رياضيات الأعمال

Business Mathematics

لطلاب الفرقة الأولى

أ.د مصطفى عبد الغني أحمد أ.د. علي السيد الديب

أ.د. محمد عبد المنعم جودة

كلية التجارة – جامعة القاهرة

٢٠١٧-٢٠١٨

المحتويات

الفصل الأول

المحددات

تعريف :-

يعرف المحدد بأنه مجموعة من الأرقام مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة بشرط أن يتساوى عدد الصفوف مع عدد الأعمدة فإذا كان المحدد مكون من صفين وعمودين سمى محدد من الرتبة الثانية أما إذا كان المحدد مكون من ثلاث صفوف وثلاث أعمدة سمى محدد من الرتبة الثالثة وتوضع هذه الأرقام بين خطين متوازيين ويرمز للمحدد بالرمز Δ (دلتا) .

المحدد من الرتبة الثانية :-

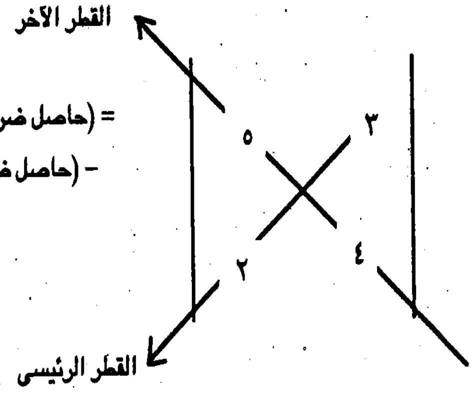
هو محدد مكون من صفين وعمودين وتتوقف إشارة كل عنصر من عناصر المحدد على موقع كل عنصر فى المحدد . فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجى كانت إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردى كانت إشارة العنصر سالبة ويلاحظ أن الرقم الأول يرمز إلى رقم الصف والرقم الثانى يرمز إلى رقم العمود فمثلاً (أ$_{١١}$) يعنى أن هذا العنصر يقع فى الصف الأول فى العمود الأول أما إذا كان (أ$_{١٢}$) يعنى أن هذا العنصر يقع فى الصف الثانى فى العمود الأول .

$$\begin{vmatrix} أ_{٢١} & أ_{١١} \\ أ_{٢٢} & أ_{١٢} \end{vmatrix}$$

وتكون إشارات المحدد متبادلة وفى اتجاه عقارب الساعة وتبدأ بالإشارة الموجبة كالآتى :-

$$\begin{vmatrix} - & + \\ + & - \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن كل محدد له قيمة عددية وتتحدد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الثانية بحاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسى مطروحاً منها العناصر الواقعة على القطر الآخر كمايلى :-



= (حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الرئيسى)

- (حاصل ضرب العناصر الواقعة على القطر الآخر)

= (٣ × ٢) - (٤ × ٥)

= ٦ - ٢٠ = - ١٤

مثال ١:

أوجد قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٥ \\ ٧- & ٣- \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ -٣ & -٧ \end{vmatrix} = (٥ \times -٧) - (-٣ \times ٤) = -٢٣$$

المحدد من الرتبة الثالثة :-

ويتكون هذا المحدد من ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر في المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجى تكون إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردى تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر المحدد متبادلة فى إتجاه عقارب الساعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتى :-

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

ويمكن إيجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الثالثة بأحد الطريقتين الآتيين :-

الطريقة الأولى :-

ويطلق على هذه الطريقة طريقة المحددات الصغرى وبموجب هذه الطريقة يتم إختيار أى صف أو أى عمود ويتم ضرب كل عنصر بإشارته من عناصر هذا الصف أو العمود فى المحدد الأصغر لهذا العنصر ويتم إيجاد المحدد الأصغر بأن نحذف الصف والعمود الواقع فيه العنصر والباقى يسمى المحدد الأصغر لهذا العنصر . ويتضح ذلك من المثال التالى :-

مثال ٢ :

أوجد قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

الحل :

أوجد قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٧ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} ٢ + \begin{vmatrix} ١ & ٧ \\ ٦ & ٤ \end{vmatrix} ٥ - \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٦ & ٢ \end{vmatrix} ٣ = \begin{array}{c} \begin{matrix} + & - & + \end{matrix} \\ \begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} \end{array} = \Delta$$

$$= 3(18-2) - 5(42-4) + 2(14-12)$$

$$= 3 \times 16 - 5 \times 38 + 2 \times 2$$

$$= 48 - 190 + 4$$

$$= -138$$

مثال ٣ :

أوجد القيمة العددية للمحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overset{+}{4} & \overset{-}{5} & \overset{+}{-3} \\ 3 & 2 & 7 \\ 5 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 4(-8-42) - 5(-12-35) - 3(18-10)$$

$$= 4 \times -50 - 5 \times -47 - 3 \times 8$$

$$= -200 + 235 - 24$$

$$= -224 + 235 = 11$$

الطريقة الثانية :-

وتسمى هذه الطريقة بطريقة كرامر الأقطار الموجبة والأقطار السالبة . حيث يتم تكرار العمود الأول والعمود الثانى للمحدد المطلوب إيجاد قيمته أو تكرار الصف الأول والثانى . ويلاحظ أن الأقطار المتجهة إلى أسفل تمثل الأقطار الموجبة أما الأقطار المتجهة إلى أعلى تمثل الأقطار السالبة والأمثلة التالية توضح كيفية ايجاد قيمة المحدد .

مثال ٤ :

أوجد قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \\ ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٢ & ٥ & ٣ \\ ٣ & ٧ & ١ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ٤ & ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = [(٣ \times ٣ \times ٦) + (٥ \times ١ \times ٤) + (٢ \times ٧ \times ٢)] - [(٤ \times ٣ \times ٢) + (٢ \times ١ \times ٣) + (٦ \times ٧ \times ٥)]$$

$$= [٥٤ + ٢٠ + ٢٨] - [٢٤ + ٦ + ٢١٠]$$

$$= ١٠٢ - ٢٤٠ = -١٣٨$$

مثال ٥:

أوجد قيمة المحدد الآتى :

$$\begin{vmatrix} -٣ & ٥ & ٤ \\ ٧ & ٢ & ٣ \\ -٤ & ٦ & ٥ \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٤ & -٣ & ٥ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٧ & ٢ & ٣ \\ ٦ & ٥ & -٤ & ٦ & ٥ \end{vmatrix} = \Delta$$

$$\Delta = [(٤ \times ٢ \times -٤) + (٥ \times ٧ \times ٥) + (-٣ \times ٣ \times ٦)] - [(٥ \times ٢ \times -٣) + (٦ \times ٧ \times ٤) + (-٤ \times ٣ \times ٥)]$$

$$= [-٣٢ + ١٧٥ - ٥٤] - [-٣٠ + ١٦٨ - ٦٠]$$

$$= [٨٩] - [٧٨] = ١١$$

المحدد من الرتبة الرابعة :-

ويتكون هذا المحدد من أربعة صفوف وأربعة أعمدة .

$$\Delta = \begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٤١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٤٢} \\ \text{أ}_{١٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٤٣} \\ \text{أ}_{١٤} & \text{أ}_{٢٤} & \text{أ}_{٣٤} & \text{أ}_{٤٤} \end{vmatrix}$$

ويلاحظ أن إشارة كل عنصر من عناصر المحدد تتوقف على موقع هذا العنصر فى المحدد فإذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد زوجى تكون إشارة العنصر موجبة أما إذا كان حاصل جمع (رقم الصف + رقم العمود) عدد فردى تكون إشارة العنصر سالبة وتكون إشارة عناصر المحدد متبادلة فى إتجاه عقارب الساعة وتبدأ بإشارة موجبة كالآتى :-

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

ويمكن ايجاد القيمة العددية للمحدد من الرتبة الرابعة كما يلي :-

مثال ٦ :

أوجد القيمة العددية للمحدد الآتى :

$$\begin{array}{cccc} - & + & - & + \\ \end{array}$$
$$\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٣ & ٢ & ٧ \\ ٢ & ١ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

الحل :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٧ \\ ١ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} ٤- \begin{vmatrix} ٦ & ٢ & ٧ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٧ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} ٢+ \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ١ & ٥ \\ ٧ & ٤ & ٦ \end{vmatrix} ٥- \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٧ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} ٣ = \Delta$$

ثم يتم ايجاد قيمة كل محدد من المحددات السابقة بأى طريقة سواء بطريقة المحددات الصغرى أو بطريقة الأقطار حيث .

