الفصل الثاني

مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$

1. الخواص الأساسية لـ $\mathbb{N}$

إن مجموعة الأعداد الطبيعية ، $\mathbb{N}$، والمعرف عليها علاقة الترتيب التالية:

$$\forall (n,m)\in\mathbb{N}^2;\quad n\le m \Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{N};\quad m=n+k$$

تحقق الخواص التالية:

- P_1 كل مجموعة جزئية غير خالية $A\subset\mathbb{N}$ فيها أصغر عنصر:

$$\exists a\in A;\quad \forall x\in A;\quad a\le x$$

- P_2 كل مجموعة جزئية غير خالية $A\subset\mathbb{N}$ والتي لها عنصراً راجحاً فيها أكبر عنصر:

$$\exists b\in A;\quad \forall x\in A;\quad x\le b$$

- P_3 إذا كانت $A\subset\mathbb{N}$ تحقق الشرط التالي:

$$(0\in A)\wedge(\forall n\in N, n\in A\Rightarrow (n+1)\in A)$$

عندئذ $A=\mathbb{N}$

إن الخاصة P_3 تسمى «بديهية التدريج».

ملاحظات

- إن $\mathbb{N}$ ليس فيها أكبر عنصر. لنفرض العكس أي $\exists a\in\mathbb{N}$ بحيث $\forall x\in A$ فإن $x\le a$. لكن حسب الخاصة P_3 فإن $(a+1)\in\mathbb{N}$ لأن $a\in N$ و$a\le a+1$ إذن فرضنا خاطئ.

- كل مجموعة جزئية مؤلفة من عنصرين من $\mathbb{N}$ فيها أصغر عنصر وذلك حسب P_1 وبالتالي $\mathbb{N}$ مرتبة كلياً ونرمز لعلاقة الترتيب في $\mathbb{N}$ بـ $\leq$ و نرمز بـ $x < y$ للدلالة على أن $(x \leq y) \wedge (x \neq y)$.
- ليكن $n \in \mathbb{N}$ ، نسمي العنصر $n+1$ بالعنصر اللاحق لـ n و $n-1$ العنصر السابق لـ n. كذلك المجموعة $\{a \in \mathbb{N};\quad n < a < n+1\}$ هي مجموعة خالية.

مبرهنة (مبدأ التدريج)

إذا كانت $P(n)$ قضية تتعلق بمجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ولنفرض أن:

$P(n_0)$ صحيحة $\exists n_0 \in \mathbb{N};$ و $\forall n \geq n_0;\quad P(n) \Rightarrow P(n+1)$

عندئذ $P(n)$ صحيحة من أجل أي عدد طبيعي $n \geq n_0$.

الإثبات:

لتكن $B = \{m \in \mathbb{N}; (m \geq n_0) \wedge$ خاطئة $P(m)\}$ إذا فرضنا أن $B \neq \varnothing$ ففيها أصغر عنصر حسب الخاصة P_1 وليكن هذا العنصر هو l إذن $n_0 \leq l$ هو أصغر عدد طبيعي تكون من أجله $P(l)$ خاطئة.

لنفرض أن k هو العدد الطبيعي السابق مباشرة لـ l أي $n_0 \leq k < l$ عندئذ $P(k)$ صحيحة وحسب الفرض الثاني من هذه المبرهنة فإن $P(k+1)$ صحيحة ولكن $k+1 = l$ وهذا ما يناقض الفرض إذن فرضنا خاطئ وبالتالي $B = \varnothing$ و $P(n)$ صحيحة من أجل أي $n_0 \leq n$.

مثال

أثبت بطريقة التدريج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$1^2 + 2^2 + \dots\dots\dots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

الحل:

من أجل $n_0 = 1$ نجد أن:

$$\frac{n_0(n_0+1)(2n_0+1)}{6} = \frac{1.2.3}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2$$

لنفرض أن القضية محققة من أجل $n_0 \leq n$ ولنثبت أنها صحيحة من أجل $n+1$ عندئذ:

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = 1^2 + 2^2 + ... + n^2 + (n+1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[n(2n+1) + 6n + 6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)[2n^2 + n + 6n + 6]}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2 + 7n + 6)}{6}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

إذن $P(n+1)$ صحيحة وبالتالي $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$.

2. المجموعات المنتهية

ليكن n عدد طبيعي نرمز للمجموعة $\{k \in \mathbb{N} \, ; 1 \leq k \leq n\}$ بالرمز $\mathbb{N}_n$.

