\int \frac{\text{س}^{3}}{\text{س}^{8}(2\text{س}^{-4}+1)}\, \text{د}\text{س} = \int \frac{\text{س}^{-5}}{2\text{س}^{-4}+1}\, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = 2\text{س}^{-4}+1 \qquad \text{د}\text{ص} = -8\text{س}^{-5}\, \text{د}\text{س}$

$\int \frac{-1}{8} \times \frac{1}{\text{ص}}\, \text{د}\text{ص} = -\frac{1}{8}\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}| + \text{جـ}$

$= -\frac{1}{8}\text{لو}_{\text{هـ}}|2\text{س}^{-4}+1| + \text{جـ}$

ك) $\int \frac{\sqrt{4\text{س}+12} - 3}{\sqrt{\text{س}+3} + 3}\, \text{د}\text{س}$

$\int \frac{2\sqrt{\text{س}+3} - 3}{\sqrt{\text{س}+3} + 3}\, \text{د}\text{س}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{س}+3} \text{ ، } \text{ص}^{2} = \text{س}+3 \rightarrow 2\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = \text{د}\text{س}$

$\int \frac{(2\text{ص}-3)}{\text{ص}+3} \times 2\text{ص}\, \text{د}\text{ص} = \int \frac{4\text{ص}^{2} - 6\text{ص}}{\text{ص}+3}\, \text{د}\text{ص}$

$= \int (4\text{ص} - 18)\, \text{د}\text{ص} + \int \frac{54}{\text{ص}+3}\, \text{د}\text{ص}$

$2\text{ص}^{2} - 18\text{ص} + 54\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{ص}+3| + \text{جـ}$

$= 2(\text{س}+3) - 18\sqrt{\text{س}+3} + 54\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left|\sqrt{\text{س}+3} + 3\right| + \text{جـ}$

ل) $\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س})\, \text{د}\text{س}$

$\text{ع} = \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س}) \qquad \text{د}\text{ع} = \frac{2\text{س}+2}{\text{س}^{2}+2\text{س}}\, \text{د}\text{س}$

$\text{د}\text{هـ} = \text{د}\text{س} \qquad \text{هـ} = \text{س}$

$\int \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س})\, \text{د}\text{س} = \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س}) - \int \frac{2\text{س}+2}{\text{س}+2}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س}) - \int 2\, \text{د}\text{س} + \int \frac{2}{\text{س}+2}\, \text{د}\text{س}$

$= \text{س}\, \text{لو}_{\text{هـ}}(\text{س}^{2}+2\text{س}) - 2\text{س} + 2\,\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{س}+2| + \text{جـ}$

س٢) ٣ طا ص − $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ قا س = ٠

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ قا س = ٣ طا ص

$\frac{1}{\text{طا ص}}$ دص = $\frac{3}{\text{قا س}}$ دس

$\int$ ظتا ص دص = ٣ $\int$ جتا س دس

= ٣ جا س + جـ

٣) ص² = لو$_{\text{هـ}}$ س ص − هـ$^{\text{س}^2}$ ، $\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = ؟

ص² = لو$_{\text{هـ}}$ س + لو$_{\text{هـ}}$ ص − هـ$^{\text{س}^2}$

٢ ص ص' = $\frac{1}{\text{س}}$ + $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ − ٢ س هـ$^{\text{س}^2}$

٢ ص ص' − $\frac{\text{ص}'}{\text{ص}}$ = $\frac{1}{\text{س}}$ − ٢ س هـ$^{\text{س}^2}$

ص' (٢ ص − $\frac{1}{\text{ص}}$) = $\frac{1}{\text{س}}$ − ٢ س هـ$^{\text{س}^2}$

ص' = $\dfrac{\frac{1}{\text{س}} - \text{٢ س هـ}^{\text{س}^2}}{\text{٢ ص} - \frac{1}{\text{ص}}}$

$\frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ = $\dfrac{\text{ص (١ − ٢ س}^2\text{ هـ}^{\text{س}^2}\text{)}}{\text{س (٢ ص}^2\text{ − ١)}}$

س٤) م(س) = س³ + ب س² − ١

م'(س) = ق(س) = ٣ س² + ٢ ب س

ق(٢) = ٢٤ ⇐ ١٢ + ٤ ب = ٢٤

$\boxed{\text{ب = ٣}}$

س٥) م(س) ، هـ(س) معكوسين لمشتقة ق(س)

م(س) − هـ(س) = ثابت = جـ

$\int_{-1}^{3}$ جـ دس = ١٢ ⇐ جـ(٣ − −١) = ١٢

$\boxed{\text{جـ = ٣}}$

$\int_{0}^{4}$ ٢س م(س) دس + $\int_{4}^{0}$ ٢س هـ(س) دس

= $\int_{0}^{4}$ ٢س م(س) دس − $\int_{0}^{4}$ ٢س هـ(س) دس

= $\int_{0}^{4}$ ٢س $\underbrace{\text{(م(س) − هـ(س))}}_{\text{ثابت = جـ = ٣}}$ دس

$\int_{0}^{4}$ ٦ س دس = ٣ س² $]_{0}^{4}$ = ٤٨

س٦) $\int_{3}^{1}$ (٢ق(س) ~~+~~ $\int_{0}^{2}$ ٢م دم) دس = ١٤

← م² $]_{0}^{2}$ = ٤

$\int_{3}^{1}$ (٢ق(س) + ٤) دس = ١٤

$\int_{3}^{1}$ ٢ق(س) دس + ٤ × −٢ = ١٤

$\int_{3}^{1}$ ق(س) دس = ١١ ⇐ $\int_{1}^{3}$ ٣ق(س) دس = −٣٣

س٧) ق(س) = س² − $\int$ (٣س² − $\int_{0}^{1}$ ٢ص دص) دس

← ص² $]_{0}^{1}$ = ١

ق''(س) = ؟

ق(س) = س² − $\int$ ٣س² − ١ دس

ق'(س) = ٢س − (٣س² − ١)

ق''(س) = ٢س − ٣س² + ١

س٨) $\int_{-١}^{١} (٤\,د(س) + ٣)\, دس = ١٨$

$٤\int_{-١}^{١} د(س)\, دس + ٦ = ١٨$

$\therefore \int_{-١}^{١} د(س)\, دس = ٣$

$\int_{١}^{٤} ٢\,د(س)\, دس = ٢٠ \Leftarrow \int_{١}^{٤} د(س)\, دس = ١٠$

$\int_{٤}^{٢} ٣س\, دس - \int_{٤}^{-١} د(س)\, دس =$

$[س^٢]_{٤}^{-١} - \left(\int_{٤}^{١} د(س)\, دس + \int_{١}^{-١} د(س)\, دس\right)$

$١ - ١٦ - (-١٠ + -٣)$

$-١٥ + ١٣ = -٢$

س٩) $\frac{دع}{دن} = أ\sqrt[٣]{ع}$ $ع(٠) = ٠$

أ = ؟ عندما ع(٣) = ٨

$\int ع^{-\frac{١}{٣}}\, دع = \int أ\, دن$

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ع^٢} = أن + ث$

$ع(٠) = ٠ \Leftarrow \frac{٣}{٢} \times ٠ = أ \times ٠ + ث$

ث = صفر

$\frac{٣}{٢}\sqrt[٣]{ع^٢} = أن$

عندما ن = ٣ ، ع = ٨

$\frac{٣}{٢} \times ٤ = أ \times ٣$

$٦ = ٣أ \Leftarrow \boxed{أ = ٢}$

س١٠) $\frac{دص}{دس} = \frac{\sqrt{هـ^ص}}{١ - جتا^٢س}$

$هـ^{-\frac{١}{٢}ص}\, دص = \frac{١}{جا^٢س}\, دس$

$\int هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = \int قتا^٢س\, دس$

$-٢هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = -ظتاس + ث$

$(\frac{\pi}{٤} ، ٠) \Leftarrow -٢ \times هـ^٠ = -ظتا\frac{\pi}{٤} + ث$

ث = −١

$-٢هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = -ظتاس - ١$

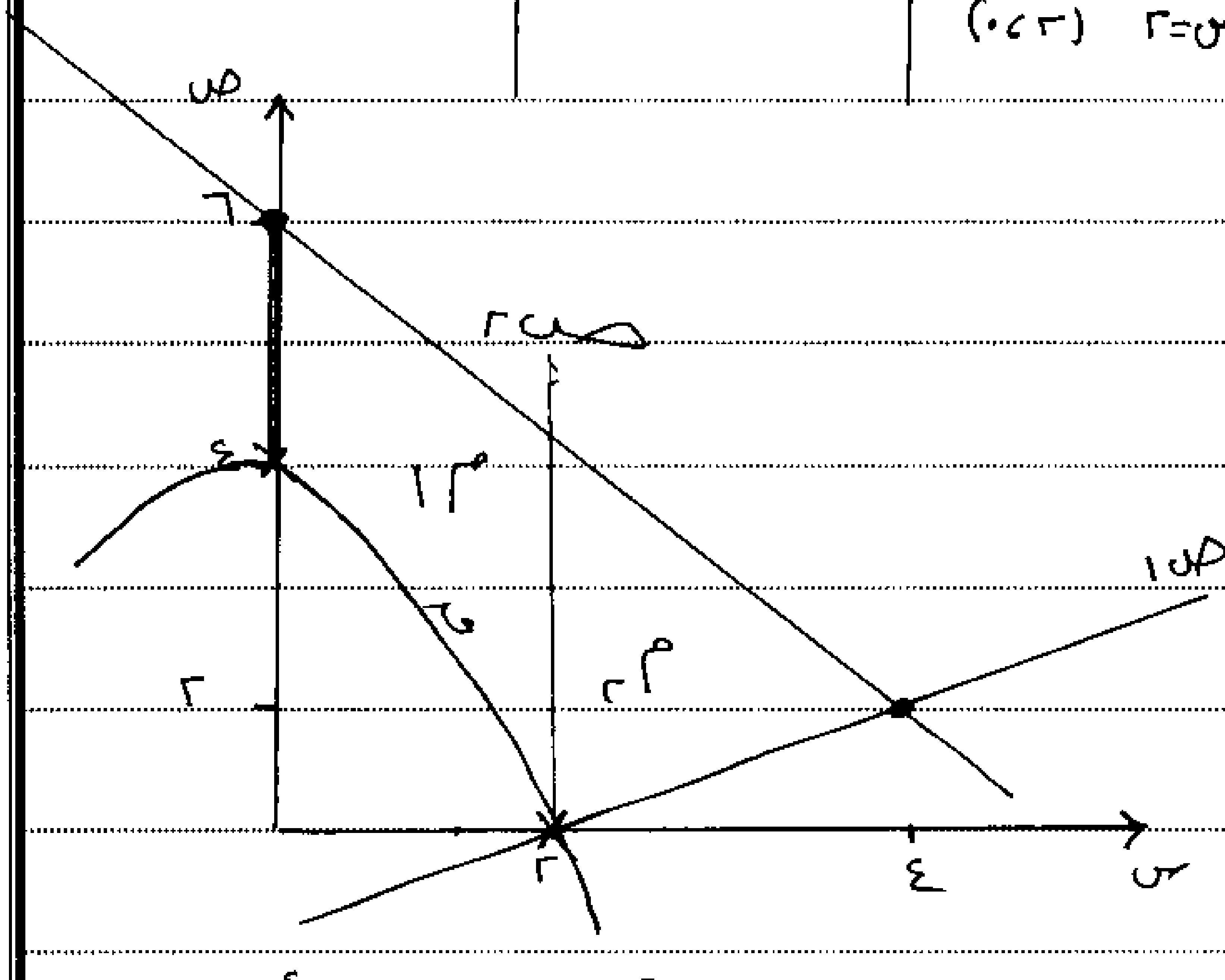
$هـ^{-\frac{١}{٢}ص} = \frac{١}{٢}ظتاس + \frac{١}{٢}$

$-\frac{١}{٢}ص = لو_{هـ}(\frac{١}{٢}ظتاس + \frac{١}{٢})$

$ص = -٢لو_{هـ}(\frac{١}{٢}ظتاس + \frac{١}{٢})$

س١١) $د(س) = ٤ - س^٢$ ، $ص_١ = س - ٢$ ، $ص_٢ = ٦ - س$

$د = ص_١$	$د = ص_٢$	$ص_١ = ص_٢$
$٤ - س^٢ = س - ٢$	$٤ - س^٢ = ٦ - س$	$س - ٢ = ٦ - س$
$س^٢ + س - ٦ = ٠$	$س^٢ - س + ٢ = ٠$	$٢س = ٨ \leftarrow \boxed{س = ٤}$
$(س + ٣)(س - ٢) = ٠$	لا تحل	(٤ ، ٢)
س = −٣ تهمل		
س = ٢ (٢ ، ٠)		



$م = م_١ + م_٢ \Leftarrow م = \int_{٠}^{٢} (ص_٢ - د(س))\, دس + \int_{٢}^{٤} (ص_٢ - ص_١)\, دس$

$= \int_{٠}^{٢} (س^٢ - س + ٢)\, دس \oplus \int_{٢}^{٤} (٨ - ٢س)\, دس$

$[\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} + ٢س]_{٠}^{٢} + [٨س - س^٢]_{٢}^{٤}$

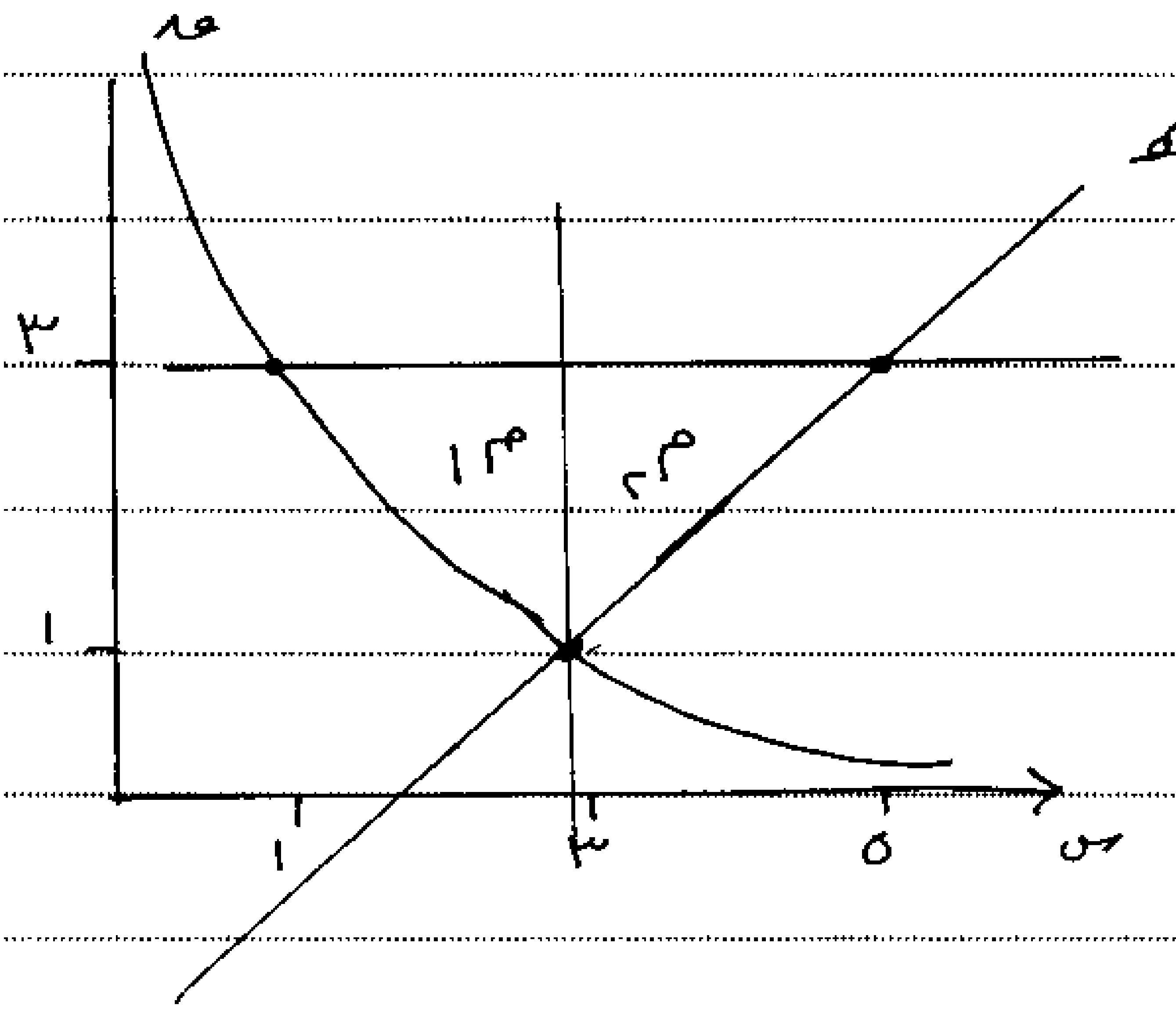
$\frac{٨}{٣} - ٢ + ٤ \oplus (٣٢ - ١٦) - (١٦ - ٤)$