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ٦ & ٣ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٧ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} ٣ = \begin{vmatrix} ٦ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ٧ & ٤ & ٢ \end{vmatrix} ٣ = \Delta_{١}$$

$$= ٣[(١٤+١٢+٧٢)-(١٢+١٦+٦٣)]$$

$$= ٣[(٩٨)-(٩١)]$$

$$= ٣ \times ٧ = ٢١$$

$$\Delta_{٢} = -٥ \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٦ \\ ٥ & ١ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٧ \end{vmatrix} = -٥ \begin{vmatrix} ٧ & ٣ & ٦ & ٧ & ٣ \\ ٥ & ١ & ٢ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٤ & ٧ & ٦ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= -٥[(٤٩+٣٦+١٢٠)-(٣٦+٥٦+١٠٥)]$$

$$= -٥[(٢٠٥)-(١٩٧)]$$

$$= -٥[٨] = -٤٠$$

$$\Delta_{٣} = ٢ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٦ \\ ٥ & ٣ & ٢ \\ ٦ & ٢ & ٧ \end{vmatrix} = ٢ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٦ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ٢ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٧ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٢[(١٤٧+٢٤+٦٠)-(١٠٨+٢٨+٧٠)]$$

$$= ٢[(٢٣١)-(٢٠٦)]$$

$$= ٢[٢٥] = ٥٠$$

$$\Delta_{٤} = -٤ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٤ \end{vmatrix} = -٤ \begin{vmatrix} ٧ & ٢ & ٣ & ٧ & ٢ \\ ٥ & ٣ & ١ & ٥ & ٣ \\ ٦ & ٢ & ٤ & ٦ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= -٤ \left[(٨٤ + ١٢ + ٣٠) - (٥٤ + ١٤ + ٤٠) \right]$$

$$= -٤ \left[(١٢٦) - (١٠٨) \right]$$

$$= -٤ \left[١٨ \right] = -٧٢$$

∴ قيمة المحدد $= ٢١ - ٤٠ + ٥٠ - ٧٢ = -٤١$

إستخدام المحددات فى حل المعادلات الخطية :-

أ) المعادلات الخطية ذات المجهولين :-

بفرض أن لدينا المعادلتين الخطيتين الآتيين :-

$$\text{أ}_{١}\,\text{س} + \text{ب}_{١}\,\text{ص} = \text{ل}_{١} \quad .... \quad (١)$$

$$\text{أ}_{٢}\,\text{س} + \text{ب}_{٢}\,\text{ص} = \text{ل}_{٢} \quad .... \quad (٢)$$

وبحل المعادلتين السابقتين نجد أن :

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta}$$

حيث Δ هو محدد مكون مـــن معاملات س ، ص فـــى المعادلتين وهـــو مقام لكـــل من س ، ص .

أما Δ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضـع بدلاً منها الحدود المطلقة.

أما Δ ص هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ص ووضع بدلاً منها الحدود المطلقة.

$$\therefore \text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{ل}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix}} \qquad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل}_{١} & \text{أ}_{١} \\ \text{ل}_{٢} & \text{أ}_{٢} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_{١} & \text{ب}_{١} \\ \text{أ}_{٢} & \text{ب}_{٢} \end{vmatrix}}$$

$$\therefore \text{س} = \frac{(\text{ل}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{ل}_{٢}\text{ب}_{١})}{(\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١})} \qquad \text{ص} = \frac{(\text{أ}_{١}\text{ل}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ل}_{١})}{(\text{أ}_{١}\text{ب}_{٢} - \text{أ}_{٢}\text{ب}_{١})}$$

مثال ٧ :

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :

٣ س − ٢ ص = ٥

٤ س + ص = ١٤

الحل :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - (-٢ \times ٤) = ٣ + ٨ = ١١$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٥ & -٢ \\ ١٤ & ١ \end{vmatrix} = ٥ - (-٢ \times ١٤) = ٥ + ٢٨ = ٣٣$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٤ & ١٤ \end{vmatrix} = ٤٢ - ٢٠ = ٢٢$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٣٣}{١١} = ٣$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٢٢}{١١} = ٢$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص فى أحد المعادلتين .

٣ س − ٢ ص = ٥

$$٣ \times ٣ - ٢ \times ٢ = ٥ \qquad \boxed{٥ = ٥}$$

مثال ٨ :

باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :

٨ س + ٢ ص = ٤

٥ س + ٢ ص = ١

الحل :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٨ & ٢ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix} = ١٦ - ١٠ = ٦$$

$$\Delta_{\text{س}} = \begin{vmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} = ٨ - ٢ = ٦$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٨ & ٤ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٨ - ٢٠ = -١٢$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{٦}{٦} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{-١٢}{٦} = -٢$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص فى أحد المعادلتين .

٨ س + ٢ ص = ٤

٨ × ١ + ٢ × -٢ = ٤

$\boxed{٤ = ٤}$

مثال ٩:

أوجد باستخدام المحددات قيمة كل من س ، ص :

٣ س + ٤ ص = ٥

٥ س + ٧ ص = ١

الحل:

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad\qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٥ & ٧ \end{vmatrix} = ٢١ - ٢٠ = ١$$

$$\Delta\,\text{س} = \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix} = ٣٥ - ٤ = ٣١$$

$$\Delta\,\text{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٥ & ١ \end{vmatrix} = ٣ - ٢٥ = -٢٢$$

$$\therefore\ \text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} = \frac{٣١}{١} = ٣١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٢}{١} = -٢٢$$

ب) المعادلات الخطية ذات الثلاث مجاهيل :-

بفرض أن لدينا المعادلات الآتية :-

أ$_1$ س + ب$_1$ ص + حـ$_1$ ع = ل$_1$ ⟵ (١)

أ$_2$ س + ب$_2$ ص + حـ$_2$ ع = ل$_2$ ⟵ (٢)

أ$_3$ س + ب$_3$ ص + حـ$_3$ ع = ل$_3$ ⟵ (٣)

وبحل المعادلات السابقة نجد أن :

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta\,\text{ع}}{\Delta}$$

حيث Δ هو محدد مكون من معاملات س ، ص ، ع في المعادلات الثلاث وهو مقام لكل من س ، ص ، ع .

أما Δ س هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات س ووضع الحدود المطلقة.

أما Δ ص هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ص ووضع الحدود المطلقة.

أما Δ ع هو نفس محدد المقام بعد حذف معاملات ع ووضع الحدود المطلقة.

$$\therefore \text{س} = \frac{\begin{vmatrix} \text{ل}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{ل}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{ل}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}} \qquad \text{ص} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ل}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ل}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ل}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}} \qquad \text{ع} = \frac{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{ل}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{ل}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{ل}_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 & \text{حـ}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 & \text{حـ}_2 \\ \text{أ}_3 & \text{ب}_3 & \text{حـ}_3 \end{vmatrix}}$$

مثال ١٠:

باستخدام المحددات أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع من المعادلات الآتية :

٣ س − ٢ ص + ع = ٢ ⟵ (١)

س + ٣ ص − ٢ ع = ١ ⟵ (٢)

٤ س − ٥ ص + ٤ ع = ٦ ⟵ (٣)

الحل:

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta\,\text{ع}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ ٤ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ١ & ٣ & -٢ \\ ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٥ & ٤ & ٤ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= [\,(٣٦ + ١٦ - ٥) - (١٢ + ٣٠ - ٨)\,]$$

$$= ١٣$$

$$\Delta\,\text{س} = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \\ ٦ & -٥ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٢ & -٢ & ١ & ٢ & -٢ \\ ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٣ \\ ٦ & -٥ & ٤ & ٦ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= [\,(٢٤ + ٢٤ - ٥) - (١٨ + ٢٠ - ٨)\,]$$

$$= ١٣$$

$$\Delta_{\text{ص}} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \\ ٤ & ٦ & ٤ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & ٢ & ١ & ٣ & ٢ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ & ١ \\ ٤ & ٦ & ٤ & ٤ & ٦ \end{vmatrix}$$

$$= [(١٢ - ١٦ + ٦) - (٤ - ٣٦ + ٨)]$$

$$= ٢٦$$

$$\Delta_{\text{ع}} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٢ \\ ١ & ٣ & ١ \\ ٤ & -٥ & ٦ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٢ & ٣ & -٢ \\ ١ & ٣ & ١ & ١ & ٣ \\ ٤ & -٥ & ٦ & ٤ & -٥ \end{vmatrix}$$

$$= [(٥٤ - ٨ - ١٠) - (٢٤ - ١٥ - ١٢)]$$

$$= [٣٦ + ٣] = ٣٩$$

$$\therefore \text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} = \frac{١٣}{١٣} = ١$$

$$\text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} = \frac{٢٦}{١٣} = ٢$$

$$\text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta} = \frac{٣٩}{١٣} = ٣$$

وللتأكد من الحل يتم التعويض بقيمة كل من س ، ص ، ع فى أحد المعادلات السابقة .