تعريف

- لتكن E مجموعة ما نقول أن E منتهية إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي $n \neq 0$ وتقابل $f : E \to \mathbb{N}_n$.
- نسمي n في هذه الحالة برئيس المجموعة E ونرمز له بـ $Card(E) = n$.
- نصطلح أن ϕ (المجموعة الخالية) هي مجموعة منتهية وأن $Card(\varnothing) = 0$
- نقول عن المجموعة E أنها لا نهائية إذا لم تكن منتهية.

إن الرموز التالية $Card(E)$ و $\# E$ و $|E|$ تستخدم للدلالة على رئيس المجموعة E

1- خواص المجموعات المنتهية

نذكر هذه الخواص دون برهان نظراً لسهولتها.

1- مبرهنة

ليكن $(m,n)\in\mathbb{N}^2$ حيث $m\neq 0$ و $n\neq 0$ عندئذ:

- $\exists f:\mathbb{N}_m\to\mathbb{N}_n \Leftrightarrow m\leq n$ حيث f متباين.
- $\exists f:\mathbb{N}_m\to\mathbb{N}_n \Leftrightarrow m\geq n$ حيث f غامر.
- $\exists f:\mathbb{N}_m\to\mathbb{N}_n \Leftrightarrow m=n$ حيث f تقابل.

2- وحدانية رئيس مجموعة منتهية:

إذا كانت E مجموعة منتهية فإن $n=Card(E)$ وحيد.

3- إذا كانت F مجموعة منتهية و E مجموعة ما. إذا وجد التطبيق المتباين $f:E\to F$ فإن E مجموعة منتهية ويكون $Card(E)\leq Card(F)$

4- إذا كانت E مجموعة منتهية وليكن $f:E\to F$ تطبيقاً غامراً فإن F مجموعة منتهية و $Card(F)\leq Card(E)$.

2- تعريف

نقول عن المجموعتين F و E أن لهما نفس القدرة إذا وفقط إذا وجد تقابل بينهما. ونرمز لذلك بـ $E\approx F$.

نتيجة:

للمجموعتين المنتهيتين E و F نفس القدرة إذا وفقط إذا كان لهما نفس الرئيس أي أن

$$E\approx F\Leftrightarrow Card(E)=Card(F)$$

3. طرائق العد

فيما يلي سنذكر ببعض طرائق العد أو ما يسمى أيضاً بالتحليل التوافقي وذلك نظراً لأهميتها في حساب عدد عناصر مجموعة منتهية.

مبرهنة

1- إذا كانت F,E مجموعتين منتهيتين ومنفصلتين $(E\cap F=\varnothing)$ فإن $E\cup F$ مجموعة منتهية و $Card(E\cup F)=Card(E)+Card(F)$.

2- بشكل عام إذا كانت $P=(A_1, A_2, \cdots, A_p)$ تجزئة للمجموعة E المنتهية فإن:

$$Card(E)=Card(A_1)+Card(A_1)+Card(A_2)+.........+Card(A_p)$$

الإثبات:

1- حسب تعريف المجموعات المنتهية فإنه يوجد تقابلين f و g بحيث $f:E\to N_n$ و $g:F\to N_p$ حيث $Card(E)=n$ و $Card(F)=p$.

بسهولة يمكن أن تثبت أن التطبيق $h:E\cup F\to N_{n+p}$ والمعرف بالشكل التالي:

$$\forall z\in E\cup F; g(z)=\begin{cases} f(z); & z\in E\\ n+g(z); & z\in F\end{cases}$$

هو عبارة عن تقابل إذن $E\cup F$ منتهية و $Card(E)=n+p=Card(E)+Card(F)$.

2- لإثبات أن $Card(E)=\sum_{i=1}^{p}Card(A_i)$

نستخدم مبدأ التدريج، من أجل $p=2$ القضية صحيحة اعتماداً على الطاب الأول، لنفرض أنها صحيحة من أجل p ولنثبت صحتها من أجل $p+1$. إن

$$E=A_1\cup A_2\cup.........\cup A_p\cup A_{p+1}$$
$$=[A_1\cup A_2\cup.......\cup A_p]\cup A_{p+1}$$

وذلك باستخدام خواص الاجتماع. نلاحظ أنه المجموعتين $F=A_1\cup.........\cup A_p$

والمجموعة A_{p+1} منفصلين إذن $Card(E)=Card(F)+Card(A_{p+1})$

وذلك باستخدام القسم الأول من هذه المبرهنة

$$\Rightarrow Card(E)=Card(A_1)+......Card(A_p)+Card(A_{p+1})$$

وذلك لأن القضية صحيحة من أجل p. وبالتالي القضية صحيحة من أجل أي قيمة لـ $P\in\mathbb{N}$.