$\frac{١٤}{٣} + ٤ = \frac{٢٦}{٣}$ وحدة مساحة

س١٢) $\text{ق}(\text{س}) = \frac{٣}{\text{س}}$ ، $\text{ه}(\text{س}) = \text{س} - ٢$

$\text{ل}(\text{س}) = ٣$

ق = ه	ق = ل	ه = ل
$\frac{٣}{\text{س}} = \text{س} - ٢$	$\frac{٣}{\text{س}} = ٣$	$\text{س} - ٢ = ٣$
	$\text{س} = ١$	$\text{س} = ٥$
$\text{س} = ٣$ $(٣ ، ١)$	$(١ ، ٣)$	$(٥ ، ٣)$
$\text{س} = -١$ $(-١ ، -٣)$		



$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2$$

$$= \int_{١}^{٣} (\text{ل} - \text{ق})\,\text{دس} + \int_{٣}^{٥} (\text{ل} - \text{ه})\,\text{دس}$$

$$= \int_{١}^{٣} ٣ - \frac{٣}{\text{س}}\,\text{دس} \oplus \int_{٣}^{٥} ٣ - \text{س} + ٢\,\text{دس}$$

$$\Big[٣\text{س} - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}|\text{س}|\Big]_{١}^{٣} \oplus \Big[٥\text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢}\Big]_{٣}^{٥}$$

$$٩ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}٣ - (٣ - \text{صفر}) \oplus (٢٥ - \frac{٢٥}{٢}) - (١٥ - \frac{٩}{٢})$$

$$٦ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}٣ \oplus ٢$$

$$٨ - ٣\,\text{لو}_{\text{ه}}٣$$

س١٣) مساحة المنطقة المظللة = مساحة المثلث $- \int_{-٢}^{٢} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس}$

مساحة المثلث $= \frac{١}{٢} \times ٦ \times ٤ = ١٢$

$٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^2 = ٠ \Leftarrow \text{س} = ٢ ، -٢$

$$\text{م} = \int_{-٢}^{٢} (٢ - \frac{١}{٢}\text{س}^2)\,\text{دس}$$

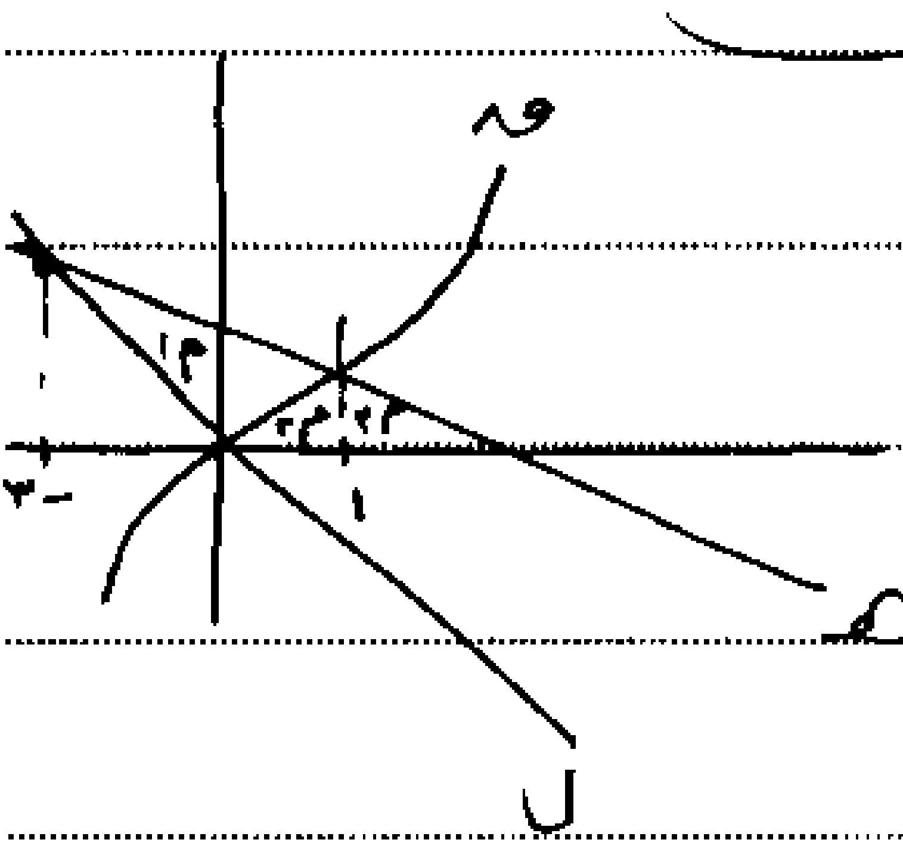
$$= \Big[٢\text{س} - \frac{١}{٦}\text{س}^3\Big]_{-٢}^{٢}$$

$$(٤ - \frac{٨}{٦}) - (-٤ + \frac{٨}{٦}) = \frac{١٦}{٣}$$

مساحة المنطقة المظللة $= ١٢ - \frac{١٦}{٣}$

$= \frac{٢٠}{٣}$

التكلفة $= \frac{١}{٢} \times \frac{٢٠}{٣} = \frac{١٠}{٣}$ من الدينار.



س١٤) $\text{م}_1 = \int_{-٣}^{٠} (\text{ه} - \text{ل})\,\text{دس}$

$$= \int_{-٣}^{٠} ٣ - \text{س} + ٢\text{س}\,\text{دس}$$

$$= \Big[٣\text{س} + \frac{\text{س}^2}{٢}\Big]_{-٣}^{٠}$$

$$(\text{صفر}) - (-٩ + \frac{٩}{٢}) = \frac{٩}{٢}$$

$$\text{م}_2 = \int_{٠}^{١} \text{ق}(\text{س})\,\text{دس} \leftarrow \text{م}_2 = \int_{٠}^{١} ٢\text{س}^3\,\text{دس} = \Big[\frac{\text{س}^4}{٢}\Big]_{٠}^{١} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{م}_3 = \int_{١}^{٣} ٣ - \text{س}\,\text{دس}$$

$$= \Big[٣\text{س} - \frac{\text{س}^2}{٢}\Big]_{١}^{٣}$$

$$(٩ - \frac{٩}{٢}) - (٣ - \frac{١}{٢}) = ٢$$

$$\text{م} = \text{م}_1 + \text{م}_2 + \text{م}_3$$

$= \frac{٩}{٢} + \frac{١}{٢} + ٢ = ٧$ وحدة مساحة

س١٥) $م_1 = 10 \Leftarrow \int_{-3}^{0} د(س)\,دس = 10$

$م_2 = 4$ ، $\int_{0}^{1} د(س)\,دس = -4$

$\int_{0}^{2} س\, د(1-س^2)\,دس$

$ص = 1 - س^2$ $\quad دص = -2س\,دس$

$س = 0 \quad ص = 1$

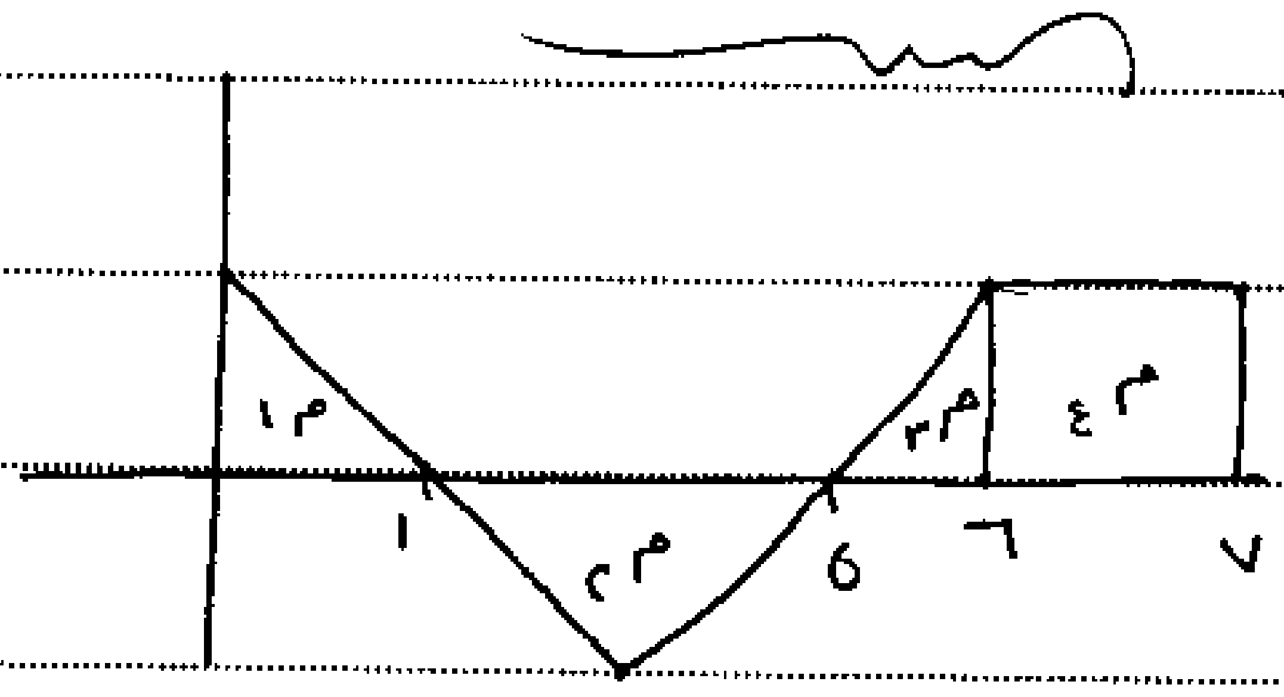
$س = 2 \quad ص = -3$

$\int_{1}^{-3} -\frac{1}{2}\, د(ص)\,دص$

$= -\frac{1}{2}\left(\int_{1}^{0} د(ص)\,دص + \int_{0}^{-3} د(ص)\,دص\right)$

$= -\frac{1}{2}(+4 + -10) = 3$

س١٦)



$م_1$ = مساحة المثلث $= \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\int_{0}^{1} د(س)\,دس = \frac{1}{2}$

$م_2 = \frac{1}{2} \times 2 \times (5-1) = 4$

$\int_{1}^{5} د(س)\,دس = -4$

$م_3 = \frac{1}{2} \times 1 \times 1 = \frac{1}{2}$

$\int_{5}^{6} د(س)\,دس = \frac{1}{2}$

$م_4 = 1 \times 1 = 1$ ، $\int_{6}^{7} د(س)\,دس = 1$

$\int_{5}^{7} د(س)\,دس = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

أ) $\int_{0}^{7} د(س)\,دس = \int_{0}^{1} د(س)\,دس + \int_{1}^{5} د(س)\,دس$
$+ \int_{5}^{7} د(س)\,دس$

$= \frac{1}{2} + -4 + \frac{3}{2} = -2$

ب) $\int_{0}^{7} |د(س)|\,دس$ = المساحة

$= م_1 + م_2 + م_3 + م_4 = \frac{1}{2} + 4 + 1 + \frac{1}{2}$

= ٦ وحدة مساحة

جـ) $\left|\int_{0}^{7} د(س)\,دس\right|$

$= \left|\int_{0}^{1} د(س)\,دس + \int_{1}^{5} د(س)\,دس + \int_{5}^{7} د(س)\,دس\right|$

$= \left|\frac{1}{2} + -4 + \frac{3}{2}\right| = |-2| = 2$

س١٧) أ) $\int جا\sqrt{س}\; جتا^3\sqrt{س}\; دس$

نفرض $ص = \sqrt{س}$ $\quad ص^2 = س$ ، $2ص\,دص = دس$

$\int 2ص\, جاص\, جتا^3ص\, دص$

$= \int 2ص\, جاص\, جتاص\, جتا^2ص\, دص$

$= \int 2ص \times \frac{1}{2} جا2ص \times \frac{1}{2}(1 + جتا2ص)\, دص$

$= \int \frac{1}{2} ص\, (جا2ص + جا2ص\, جتا2ص)\, دص$

$= \int \frac{1}{2} ص\, (جا2ص + \frac{1}{2} جا4ص)\, دص$

$ع = \frac{1}{2} ص \qquad دع = \frac{1}{2}\, دص$

$دهـ = (جا2ص + \frac{1}{2} جا4ص)\, دص \qquad هـ = (-\frac{1}{2} جتا2ص - \frac{1}{8} جتا4ص)$

$= \frac{1}{2} ص(-\frac{1}{2} جتا2ص - \frac{1}{8} جتا4ص) + \int \frac{1}{2}(\frac{1}{2} جتا2ص + \frac{1}{8} جتا4ص)\, دص$

$= \frac{1}{2} ص(-\frac{1}{2} جتا2ص - \frac{1}{8} جتا4ص) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} جا2ص + \frac{1}{32} جا4ص) + جـ$

$= \frac{1}{2}\sqrt{س}(-\frac{1}{2} جتا2\sqrt{س} + \frac{1}{8} جتا4\sqrt{س}) + \frac{1}{2}(\frac{1}{4} جا2\sqrt{س} + \frac{1}{32} جا4\sqrt{س}) + جـ$

ب) $\int س \sqrt[٣]{س^{٢}+١}\ دس$

$ص = س^{٢}+١$ $\quad$ $دص = ٢س\ دس$

$\int \frac{١}{٢} ص^{\frac{١}{٣}}\ دص = \frac{١}{٢}\times\frac{٣}{٤} ص^{\frac{٤}{٣}} + ج$

$= \frac{٣}{٨}\sqrt[٣]{(س^{٢}+١)^{٤}} + ج$

* * *

جـ) $\int_{٠}^{\frac{\pi}{٦}} \frac{قا^{٤}س}{ظا^{٢}س - ٣ظاس+٢}\ دس$

$ص = ظاس$ $\quad$ $دص = قا^{٢}س\ دس$

$س = ٠ \leftarrow ص = ٠$ $\quad$ $س = \frac{\pi}{٦}$ ، $ص = \frac{١}{\sqrt{٣}}$

$\int \frac{قا^{٢}س}{ص^{٢}-٣ص+٢}\ دص = \int \frac{ظا^{٢}س+١}{ص^{٢}-٣ص+٢}\ دص$

$= \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{ص^{٢}+١}{ص^{٢}-٣ص+٢}\ دص$

$= \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١\ دص + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٣ص-١}{ص^{٢}-٣ص+٢}\ دص$

$\int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} ١\ دص + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{٥}{(ص-٢)}\ دص + \int_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} \frac{-٢}{(ص-١)}\ دص$

$\left[ص\right]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} + ٥\left[لو_{هـ}|ص-٢|\right]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}} - ٢\left[لو_{هـ}|ص-١|\right]_{٠}^{\frac{١}{\sqrt{٣}}}$

$\frac{١}{\sqrt{٣}} + ٥لو_{هـ}|\frac{١}{\sqrt{٣}}-٢| - ٥لو_{هـ}٢ - ٢لو_{هـ}|\frac{١}{\sqrt{٣}}-١| + ٢\cancel{لو_{هـ}١}$

$= \frac{١}{\sqrt{٣}} + ٥لو_{هـ}|\frac{١}{\sqrt{٣}}-٢| - ٥لو_{هـ}٢ - ٢لو_{هـ}|\frac{١}{\sqrt{٣}}-١|$

د) $\int \frac{ظتاس\ قتاس}{٩-٤قتا^{٢}س}\ دس$

$ص = قتاس$ $\quad$ $دص = -قتاس\ ظتاس\ دس$

$= \int \frac{-١}{٩-٤ص^{٢}}\ دص = \int \frac{١}{٤ص^{٢}-٩}\ دص$

$= \int \frac{\frac{١}{٦}}{٢ص-٣}\ دص + \int \frac{-\frac{١}{٦}}{٢ص+٣}\ دص$

$= \frac{١}{١٢}لو_{هـ}|٢ص-٣| + \frac{-١}{١٢}لو_{هـ}|٢ص+٣| + ج$

$= \frac{١}{١٢}لو_{هـ}\left|\frac{٢قتاس-٣}{٢قتاس+٣}\right| + ج$

* * *

هـ) $\int_{٠}^{٢} س^{٤}\ هـ^{س^{٣}+لو_{هـ}س}\ دس$

$= \int_{٠}^{٢} س^{٤}\times هـ^{س^{٣}}\times هـ^{لو_{هـ}س}\ دس$

$= \int_{٠}^{٢} س^{٥}\ هـ^{س^{٣}}\ دس$

$ص = س^{٣}$ $\quad$ $دص = ٣س^{٢}\ دس$

$س = ٠$ $\quad$ $ص = ٠$ ، $\quad$ $س = ٢$ $\quad$ $ص = ٨$

$\int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣} س^{٣}\ هـ^{ص}\ دص = \int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣} ص\ هـ^{ص}\ دص$