٣ س - ٢ ص + ع = ٢

٣ × ١ - ٢ × ٢ + ٣ = ٢

$$\boxed{2 = 2}$$

مثال ١١ :

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع من المعادلات الآتية باستخدام المحددات :

س + ص - ع = صفر

٢ س - ص + ع = ٦

س + ٣ ص - ٢ ع = ١

الحل :

$$\text{س} = \frac{\Delta_{\text{س}}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta_{\text{ص}}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta_{\text{ع}}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= [(2+1-6) - (1+3-4)]$$

$$= -3$$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & ١ & -١ \\ ٦ & -١ & ١ \\ ١ & ٣ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \text{صفر} & ١ & -١ & \text{صفر} & ١ \\ ٦ & -١ & ١ & ٦ & -١ \\ ١ & ٣ & -٢ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

=[(صفر + ١ - ١٨) - (١ + صفر - ١٢)]

= - ٦

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ١ & \text{صفر} & -١ \\ ٢ & ٦ & ١ \\ ١ & ١ & -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & \text{صفر} & -١ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & ٦ & ١ & ٢ & ٦ \\ ١ & ١ & -٢ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

=[(-١٢ + صفر - ٢) - (-٦ + ١ + صفر)]

= - ٩

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{صفر} \\ ٢ & -١ & ٦ \\ ١ & ٣ & ١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ١ & ١ & \text{صفر} & ١ & ١ \\ ٢ & -١ & ٦ & ٢ & -١ \\ ١ & ٣ & ١ & ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

=[(-١ + ٦ - صفر) - (صفر + ١٨ + ٢)]

= - ١٥

$\therefore \text{س} = \dfrac{\Delta \text{س}}{\Delta} = \dfrac{-٦}{-٣} = ٢$

$\text{ص} = \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta} = \dfrac{-٩}{-٣} = ٣$

$\text{ع} = \dfrac{\Delta \text{ع}}{\Delta} = \dfrac{-١٥}{-٣} = ٥$

مثال ١٢:

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع باستخدام المحددات :

٣ س − ٢ ص + ٤ ع = − ٢

٤ س + ٣ ص − ٢ ع = ٨

٢ س − ٤ ص − ٣ ع = ٢١

الحل:

$\text{س} = \dfrac{\Delta \text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \dfrac{\Delta \text{ص}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \dfrac{\Delta \text{ع}}{\Delta}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ ٤ & ٣ & -٢ \\ ٢ & -٤ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٤ & ٣ & -٢ \\ ٤ & ٣ & -٢ & ٤ & ٣ \\ ٢ & -٤ & -٣ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$$

$= [\,(-٢٧ + ٨ - ٦٤) - (٢٤ + ٢٤ + ٢٤)\,]$

$= -١٥٥$

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ٤ \\ ٨ & ٣ & -٢ \\ ٢١ & -٤ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٢ & -٢ & ٤ & -٢ & -٢ \\ ٨ & ٣ & -٢ & ٨ & ٣ \\ ٢١ & -٤ & -٣ & ٢١ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= [(١٨ + ٨٤ - ١٢٨) - (٢٥٢ - ١٦ + ٤٨)]$$

$$= - ٣١٠$$

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٤ \\ ٤ & ٨ & -٢ \\ ٢ & ٢١ & -٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & ٤ & ٣ & -٢ \\ ٤ & ٨ & -٢ & ٤ & ٨ \\ ٢ & ٢١ & -٣ & ٢ & ٢١ \end{vmatrix}$$

$$= [(-٧٢ + ٨ + ٣٣٦) - (٦٤ - ١٢٦ + ٢٤)]$$

$$= ٣١٠$$

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٢ \\ ٤ & ٣ & ٨ \\ ٢ & -٤ & ٢١ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٣ & -٢ & -٢ & ٣ & -٢ \\ ٤ & ٣ & ٨ & ٤ & ٣ \\ ٢ & -٤ & ٢١ & ٢ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= [(١٨٩ - ٣٢ + ٣٢) - (-١٢ - ٩٦ - ١٦٨)]$$

$$= ٤٦٥$$

$$\therefore\ س = \frac{\Delta_س}{\Delta} = \frac{-٣١٠}{-١٥٥} = ٢$$

$$ص = \frac{\Delta_ص}{\Delta} = \frac{٣١٠}{-١٥٥} = -٢$$

$$ع = \frac{\Delta_ع}{\Delta} = \frac{٤٦٥}{-١٥٥} = -٣$$

مثال ١٣:

يقوم أحد مصانع إنتاج الحلوى بإنتاج نوعين من الحلوى حيث تحتاج الوحدة من النوع الأول إلى ٥ وحدات من الدقيق ، ٤ وحدات من السكر ، النوع الثاني يحتاج إلى ٣ وحدات من الدقيق ، ووحدتين من السكر . فإذا كان إجمالى الدقيق الموجود لدى المصنع بالمخازن هو ٨٦ وحدة وإجمالى السكر الموجود لدى المصنع هو ٦٤ وحدة . والمطلوب تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع باستخدام المحددات .

الحل:

المواد / النوع	دقيق	سكر	عدد الوحدات
الأول	٥	٤	س
الثانى	٣	٢	ص
الطاقة المتاحة	٨٦	٦٤	-

٥ س + ٣ ص = ٨٦ ⟵ (١)

٤ س + ٢ ص = ٦٤ ⟵ (٢)

وبإستخدام المحددات يمكن إيجاد كل من س ، ص .

حيث :

$$\text{س} = \frac{\Delta\,\text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\,\text{ص}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١٠ - ١٢ = -٢$$

$$\Delta\,\text{س} = \begin{vmatrix} ٨٦ & ٣ \\ ٦٤ & ٢ \end{vmatrix} = ١٧٢ - ١٩٢ = -٢٠$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ٨٦ \\ ٤ & ٦٤ \end{vmatrix} = ٣٢٠ - ٣٤٤ = -٢٤$$

$$\therefore س = \frac{\Delta_{س}}{\Delta} = \frac{-٢٠}{-٢} = ١٠$$

$$ص = \frac{\Delta_{ص}}{\Delta} = \frac{-٢٤}{-٢} = ١٢$$

مثال ١٤:

يقوم أحد المصانع بإنتاج ثلاث أنواع من السلع الغذائية ويستخدم لإنتاج كل نوع ثلاث أنواع من المواد الخام حيث يحتاج إنتاج الوحدة من النوع الأول إلى ٥ وحدات من المادة الخام (أ) ووحدتين من المادة الخام (ب) ، ٣ وحدات من المادة الخام (حـ) ويحتاج إنتاج الوحدة من النوع الثانى إلى وحدة واحدة من المادة الخام (أ) ، ٤ وحدات من المادة الخام (ب) ، ٦ وحدات من المادة الخام (حـ) ويحتاج إنتاج الوحدة من النوع الثالث إلى ٧ وحدات من المادة الخام (أ) ، ٣ وحدات من المادة الخام (ب) ، ووحدتين من المادة الخام (حـ) فإذا كانت الطاقة المتاحة للإنتاج ٩٠٠ وحدة من المادة الخام (أ) ، ٨٠٠ وحدة من المادة الخام (ب) ، ١١٠٠ وحدة من المادة الخام (حـ) .

والمطلوب :

تحديد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع من أنواع السلع باستخدام المحددات.