مبرهنة

إذا كانت F,E مجموعتين منتهيتين فإن $A\times B$ مجموعة منتهية و $Card(A\times B)=Card(A).Card(B)$.

الإثبات:

نلاحظ أنه إذا كانت F مكونة من عنصر وحيد أي $F=\{y\}$ ولنفرض $E=\{x_1,\cdots,x_n\}$ منتهية رئيسها هو n عندئذ:

$$E\times F=\{(x_1,y),\cdots,.(x_n,y)\}$$

ونلاحظ بسهولة أنه يوجد تقابل بين E و $E\times F$ وليكن:

$$\varphi : E\to E\times F$$
$$x_i\to(x_i,y),\quad i=1,2,\cdots,n$$

$Card(E\times F)=Card(E)=n$ عندما F مكونة من عنصر وحيد.

عندما $F=\{y_1,\cdots,y_p\}$ منتهية و $Card(F)=P$ عندئذٍ:

$$Card(E\times F)=Card\left\{\bigcup_{j=1}^{P}\{E\times\{y_j\}\}\right\}=\sum_{j=1}^{P}Card\{E\times\{y_j\}\}$$

لأن المجموعات $E\times\{y_j\}$ ؛ $j=1,\cdots,P$ منفصلة مثنى مثنى.. عندئذ:

$$Card(E\times F)=\sum_{j=1}^{P}n=n\sum_{j=1}^{P}1=n.P=Card(E)Card(F)$$

توضيح: إذا كانت $E=\{x_1,\cdots,x_n\}$ & $F=\{y_1,\cdots,y_p\}$

$$\Rightarrow E\times F=\{(x_1,y_1),\cdots,(x_{n,}y_2)$$
$$(x_1,y_2),\cdots,(x_n,y_2)$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$
$$(x_1,y_P),\cdots,(x_n,y_p)\}$$

$$=\left\{\overbrace{\{(x_1,y_1),\cdots,(x_n,y_1)\}}^{E\times\{y_1\}}\cup,\cdots,\cup\overbrace{\{(x_1,y_p),\cdots,(x_n,y_p)\}}^{E\times\{y_p\}}\right\}=\bigcup_{j=1}^{P}(E\times\{y_j\})$$

حيث نلاحظ بسهولة أن $E\times\{y_j\}$ هي مجموعات منفصلة.

1- أجزاء مجموعة منتهية

مبرهنة

إذا كانت E مجموعة منتهية فإن مجموعة أجزائها $P(E)$ منتهية و $Card(p(E))=2^n$ حيث $n=Card(E)$.

الإثبات:

نستخدم مبدأ الإثبات بالتدريج

$Card(P(E)) = 1 = 2^0 \Leftarrow P(E) = \{\varnothing\}$ عندئذٍ $E = \varnothing$

$Card(P(E)) = 2 = 2^1 \Leftarrow P(E) = \{\varnothing, \{x\}\} \Leftarrow E = \{x\}$

$Card(P(E)) = 4 = 2^2 \Leftarrow P(E) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\} \Leftarrow E = \{x, y\}$

لنفرض الآن أنه العلاقة صحيحة من أجل $E_n = \{x_1, \cdots, x_n\}$

ولنثبت صحتها من أجل $E_{n+1} = \{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$

لنرمز بـ $A^{(n+1)}$ لمجموعة أجزاء E_{n+1} التي تحوي العنصر x_{n+1} و $B^{(n+1)}$ لمجموعة أجزاء E_{n+1} التي لا تحوي x_{n+1} نلاحظ أن المجموعة.

$\{A^{(n+1)}, B^{(n+1)}\}$ تشكل تجزئة لـ $P(E_{n+1})$.