$ع = \frac{١}{٣}ص$ $\quad$ $دع = \frac{١}{٢}\ دص$

$دهـ = هـ^{ص}\ دص$ $\quad$ $هـ = هـ^{ص}$

$\int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣} ص\ هـ^{ص}\ دص = \left[\frac{١}{٣} ص\ هـ^{ص}\right]_{٠}^{٨} - \int_{٠}^{٨} \frac{١}{٣} هـ^{ص}\ دص$

$= (\frac{٨}{٣}هـ^{٨} - صفر) - \frac{١}{٣}\left[هـ^{ص}\right]_{٠}^{٨}$

$\frac{٨}{٣}هـ^{٨} - \frac{١}{٣}هـ^{٨} + \frac{١}{٣} = \frac{٧}{٣}هـ^{٨} + \frac{١}{٣}$

و) $\int \text{جا ٣س قتاس دس}$

$= \int \frac{\text{جا٣س}}{\text{جاس}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{جا(٢س + س)}}{\text{جا س}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{جا٢س جتاس + جاس جتا٢س}}{\text{جاس}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{٢جاس جتاس جتاس + جاس جتا٢س}}{\text{جاس}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{جاس} \left(\text{٢} \times \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{(١+جتا٢س) + جتا٢س}\right)}{\cancel{\text{جاس}}} \text{ دس}$

$= \int \text{١ + ٢جتا٢س دس}$

$= \text{س + جا٢س + جـ}$

ز) $\int \frac{\text{٢جا٣س جتا س}}{\text{جتا٢س}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\cancel{\text{٢}} \times \frac{\text{١}}{\cancel{\text{٢}}} \text{(جا٤س + جا٢س)}}{\text{جتا٢س}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{٢جا٢س جتا٢س + جا٢س}}{\text{جتا٢س}} \text{ دس}$

$= \int \text{٢جا٢س + ظا٢س دس}$

$= \text{− جتا٢س} - \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا٢س}| \text{ + جـ}$

ح) $\int \frac{\text{س + جاس}}{\text{١ + جتاس}} \text{ دس}$

$= \int \frac{\text{س}}{\text{١ + جتاس}} \text{ دس} + \int \frac{\text{جاس}}{\text{١+جتاس}} \text{ دس}$

⊛ $\int \frac{\text{س}}{\text{١+جتاس}} \text{ دس} = \int \frac{\text{س}}{\text{٢جتا}^{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٢}}} \text{ دس}$

$\int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س قا}^{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ دس}$

$\text{ع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س}$ $\text{دع} = \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{ دس}$

$\text{دهـ} = \text{قا}^{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ دس}$ $\text{هـ} = \text{٢ظا} \frac{\text{س}}{\text{٢}}$

$\int \frac{\text{١}}{\text{٢}} \text{س قا}^{\text{٢}} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ دس} = \text{س ظا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} - \int \text{ظا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} \text{ دس}$

$= \text{س ظا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٢لو}_{\text{هـ}} |\text{جتا} \frac{\text{س}}{\text{٢}}| \text{ + جـ}$

⊛ $\int \frac{\text{جاس}}{\text{١+جتاس}} \text{ دس} = -\text{لو}_{\text{هـ}}|\text{١+جتاس}|$

$\therefore \int \frac{\text{س + جاس}}{\text{١+جتاس}} \text{ دس} = \text{س ظا} \frac{\text{س}}{\text{٢}} + \text{٢لو}_{\text{هـ}}|\text{جتا}\frac{\text{س}}{\text{٢}}| - \text{لو}_{\text{هـ}}|\text{١+جتاس}|$
+ جـ

ط) $\int \frac{\text{٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{(س−١)}^{\text{٢}}} \text{ دس}$

$\text{ع} = \text{٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}$ $\text{دع} = \frac{\text{٤}}{\text{س}} \text{ دس}$

$\text{دهـ} = \text{(س−١)}^{\text{−٢}} \text{ دس}$ $\text{هـ} = \frac{\text{−١}}{\text{س−١}}$

$\int \frac{\text{٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{(س−١)}^{\text{٢}}} \text{ دس} = \frac{\text{−٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س−١}} + \int \frac{\text{٤}}{\text{س(س−١)}} \text{ دس}$

$= \frac{\text{−٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س−١}} + \int \frac{\text{−٤}}{\text{س}} \text{ دس} + \int \frac{\text{٤}}{\text{س−١}} \text{ دس}$

$= \frac{\text{−٤لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س−١}} + \text{−٤لو}_{\text{هـ}}|\text{س}| + \text{٤لو}_{\text{هـ}}|\text{س−١}| \text{ + جـ}$

ي) $\int \text{(قاس + ظاس)}^{\text{١٠}} \text{ قاس دس}$

$\text{ص} = \text{قاس + ظاس} \text{ ، } \text{دص} = \text{(قاس ظاس + قا}^{\text{٢}}\text{س) دس}$

$\int \text{ص}^{\text{١٠}} \frac{\text{دص}}{\text{ص}} = \int \text{ص}^{\text{٩}} \text{ دص}$

$= \frac{\text{ص}^{\text{١٠}}}{\text{١٠}} \text{ + جـ}$

$= \frac{\text{(قاس + ظاس)}^{\text{١٠}}}{\text{١٠}} \text{ + جـ}$

$\text{س}^{١٨}$)

١) $\int \text{د(س)}\,\text{دس} = \text{هـ}^{\text{جا٢س}} - \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جتاس} - ١$

$\text{د(س)} = ٢\,\text{جتا٢س}\;\text{هـ}^{\text{جا٢س}} + \frac{\text{جاس}}{\text{جتاس}}$

$\text{د(٠)} = ٢$ (د)

٢) $\int \text{د(س)}\,\text{دس} = \text{س}^{٥} + \text{جاس} + ٣$

$\text{د(س)} = ٥\text{س}^{٤} + \text{جتاس}$ (أ)

٣) $١ \leq \text{د(س)} \leq ٤ \longrightarrow ٢ \leq ٢\text{د(س)} \leq ٨$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{د(س)}\,\text{دس} \leq \int_{-١}^{٢} ٨\,\text{دس}$

$\int_{-١}^{٢} ٢\text{د(س)}\,\text{دس} \leq ٢٤$ (ب)

٤) $\int_{-٣}^{٣} ٢\text{د(س)}\,\text{دس} = ١٠$ ، $\int_{-٢}^{٣} \text{د(س)}\,\text{دس} = ٥$

$\int_{-٢}^{١} \text{د(س)}\,\text{دس} = ٤$

$\int_{١}^{٣} ٢\text{د(س)}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٣\,\text{دس}$

$= ٢\left(\int_{١}^{-٢} \text{د(س)}\,\text{دس} + \int_{-٢}^{٣} \text{د(س)}\,\text{دس}\right) + ٣(٣ - ١)$

$= ٢(-٤ + ٥) + ٦ = ٨$ (جـ)

٥) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د}'(\text{هـ(س)}) \times \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \text{هـ(س)}$ $\qquad \text{دص} = \text{هـ}'(\text{س})\,\text{دس}$

$\text{س} = \text{أ}$ $\quad \text{ص} = \text{هـ(أ)}$ ، $\text{س} = \text{ب}$ $\quad \text{ص} = \text{هـ(ب)}$

$\int_{\text{هـ(أ)}}^{\text{هـ(ب)}} \text{د}'(\text{ص})\,\text{دص} = \text{د(ص)}\Big]_{\text{هـ(أ)}}^{\text{هـ(ب)}}$

$= \text{د}(\text{هـ(ب)}) - \text{د}(\text{هـ(أ)})$ (جـ)

٦) $\int_{-١}^{٢} (\text{م(س)} - \text{هـ(س)})\,\text{دس} = ١٢$

$(\text{م(س)} - \text{هـ(س)})(٢ - -١) = ١٢ \Leftarrow \text{م(س)} - \text{هـ(س)} = ٤$

$\int_{-١}^{٢} ٨\text{س}\,\text{دس} = ٤\text{س}^{٢}\Big]_{-١}^{٢} = ١٦ - ٤ = ١٢$ (جـ)

٧) $\int_{١}^{\text{هـ}} \text{س}\,\text{د(س)}\,\text{دس} = ٤$ ، $\int_{٠}^{٢} \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{د}(\sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}})\,\text{دس}$

$\text{ص} = \sqrt{\text{هـ}^{\text{س}}}$ ، $\text{ص}^{٢} = \text{هـ}^{\text{س}}$ $\qquad ٢\text{ص}\,\text{دص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{دس}$

$\text{س} = ٠$ $\quad \text{ص} = ١$ $\qquad \text{س} = ٢$ $\quad \text{ص} = \text{هـ}$

$\int_{١}^{\text{هـ}} ٢\text{ص}\,\text{د(ص)}\,\text{دص} = ٢ \times ٤ = ٨$ (ب)

٨) $\text{د(س)} = \text{هـ}^{٢} + \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{جاس}$

$\text{د}'(\text{س}) = \frac{\text{جتاس}}{\text{جاس}} = \text{ظتاس}$ (أ)

٩) $\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} (\text{هـ(س)} - \text{د(س)})\,\text{دس} = ٦$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\,\text{دس} - ١٠ = ٦ \Leftarrow \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = ٦ + ١٠$

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{هـ(س)}\,\text{دس} = ١٦$ (جـ)

١٠) $\int_{-٢}^{٤} \text{د(س)}\,\text{دس} = \int_{-٢}^{٢} \text{د(س)}\,\text{دس} + \int_{٢}^{٣} \text{د(س)}\,\text{دس} + \int_{٣}^{٤} \text{د(س)}\,\text{دس}$

$= ٤٫٨ + -٫٨ + ٢ = ٦$ (ب)

١١) $\text{م} = \int_{٠}^{١} ٣\text{س} - \text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - \text{س} - \text{س}\,\text{دس}$

$= \int_{٠}^{١} ٢\text{س}\,\text{دس} + \int_{١}^{٢} ٤ - ٢\text{س}\,\text{دس}$

(ب)

رقم الفرع	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١
رمز الإجابة	د	أ	ب	جـ	جـ	جـ	ب	أ	جـ	ب	ب

إدارة المناهج والكتب المدرسية

إجابات وحلول أسئلة الرياضيات

الصف: الثاني عشر (العلمي).

الوحدة الخامسة: القطوع المخروطية وتطبيقاتها.

الفصل الأول: القطوع المخروطية:

أولاً: القطع المخروطي:

س١ الشكل (٥-٣):

أ) قطع زائد ب) قطع ناقص جـ) دائرة د) قطع مكافئ

س٢ أ) قطع زائد ب) دائرة جـ) قطع مكافئ د) قطع ناقص

ثانياً: الحل الهندسي:

تدريب (١): الحل الهندسي للنقطة المتحركة في المستوى هو دائرة مركزها النقطة ل (٢، -٤)، ونصف قطرها = ١ وحدة.

∴ معادلة الحل الهندسي = معادلة الدائرة

$$\Leftarrow (\text{ص} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = (١)^{٢}$$

$$\Leftarrow (\text{س} - ٢)^{٢} + (\text{ص} + ٤)^{٢} = ١$$

تدريب (٢): الحل الهندسي الناتج هو خط مستقيم، ولإيجاد معادلته:

البعد = $\sqrt{٥}$

م: ص + ٢س = ٠

النقطة (س، ص)

$$\text{البعد} = \left|\frac{\text{أ س}_{١} + \text{ب ص}_{١} + \text{جـ}}{\sqrt{\text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}}}\right|$$

$$\sqrt{٥} = \left|\frac{٢ \times \text{س} + ١ \times \text{ص} + ٠}{\sqrt{(٢)^{٢} + (١)^{٢}}}\right| = \frac{|٢\text{س} + \text{ص}|}{\sqrt{٥}}$$

$$٥ = |٢\text{س} + \text{ص}|$$

$$\therefore ٢\text{س} + \text{ص} = ٥$$

$$\text{أو } ٢\text{س} + \text{ص} = -٥$$

وبما أن النقطة المتحركة تمر أثناء حركتها بالنقطة (-١، -٣) فإن معادلة المستقيم هي $٢\text{س} + \text{ص} = -٥$

تابع المحل الهندسي :

تدريب (٣) : معادلة المحل الهندسي هي :

$$٣\times\sqrt{(س-٢)^٢+(ص+١)^٢} = \left|\frac{س}{\sqrt{١}}\right|$$

(محور الصادات معادلته س = ٠)

$$٩\times\left((س-٢)^٢+(ص+١)^٢\right) = (|س|)^٢$$

$$٩\left(س^٢-٤س+٤+ص^٢+٢ص+١\right) = س^٢$$

$$٨س^٢+٩ص^٢-٣٦س+١٨ص+٤٥ = ٠$$

★ تمارين ومسائل المحل الهندسي :

س١ معادلة المحل الهندسي هي : $(س+٢)^٢+(ص-٦)^٢ = (٧)^٢$

س٢ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\text{البعد} = ٤ = \left|\frac{س-١}{\sqrt{(١)^٢+(٠)^٢}}\right| \Rightarrow ٤ = |س-١| \Rightarrow س = ٥$$ تهمل

أو $\boxed{س = -٣}$ لذا النقطة (−٣، ٢) تقع عليه.

س٣ معادلة المحل الهندسي هي :

$$\sqrt{(س-٥)^٢+(ص-٣)^٢} = ٢\left|\frac{ص-٤}{\sqrt{٠+(١)^٢}}\right|$$ وبتربيع الطرفين

$$(س-٥)^٢+(ص-٣)^٢ = ٤\,(ص-٤)^٢$$

$$س^٢-١٠س+٢٥+ص^٢-٦ص+٩ = ٤ص^٢-٣٢ص+٦٤$$

$$س^٢-٣ص^٢-١٠س+٣٦ص-٣٠ = ٠$$

س٤ بعد النقطة عن المستقيم = ٣ وحدات ، معادلة المستقيم $٣س+٤ص-٥=٠$ ، النقطة تمر بمركز الدائرة ∴ (٤، ٢) تقع على المحل الهندسي

∴ معادلة المحل هي

$$\text{البعد} = ٣ = \left|\frac{٣س+٤ص-٥}{\sqrt{(٣)^٢+(٤)^٢}}\right|$$

$$٣ = \frac{|٣س+٤ص-٥|}{٥} \Rightarrow |٣س+٤ص-٥| = ١٥$$

∴ $٣س+٤ص-٥ = -١٥ \Rightarrow ٣س+٤ص = -١٠$

أو $٣س+٤ص-٥ = ١٥ \Rightarrow ٣س+٤ص = ٢٠$

لكن النقطة (٤، ٢) تقع على منحنى المستقيم الذي معادلته $٣س+٤ص=٢٠$

∴ معادلة المحل الهندسي هي $\boxed{٣س+٤ص=٢٠}$

الفصل الثاني : معادلات القطوع المخروطية :

أولاً : الدائرة :

تدريب ١ : ١) معادلة الدائرة التي نهايتا قطرها النقطتان (٧، ٣) ، (٥، -١)

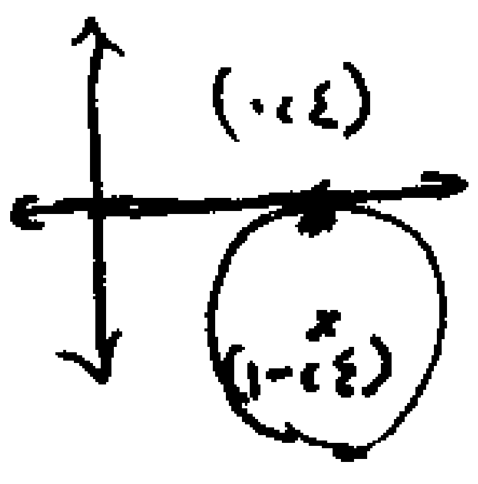
نجد إحداثيات المركز = $\left(\frac{٧+٥}{٢} ، \frac{٣+-١}{٢}\right) = (٦ ، ١)$ إحداثيات منتصف قطعة $\left(\frac{س_١+س_٢}{٢} ، \frac{ص_١+ص_٢}{٢}\right)$

نجد قطر الدائرة = $\sqrt{(٧-٥)^٢+(٣--١)^٢} = \sqrt{٤+١٦} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$ وحدة طول ⇐ نق = $\sqrt{٥}$ وحدة

∴ معادلة الدائرة هي $(س - ٦)^٢ + (ص - ١)^٢ = ٥$

تدريب ١ : ٢) معادلة الدائرة على الصورة القياسية :

∴ مركز الدائرة هو (-١، ٤) ، نق = $\sqrt{٣٠}$ وحدة



تدريب ٢ : بما أن الدائرة تمس محور السينات ، فإن نقطة التماس (٤، ٠) ، وبما أن المركز (٤، -١)

نجد نق = $\sqrt{(٤-٤)^٢ + (٠ - -١)^٢} = ١$ وحدة

∴ المعادلة $(س - ٤)^٢ + ص^٢ = ١$ ——— وهي الصورة القياسية لمعادلة الدائرة .