الحل :

المادة الخام / الأنواع	مادة خام أ	مادة خام ب	مادة خام جـ	عدد الوحدات
النوع الأول	٥	٢	٣	س
النوع الثانى	١	٤	٦	ص
النوع الثالث	٧	٣	٢	ع
الطاقة المتاحة	٩٠٠	٨٠٠	١١٠٠	

ويمكن تكوين المعادلات الآتية :

٥ س + ص + ٧ ع = ٩٠٠

٢ س + ٤ ص + ٣ ع = ٨٠٠

٣ س + ٦ ص + ٢ ع = ١١٠٠

حيث

$$\text{س} = \frac{\Delta\ \text{س}}{\Delta} \qquad \text{ص} = \frac{\Delta\ \text{ص}}{\Delta} \qquad \text{ع} = \frac{\Delta\ \text{ع}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٧ \\ ٢ & ٤ & ٣ \\ ٣ & ٦ & ٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٥ & ١ & ٧ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٤ & ٣ & ٢ & ٤ \\ ٣ & ٦ & ٢ & ٣ & ٦ \end{vmatrix}$$

= [(٤٠ + ٩ + ٨٤) - (٨٤ + ٩٠ + ٤)]

= - ٤٥

$$\begin{vmatrix} ١ & ٩٠٠ & ٧ & ١ & ٩٠٠ \\ ٤ & ٨٠٠ & ٣ & ٤ & ٨٠٠ \\ ٦ & ١١٠٠ & ٢ & ٦ & ١١٠٠ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ١ & ٩٠٠ \\ ٣ & ٤ & ٨٠٠ \\ ٢ & ٦ & ١١٠٠ \end{vmatrix} = \Delta_{\text{س}}$$

$$[\,(١٦٠٠ + ١٦٢٠٠ + ٣٠٨٠٠) - (٣٣٦٠٠ + ٣٣٠٠ + ٧٢٠٠)\,] =$$

$$٤٥٠٠ - =$$

$$\begin{vmatrix} ٩٠٠ & ٥ & ٧ & ٩٠٠ & ٥ \\ ٨٠٠ & ٢ & ٣ & ٨٠٠ & ٢ \\ ١١٠٠ & ٣ & ٢ & ١١٠٠ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٧ & ٩٠٠ & ٥ \\ ٣ & ٨٠٠ & ٢ \\ ٢ & ١١٠٠ & ٣ \end{vmatrix} = \Delta_{\text{ص}}$$

$$[\,(٣٦٠٠ + ١٦٥٠٠ + ١٦٨٠٠) - (١٥٤٠٠ + ٨١٠٠ + ٨٠٠٠)\,] =$$

$$٥٤٠٠ - =$$

$$\begin{vmatrix} ١ & ٥ & ٩٠٠ & ١ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٨٠٠ & ٤ & ٢ \\ ٦ & ٣ & ١١٠٠ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٩٠٠ & ١ & ٥ \\ ٨٠٠ & ٤ & ٢ \\ ١١٠٠ & ٦ & ٣ \end{vmatrix} = \text{ع}\Delta$$

$$[(٢٢٠٠ + ٢٤٠٠٠ + ١٠٨٠٠) - (١٠٨٠٠ + ٢٤٠٠ + ٢٢٠٠٠)] =$$

$$١٨٠٠ - =$$

$$١٠٠ = \frac{٤٥٠٠-}{٤٥-} = \frac{\Delta \text{س}}{\Delta} = \text{س} \therefore$$

$$١٢٠ = \frac{٥٤٠٠-}{٤٥-} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta} = \text{ص}$$

$$٤٠ = \frac{١٨٠٠-}{٤٥-} = \frac{\Delta \text{ع}}{\Delta} = \text{ع}$$

ضرب المحددات :-

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{١١} & \text{أ}_{٢١} \\ \text{أ}_{١٢} & \text{أ}_{٢٢} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \text{ب}_{١١} & \text{ب}_{٢١} \\ \text{ب}_{١٢} & \text{ب}_{٢٢} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (\text{أ}_{١١} \times \text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢١} \times \text{ب}_{١٢}) & (\text{أ}_{١١} \times \text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{٢١} \times \text{ب}_{٢٢}) \\ (\text{أ}_{١٢} \times \text{ب}_{١١} + \text{أ}_{٢٢} \times \text{ب}_{١٢}) & (\text{أ}_{١٢} \times \text{ب}_{٢١} + \text{أ}_{١٢} \times \text{ب}_{٢٢}) \end{vmatrix}$$

العنصر الأول : هو حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول للمحدد الأول فى العناصر المقابلة لها من العمود الأول للمحدد الثانى على الترتيب .

العنصر الثانى : هو حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول للمحدد الأول فى العناصر المقابلة لها من العمود الثانى للمحدد الثانى على الترتيب.

العنصر الأول : هو حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثانى للمحدد الأول فى العناصر المقابلة لها من العمود الأول للمحدد الثانى على الترتيب .

العنصر الثانى : هو حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثانى للمحدد الأول فى العناصر المقابلة لها من العمود الثانى للمحدد الثانى على الترتيب .

مثال ١٥ :

أوجد حاصل ضرب المحددين الآتيين :

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (١\times٦+٣\times٣) & (٢\times٦+٤\times٣) \\ (١\times٥+٣\times٢) & (٢\times٥+٤\times٢) \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} ١٥ & ٢٤ \\ ١١ & ١٨ \end{vmatrix} =$$

مثال ١٦ :

أوجد حاصل ضرب المحددين الآتيين :

$$\begin{vmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & ٥ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (١\times٢+٧\times٦) & (٤\times٢+٣\times٦) \\ (١\times٤+٧\times٥) & (٤\times٤+٣\times٥) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٤٤ & ٢٦ \\ ٣٩ & ٣١ \end{vmatrix}$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن إيجاد حاصل ضرب محددين من الرتبة الثالثة كما يلى :

مثال ١٧ :

أوجد حاصل ضرب المحددين الآتيين :

$$\begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٣ \\ ٣ & ١ & ٢ \\ ٢ & ٤ & ١ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٣ \\ ٣ & ٣ & ٧ \\ ٢ & ٢ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (٢\times٢+٣\times٣+٤\times٣) & (٤\times٢+١\times٣+٥\times٣) & (١\times٢+٢\times٣+٣\times٣) \\ (٢\times٣+٣\times٣+٤\times٧) & (٤\times٣+١\times٣+٥\times٧) & (١\times٣+٢\times٣+٣\times٧) \\ (٢\times٢+٣\times٢+٤\times٤) & (٤\times٢+١\times٢+٥\times٤) & (١\times٢+٢\times٢+٣\times٤) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ٢٥ & ٢٦ & ١٧ \\ ٤٣ & ٥٠ & ٣٠ \\ ٢٦ & ٣٠ & ١٨ \end{vmatrix}$$

مثال ١٨:

أوجد حاصل ضرب المحددين الآتيين :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٢ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} (٤\times١+٢\times٢+١\times٣) & (٢\times١+٣\times٢+٣\times٣) & (٦\times١+٥\times٢+٤\times٣) \\ (٤\times٤+٢\times٢+١\times٦) & (٢\times٤+٣\times٢+٣\times٦) & (٦\times٤+٥\times٢+٤\times٦) \\ (٤\times٥+٢\times٢+١\times٣) & (٢\times٥+٣\times٢+٣\times٣) & (٦\times٥+٥\times٢+٤\times٣) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} ١١ & ١٧ & ٢٨ \\ ٢٦ & ٣٢ & ٥٨ \\ ٢٧ & ٢٥ & ٥٢ \end{vmatrix}$$

١- أوجد قيمة كل من المحددات الآتية :-

أ -

$$\begin{vmatrix} ٦ & ٣ \\ ٤- & ٢ \end{vmatrix}$$

ب -

$$\begin{vmatrix} ٤٤ & ٢٦ \\ ٣٩ & ٣١ \end{vmatrix}$$

جـ -

$$\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤- & ٢ & ٦ \\ ٥ & ٢ & ٣ \end{vmatrix}$$

د -

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٤ & ٢ & ٦ \end{vmatrix}$$

٢- باستخدام المحددات أوجد قيمة كل من س ، ص من المعادلات الآتية :-

أ - ٣ س + ٤ ص = ٥

٥ س + ٧ ص = ١

ب- ١٦ س + ٢٠ ص = ٦٩

١٢ س + ٤ ص = ٥١

جـ - ٤ س + ٦ ص = ٢٤

٢ س + ص = ٦

د - ٢ س + ص = ١

س + ٢ ص = ٨

٣- أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع باستخدام المحددات من المعادلات الآتية :-

أ - ٣ س + ٢ ص + ع = ٦

س + ٣ ص + ع = ٥

٧ س + ٣ ص + ٢ ع = ١٢

ب - س + ٤ ص + ٣ ع = ١٢

$\frac{١}{٣}$ س + ٢ ص + ٦ ع = ٦

٢ س - ١٠ ص - ٩ ع = ١٠

جـ - ٣ س - ٢ ص + ع = ١٠

٢ س + ٥ ص - ٤ع = - ٢٠

س - ٤ ص + ٢ ع = ١٥

٤- يقوم أحد المصانع بإنتاج نوعين من أجهزة التليفزيون النوع الأول ١٤ بوصة والثانى ١٦ بوصة ويحتاج إنتاج الجهاز من النوع الأول إلى ٥ ساعات عمل بالقسم (أ)، ٣ ساعات عمل بالقسم (ب) ويحتاج إنتاج الجهاز من النوع الثانى إلى ٣ ساعات عمل بالقسم (أ) ، ٨ ساعات عمل بالقسم (ب) .