نلاحظ أن $B^{(n+1)}$ هي نفسها المجموعة $P(E_n)$ وكذلك يوجد تقابل بين $B^{(n+1)}$ و $A^{(n+1)}$ معرف بالشكل التالي:

$$\varphi : B^{(n+1)} \to A^{(n+1)}$$
$$T \to T \cup \{x_{n+1}\}$$

عندئذ نستنتج أن:

$$Card(B^{n+1}) = Card(A^{n+1}) = CardP(E_n) = 2^n$$

ومنه:

$$\begin{aligned} Card(P(E_{n+1})) &= Card(A^{n+1}) + Card(B^{n+1}) \\ &= 2Card(P(E_n)) = 2.2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

2- التراتيب والتوافيق

ليكن $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ ولنعرف:

$n!$ ويقرأ « n عاملي» بالعلاقة التالية:

$$n! = \begin{cases} 1 \quad , & n = 0 \\ n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1, & n \neq 0 \end{cases}$$

تراتيب (n, p) ونرمز له ب A_n^p حيث $0 \leq p \leq n$ بالعلاقة التالية:

$$A_n^P = \frac{n!}{(n-p)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

توافيق (n,p) ونرمز له ب $\binom{n}{p}$ أو C_n^p حيث $0 \le p \le n$ كما يلي:

$$C_n^P = \binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!} = \frac{n\times(n-1)\times\cdots\times(n-p+1)}{p\times(p-1)\times\cdots\times 2\times 1}$$

مثال: اثبت أن $C_n^n = C_n^0 = 1$ وأن $C_n^1 = n$ وذلك $\forall \quad n \ge 0$

$$C_n^n = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \frac{n!}{0!n!} = \frac{1}{1} = 1$$

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = \frac{n!}{n!0!} = 1$$

وكذلك: $C_n^1 = \dfrac{n!}{(n-1)!\times 1!} = \dfrac{n\times(n-1)!}{(n-1)!} = n$

مثال: أثبت صحة العلاقتين الهامتين:

$$C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}, \quad C_{n+p}^n = C_{n+p}^p$$

تمرين: أثبت صحة العلاقة التالية (مثلث باسكال Pascal):

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} \quad *$$

نصطلح على أن $C_n^k = 0$ من أجل $k > n$. (سنرى لاحقاً سبب ذلك).

مبرهنة (دستور الكرخي – نيوتن)

ليكن لدينا العددين الحقيقيين $x, y \in \mathbb{R}$ وليكن $n \in \mathbb{N}$ عدد طبيعي ما عندئذ:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k \quad (*')$$

الإثبات:

نستخدم مبدأ الإثبات بالتدريج:

- $C_0^0 x^0 y^0 = 1 \text{ and } (x+y)^0 = 1 \Leftarrow n = 0$
- $\sum_{k=0}^{1} C_1^k x^{1-k} y^k = C_1^0 x y^0 + C_1^1 x^0 y = x + y \text{ and } (x+y)^1 = x + y \Leftarrow n = 1$

- $(x+y)^2=(x+y)(x+y)=x^2+2xy+y^2 \Leftarrow n=2$

ولدينا: $\sum_{k=0}^{2} C_2^k X^{2-k} y^k = C_2^0 x^2 y^0 + C_2^1 xy + C_2^2 x^0 y^2 == x^2+2xy+y^2$

- لنفرض الآن أن العلاقة $(*')$ صحيحة من أجل n ولنثبت صحتها من أجل $n+1$ نستخدم من أجل ذلك العلاقة المعطاة في التمرين السابق:

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$$

ولنضرب طرفي هذه العلاقة بالمقدار $x^{n-k} y^{k+1}$ ولنجمع العلاقات الناتجة والموافقة لجميع قيم k فنحصل على:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^{k+1} x^{n-k} y^{k+1}}_{I} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} C_n^{k+1} x^{n-k} y^{k+1}}_{J}$$

نقوم بإصلاح طرفي هذه العلاقة ولنبدأ بالطرف الأيسر ولنفرض $l=k+1$

$$I = \sum_{l=1}^{n+1} C_{n+1}^l x^{n+1-k} y^e \quad = \quad \sum_{l=0}^{n+1} C_{n+1}^l x^{n+1-l} y^l - C_{n+1}^0 x^{n+1}$$

وأما الطرف الأيمن فيصبح:

$$J = y\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\right) + \sum_{l=1}^{n+1} C_n^l x^{n+1-l} y^l$$

$$= y\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k\right) + x\left(\sum_{l=1}^{n+1} C_n^l x^{n-l} y^l\right)$$

$$= y(x+y)^n + x\left(\sum_{l=0}^{n} C_n^l x^{n-l} y^l + \underbrace{C_n^{n+1} x^{-1} y^{n+1}}_{\substack{\parallel \\ 0}} - C_n^0 x^n\right)$$

$$= y(x+y)^n + x\left((x+y)^n - C_n^0 x^n\right)$$

ومنه:

$$J = (x+y)^{n+1} - \underbrace{C_n^0 x^{n+1}}_{\substack{\parallel \\ x^{n+1}}}$$

وبالتالي بمقارنة J, I نجد أن:

$$\sum_{l=0}^{n+1} C_n^l x^{n-l} y^l = (x+y)(x+y)^n = (x+y)^{n+1}$$

وبالتالي $(*')$ صحيحة من أجل $n+1$ أي هي صحيحة من أجل أي $n \in \mathbb{N}$.