تدريب ٣ :

أ) المركز (٤، -١) ، وتمس المستقيم ص = -٢ ،

نجد نق = البعد بين نقطة ومستقيم = $\left|\frac{أ س_١ + ب ص_١ + جـ}{\sqrt{(أ)^٢+(ب)^٢}}\right|$ حيث $\overset{س_١}{٤} ، \overset{ص_١}{-١}$

= $\left|\frac{\cancel{٠×٤} + ١×-١ + ٢}{\sqrt{(٠)^٢+(١)^٢}}\right| = \frac{١}{١} = ١$ وحدة طول

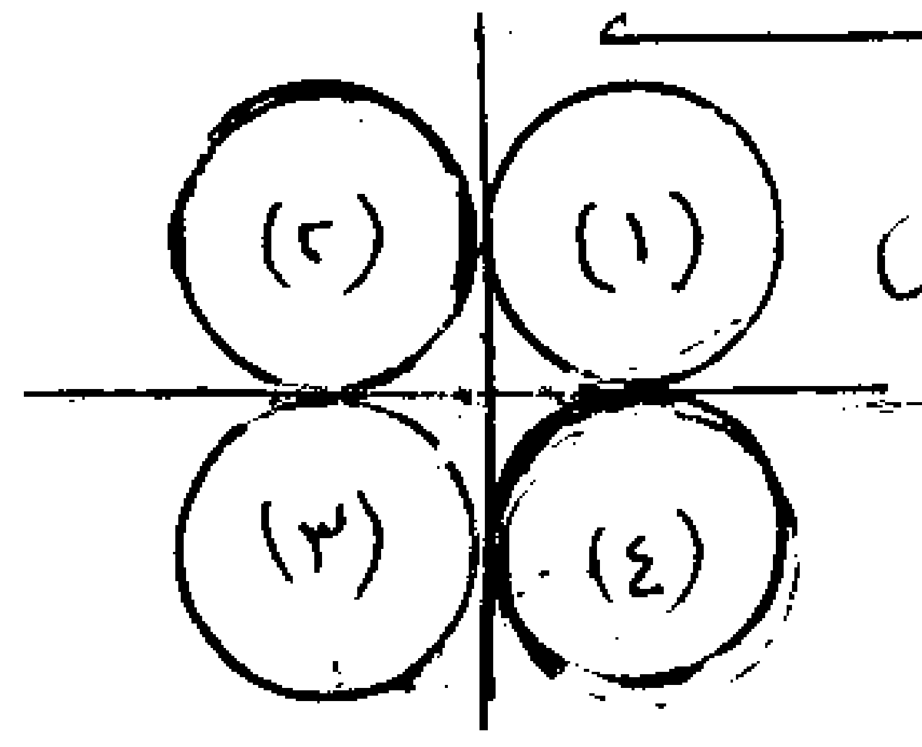
أ = ٠ = معامل س في المستقيم

ب = ١ = معامل ص

جـ = ٢ = الحد الثابت لأن المعادلة ص + ٢ = ٠

∴ معادلة الدائرة هي : $(س - ٤)^٢ + (ص + ١)^٢ = ١$

تدريب ٣ ب) بما أن الدائرة تمس المحورين ، ونصف قطرها = ٣ وحدات ، لاحظ الشكل



(١) الحل الأول: الدائرة تقع في الربع الأول ⇐ مركزها (٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي: $(س - ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

(٢) الحل الثاني : الدائرة تقع في الربع الثاني ⇐ المركز (-٣، ٣) ، نق = ٣

∴ المعادلة هي : $(س + ٣)^٢ + (ص - ٣)^٢ = ٩$

(٣) الحل الثالث : الدائرة تقع في الربع الثالث ⇐ معادلة الدائرة $(س + ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٩$

(٤) الحل الرابع : الدائرة تقع في الربع الرابع ⇐ معادلة الدائرة $(س - ٣)^٢ + (ص + ٣)^٢ = ٩$.

تدريب٤ : ١) بما أن المعادلة على الصورة العامة ، فإن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص)

∴ إحداثيا المركز = $\left(-\frac{(-٢)}{٢} ، -\frac{(٦)}{٢}\right) = (١ ، -٣)$

د = ١
هـ = −٣
جـ = الحد الثابت = −٦

طول نصف القطر = $\sqrt{(د)^٢ + (هـ)^٢ - جـ} = \sqrt{(١)^٢ + (-٣)^٢ - (-٦)}$

$= \sqrt{١+٩+٦} = \sqrt{١٦} = ٤$ وحدة طول

حل آخر: يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية بإكمال مربع ثم إيجاد المركز و نصف القطر.

تدريب٤: ٢) $(٣س+٦)^٢ + (٣ص-١٢)^٢ = ٣٦$

يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة القياسية على الصورة $(س-د)^٢ + (ص-هـ)^٢ = نق^٢$

$\left(\frac{٣س}{٣}+\frac{٦}{٣}\right)^٢ + \left(\frac{٣ص}{٣}-\frac{١٢}{٣}\right)^٢ = \frac{٣٦}{(٣)^٢}$ بالقسمة على ٣ ، ولاحظ أنه داخل $(\ )^٢$

ومنه $(س+٢)^٢ + (ص-٤)^٢ = ٤$.

∴ المركز (−٢، ٤) ، نق = ٢ وحدة طول.

تدريب (٥) : الصورة العامة لمعادلة الدائرة $س^٢+ص^٢+أس+ب ص+جـ=٠$ ، فنعوض النقاط الثلاثة

$(٠،٠) \Leftarrow \boxed{جـ=٠}$

$(٠،٢) \Leftarrow \cancel{٠}^٢+(٢)^٢+أ\times\cancel{٠}+ب\times٢+\cancel{جـ}=٠ \Leftarrow ٢ب+٤=٠ \Leftarrow \boxed{ب=-٢}$

$(-١،٣) \Leftarrow (-١)^٢+(٣)^٢+أ\times-١+ب\times٣+\cancel{جـ}=٠ \Leftarrow ١٠-أ+٣ب=٠$

$١٠-أ-٦=٠ \Leftarrow \boxed{أ=٤}$

∴ معادلة الدائرة $\boxed{س^٢+ص^٢+٤س-٢ص=٠}$

إحداثيا مركز الدائرة = $\left(-\frac{معامل\ س}{٢} ، -\frac{معامل\ ص}{٢}\right) = \left(-\frac{٤}{٢} ، -\frac{(-٢)}{٢}\right) = (-٢ ، ١)$

نق = $\sqrt{د^٢+هـ^٢-جـ} = \sqrt{(-٢)^٢+(١)^٢-٠} = \sqrt{٥}$ وحدة طول.

تدريب (٦) : بما أن الصورة العامة لمعادلة الدائرة هي :

$س^٢+ص^٢+أس+ب ص+جـ=٠$ ، مركزها على محور الصادات ⇐ إحداثياته $\left(٠ ، -\frac{ب}{٢}\right)$

وبما أن النقاط (−١، ٣) ، (٥، ١) تقع على الدائرة ، فإنها تحقق معادلتها ، ومنه

$-أ+٣ب+جـ=-١٠$ —— ①

$٥أ+ب+جـ=-٢٦$ —— ②

وبما أن المركز = (− نصف معامل س ، − نصف معامل ص) = $\left(-\frac{أ}{٢} ، -\frac{ب}{٢}\right) = \left(٠ ، -\frac{ب}{٢}\right)$

∴ $\boxed{أ=٠}$

وبحل نظام المعادلتين ① ، ② نجد أن $\boxed{ب=٨}$ ، $\boxed{جـ=-٣٤}$

∴ الصورة النهائية لمعادلة الدائرة هي : $\boxed{س^٢+ص^٢+٨ص-٣٤=٠}$

ملاحظة : يمكن حل السؤال على المسافة بين نقطتين. $س^٢+(ص-هـ)^٢=ر^٢$ ، المركز (٠، −٤)
ر = $٥\sqrt{٢}$ وحدة طول

٥

تمارين ومسائل الدائرة :-

س١ أ) معادلة الدائرة س^{٢} + ص^{٢} = (٨)^{٢}

ب) معادلة الدائرة (س + ٢)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ٤٩   لأن نق = $\sqrt{(٥ - -٢)^{٢} + (١ - ١)^{٢}}$ = ٧ وحدة طول

جـ) معادلة الدائرة (س − ٣)^{٢} + (ص + ٧)^{٢} = ٤٩   لأن نق = البعد بين المركز والمماس = |−٧| = ٧ وحدة طول

د) معادلة الدائرة (س − ٥)^{٢} + (ص − ١)^{٢} = ($\sqrt{٥}$)^{٢} لأن المركز = ($\frac{٦+٤}{٢}$ ، $\frac{-١+٣}{٢}$) = (٥ ، ١)

نق = $\sqrt{(٦ - ٥)^{٢} + (-١ - ١)^{٢}}$ = $\sqrt{٥}$ وحدة طول

هـ) معادلة الدائرة (س − ٥)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = (٥)^{٢} لأن الدائرة تقع في الربع الرابع وتمس المحورين فإن المركز (٥ ، −٥)

و) الدائرة يقع مركزها على محور السينات ⇐ المركز ($\frac{-أ}{٢}$ ، ٠) ⇐ $\boxed{ب = ٠}$

تمر بالنقطة (٠ ، −٢) ⇐ $\boxed{جـ = -٤}$

تمر بالنقطة (٤ ، ٤) ⇐ ٤أ + جـ = −٣٢ ⇐ $\boxed{أ = -٧}$

∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} - ٧س - ٤ = ٠}$

ز) تمر بالنقاط (−٥ ، ٠) ، (−٣ ، ٤) ، (١ ، ٢) فنكون نظامًا من ثلاث معادلات بثلاث متغيرات ونحله

النظام : −٥أ + جـ = −٢٥ — ①

−٣أ + ٤ب + جـ = −٢٥ — ②

أ + ٢ب + جـ = −٥ — ③

ومن الحل نجد أن أ = ٤

ب = −٢

جـ = −٥

∴ المعادلة هي : $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} + ٤س - ٢ص - ٥ = ٠}$

ح) الدائرة تمس محور السينات عند النقطة (٧ ، ٠) ⇐ مركز الدائرة = ($\frac{-أ}{٢}$ ، $\frac{-ب}{٢}$) = (٧ ، $\frac{-ب}{٢}$) ⇐ $\boxed{أ = -١٤}$

وتمس النقطة (٧ ، ٠) ⇐ $\boxed{جـ = ٤٩}$

وتمر بالنقطة (١ ، ٢) ⇐ $\boxed{ب = -٢٠}$

∴ معادلة الدائرة هي $\boxed{س^{٢} + ص^{٢} - ١٤س - ٢٠ص + ٤٩ = ٠}$

س٢ أ) المركز (٠ ، ٠) ، نق = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ وحدة طول

س٢ ب) نكتب المعادلة على الصورة القياسية (س + ١١)^{٢} + (ص + ٤)^{٢} = ١٣ ⇐ المركز (−١١ ، −٤) ، نق = $\sqrt{١٣}$ وحدة طول.

س٢ جـ) المركز (٠ ، ٧) ، نق = $\sqrt{٨١}$ = ٩ وحدة طول.

س٢ د) نكتب المعادلة على الصورة العامة س^{٢} + ص^{٢} − ٨س − ٦ص − ٩ = ٠

المركز ($\frac{+٨}{٢}$ ، $\frac{+٦}{٢}$) = (٤ ، ٣)

نق = $\sqrt{(٤)^{٢} + (٣)^{٢} - -٩}$ = $\sqrt{١٦+٩+٩}$ = $\sqrt{٣٤}$ وحدة طول.

تابع الدائرة:

ح٣ هـ) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

٣ س^{٢} + ٣ ص^{٢} + ٦ ص − ٢٧ = ٠ نقسم على ٣

س^{٢} + ص^{٢} + ٢ ص − ٩ = ٠

المركز (٠، −١) ، نق = $\sqrt{(٠)^{٢} + (-١)^{٢} - -٩}$ = $\sqrt{١٠}$ وحدة طول .

و) $(\frac{٢}{٢}س - \frac{٢}{٢})^{٢} + (\frac{٢ص}{٢} + \frac{١٠}{٢})^{٢} = \frac{١٠٠}{(٢)^{٢}}$

(س − ١)^{٢} + (ص + ٥)^{٢} = ٢٥ ⇐ المركز (١، −٥) ، نق = ٥ وحدة طول .

ز) نكتب المعادلة على الصورة القياسية:

(س + ٤)^{٢} + ص^{٢} = ١٦ ⇐ المركز (−٤، ٠) ، نق = ٤ وحدة طول .

ح٤ مركزها يقع على المستقيم ص − ٢س = ٤ وتمس محور السينات عند النقطة (١، ٠)

المركز (د، هـ) = (١، هـ)

وبما أن المركز يقع على المستقيم ص − ٢س = ٤ ⇐ تحقق معادلته ⇐ هـ − ٢×١ = ٤ ⇐ هـ = ٦

∴ إحداثيا المركز (١، ٦)

نق = المسافة بين (١، ٦) ، (١، ٠) = ٦ وحدات

∴ معادلة الدائرة هي (س − ١)^{٢} + (ص − ٦)^{٢} = ٣٦

ح٥ مركز الدائرة = (−٢، −٣) ، نق = البعد بين المركز والمماس الذي معادلته ٣س − ص + ١٠ = ٠ .

نق = $\left|\frac{٣×-٢ - ١×(-٣) + ١٠}{\sqrt{(٣)^{٢} + (-١)^{٢}}}\right| = \left|\frac{-٦ + ٣ + ١٠}{\sqrt{١٠}}\right| = \frac{٦}{\sqrt{١٠}}$ وحدة طول

∴ معادلة الدائرة هي : (س + ٢)^{٢} + (ص + ٣)^{٢} = $\frac{٣٦}{١٠}$

تابع الدائرة :

٥س بما أن س = ٣ + ٢ جاهـ ⇐ جاهـ = $\frac{\text{س}-٣}{٢}$ —— ①

ص = ٤ + ٢ جتاهـ ⇐ جتاهـ = $\frac{\text{ص}-٤}{٢}$ —— ②

لكن جا^{٢}هـ + جتا^{٢}هـ = ١ (متطابقة مثلثية)

∴ $\left(\frac{\text{س}-٣}{٢}\right)^{٢}+\left(\frac{\text{ص}-٤}{٢}\right)^{٢}=١$ ⇐ $(\text{س}-٣)^{٢}+(\text{ص}-٤)^{٢}=٤$ وهي معادلة الحل الهندسي

∴ الحل الهندسي هو دائرة مركزها (٣، ٤)، وطول نصف قطرها = ٢ وحدة .