فإذا علمت أن عدد الساعات المتاحة بالنسبة لكل قسم هى ١١ ، ١٩ ساعة .

إحسب عدد الأجهزة الواجب إنتاجها من كل نوع باستخدام المحددات .

٥- باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :-

أ - ٣ س - ٢ ص + ٢ ع = ١

٢ س + ص - ٢ع = ٢

س + ٢ ص - ٢ ع = ٣

ب - ٢ س + ٢ ص - ع = ٨

س + ص + ٢ع = ٩

٢ س + ص + ع = ١٠

جـ - ٣ س + ٢ ص - ع = ٤

س + ٣ ص - ٢ع = ١

- ٥ س - ٢ ص + ع = -٨

د - ٢ س + ٣ ص - ع = ٤

٥ س - ص + ٢ع = ١٥

٣ س - ٢ ص = ٨

٦- باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :-

أ - ٢ س + ٤ ص = ١٦

٣ س + ٢ ص = ١٢

ب - س + ص + ع = ٦

٢ س + ٣ ص - ع = ٥

٣ س + ٢ ص - ٢ ع = ١

جـ - ٢ س + ٦ ع = ٣٠

٣ س + ٢ ص = ١٩

٤ ص + ٢ ع = ٢٨

د - س + ٣ ص + ٤ ع = ٢١

٦ س + ٤ ص + ٦ ع = ٤٨

٤ س + ٢ ص + ع = ٢٤

٧- باستخدام المحددات حل المعادلات الآتية :-

أ- $\frac{١}{٣}$ س - $\frac{١}{٣}$ ص + $\frac{١}{٢}$ ع = ١

$\frac{٢}{٣}$ س + $\frac{٢}{٣}$ ص + ع = ٨

س + ص - ع = -٨

ب- س + ص - ع = -٢

٣ س = ٢ ص - ١

٣ ع - ٢ س = ١٣

الفصل الثاني

المصفوفات

المصفوفـــــات

١- تعريف :-

المصفوفة هى مجموعة من الأرقام مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة ولايشترط أن يتساوى عـــدد الصفوف مـــع عدد الأعمدة . فإذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة تسمى مصفوفة مربعة (Square Matrix) وتوضع أرقام المصفوفة بين قوسين مثال ذلك .

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \\ ٨ & ٢ & ٦ \end{bmatrix}$$

أما إذا كان القطر الرئيسى للمصفوفة هى الواحد الصحيح وباقى عناصر المصفوفة أصفار تسمى بمصفوفة الوحدة (أو مصفوفة الواحد الصحيح) مثال ذلك .

$$\begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ \end{bmatrix}$$

أما إذا كانت جميع عناصر المصفوفة أصفار فتسمى بالمصفوفة الصفرية مثال ذلك .

$$\begin{bmatrix} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

٢- جبر المصفوفات :-

• يشتمل جبر المصفوفات على الجمع والطرح والضرب .

١/٢ جمع المصفوفات :

يشترط لجمع أى مصفوفتين أن تكون عدد أعمدة وصفوف الأولى مساوية لعدد أعمدة وصفوف الثانية ويتم الجمع عن طريق جمع عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى مضافاً الى عناصر الصف الأول من المصفوفة الثانية (أى كل عنصر من عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى مضافاً الى العنصر المقابل له من عناصر المصفوفة الثانية) وهكذا بالنسبة لباقى الصفوف تنتج مصفوفة حاصل الجمع .

مثال١ :- أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٩ & ١٠ \\ ١٣ & ٤ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٧ \\ ٥ & ٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

مثال٢ :- أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٨ & ٦ \\ -٨ & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ -٥ & -٢ \end{bmatrix}$$

مثال ٣ :- أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٤ & ٩ \\ ٤ & ٦ & ٦ \\ ٥ & ٧ & ٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٢ & ٣ & ١ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٥ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}$$

مثال٤ :- أوجد حاصل جمع المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٦ & ١ & ٨ \\ -٢ & ٦ & ١٣ \\ ١ & ٧ & ٥ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٣ & ٥ \\ -١ & ٣ & ٧ \\ ٣ & ٤ & -٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ٤ & -٢ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٦ \\ -٢ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

٢/٢ طرح المصفوفات :

يشترط لطرح أى مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة وصفوف الأولى مساوى لعدد أعمدة وصفوف المصفوفة الثانية . ويتم طرح كل عنصر من عناصر المصفوفة الثانية من العنصر المقابل له من عناصر المصفوفة الأولى . ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :-

مثال٥ :- أوجد باقى طرح المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & ١ \\ ٧ & ١ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٦ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{bmatrix}$$

مثال٦ :- أوجد باقى طرح المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٩ \\ ١٣ & -٧ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & -٤ \\ -٦ & ٣ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -٣ & ٥ \\ ٧ & -٤ \end{bmatrix}$$

مثال٧ :- أوجد باقى طرح المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٧ & ٣ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٨ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ٣ & ٥ & ٧- \\ ٣ & ٦ & ٨ \\ ٤ & ٢- & ٣ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{صفر} & ٣- & ١٢ \\ ٤ & ٣- & ٧- \\ ٢ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$$

٣/٢ ضرب المصفوفات :

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوى لعدد صفوف المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة من عملية الضرب لها نفس صفوف الأولى وأعمدة الثانية . ويشتمل ضرب المصفوفات على الآتى :-

١/٣/٢ ضرب مصفوفة فى كمية ثابتة :

يتم ضرب الكمية الثابتة فى كل عنصر من عناصر المصفوفة .

مثال٨ :- أوجد حاصل ضرب :-

$$٥ \times \begin{bmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ١ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١٥ & ١٠ \\ ٢٠ & ٥ \end{bmatrix}$$

٢/٣/٢ ضرب المصفوفات المربعة :

إذا تم ضرب مصفوفة مربعة (وهى المصفوفة التى يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة) فى مصفوفة مربعة أخرى فأن نتيجة حاصل الضرب هو مصفوفة مربعة لها نفس أعمدة وصفوف المصفوفتين المضروبتين ويتضح ذلك من المثال التالى .

مثال٩ :- أوجد حاصل ضرب المصفوفتين :-

$$\begin{bmatrix} (١\times٥+٢\times٣) & (٣\times٥+٦\times٣) \\ (١\times٢+٢\times٤) & (٣\times٢+٦\times٤) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢ & ٦ \\ ١ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١١ & ٣٣ \\ ١٠ & ٣٠ \end{bmatrix} =$$

مثال١٠ :- أوجد حاصل ضرب المصفوفتين الآتيتين :-

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٤ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٥ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (١\times١+٢\times٢+٥\times٣) & (٣\times١+١\times٢+٢\times٣) & (٧\times١+٣\times٢+٤\times٣) \\ (١\times٥+٢\times٢+٥\times٤) & (٣\times٥+١\times٢+٢\times٤) & (٧\times٥+٣\times٢+٤\times٤) \\ (١\times١+٢\times٣+٥\times٧) & (٣\times١+١\times٣+٢\times٧) & (٧\times١+٣\times٣+٤\times٧) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٢٠ & ١١ & ٢٥ \\ ٢٩ & ٢٥ & ٥٧ \\ ٤٢ & ٢٠ & ٤٤ \end{bmatrix} =$$

٢- شرح كيفية الضرب :-

تتحدد عناصر المصفوفة الجديدة كالآتى :-

الصف الأول :-

العنصر الأول :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى فى كل عنصر من عناصر العمود الأول من المصفوفة الثانية على الترتيب (بمعنى العنصر الأول فى الصف الأول من المصفوفة الأولى × العنصر الأول فى العمود الأول من المصفوفة الثانية) + (العنصر الثانى فى الصف الأول من المصفوفة الأولى × العنصر الثانى من العمود الأول من المصفوفة الثانية) + العنصر الأخير فى الصف الأول من المصفوفة الأولى × العنصر الأخير فى العمود الأول من المصفوفة الثانية) .

العنصر الثانى :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × العناصر المقابلة له من المصفوفة الثانية على الترتيب .

العنصر الثالث :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الأول من المصفوفة الأولى × العناصر المقابلة له من المصفوفة الثانية على الترتيب .

الصف الثانى :-

العنصر الأول :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المقابلة له من العمود الأول للمصفوفة الثانية على الترتيب .