ملاحظة: يمكن الحصول على قيمة C_n^k من دستور الكرخي نيوتن باشتقاق طرفي العلاقة: $\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k = (1+x)^k$. k مرة ومساواة x بالصفر عندئذ نجد أن:

$$[k(k-1)\times\cdots\times 2\times 1]C_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1) = A_n^k$$

$$\Rightarrow C_n^k = \frac{A_n^k}{K!} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

مبرهنة

إذا كانت E مجموعة منتهية عدد عناصرها n و $P_k(E)$ مجموعة أجزاء E التي عدد عناصرها كل منها يساوي k فإن:

$$Card(P_k(E)) = C_n^k$$

الإثبات:

بما أن E منتهية إذن يوجد تقابل بين E وبين $\mathbb{N}_n$ ولذلك نكتفي بإثبات صحة هذه العلاقة من أجل $E = \mathbb{N}_n$.

لنفرض أن $P^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ وأن $P_k^{(n)}$ هي مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي تحوي k عنصراً حيث $k \le n$.

- عندما $n = 1$ فإن $P^{(1)} = \{\varnothing, \{1\}\}$, $P_k^{(n)} = P_1^1$ وبالتالي:

$$Card(P_1^1) = 1 = C_1^1$$

عندما $n = 2$ فإن $P^{(2)} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ ونلاحظ أن:

$$P_0^{(2)} = \{\varnothing\} \Rightarrow Card(P_0^{(2)}) = 1 = C_2^0$$

$$P_1^{(2)} = \{\{1\}.\{2\}\} \Rightarrow Card(P_1^{(2)}) = 2 = C_2^1$$

$$P_2^{(2)} = \{\{2\}\} \Rightarrow Card(P_1^{(2)}) = 1 = C_2^2$$

- لنفرض أن العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ ولنثبت صحتها من أجل n. ليكن $1 \le k \le n$ لنرمز بـ $A_k^{(n)}$ إلى مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي تحوي العنصر n والتي عدد عناصر كل منها k ونرمز بـ $B_k^{(n)}$ إلى مجموعة أجزاء $\mathbb{N}_n$ التي لا تحوي العنصر n والتي عدد عناصر كل منها k عندئذ نلاحظ أن $A_k^{(n)} \cap B_k^{(n)} = \phi$; $P_k^{(n)} = \{A_k^{(n)}, B_k^{(n)}\}$

وبالتالي:

$$Card(P_k^{(n)}) = Card(A_k^{(n)}) + Card(B_k^{(n)})$$

يمكننا أن نلاحظ أن:

1- $B_k^{(n)}$ هي نفسها $P_k^{(n-1)}$.

2- هناك تقابل بين $A_k^{(n)}$ و $P_{k-1}^{(n-1)}$ معرف كمايلي: $\begin{array}{l}\varphi : P_{k-1}^{(n-1)} \to A_k^{(n)} \\ P \to P \cup \{n\}\end{array}$

ومنه: $Card(P_k^{(n)}) = Card(P_{k-1}^{n-1}) + Card(P_k^{(n-1)})$

العلاقة صحيحة من أجل $n-1$ و $n-1 \geq k$ إذن $Card(P_k^{(n)}) = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k}$

حسب العلاقة المعطاة في التمرين السابق نجد أن $C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^{k} = C_n^k$

ومنه: $Card(P_k^{(n)}) = C_n^k$ من أجل أي $1 \leq k \leq n, 1 \leq n$

ملاحظة

في تعريف التوافيق اصطلحنا أن $C_n^k = 0$ من أجل $n \leq k$ وهذا ما تبينه المبرهنة السابقة إذ أن C_n^k يمثل عدد أجزاء المجموعة E التي تحوي k عنصراً وبالتالي لا يوجد في أجزاء E عدد عناصرها أكبر تماماً من n وبالتالي $C_n^k = 0$ من أجل $n < k$.