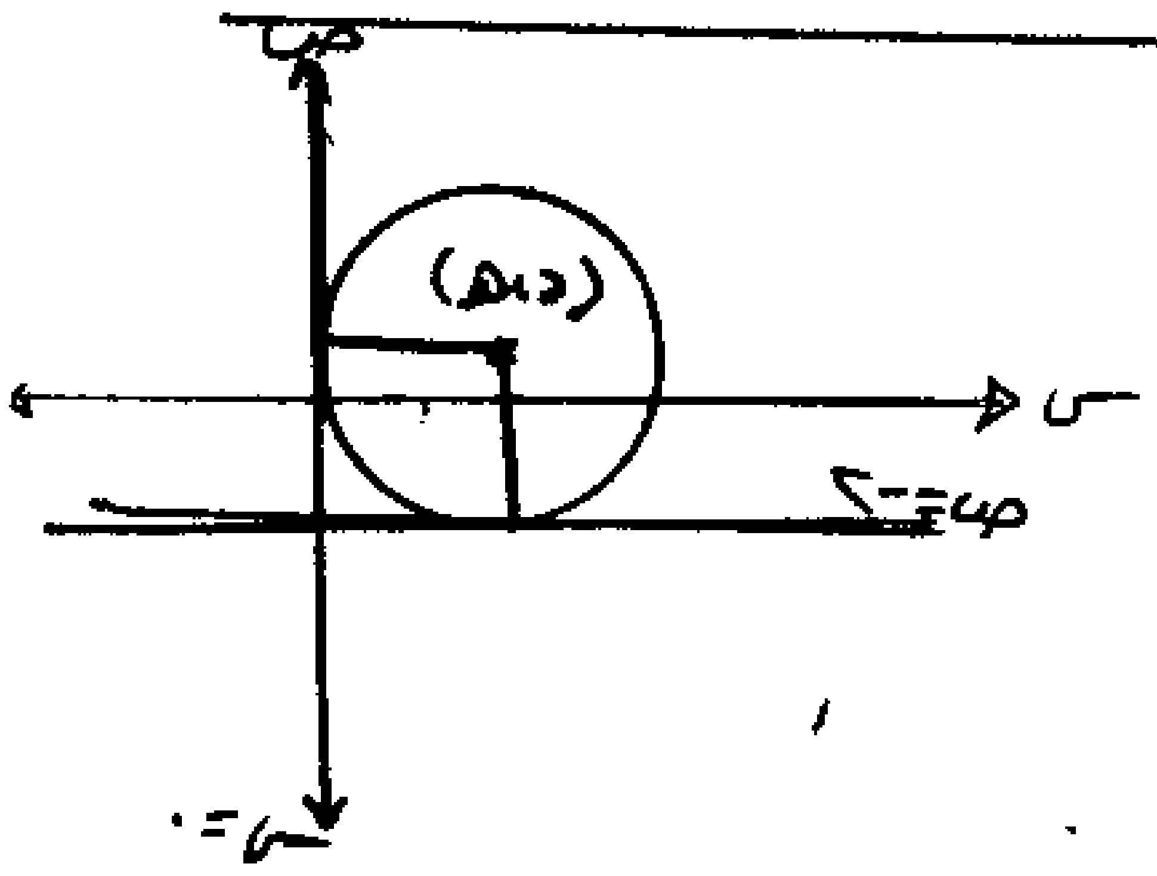
٦س بما أن س^{٢} + ص^{٢} + ٨س − ٤ص + جـ = ٠ معادلة دائرة فإن $\left(\frac{-\text{أ}}{٢}\right)^{٢}+\left(\frac{-\text{ب}}{٢}\right)^{٢}-\text{جـ}>$ صفر

مركز الدائرة (−٤، ٢)   أ = ٨ ← $\frac{-\text{أ}}{٢}=-٤$

ب = −٤ ← $\frac{-\text{ب}}{٢}=٢$

∴ $(-٤)^{٢}+(٢)^{٢}-\text{جـ}>٠$

١٦ + ٤ > جـ ⇐ ٢٠ > جـ ⇐ قيم جـ = (−∞، ٢٠)



٧س معادلة الدائرة هي $(\text{س}-\text{د})^{٢}+(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}=\text{ر}^{٢}$

د = ر ⇐ هـ = ر − ٢

∴ $(\text{س}-\text{ر})^{٢}+(\text{ص}-\text{ر}+٢)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

بما أن (٤، ٠) تقع على الدائرة ⇐ $(٤-\text{ر})^{٢}+(-\text{ر}+٢)^{٢}=\text{ر}^{٢}$

ومنه ر^{٢} − ١٢ر + ٢٠ = ٠ ⇐ (ر − ١٠)(ر − ٢) = ٠

∴ ر = ١٠ أو ر = ٢ ترفض

عندما ر = ١٠ ⇐ المركز (١٠، ٨) ⇐ معادلة الدائرة $(\text{س}-١٠)^{٢}+(\text{ص}-٨)^{٢}=١٠٠$

٨س الدائرة تمس المحورين، ∴ المركز (د، د)

بعد الدائرة عن المستقيم أجـ = هـ

نجد معادلة $\overleftrightarrow{\text{أجـ}}$ ⇐ ص = −س + ٤ ⇐ س + ص − ٤ = ٠

البعد = د = $\left|\frac{\text{د}+\text{د}-٤}{\sqrt{(١)^{٢}+(١)^{٢}}}\right|=\left|\frac{٢\text{د}-٤}{\sqrt{٢}}\right|$

∴ $\sqrt{٢}\,\text{د}=|٢\text{د}-٤|$ وبتربيع الطرفين

$(\sqrt{٢}\,\text{د})^{٢}=(٢\text{د}-٤)^{٢}$ ⇐ ٢د^{٢} = ٤د^{٢} − ١٦د + ١٦ ⇐ ٢د^{٢} − ١٦د + ١٦ = ٠ ← د^{٢} − ٨د + ٨ = ٠

∴ نعوض د = $\frac{٨\mp\sqrt{(-٨)^{٢}-٤\times١\times٨}}{٢}$ → ٤ + ٢$\sqrt{٢}$ تهمل لأن نق < ٤ حسب الشكل المعطى

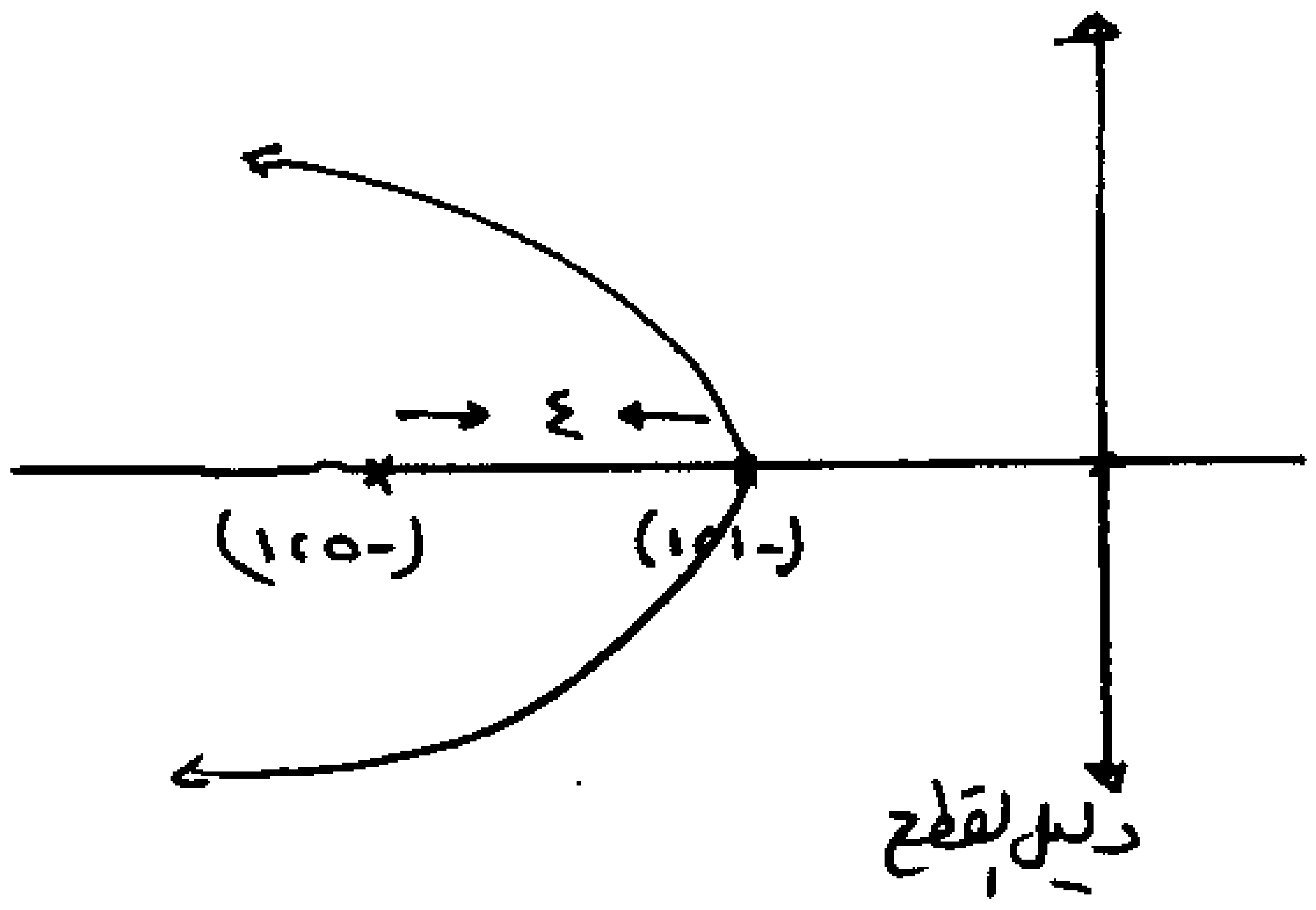
٤ − ٢$\sqrt{٢}$

∴ معادلة الدائرة هي :

$(\text{س}-٤+٢\sqrt{٢})^{٢}+(\text{ص}-٤+٢\sqrt{٢})^{٢}=(٤-٢\sqrt{٢})^{٢}$

ثانيًا : القطع المكافئ :

تدريب ١ : ١) رأس القطع المكافئ (−١، ١) ، بؤرته النقطة (−٥، ١) .



نلاحظ أن القطع مفتوح نحو اليسار

∴ معادلة القطع هي (ص − هـ)^2 = −٤ ج (س − د)

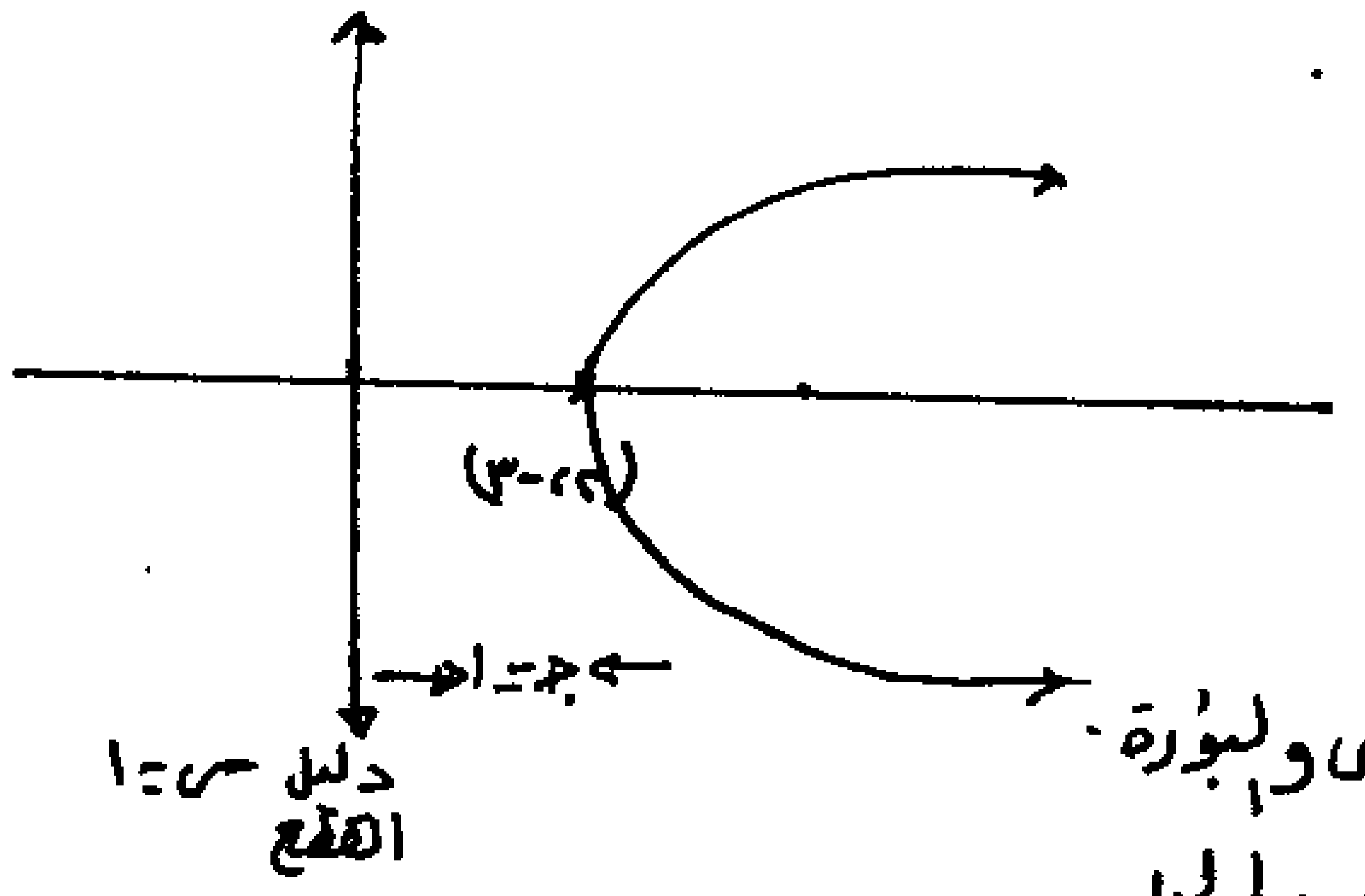
وحيث أن الرأس (د، هـ) = (−١، ١)

وبعد الرأس عن البؤرة = ج = ٤ وحدات

∴ المعادلة (ص − ١)^2 = −٤×٤ (س + ١)

(ص − ١)^2 = −١٦ (س + ١)

تدريب ١ : ٢) رأس القطع المكافئ (٢، −٣) ، معادلة دليله س = ١ .



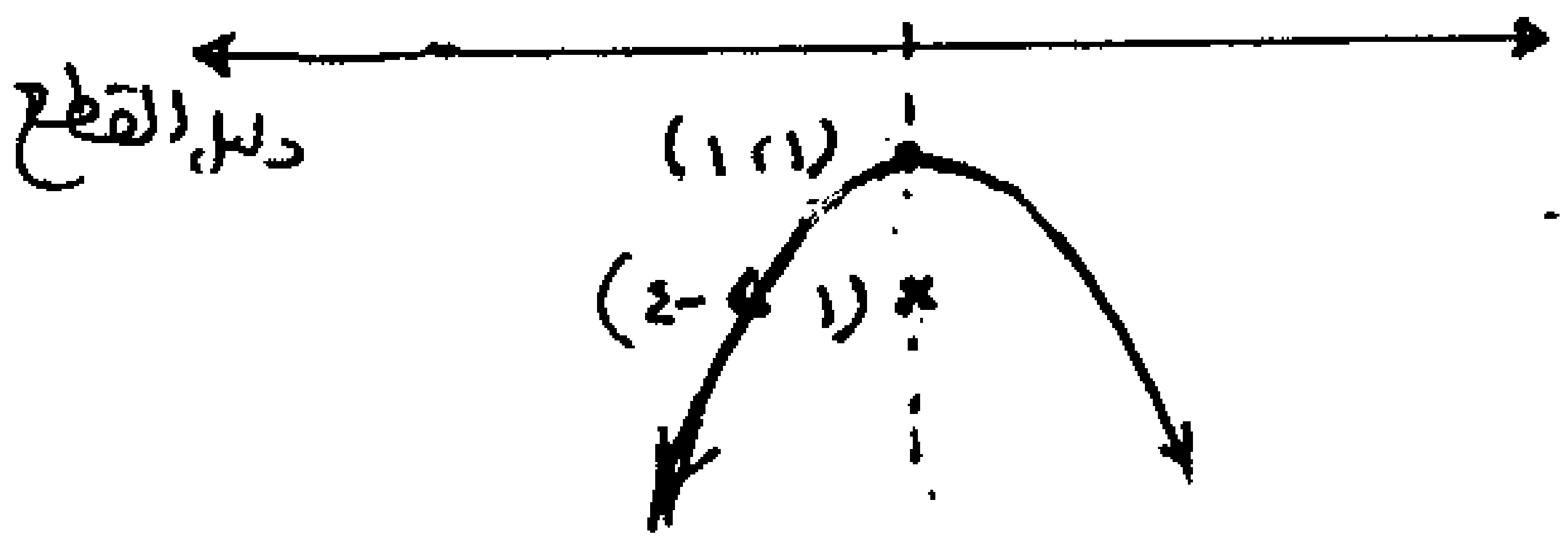
معادلة القطع المكافئ هي :

(ص + ٣)^2 = ٤×١ (س − ٢)

(ص + ٣)^2 = ٤ (س − ٢) حيث ج = البعد بين الرأس والبؤرة .

= البعد بين الرأس والدليل .