العنصر الثانى :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المقابله له من العمود الثانى للمصفوفة الثانية على الترتيب .

العنصر الثالث :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصر من عناصر الصف الثانى من المصفوفة الأولى فى العناصر المقابله له من العمود الثالث للمصفوفة الثانية على الترتيب .

الصف الثالث :-

العنصر الأول :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصرين من عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × العناصر المقابلة له من العمود الأول للمصفوفة الثانية على الترتيب .

العنصر الثانى :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصرين من عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × العناصر المقابلة له من العمود الثانى للمصفوفة الثانية على الترتيب .

العنصر الثالث :-

هو مجموع حاصل ضرب كل عنصرين من عناصر الصف الثالث من المصفوفة الأولى × العناصر المقابلة له من العمود الثالث للمصفوفة الثانية على الترتيب .

٣/٣/٢ ضرب المصفوفات غير المربعة :

مثال١١ :- أوجد حاصل ضرب المصفوفتين :-

$$\begin{bmatrix} ٦ & ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ & ٧ \\ ٥ & ٢ & ٤ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٧ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} (٥\times٥+١\times٢+٦\times٣) & (٢\times٥+٣\times٢+٢\times٣) & (٤\times٥+٧\times٢+٤\times٣) \\ (٥\times١+١\times٣+٦\times٧) & (٢\times١+٣\times٣+٢\times٧) & (٤\times١+٧\times٣+٤\times٧) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} ٤٥ & ٢٢ & ٤٦ \\ ٥٠ & ٢٥ & ٥٣ \end{bmatrix} =$$

٣- كيفية ايجاد مقلوب المصفوفة :-

يتعذر القسمة فى المصفوفات لتعدد البيانات فى المصفوفتين وعدم إمكان القسمة على جميع هذه البيانات فى وقت واحد ويمكن بالقياس على عمليات القسمة فى الجبر العادى إجراء عملية القسمة وذلك عن طريق الضرب فى مقلوب المصفوفة المراد القسمة عليها . ولتوضيح ذلك نفترض أننا بصدد عملية جبر عادية مطلوب فيها ايجاد قيمة .

س بقسمة ع على ص أى

$$س = \frac{ع}{ص} \longrightarrow (١)$$

ومن معادلة (١) نجد أن

$$س \cdot ص = ع \longrightarrow (٢)$$

وبضرب طرفى معادلة (٢) × مقلوب ص ينتج أن

$$س \cdot ص \times \frac{١}{ص} = ع \times \frac{١}{ص}$$

$$س \cdot ص \times ص^{-١} = ع \times ص^{-١}$$

$$\boxed{\therefore\ س = ع \times ص^{-١}}$$

ويتضح مما سبق أنه بدلاًمن قسمة المقدار $\frac{ع}{ص}$ لتحديد قيمة س

فإنه يتم ضرب ع × مقلوب ص

وسيتم إيجاد مقلوب المصفوفة باستخدام طريقتين هما :-

١/٣ طريقة المحيددات :

ويشترط لإيجاد مقلوب المصفوفة أن تكون المصفوفة مربعه ويجب إتباع الخطوات الآتية :-

أولاً : ايجاد قيمة محدد المصفوفة (وهى محدد عناصره هى نفس عناصر المصفوفة) .

ثانياً :- إيجاد المصفوفة المبدلة المكونة من مرافقات عناصر المحدد :

١- ايجاد محدد كل عنصر

٢- ايجاد مرافق كل عنصر

٣- تكوين مصفوفة المرافقات

٤- تبديل المصفوفة (الصفوف أعمدة والأعمدة صفوف)

ثالثاً :- ضرب $\frac{١}{\text{قيمة المحدد}}$ × المصفوفة المبدلة

ويتضح تطبيق الخطوات السابقة من المثال التالى :-

مثال١٢ :- أوجد مقلوب المصفوفة الآتية :-

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

الحل

الصيغة العامة لايجاد المقلوب :

$$\begin{bmatrix} \text{المصفوفة المبدلة} \\ \text{المكونة من} \\ \text{مرافقات عناصر} \end{bmatrix} \frac{١}{\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix}} = \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

أولاً : محدد المصفوفة

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{vmatrix} = ٦ - ٢٠ = -١٤$$

ثانياً : المصفوفة المبدلة .

$$\begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{bmatrix}$$ (مصفوفة المرافقات)

$$\begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix}$$ (المصفوفة المبدلة)

ثالثاً :

$$\begin{bmatrix} \frac{٥}{١٤} & \frac{٢}{-١٤} \\ \frac{٣}{-١٤} & \frac{٤}{١٤} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٥ & ٢ \\ ٣ & -٤ \end{bmatrix} \frac{١}{-١٤} = \text{المقلوب}$$

وللتأكد من الحل يتم ضرب المصفوفة الأصلية × مقلوبها تنتج مصفوفة الواحد الصحيح .

$$\begin{bmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٥}{١٤} & \frac{٢}{-١٤} \\ \frac{٣}{-١٤} & \frac{٤}{١٤} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{١٥}{١٤} - \frac{١٥}{١٤}\right) & \left(\frac{٢٠}{١٤} + \frac{-٦}{١٤}\right) \\ \left(\frac{٦}{١٤} - \frac{٢٠}{١٤}\right) & \left(\frac{٨}{١٤} + \frac{-٨}{١٤}\right) \end{bmatrix}$$

مثال١٣:- أوجد مقلوب المصفوفة الآتية ثم حقق النتيجة باستخدام مصفوفة الوحدة :-

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} \text{المصفوفة} \\ \text{المبدلة} \end{bmatrix} \times \frac{١}{\begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{vmatrix}} = \text{المقلوب}$$

أولاً : قيمة المحدد .

$$\begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} ١+ \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} ٢- \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} ٣= \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{vmatrix}$$

$$= ٣(١٥ - ٢١) - ٢(١٢ - ٦) + ١(٢٨ - ١٠)$$

$$= ٣ \times -٦ - ٢ \times ٦ + ١٨$$

$$= -١٢$$

ثانياً : الصفوف المبدلة .

$$\begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} & + \\ \\ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix} & - \\ \\ \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & ٤ \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٥ \end{vmatrix} & + \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ١ & -٦ \\ -٥ & ٧ & -٦ \\ ٧ & -١٧ & ١٨ \end{bmatrix} \qquad \qquad \begin{bmatrix} ١٨ & -٦ & -٦ \\ -١٧ & ٧ & ١ \\ ٧ & -٥ & ١ \end{bmatrix}$$

(المصفوفة المبدلة)   (مصفوفة المرافقات)

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{-١٢} & \frac{١}{-١٢} & \frac{٦}{١٢} \\ \frac{٥}{١٢} & \frac{٧}{-١٢} & \frac{٦}{١٢} \\ \frac{٧}{-١٢} & \frac{١٧}{١٢} & \frac{١٨}{-١٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ١ & -٦ \\ -٥ & ٧ & -٦ \\ ٧ & -١٧ & ١٨ \end{bmatrix} \frac{١}{-١٢} = \text{المقلوب}$$

للتأكد من الحل :-

المصفوفة الأصلية × مقلوبها = مصفوفة الواحد الصحيح

$$\begin{bmatrix} \frac{١}{١٢-} & \frac{١}{١٢-} & \frac{٦}{١٢} \\ \frac{٥}{١٢} & \frac{٧}{١٢-} & \frac{٦}{١٢} \\ \frac{٧}{١٢-} & \frac{١٧}{١٢} & \frac{١٨}{١٢-} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٣ & ٥ & ٤ \\ ٣ & ٧ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{٧}{١٢} - \frac{١٠}{١٢} + \frac{٣}{١٢}-\right) & \left(\frac{١٧}{١٢} + \frac{١٤}{١٢} - \frac{٣}{١٢}-\right) & \left(\frac{١٨}{١٢} - \frac{١٢}{١٢} + \frac{١٨}{١٢}\right) \\ \left(\frac{٢١}{١٢} - \frac{٢٥}{١٢} + \frac{٤}{١٢}-\right) & \left(\frac{٥١}{١٢} + \frac{٣٥}{١٢} - \frac{٤}{١٢}-\right) & \left(\frac{٥٤}{١٢} - \frac{٣٠}{١٢} + \frac{٢٤}{١٢}\right) \\ \left(\frac{٢١}{١٢} - \frac{٣٥}{١٢} + \frac{٢-}{١٢}\right) & \left(\frac{٥١}{١٢} + \frac{٤٩}{١٢} - \frac{٢}{١٢}-\right) & \left(\frac{٥٤}{١٢} - \frac{٤٢}{١٢} + \frac{١٢}{١٢}\right) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} . & . & ١ \\ . & ١ & . \\ ١ & . & . \end{bmatrix} =$$

٢/٣ طريقة التخفيض المحورى :

يطلق على هذه الطريقة طريقة المصفوفة المجاوره أو مصفوفة الوحدة وبمقتضى هذه الطريقة يتم وضع المصفوفة الأصلية ومصفوفة الوحدة على الشكل التالى :-

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ ١ & ٠ & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{array}\right]$$

أو

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ٠ & ٠ & ١ & \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ ٠ & ١ & ٠ & \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ ١ & ٠ & ٠ & \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{array}\right]$$

ويتم تحويل المصفوفة الأصلية بالتدريج الى مصفوفة الوحدة وتكون المصفوفة الناتجة محل مصفوفة الوحدة هى مقلوب المصفوفة .