مبرهنة

1- ليكن $F(E,G)$ مجموعة التطبيقات التي منطلقها المجموعة E ومستقرها المجموعة G حيث $Card(E) = n$ و $Card(G) = p$ عندئذ $CardF(E,G) = p^n$،

2- إذا كان: $Card(E) = n$ و $Card(G) = p$ حيث $n \leq p$ و $F_i(E, G)$ مجموعة التطبيقات المتباينة التي منطلقها E ومستقرها G عندئذ $Card(F_i(E,G)) = A_n^P$،

3- إذا كانت $F_s(E, G)$ مجموعة التطبيقات الغامرة التي منطلقها E ومستقرها G عندئذ $Card(F_s(E,G)) = \sum_{k=0}^{P} (-1)^k C_P^k (P-k)^n$،

4- أخيراً، إذا كانت $B(E, E) = B(E)$ مجموعة التقابلات على المجموعة E و التي عدد عناصرها $1 \leq n$ عندئذ $Card(B(E)) = n!$.

تمارين:

التمرين الأول

لتكن F,E مجموعتين، أثبت أن:

$$Card(E\cup F)=Card(E)+Card(F)-Card(E\cap F)$$

الحل:

بالاستعانة بمخطط فن المقابل نجد أن $F=(F\setminus E)\cup(E\cap F)$

وحيث $(F\setminus E)\cap(E\cap F)=\varnothing$

إذن حسب المبرهنة السابقة

$Card(F)=Card(F\setminus E)+Card(E\cap F)\quad(*)$ لدينا أيضاً: $E\cup F=E\cup(F\setminus E)$

حيث $E\cap(F\setminus E)=\varnothing$ إذن حسب المبرهنة السابقة:

$$Card(E\cup F)=Card(E)+Card(F\setminus E)\qquad(**)$$

بتعويض (*) في (**) نجد أن

$$Card(E\cup F)=Card(E)+Card(F)-Card(E\cap F)$$

التمرين الثاني

اثبت أن: $C_n^P=\dfrac{n-P+1}{P}C_n^{p-1}$

الحل:

$$C_n^p=\frac{n!}{(n-P)!P!}=\frac{1}{P}\,\frac{n!}{(n-P)!(P-1)!}\qquad(1)$$

لأن: $P!=P(P-1)!$ وكما أن: $(n-P+1)!=(n-P+1)(n-P)!$

وبالتالي بضرب وتقسيم الطرف الأيمن في المساواة بالمقدار $(n-p+1)$ نحصل على:

$$C_n^P=\frac{n-P+1}{P}\,\frac{n!}{(n-P+1)(n-P)!(p-1)!}$$

$$= \frac{n-P+1}{P} \cdot \frac{n!}{(n-P+1)!(P-1)!} = \frac{n-P+1}{P} C_n^{P-1}$$

التمرين الثالث

احسب المجاميع التالية:

$$\sum_{k=1}^{n} C_n^k , \qquad \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} C_n^k$$

الحل:

نعلم أن $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} y^k$

بوضع $x = y = 1$ نحصل على $2^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} C_n^k = 2^n - C_n^0 = 2^n - 1$

من أجل المجموع الثاني بفرض أن $x = 1$ و $y = \frac{1}{3}$ نحصل على:

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (1)^{n-k} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{l}{3^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k} C_n^k$$

$$\Rightarrow \left(\frac{3+1}{4}\right)^n = \frac{4^n}{3^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} C_n^k + \frac{1}{3^n} C_n^n$$

$$\Rightarrow \frac{4^n}{3^n} - \frac{1}{3^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} C_n^k$$

ومنه: $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{3^k} C_n^k = \frac{1}{3^n}(4^n - 1)$.

التمرين الرابع

أثبت صحة العلاقة التالية (مثلث باسكال Pascal):

$$C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1} \quad *$$

الحل:

إن الطرف الأيسر من العلاقة يكتب كمايلي:

$$C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n+1-k-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \qquad (1)$$

أما الطرف الأيمن من العلاقة فيكتب بالشكل التالي:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$$

بتوحيد المخارج نجد أن:

$$C_n^k + C_n^{k+1} = \frac{n!(k+1) + n!(nk)}{(n-k)(k+1)!} = \frac{n!+n.n!}{(n-k)!(k+1)!} = \frac{(n+1)n!}{(n-k)!(k+1)!}$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n-k)!(k+1)!} \qquad (2)$$

بمقارنة 1 مع 2 نكون أثبتنا صحة العلاقة *.

ونمثل هذه العلاقة بيانياً بما يسمى مثلث Pascal كمايلي:

n \ k	0	1	2	3	4	…
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
⋮						