تدريب ٢ : ١) بما أن البؤرة تقع أسفل الرأس ⟸ القطع مفتوح للأسفل ، و ج = البعد بين الرأس والبؤرة = ٥ وحدات



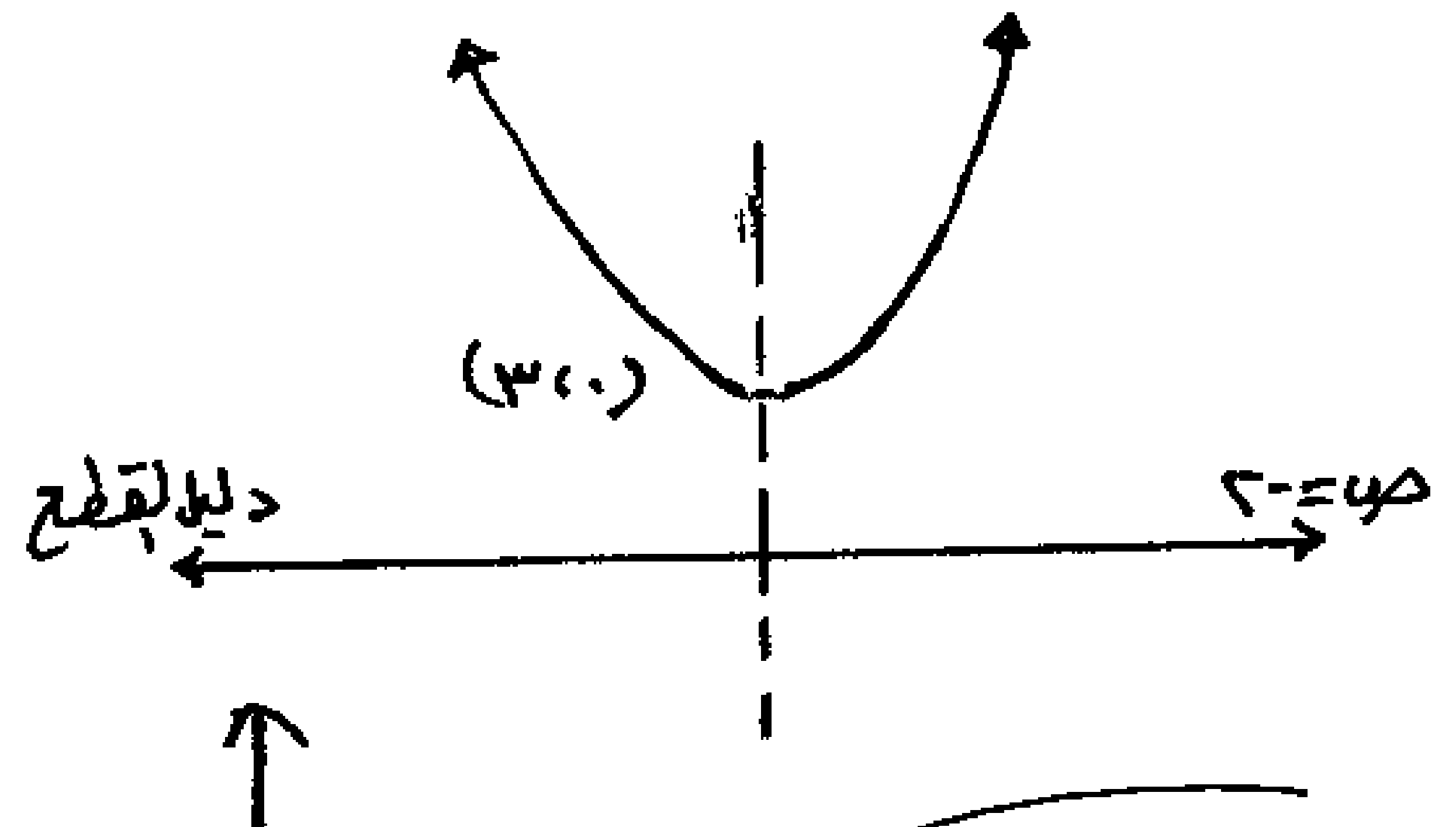
∴ معادلة القطع المكافئ هي :

(س − ١)^2 = −٤×٥ (ص − ١)^2

(س − ١)^2 = −٢٠ (ص − ١)^2

٢) الرأس (٠، ٣) ، ومعادلة دليله ص + ٢ = ٠ ⟵ ص = −٢

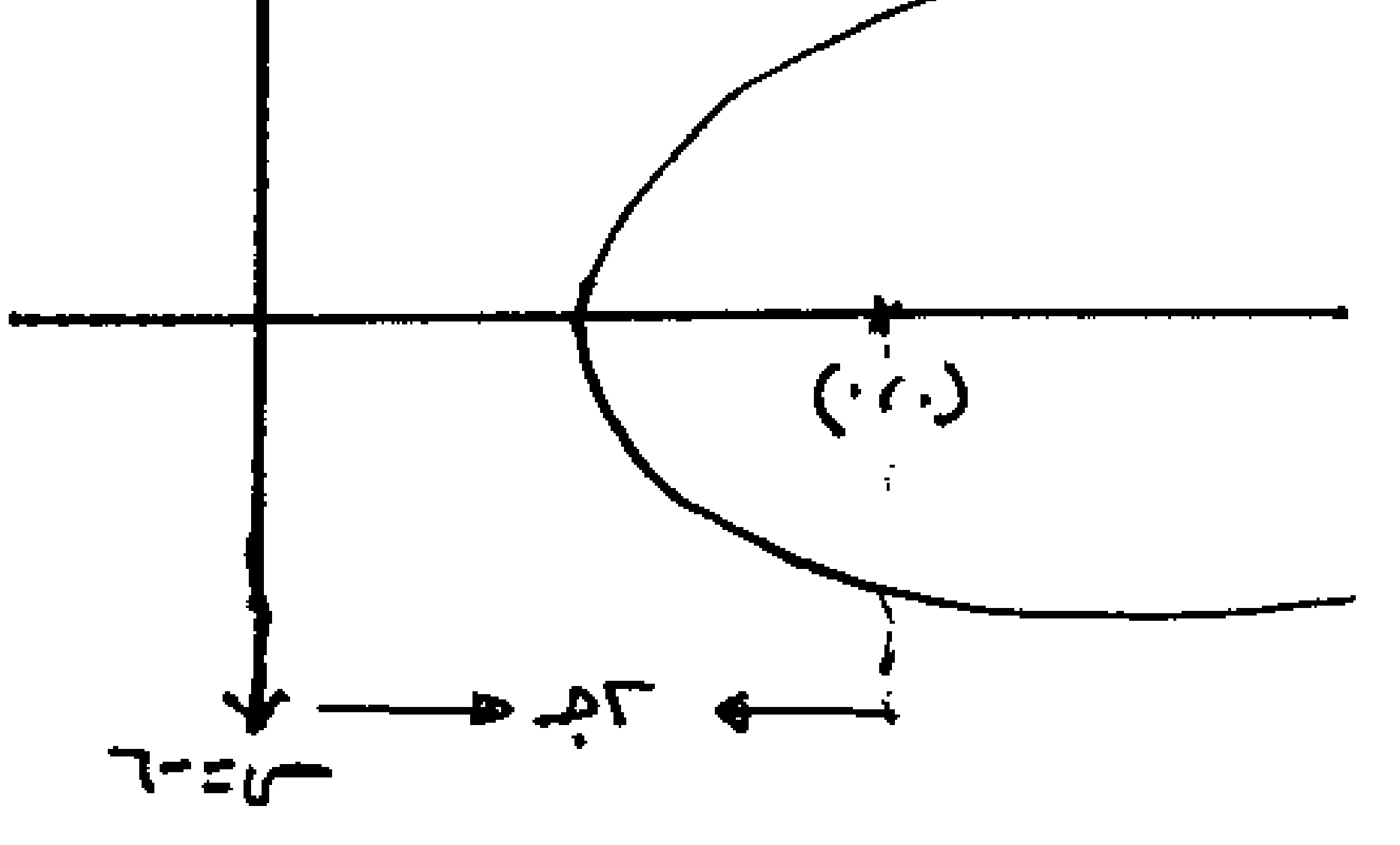
معادلة القطع المكافئ هي :



(س − ٠)^2 = ٤×٥ (ص − ٣) القطع مفتوح نحو الأعلى و ج = ٥

س^2 = ٢٠ (ص − ٣)

٣) بؤرته (٠، ٠) ومعادلة دليله س = −٦

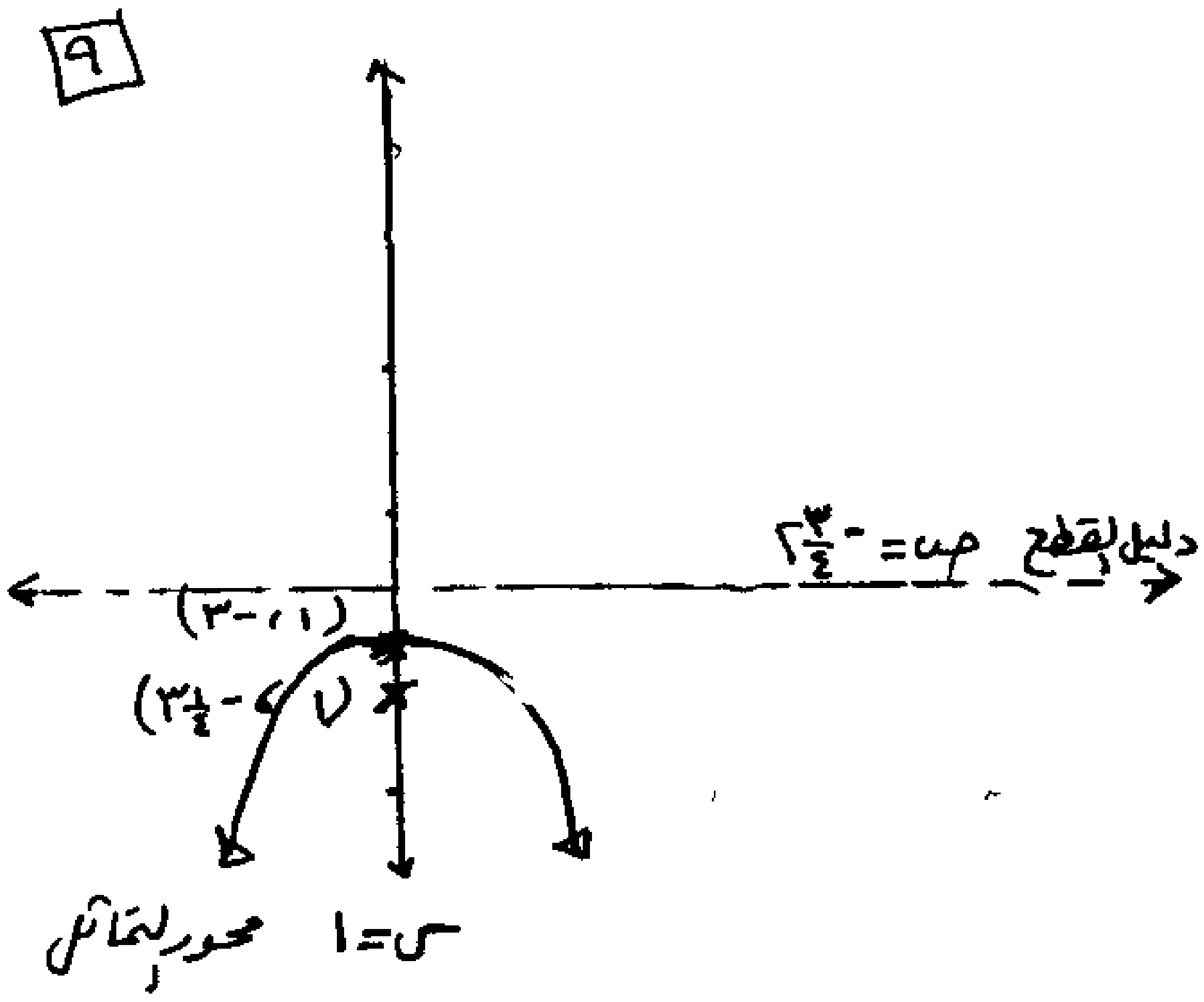


∴ معادلة القطع المكافئ هي : القطع مفتوح نحو اليمين و ج = ٣

ص^2 = ٤×٣ س

ص^2 = ١٢ س

تابع / القطع المكافئ :



تدريب ٣ : نكتب المعادلة على الصورة القياسية :

$$(س - ١)^{٢} = -(ص + ٣)$$

ومنه نجد أنه القطع مفتوح نحو الأسفل

إحداثيات الرأس = (١ ، -٣) ، جـ = $\frac{١}{٤}$

∴ إحداثيات البؤرة = (١ ، -٣$\frac{١}{٤}$)

معادلة الدليل هي : ص = -٣ + $\frac{١}{٤}$ = -٢$\frac{٣}{٤}$

معادلة محور التماثل هي : س = ١

تدريب ٤ : نكتب معادلة القطع على الصورة القياسية

$س^{٢} = ٤(ص - ١)$ فيكون منحنى القطع مفتوحاً نحو الأعلى (جـ = ١

- الرأس (٠ ، ١) ، البؤرة (٠ ، ٢)

معادلة الدليل هي : ص = ٠

معادلة محور التماثل هي س = ٠

تدريب ٥ : بما أن محور القطع معادلته س = -٢ ⟸ الرأس (-٢ ، هـ)

∴ معادلة القطع المكافئ هي :

$$(س + ٢)^{٢} = ٤ جـ (ص - هـ)$$

النقطة (٠ ، ٠) تقع على المنحنى ⟸ $\boxed{جـ × هـ = -١}$

النقطة (١ ، ٣) تقع على المنحنى ⟸ ٩ = ١٢جـ + ٤ ⟸ جـ = $\frac{٥}{١٢}$ ، هـ = $-\frac{١٢}{٥}$

∴ المعادلة هي : $(س + ٢)^{٢} = \frac{٥}{٣}(ص + \frac{١٢}{٥})$

حل أ) $ص^{٢} = -١٦(س + ١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليسار .

ب) $ص^{٢} = ١٦(س + ١)$ حيث جـ = ٤ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو اليمين .

جـ) $(س - ٢)^{٢} = ٢٠(ص - ٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأعلى .

د) $(س - ٢)^{٢} = -٢٠(ص - ٣)$ حيث جـ = ٥ ، ومنحنى القطع مفتوح نحو الأسفل .

هـ) $(س - ١)^{٢} = ٦(ص + \frac{٣}{٢})$ حيث ٢جـ = البعد بين البؤرة والدليل = ٣ ⟸ جـ = $\frac{٣}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو الأعلى .

و) $ص^{٢} = -١٠ س$ حيث ٢جـ = ٥ ⟸ جـ = $\frac{٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليسار .

ز) $(ص + ٥)^{٢} = ١٫٥(س - ١٫٦٢٥)$ حيث ٢جـ = ٠٫٧٥ ⟸ جـ = $\frac{٠٫٧٥}{٢}$ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين
ورأسه (١٫٦٢٥ ، -٥)

ح) $(ص + ٣)^{٢} = ١٢(س - ٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو اليمين .

ط) $(س + ١)^{٢} = -١٢(ص - ٢)$ حيث جـ = ٣ ، والمنحنى مفتوح نحو الأسفل .

القطع الناقص

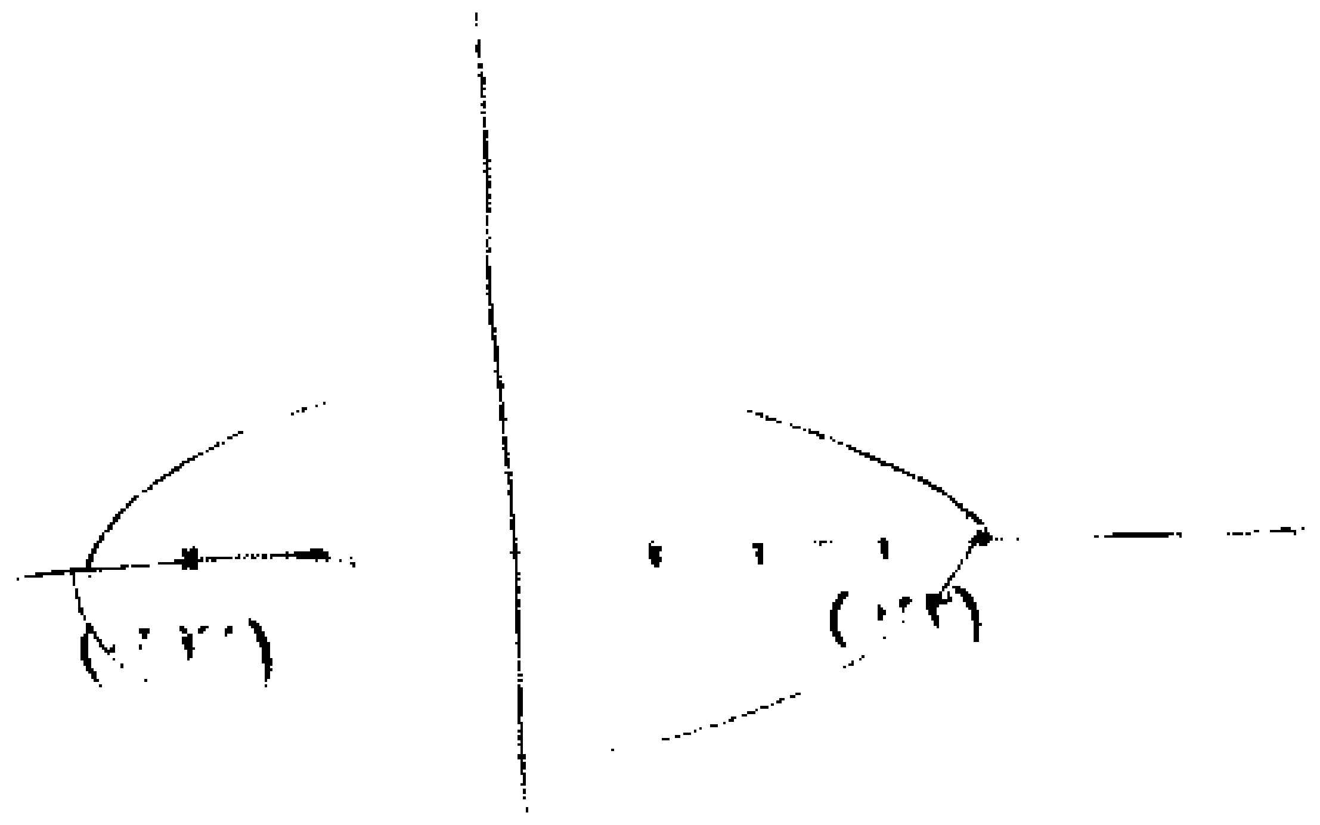
ث(١) المركز (٠،٠) محوره الأصغر // محور الصادات ، ب٢ = ٤ ⇐ ب = ٢