وتعتمد هذه الطريقة على قاعدتين أساسيتين وهامتين هما :-

القاعدة الأولى :- لتحويل أى عنصر إلى الواحد الصحيح يتم قسمة جميع عناصر الصف الذى يوجد به هذا الرقم على نفس الرقم .

القاعدة الثانية :- لتحويل أى عنصر إلى صفر يتم ضرب جميع عناصر الصف الذى تم فيه تحويل قيمة الرقم إلى واحد × نفس الرقم المراد تحويله إلى صفر

باشارة مخالفة وجمع كل عنصر من عناصر هذا الصف على العناصر المقابلة لها من عناصر الصف المراد تحويل قيمة الرقم إلى صفر ، وباتباع هاتين القاعدتين يمكن تحويل عناصر المصفوفة إلى مصفوفة الوحدة والتوصل إلى مقلوب المصفوفة ويتضح ذلك من الأمثلة الآتية :

مثال١٤:-

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية باستخدام التخفيض المحورى :-

$$\begin{bmatrix} ٥ & ٣ \\ ٢ & ٤ \end{bmatrix}$$

الحل:-

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ٠ & ١ & ٥ & ٣ \\ ١ & ٠ & ٢ & ٤ \end{array}\right]$$

١- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الأول العمود الأول الى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر هذا الصف على ٣ .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} ٠ & \frac{١}{٣} & \frac{٥}{٣} & ١ \\ ١ & ٠ & ٢ & ٤ \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الثانى العمود الأول الى صفر وذلك بضرب عناصر الصف الأول × -٤ وجمعه على الصف الثاني .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \text{صفر} & \frac{-14}{3} & \frac{-4}{3} & 1 \end{array}\right]$$

٣- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الثانى العمود الثانى الرقم $\frac{-14}{3}$ الى واحد صحيح بقسمة عناصر الصف الثانى على نفس الرقم $\frac{-14}{3}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{5}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \text{صفر} & 1 & \frac{4}{14} & \frac{-3}{14} \end{array}\right]$$

٤- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الأول العمود الثانى الرقم $\frac{5}{3}$ الى صفر وذلك بضرب عناصر الصف الثانى فى $\left(\frac{-5}{3}\right)$ وجمعه على الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \text{صفر} & \frac{-2}{14} & \frac{5}{14} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{4}{14} & \frac{-3}{14} \end{array}\right]$$

مثال١٥ :-

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية باستخدام التخفيض المحورى :-

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

١- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الأول العمود الأول (الرقم ٢) الى واحد صحيح بقسمة عناصر الصف الأول على ٢ .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الثانى العمود الأول (- ١) الى صفر وذلك بضرب عناصر الصف الأول × ١ وجمعه على الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \text{صفر} & \frac{13}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

٣- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الثانى العمود الثانى الرقم $\frac{13}{2}$ إلى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر الصف الثانى على $\frac{13}{2}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right]$$

٤- يتم تحويل العنصر الموجود بالصف الأول العمود الثانى الى الصفر وذلك بضرب عناصر الصف الثانى × $\frac{-3}{2}$ وجمعه على الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & \text{صفر} & \frac{10}{26} & \frac{-3}{13} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{1}{13} & \frac{2}{13} \end{array}\right]$$

مثال١٦ :-

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية باستخدام التخفيض المحورى :-

$$\left[\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{array}\right]$$

الحل :-

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

١- يتم تحويل العنصر الأول فى الصف الأول إلى واحد صحيح وذلك بقسمة عناصر الصف على نفس الرقم .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \text{صفر} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \text{صفر} & -2 & 1 \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر بالصف الثانى العمود الأول إلى صفر وذلك بضرب عناصر الصف الأول × - ١ وجمعه على عناصر الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-5}{2} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٣- يتم تحويل العنصر بالصف الثانى العمود الثانى إلى صفر وذلك بقسمة عناصر الصف الثانى على $-\frac{5}{2}$.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \text{صفر} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٤- يتم تحويل العنصر بالصف الأول العمود الثانى إلى صفر وذلك بضرب عناصر الصف الثانى × $-\frac{1}{2}$ وجمعه على الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{5} & \frac{4}{10} & \text{صفر} & 1 \\ \frac{-2}{5} & \frac{1}{5} & 1 & \text{صفر} \end{array}\right]$$

مثال١٧ :-

أوجد مقلوب المصفوفة الآتية باستخدام التخفيض المحورى :-

$$\begin{bmatrix} ٢ & ٢ & ٢- \\ ١ & ٣ & ٤ \\ ١- & ١ & ١ \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ٢ & ٢ & ٢- & ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٣ & ٤ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١- & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right]$$

١- يتم تحويل العنصر الأول بالصف الأول إلى واحد صحيح وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار وذلك كما يلى :

* بقسمة عناصر الصف الأول على الرقم (٢) .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ١ & ١- & \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ ١ & ٣ & ٤ & ٠ & ١ & ٠ \\ ١- & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الأول × -١ وجمعه على عناصر الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} ١ & ١ & ١- & \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & ٢ & ٥ & \frac{١-}{٢} & ١ & ٠ \\ ١- & ١ & ١ & ٠ & ٠ & ١ \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الأول × ١ وجمعه على عناصر الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 2 & 5 & \frac{-1}{2} & 1 & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 2 & \text{صفر} & \frac{1}{2} & \text{صفر} & 1 \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر بالصف الثانى العمود الثانى إلى واحد صحيح وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار ويتم ذلك عن طريق الآتى :-

* بقسمة عناصر الصف الثانى على ٢ .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & \frac{1}{2} & \text{صفر} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 2 & \text{صفر} & \frac{1}{2} & \text{صفر} & 1 \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الثانى × -١ وجمعه على عناصر الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \text{صفر} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{4} & \frac{-1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 2 & \text{صفر} & \frac{1}{2} & \text{صفر} & 1 \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الثانى × -٢ وجمعه على عناصر الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \text{صفر} & \frac{-7}{2} & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & 1 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} & \text{صفر} \\ \text{صفر} & \text{صفر} & -5 & +1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

٣- يتم تحويل العنصر بالصف الثالث العمود الثالث إلى واحد صحيح وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار كالآتى :

* بقسمة عناصر الصف الثالث على – ٥ .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \text{صفر} & \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٤} & \frac{-٧}{٢} & \text{صفر} & ١ \\ \text{صفر} & \frac{١}{٢} & \frac{-١}{٤} & \frac{٥}{٢} & ١ & \text{صفر} \\ \frac{١}{-٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{-٥} & ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الثالث × – $\frac{٥}{٢}$ وجمعه على عناصر الصف الثانى .

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \text{صفر} & \frac{-١}{٢} & \frac{٣}{٤} & \frac{-٧}{٢} & \text{صفر} & ١ \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \frac{١}{٤} & \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \frac{-١}{٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{-٥} & ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الثالث × $\frac{٧}{٢}$ وجمعه على عناصر الصف الأول.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{-٧}{١٠} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{٢٠} & \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ \frac{١}{٢} & \text{صفر} & \frac{١}{٤} & \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ \frac{١}{-٥} & \frac{١}{٥} & \frac{١}{-٥} & ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٤- حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات :-

يمكن حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات عن طريق مقلوب المصفوفة باستخدام طريقة المحددات أو باستخدام طريقة التخفيض المحورى ، وسوف نوضح إستخدام الطريقتين فى حل المعادلات الخطية .

مثال١٨ :-

أوجد قيمة كل من س ، ص من المعادلات الآتية :-

٢ س + ص = ١

س - ٢ ص = - ٧

الحل :-

سوف يتم حل هذا المثال مرة باستخدام طريقة مقلوب المصفوفة باستخدام طريقة المحددات ومرة أخرى باستخدام طريقة التخفيض المحورى .