إحدى بؤرتيه (-٣، ٠)

س٢ / أ٢ + ص٢ / ب٢ = ١ ، (-٣، ٠) = (٠ - جـ، ٠) ⇐ جـ = ٣

جـ٢ = أ٢ - ب٢

٩ = أ٢ - ٤ ⇐ أ٢ = ١٣



∴ س٢ / ١٣ + ص٢ / ٤ = ١

ث(٢) قطع ناقص بؤرتاه (-٢، ٣)، (-٢، ٩) ⇐ المركز = (-٢، ٦)

∴ (ص - هـ)٢ / أ٢ + (س - د)٢ / ب٢ = ١ ⇐ (ص - ٦)٢ / أ٢ + (س + ٢)٢ / ب٢ = ١

طول المحور الأكبر = ١٢ ⇐ ٢أ = ١٢ ⇐ أ = ٦

البؤرتان (د، هـ ± جـ) ⇐ (د، هـ - جـ) = (-٢، ٣) ⇐ هـ - جـ = ٣

(د، هـ + جـ) = (-٢، ٩)   هـ + جـ = ٩

هـ = ٦ ، جـ = ٣

جـ٢ = أ٢ - ب٢

٩ = ٣٦ - ب٢ ⇐ ب٢ = ٢٧

∴ (ص - ٦)٢ / ٣٦ + (س + ٢)٢ / ٢٧ = ١

ث (٣)

$$\frac{\text{س}^{٢}}{٢٥}+\frac{\text{ص}^{٢}}{٩}=١$$

١) المركز (٠، ٠)

$\text{أ}^{٢}=٢٥ \Leftarrow \text{أ}=٥$

$\text{ب}^{٢}=٩ \Leftarrow \text{ب}=٣$

$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢}$

$=٢٥-٩$

$\text{جـ}^{٢}=١٦$

$\boxed{\text{جـ}=٤}$

٢) البؤرتان (±٤، ٠)

٣) الرأسان (±٥، ٠)

٤) طول المحور الأكبر = ٢أ = ١٠

٥) = = الأصغر = ٢ب = ٦

٦) طول البعد البؤري = ٢جـ = ٨

٧) طرفي المحور الأصغر (٠، ±٣)

ث (٤) احد الرؤوس (٤، ١)، والبؤرة القريبة من الرأس (٢، ١)، الاختلاف المركزي = ٠.٥

$$\frac{(\text{س}-\text{د})^{٢}}{\text{أ}^{٢}}+\frac{(\text{ص}-\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}}=١$$

$\text{أ}-\text{جـ}=٤-٢=٢$

$\therefore \boxed{\text{أ}-\text{جـ}=٢}$

$\frac{\text{جـ}}{\text{أ}}=٠.٥ \Rightarrow \boxed{\text{أ}=٢\text{جـ}}$

$\Leftarrow ٢\text{جـ}-\text{جـ}=٢$

$\boxed{\text{جـ}=٢}$

$\boxed{\text{أ}=٤}$

$(\text{د}+\text{أ}، \text{هـ})=(٤، ١)$

$\text{د}+\text{أ}=٤$

$\text{د}+٤=٤$

$\boxed{\text{د}=٠}$

$\boxed{\text{هـ}=١}$

$\text{جـ}^{٢}=\text{أ}^{٢}-\text{ب}^{٢}$

$٤=١٦-\text{ب}^{٢} \Rightarrow \boxed{\text{ب}^{٢}=١٢}$

$$\therefore \frac{(\text{س})^{٢}}{١٦}+\frac{(\text{ص}-١)^{٢}}{١٢}=١$$

ث (٥)

$$\frac{(\text{س}-٣)^{٢}}{٢٥}+\frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{١٦}=١$$

ت(٦)

$$١٧٦ = ١٦س + ٣ص^٢ + ٤س^٢$$

$$١٧٦ = ٣ص^٢ + ١٦س + ٤س^٢$$

$$١٧٦ = ٣ص^٢ + (س^٢ + ٤س)٤$$

$$١٩٢ = ٣ص^٢ + (س + ٢)^٢٤ \Leftarrow ١٧٦ = ١٦ - ٣ص^٢ + (س + ٢)^٢٤$$

$$\underbrace{١ = \frac{(س+٢)^٢}{٤٨} + \frac{ص^٢}{٦٤}} \Leftarrow ١ = \frac{ص^٢}{٦٤} + \frac{(س+٢)^٢}{٤٨}$$

١) المركز $(-٢ ، ٠)$ $\quad ٨ = أ \Leftarrow ٦٤ = أ^٢$

$$\sqrt{٤٨} = ب \Leftarrow ٤٨ = ب^٢$$

$$٤ = جـ \Leftarrow ١٦ = ب^٢ - أ^٢ = جـ^٢$$

٢) الرأسان $(-٢ ، ٠ \pm ٨)$

٣) البؤرتان $(-٢ ، ٠ \pm ٤)$

٣) الاختلاف المركزي $،٥٠ = \frac{٤}{٨} = \frac{جـ}{أ} = هـ$

تمارين ومسائل

① أ) $١ = \frac{(ص-١)^٢}{٤} + \frac{(س-١)^٢}{٩}$

ب) $١ = \frac{س^٢}{٢١} + \frac{ص^٢}{٢٥}$

جـ) $١ = \frac{ص^٢}{١٦} + \frac{س^٢}{٢٢}$

د) $١ = \frac{٤ص^٢}{٣٩} + \frac{س^٢}{١٣}$

هـ) $١ = \frac{(ص-٣)^٢}{٦٤} + \frac{(س-٢)^٢}{١٠٠}$

و) $١ = \frac{(ص٤)}{١٦} + \frac{(س+٣)^٢}{٢٥}$

ز) $١ = \frac{س^٢}{٩} + \frac{٥ص^٢}{٨١}$

③ $٤(س-٣)^٢ + ٤(ص-٢)^٢ = ٣٦$

$(س-٣)^٢ + (ص-٢)^٢ = ٩ \Leftarrow$ مركز الدائرة (٣، ٢)

نصف قطرها نق = ٣ ، القطر = ٦

مركز الدائرة (٣، ٢) هو احد بؤرتي القطع الناقص

طول المحور الاصغر = قطر الدائرة ⟸ $٢ب = ٦ \Leftarrow \boxed{ب = ٣}$

معادلة المحور الاصغر هي $س = -١ \Leftarrow \frac{(س+١)^٢}{٢٥} + \frac{(ص-٢)^٢}{٩} = ١$

$(-١ ، ه)$ المركز $\Leftarrow \boxed{د = -١}$

$(٣، ٢) = (د + ج ، ه) \Leftarrow (-١ + ج ، ه)$

$ج = ٤$ ، $ه = ٢$

$ج^٢ = أ^٢ - ب^٢$

$١٦ = أ^٢ - ٩ \Leftarrow أ^٢ = ٢٥$

④ $\frac{(س-٣)^٢}{٢٩} + \frac{(ص-١)^٢}{٢٥} = ١$

⑤ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٤٨} = ١$

⑥ $\frac{س-٥}{٣} = جاه$ ، $\frac{ص-٢}{٢} = جتاه$ ، $جا^٢ه + جتا^٢ه = ١$

$\frac{(س-٥)^٢}{٩} + \frac{(ص-٢)^٢}{٤} = ١$

⑦ $\frac{س^٢}{٦٤} + \frac{ص^٢}{٢٥} = ١$ ∴ $\boxed{أب\pi = ٤٠\pi}$ ، $\boxed{أ = ٨}$

⑧ نصف القطر = ٦ ∴ $أب\pi = نق^٢\pi$

⑨ (أ) $ه = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$ ، (ب) $\frac{س^٢}{٤٠٠} + \frac{ص^٢}{١٠٠} = ١$

⑩ $ه = \frac{ج}{أ} \Leftarrow \boxed{ج = أه}$ ، $ج^٢ = أ^٢ - ب^٢ \Leftarrow ب^٢ = أ^٢ - ج^٢$

$= أ^٢ - (أه)^٢$

$= أ^٢(١ - ه^٢)$ هو المطلوب.

⑪ $م = أ + جـ$

$ن = أ - جـ$

بالجمع

$م + ن = ٢أ \Leftarrow \boxed{أ = \frac{م + ن}{٢}}$

بالطرح $م - ن = ٢جـ \Leftarrow \boxed{جـ = \frac{م - ن}{٢}}$

$هـ = \frac{جـ}{أ} = \frac{\left(\frac{م - ن}{\cancel{٢}}\right)}{\left(\frac{م + ن}{\cancel{٢}}\right)} = \frac{م - ن}{م + ن}$ هو المطلوب.

بعاً: القطع الزائد :

ت(١) $\frac{س^٢}{٦٤} - \frac{ص^٢}{٣٦} = ١$

ت(٢) $\frac{٥ص^٢}{٣٦} - \frac{س^٢}{٤} = ١$

ت(٣) $أ^٢ = ٢٥ \Leftarrow أ = ٥$ ، طول المحور القاطع = ١٠ ومعادلته $س = ١$

$ب^٢ = ١٤٤ \Leftarrow ب = ١٢$ ، طول المحور المرافق = ٢٤ ومعادلته $ص = ٠$

$جـ^٢ = أ^٢ + ب^٢ \Leftarrow جـ = ١٣$

المركز (١، ٠)

البؤرتان (١، ٠ ± ١٣)

الرأسان (١، ٠ ± ٥)

طرفي المحور المرافق (١ ± ١٢، ٠)

ت(٤) $\frac{س^٢}{٩} - \frac{ص^٢}{١٦} = ١$

ت(٥) ١) $\frac{(\text{س}-١)^{٢}}{٥} - \frac{(\text{ص}+٢)^{٢}}{٢} = ١$ والعناصر تطبيق مباشر.

٢) $\frac{\text{س}^{٢}}{٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٩} = ١$ والعناصر تطبيق مباشر.

تمارين ومسائل

١) أ) $\frac{\text{س}^{٢}}{٩} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$

ب) $\frac{\text{ص}^{٢}}{٢٥} - \frac{\text{س}^{٢}}{١٤٤} = ١$

جـ) $\frac{٥\text{س}^{٢}}{١٤٤} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٣٦} = ١$

د) $\frac{(\text{س}+١)^{٢}}{٤} - \frac{٥(\text{ص}-١)^{٢}}{١٦} = ١$

هـ) $\frac{\text{س}^{٢}}{١٦} - \frac{\text{ص}^{٢}}{٤} = ١$

و) $٤\text{ص}^{٢} - \frac{\text{س}^{٢}}{٢} = ١$

٣) $٤(\text{س}-٣)^{٢} + ٤(\text{ص}-٢)^{٢} = ٣٦ \Leftarrow (\text{س}-٣)^{٢} + (\text{ص}-٢)^{٢} = ٩$ معادلة الدائرة

مركزها (٣، ٢) هو احدى بؤرتي القطع الزائد

نق = ٣ ⟸ الراسة = القطر ⟸ $٢\text{ب} = ٦$

$\boxed{\text{ب} = ٣}$

معادلة المحور المرافق هي س = −١

⟸ معادلة القطع هي $\frac{(\text{س}+١)^{٢}}{\text{أ}^{٢}} - \frac{(\text{ص}+\text{هـ})^{٢}}{\text{ب}^{٢}} = ١$

احدى بؤرتي القطع (٣، ٢) ⟸ (−١ + جـ ، هـ) ⟸ $-١ + \text{جـ} = ٣ \Leftarrow \boxed{\text{جـ} = ٤}$ ، $\boxed{\text{هـ} = ٢}$

$\text{جـ}^{٢} = \text{أ}^{٢} + \text{ب}^{٢}$

$١٦ = \text{أ}^{٢} + ٩ \Leftarrow \boxed{\text{أ}^{٢} = ٧}$

$\therefore \frac{(\text{س}+١)^{٢}}{٧} - \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٩} = ١$

④ $٤(\text{س}-٤)^٢+٤(\text{ص}-٣)^٢=١٦ \Leftarrow (\text{س}-٤)^٢+(\text{ص}-٣)^٢=٤$ معادلة الدائرة ، نق = ٢

مركزها (٤ ، ٣) احد رأسي القطع الزائد

طول المرافق ٢ب = القطر = ٤ $\Leftarrow \boxed{\text{ب}=٢}$

المركز (د ، هـ) يقع على س = −١ $\Leftarrow \boxed{\text{د}=-١}$

احد الرأسين $(٤ ، ٣)=(\text{د}+\text{أ} ، \text{هـ}) \Leftarrow -١+\text{أ}=٤ \Leftarrow \boxed{\text{أ}=٥}$

$\boxed{\text{هـ}=٣}$

$$\frac{(\text{س}+١)^٢}{٢٥}-\frac{(\text{ص}-٣)^٢}{٤}=١$$

⑤ $\frac{\text{ل س}^٢}{٩٠}-\frac{\text{ك ص}^٢}{٩٠}=١$ ، $\text{أ}^٢=\frac{٩٠}{\text{ل}}$ ، $\text{ب}^٢=\frac{٩٠}{\text{ك}}$

طول محور القاطع = ٢أ = $٦\sqrt{٣} \Leftarrow \boxed{\text{أ}=٣\sqrt{٣}} \Leftarrow (٣\sqrt{٣})^٢=\frac{٩٠}{\text{ل}}$

$١٨\,\text{ل}=٩٠$

$\text{ل}=\frac{٩٠}{١٨}=\frac{١٠}{٢}=٥$

$\boxed{\text{ل}=٥}$

القطع الناقص $٩\text{س}^٢+١٦\text{ص}^٢=٥٧٦$

$$\frac{\text{س}^٢}{٦٤}+\frac{\text{ص}^٢}{٣٦}=١$$

$\text{جـ}^٢=٢٨$ البؤرتان $(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

$\text{جـ}=\sqrt{٢٨}$

للقطع الزائد

$\text{جـ}^٢=\text{أ}^٢+\text{ب}^٢$

$\text{جـ}^٢=\frac{٩٠}{\text{ل}}+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

البؤرتان $(\pm\text{جـ} ، ٠)=(\pm\sqrt{٢٨} ، ٠)$

$٢٨=\frac{٩٠}{\text{ل}}+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

$٢٨=١٨+\frac{٩٠}{\text{ك}}$

$\frac{٩٠}{\text{ك}}=١٠ \Rightarrow \boxed{\text{ك}=٩}$

⑥ $\frac{\text{س}+٤}{٥} = \text{قاهـ}$ ، $\frac{\text{ص}-٢}{-٣} = \text{ظاهـ}$

$\text{ظا}^{٢}\text{هـ} + ١ = \text{قا}^{٢}\text{هـ} \Leftarrow \text{قا}^{٢}\text{هـ} - \text{ظا}^{٢}\text{هـ} = ١$

$\frac{(\text{س}+٤)^{٢}}{٢٥} - \frac{(\text{ص}-٢)^{٢}}{٩} = ١$ قطع زائد

(٦) الاحصاء والاحتمالات / علمي

الفصل الأول: الاحصاء

أولاً :- الارتباط

تدريب ٢) ارتباط عكسي ؛ لأنه العلاقة تمثل خط مستقيم ميله سالب .

تمارين ومسائل:

١) طردي

٢) أ) طردي تام في الشكل (٦-٤) ب) عكسي في الشكل (٦-٥)

ب) لا ؛ لأنه العلاقة ص = ٦+٣س تمثل ارتباطاً طردياً والشكل المرسوم يمثل ارتباطاً عكسياً .

٤) أ) عكسي

ب) قوي جداً (تام) .

٥) نعم

٦) أ) طردي:

س	١	٢	٣
ص	٥	٦	٧

ب) عكسي

س	٢	٣	٤
ص	٧	٦	٣

ثانياً :- معامل ارتباط بيرسون

تدريب (١) ر ≃ ٠٫٨٤

تدريب (٢) أ) ١ ب) −١ جـ) ضعيفاً .

تدريب (٣) ١) ٠٫٨٩ ٢) ٠٫٨٩

تدريب (٤) ر ≃ ٠٫٨٤

تمارين ومسائل

(١) أ) قوياً ب) صفر جـ) الكمية د) نوع و قوة

(٢) ر = ٠٫٩٧

(٣) ر = $\frac{-١}{١٫٠٧١٠٧}$ = −٠٫١

(٤) تدل على نوع الارتباط : (موجبة تعني ارتباطاً طردياً وسالبة تعني ارتباطاً عكسياً) .

(٥) العلاقة بين م ، ن أقوى لأنه |−٠٫٩| > |٠٫٨| .

(٦) ١) −٠٫١٣ ٢) ٠٫١٣

ثالثاً: معادلة خط الانحدار

تدريب (١) أ) ص = س + ١١   ب) صْ = س + ١١

جـ) [illegible] ١١   د) صفر

تمارين ومسائل:

١) أ) صْ = ٢س + ٢

ب) ١٦

جـ) ١

٢) أ) أ = [illegible] و ب = ١

ب) ٥ أخطاء

جـ) صفر

٣) تدل على نوع الارتباط.

٤) صْ = ٧٫٠ س + ٣٫٢

٥) ص الحقيقية = ٩ ، صْ المتنبأ بها = ٢×٣+١ = ٧

الخطأ في التنبؤ = ص - صْ = ٢

٦)

س	١	٢	٣
ص	٩	٨	٧

الفصل الثاني :- الاحتمالات

أولاً :- المتغير العشوائي المنفصل

تدريب (١) ١) ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠، ١١، ١٢

٢) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

٣) ٠، ١، ٢، ٣، ٤

تدريب (٢) ١)

س	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢
ل(س)	$\frac{١}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٥}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٣}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$	$\frac{١}{٣٦}$

٢)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{١}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{٦}{١٦}$	$\frac{٤}{١٦}$	$\frac{١}{١٦}$

تحل بالشجرة أو ذات الحدين بعد إتمام دراسته.

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٢١}{٤٦٢}$	$\frac{١٤٠}{٤٦٢}$	$\frac{٢١٠}{٤٦٢}$	$\frac{٨٤}{٤٦٢}$	$\frac{٧}{٤٦٢}$

٤ ٧

بدون إرجاع توافيق

$ل(س=٠) = \frac{\binom{٤}{٠}\binom{٧}{٥}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{٢١}{٤٦٢}$

$ل(س=١) = \frac{\binom{٤}{١}\binom{٧}{٤}}{\binom{١١}{٥}} = \frac{١٤٠}{٤٦٢}$ وهكذا

$ل(س=٠) = ل(ز ز ز ز ز) = \frac{٣×٤×٥×٦×٧}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

$ل(س=١) = ل(ف ز ز ز ز + ز ف ز ز ز + ز ز ف ز ز + ز ز ز ف ز + ز ز ز ز ف)$

$= ٥ × \frac{٤×٥×٦×٧×٤}{٧×٨×٩×١٠×١١}$

تدريب (٣) ٢ك + ٠ر٣ + ٠ر٤٥ + ٢ك = ١ ، ومنه ، ك = ٠ر٠٥

تمارين ومسائل

١) ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣

٢) ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

٣)

س	٠	١	٢	٣	٤	٥
ل(س)	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{١٠}{٣٦}$	$\frac{٨}{٣٦}$	$\frac{٦}{٣٦}$	$\frac{٤}{٣٦}$	$\frac{٢}{٣٦}$

٤)

س	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٦}{٥٦}$	$\frac{٣٠}{٥٦}$	$\frac{٢٠}{٥٦}$

ب	ح
٦	٢

ل(س=١) = $\frac{\binom{٦}{١}\binom{٢}{٢}}{\binom{٨}{٣}}$ = $\frac{٦}{٥٦}$ وهكذا.

ل(ب ح ح + ح ب ح + ح ح ب) = ٣ × ($\cancel{\frac{٦}{٨}}$ × $\frac{٢}{٧}$ × $\cancel{\frac{١}{٦}}$) = $\frac{٦}{٥٦}$

٥) أ) ل(١) + ل(٢) + ل(٣) = ١ ، ومنه ، ٤ك + ٢ك + ٤ك = ١ ⇐ ك = $\frac{١}{١٠}$

ب)

س	١	٢	٣
ل(س)	٠ر٤	٠ر٢	٠ر٤

بيضاء	حمراء
٣	٢

٦)

س	١	٢	٣	٤
ل(س)	$\frac{٤}{١٠}$	$\frac{٣}{١٠}$	$\frac{٢}{١٠}$	$\frac{١}{١٠}$
	ح	بح	ببح	بببح

ل(س=١) = $\frac{٢}{٥}$ = $\frac{٤}{١٠}$

ل(س=٢) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ = $\frac{٣}{١٠}$

ل(س=٣) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ × $\frac{٢}{٣}$ = $\frac{٢}{١٠}$

ل(س=٤) = $\frac{٣}{٥}$ × $\frac{٢}{٤}$ × $\frac{١}{٣}$ × $\frac{٢}{٢}$ = $\frac{١}{١٠}$

ثانياً :- توزيع ذات الحدين

تدريب (١) ١) ل(س=٣) = $\binom{٣}{٣}$ (٠ر٤)^{٣} (٠ر٦)^{٠} = (٠ر٤)^{٣} = ٠ر٠٦٤

٢) ل(س<١) = ل(س=٠) = $\binom{٣}{٠}$ (٠ر٤)^{٠} (٠ر٦)^{٣} = ٠ر٢١٦

٣) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣)

٤) ل(س≥١) = ل(س=١) + ل(س=٢) + ل(س=٣) = ١ − ل(س=٠) = ١ − ٠ر٢١٦ = ٠ر٧٨٤

تدريب (٢) ن = ٧ ، أ = $\frac{١}{٤}$

١) ل(س=١) = $\binom{٧}{١}$ ($\frac{١}{٤}$)^{١} ($\frac{٣}{٤}$)^{٦}

٢) ل(س≥٢) = ل(س=٢) + ل(س=٣) + ... + ل(س=٧) = ١ − [ل(س=١) + ل(س=٠)] ...

٣) ل(س≤١) = ل(س=١) + ل(س=٠) ....

تدريب (٣) ن = ٢٠ ، أ = ٠ر٧٥

١) ل(س=٥) = $\binom{٢٠}{٥}$ (٠ر٧٥)^{٥} (٠ر٢٥)^{١٥} ، ٢) ل(س=٠) = $\binom{٢٠}{٠}$ (٠ر٧٥)^{٠} (٠ر٢٥)^{٢٠} = (٠ر٢٥)^{٢٠}

تمارين ومسائل

١) ن = ٥ ، أ = ٠٫٧

ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) + ل(س = ٥) = $\binom{٥}{٣}$ $(٠٫٧)^{٣}$ $(٠٫٣)^{٢}$ + $\binom{٥}{٤}$ $(٠٫٧)^{٤}$ $(٠٫٣)^{١}$ + $\binom{٥}{٥}$ $(٠٫٧)^{٥}$ $(٠٫٣)^{٠}$

٢) ن = ٨ ، أ = $\frac{١}{٢}$

أ) ل(س = ٤) = $\binom{٨}{٤}$ $(\frac{١}{٢})^{٤}$ $(\frac{١}{٢})^{٤}$

ب) ل(س ≥ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٤) + ... + ل(س = ٨) = ١ − [ل(س = ٢) + ل(س = ١) + ل(س = ٠)]

= ١ − [$\binom{٨}{٢}$ $(\frac{١}{٢})^{٢}$ $(\frac{١}{٢})^{٦}$ + $\binom{٨}{١}$ $(\frac{١}{٢})^{١}$ $(\frac{١}{٢})^{٧}$ + $\binom{٨}{٠}$ $(\frac{١}{٢})^{٠}$ $(\frac{١}{٢})^{٨}$]

٣) ن = ٨ ، أ = $\frac{٢}{٦}$ = $\frac{١}{٣}$

ل(س ≥ ٢) = ١ − [ل(س = ١) + ل(س = ٠)] - - —

حمراء	بيضاء
٥	٣

③

٤)

س	٠	١	٢	٣
ل(س)	$\frac{٢٧}{٥١٢}$	$\frac{١٣٥}{٥١٢}$	$\frac{٢٢٥}{٥١٢}$	$\frac{١٢٥}{٥١٢}$

ل(س = ٠) = $\binom{٣}{٠}$ $(\frac{٥}{٨})^{٠}$ $(\frac{٣}{٨})^{٣}$ = $\frac{٢٧}{٥١٢}$

وهكذا مع الارجاع ذات الحدين

٥) ل(س = −٢) + ل(س = ٣) + ل(س = ٤) = ١

٤ك + ٩ك + ١٦ك = ١ ⇐ ٢٩ك = ١ ⇐ ك = $\frac{١}{٢٩}$

٦) ل(س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$ ، ن = ٣

أ) س = ٠، ١، ٢، ٣

ب) ل(س ≥ ١) = $\frac{٣٧}{٦٤}$ ⇐ ل(س = ١) + ل(س = ٢) + ل(س = ٣) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

١ − ل(س = ٠) = $\frac{٣٧}{٦٤}$

١ − $\frac{٣٧}{٦٤}$ = ل(س = ٠)

$\frac{٢٧}{٦٤}$ = $\binom{٣}{٠}$ $(أ)^{٠}$ $(١ − أ)^{٣}$

$(\frac{٣}{٤})^{٣}$ = $(١ − أ)^{٣}$ ⇐ ١ − أ = $\frac{٣}{٤}$ ⇐ $\boxed{أ = \frac{١}{٤}}$

ثالثاً: العلامة المعيارية

تدريب (١) ١) $\text{ن}_{٤٦} = ٢$ ٢) ٤٤,٥ ٣) ٣٧

تدريب (٢) مستوى الطالب في الفيزياء أفضل ؛ لأن العلامة المعيارية في الفيزياء أكبر منها في الرياضيات.

تدريب (٣) ١) ع = ٤
٢) $\bar{\text{س}}$ = ٧٢
٣) ٨٥

تمارين ومسائل

١) $\bar{\text{س}}$ = ٥٨
٢) أ) ٥ ب) ٥
٣) أ) ع = ٤ ب) ٨٠ ، ٧٢ ، ٧١ جـ) ٦٤
٤) ع = ٦
٥) $\bar{\text{س}} = \dfrac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}}{\text{ن}} \Leftarrow \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} = \text{ن}\,\bar{\text{س}}$.

$$\text{الوسط الحسابي للعلامات المعيارية} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ز}_{\text{ر}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{س}_١ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \dfrac{\text{س}_٢ - \bar{\text{س}}}{\text{ع}} + \cdots + \dfrac{\text{س}_{\text{ن}} - \bar{\text{س}}}{\text{ع}}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{\text{س}_١ + \text{س}_٢ + \cdots + \text{س}_{\text{ن}} - (\underbrace{\bar{\text{س}} + \bar{\text{س}} + \cdots + \bar{\text{س}}}_{\text{ن من المرات}})}{\text{ن ع}}$$

$$= \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{ن}\,\bar{\text{س}} - \text{ن}\,\bar{\text{س}}}{\text{ن ع}} = \frac{\text{صفر}}{\text{ن ع}}$$

= صفر

وهو المطلوب.

٥) ل(س ≤ ٤٨) = ل(ز ≤ $\frac{٤٨ - ٥}{٠٫٤}$) = ل(ز ≤ −٠٫٥)
= ١ − ل(ز ≤ ٠٫٥)
= ١ − ٠٫٦٩١٥ = ٠٫٣٠٨٥
عدد الصناديق = ١٠٠٠ × ٠٫٣٠٨٥ = ٣٠٨٫٥ ≃ ٣٠٩ صناديق

أسئلة الوحدة

١) طردي تام . ر = ١
٢)

٣) أ) ر = −١
ب) ص = $\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{١١}{٣}$.

٤) ر = −١
٥) ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩
٦) أ) توزيع ذات الحدين.
ب) أ = ٠٫٤ ، ن = ٢
جـ) ل(س = ٢) = $\binom{٢}{٢}$ $(٠٫٤)^{٢}$ $(٠٫٦)^{٠}$ = ٠٫١٦

٧) ل(٣) = $\frac{١}{٧}$
٨) أ) ل(س = ٢) = $\binom{٦}{٢}$ $(\frac{١}{٦})^{٢}$ $(\frac{٥}{٦})^{٤}$ = ...

أ = $\frac{١}{٦}$ ، ن = ٦

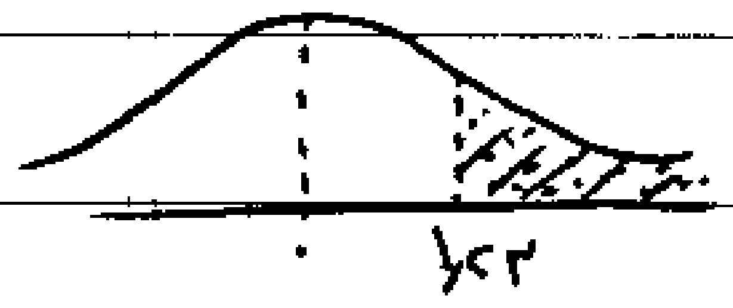
ب) ل(س ≤ ٣) = ل(س = ٣) + ل(س = ٢) + ل(س = ١) + ل(س = ٠) = ...

٩) ل(س ≤ ١) = ل(س = ١) + ل(س = ٠)
= $\binom{٢٠}{١}$ $(٠٫٩٥)^{١}$ $(٠٫٠٥)^{١٩}$ + $\binom{٢٠}{٠}$ $(٠٫٩٥)^{٠}$ $(٠٫٠٥)^{٢٠}$

١٠) ل(س = ٣) = $\frac{٤}{١١}$ × $\frac{٣}{١٠}$ × $\frac{٧}{٩}$ = $\frac{٢٨}{٣٣٠}$ = $\frac{١٤}{١٦٥}$
١١) ل(س ≥ ٣) = ١ − [ل(س = ٠) + ل(س = ١) + ل(س = ٢)] ، حيث ل(س = ر) = $\binom{٩}{ر}$ $(٠٫١)^{ر}$ $(٠٫٩)^{٩-ر}$.
١٢) أ) المتوسط الحسابي للعلامات المعيارية = صفر ب) الانحراف المعياري للعلامات المعيارية = ١
جـ) ز = −٥

رابعاً : التوزيع الطبيعي

تدريب (١) أ) ل (ز ≤ ١٫١٦) = ٠٫٨٧٧٠ .



ب) ل (ز > ١٫٢٣) = ١ - ل (ز ≤ ١٫٢٣) ثم من الجدول مباشرة .

ج) ل (ز ≥ -٠٫٩٥) = ١ - ل (ز ≤ ٠٫٩٥) " " " .

د) ل (٠٫٠٣ ≤ ز ≤ ٣٫١)

= ل (ز ≤ ٣٫١) - ل (ز ≤ ٠٫٠٣) ثم من الجدول مباشرة .

هـ) ل (-٠٫٨ ≤ ز ≤ صفر) = ل (ز ≤ صفر) - ل (ز ≤ -٠٫٨)

= ل (ز ≤ صفر) - [١ - ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول مباشرة .

تدريب (٢) أ) م = ٠٫٠٨ ب) م = -٠٫٤٧ .

تدريب (٣) أ) ل (ز ≤ (٩٥ - ١١٠)/١٠) = ل (ز ≤ -١٫٥) = ١ - ل (ز ≤ ١٫٥) ثم من الجدول مباشرة .

ب) ل (ز > (١٠٥ - ١١٠)/١٠) = ل (ز > -٠٫٥) = ل (ز ≤ ٠٫٥) " " " .

ج) ل (-٢ ≤ ز ≤ ٢) = ل (ز ≤ ٢) - ل (ز ≤ -٢) = ل (ز ≤ ٢) - [١ - ل (ز ≤ ٢)]

تدريب (٤) ٢٥ يوماً .

تمارين ومسائل

١) نر ل (|ز| ≤ ٠٫٨) = ل (-٠٫٨ ≤ ز ≤ ٠٫٨) = ل (ز ≤ ٠٫٨) - ل (ز ≤ -٠٫٨)

= ل (ز ≤ ٠٫٨) - [١ - ل (ز ≤ ٠٫٨)] ثم من الجدول .

٢) أ) م = -٠٫٢٧ ب) م = ٠٫٩٢ .

٣) أ) ل (س ≥ ٨٢) = ل (ز ≥ (٨٢ - ٧٠)/٨) = ل (ز ≥ ١٫٥) = ١ - ل (ز ≤ ١٫٥)

= ١ - ٠٫٩٣٣٢ = ٠٫٠٦٦٨ .

العدد = ٢٠٠٠ × ٠٫٠٦٦٨ = ١٣٣٫٦ ≈ ١٣٤ معلمين .

ب) ل (س > ٨٠) = ل (ز > ١٫٢٥) = ١ - ل (ز ≤ ١٫٢٥) = ١ - ٠٫٨٩٤٤ = ٠٫١٠٥٦ .

٤) نسبة النجاح = ٧٥٨٠/١٠٠٠٠ = ٠٫٧٥٨ . ل (س ≥ م) = ٠٫٧٥٨ .

ل (ز ≥ (م - ٦٠)/٥) = ٠٫٧٥٨ ، لكن (ك) = (م - ٦٠)/٥

ل (ز ≥ ك) = ٠٫٧٥٨

١ - ل (ز ≤ ك) = ٠٫٧٥٨٠

ل (ز ≤ ك) = ٠٫٢٤٢ ⇐ ك = -٠٫٧٠

(م - ٦٠)/٥ = -٠٫٧٠ ⇐ م = -٣٫٥ + ٦٠ ⇐ م = ٥٦٫٥