أولاً : بإستخدام طريقة المحددات :

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{bmatrix}^{-١}}_{\text{مقلوب المصفوفة}} \times \begin{bmatrix} ١ \\ -٧ \end{bmatrix}$$

وهنا يتم إيجاد مقلوب المصفوفة عن طريق المحيددات ويتم ضرب هذا المقلوب فى الحدود المطلقة .

١- مقلوب المصفوفة :-

* قيمة المحدد : $\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ١ & -٢ \end{vmatrix}$ = - ٤ - ١ = - ٥

* المصفوفة المبدلة :-

$$\begin{bmatrix} + & - \\ -٢ & ١ \\ - & + \\ ١ & ٢ \end{bmatrix}$$ (مصفوفة المرافقات)

$$\begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$ (المصفوفة المبدلة)

$$\text{المقلوب} = \frac{١}{-٥} \begin{bmatrix} -٢ & -١ \\ -١ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{٢}{-٥} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} & \frac{١}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{٢}{-٥} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ١ \\ -٧ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٢}{٥} - \frac{٧}{٥} \\ \frac{١}{٥} + \frac{١٤}{٥} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \therefore\ س = -١ \\ ص = ٣ \end{array}}$$

ثانياً : بإستخدام طريقة التخفيض المحورى :

$$\left[\begin{array}{c|cc} \text{١} & \text{١} & \text{٢} \\ \text{٧-} & \text{٢-} & \text{١} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

يتم تحويل هذه المصفوفة إلى مصفوفة الوحدة

الناتج هو قيمة كل من س ، ص

١- بقسمة عناصر الصف الأول على ٢

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{١} \\ \text{٧-} & \text{٢-} & \text{١} \end{array}\right]$$

٢- بضرب عناصر الصف الأول x – ١ وجمعه على الثانى

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{١} \\ \frac{\text{١٥-}}{\text{٢}} & \frac{\text{٥-}}{\text{٢}} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٣- بقسمة عناصر الصف الثانى على $\frac{\text{٥-}}{\text{٢}}$

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \frac{\text{١}}{\text{٢}} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٤- بضرب عناصر الصف الثانى x – $\frac{\text{١}}{\text{٢}}$ وجمعه على الصف الأول :

$$\left[\begin{array}{c|cc} \text{١-} & \text{صفر} & \text{١} \\ \text{٣} & \text{١} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -١ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

∴ س = -١ ، ص = ٣

مثال١٩:-

حل المعادلات الآتية باستخدام المصفوفات :-

س + ٣ ص + ٣ ع = ٤

س + ٤ ص + ٣ ع = ٥

س + ٣ ص + ٤ ع = ٣

الحل:-

أولاً : باستخدام طريقة المحيددات :

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{bmatrix}}_{\text{مقلوب المصفوفة}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} ٤ \\ ٥ \\ ٣ \end{bmatrix}}_{\text{الحدود المطلقة}}$$

١- مقلوب المصفوفة :

* محدد المصفوفة :

$$\begin{vmatrix} ١ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} = ١ \begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix} - ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}$$

$$= ١ (١٦ - ٩) - ٣ (٤ - ٣) + ٣ (٣ - ٤)$$

$$= ٧ \quad - \quad ٣ \quad - \quad ٣ \quad = \quad ١$$

* المصفوفة المبدلة :

$$\begin{bmatrix} + \overset{(٧)}{\begin{vmatrix} ٤ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}} & - \overset{(١)}{\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}} & + \overset{(-١)}{\begin{vmatrix} ١ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}} \\ - \overset{(٣)}{\begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}} & + \overset{(١)}{\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}} & - \overset{(\text{صفر})}{\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}} \\ + \overset{(-٣)}{\begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}} & - \overset{(\text{صفر})}{\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٣ \end{vmatrix}} & + \overset{(١)}{\begin{vmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}} \end{bmatrix}$$

$$\underset{\text{(مصفوفة المرافقات)}}{\begin{bmatrix} ٧ & -١ & -١ \\ -٣ & ١ & \text{صفر} \\ -٣ & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}} \qquad \underset{\text{(المصفوفة المبدلة)}}{\begin{bmatrix} ٧ & -٣ & -٣ \\ -١ & ١ & \text{صفر} \\ -١ & \text{صفر} & ١ \end{bmatrix}}$$

$$\text{المقلوب} = \frac{1}{\text{قيمة المحدد}} \times \text{المصفوفة المبدلة}$$

$$= \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & \text{صفر} \\ -1 & \text{صفر} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & \text{صفر} \\ -1 & \text{صفر} & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 & -15 & -9 \\ -4 & 5 & \text{صفر} \\ -4 & \text{صفر} & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

ثانياً : باستخدام طريقة التخفيض المحورى :

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right]$$

يتم تحويل هذه المصفوفة الى مصفوفة الوحدة

الناتج هو قيمة كل من س ، ص ، ع

١- يتم تحويل العنصر بالصف الأول العمود الأول إلى واحد وباقى أرقام هذا العمود إلى أصفار وحيث أن هذا الرقم هو واحد ∴ يتم تحويل باقى عناصر العمود إلى أصفار وذلك عن طريق الآتى :-

* بضرب عناصر الصف الأول × - ١ وجمعه على عناصر الصف الثانى .

* بضرب عناصر الصف الأول × - ١ وجمعه على عناصر الصف الثالث .

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \text{٤} & \text{٣} & \text{٣} & \text{١} \\ \text{١} & \text{صفر} & \text{١} & \text{صفر} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر الواقع بالصف الثانى العمود الثانى إلى واحد وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار وحيث أن هذا الرقم هو واحد ∴ يتم تحويل باقى عناصر العمود إلى أصفار وذلك عن طريق الآتى :-

* بضرب عناصر الصف الثانى × - ٣ وجمعه على عناصر الصف الأول .

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \text{١} & \text{٣} & \text{صفر} & \text{١} \\ \text{١} & \text{صفر} & \text{١} & \text{صفر} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٣- يتم تحويل الرقم الواقع بالصف الثالث العمود الثالث إلى واحد صحيح وباقى أرقام هذا العمود إلى أصفار وذلك عن طريق .

* ضرب عناصر الصف الثالث × -٣ وجمعه على عناصر الصف الأول

$$\left[\begin{array}{c|ccc} ٤ & \text{صفر} & \text{صفر} & ١ \\ ١ & \text{صفر} & ١ & \text{صفر} \\ ١- & ١ & \text{صفر} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} ٤ \\ ١ \\ ١- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix}$$

∴ س = ٤
ص = ١
ع = - ١

مثال٢٠:-

أوجد قيمة كل من س ، ص باستخدام المصفوفات :-

٣ س + ٢ ص = ٧

٤ س + ٣ ص = ١٠

الحل:-

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ٧ \\ ١٠ \end{bmatrix}}_{\text{الحدود المطلقة}} \times \underbrace{\begin{bmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}}_{\text{مقلوب المصفوفة}} = \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة :-

* قيمة المحدد :-

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix} = ٩ - ٨ = ١$$

* المصفوفة المبدلة :-

$$\begin{bmatrix} + & - \\ ٣ & ٤ \\ - & + \\ ٢ & ٣ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ٣ & -٤ \\ -٢ & ٣ \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix}$$

(مصفوفة المرافقات)　　　(المصفوفة المبدلة)

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٣ & -٢ \\ -٤ & ٣ \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٧ \\ ١٠ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} س \\ ص \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ٢١ & -٢٠ \\ -٢٨ & +٣٠ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

س = ١	
ص = ٢	

باستخدام التخفيض المحورى :

$$\left[\begin{array}{c|cc} ٧ & ٢ & ٣ \\ ١٠ & ٣ & ٤ \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} س \\ ص \end{array}\right]$$

١- يتم تحويل العنصر بالصف الأول العمود الأول إلى واحد وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار كالآتى :-

*** بقسمة عناصر الصف الأول على ٣ .**

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{٧}{٣} & \frac{٢}{٣} & ١ \\ ١٠ & ٣ & ٤ \end{array}\right]$$

*** بضرب عناصر الصف الأول × - ٤ وجمعه على الصف الثانى**

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{٧}{٣} & \frac{٢}{٣} & ١ \\ \frac{٢}{٣} & \frac{١}{٣} & \text{صفر} \end{array}\right]$$

٢- يتم تحويل العنصر بالصف الثانى العمود الثانى إلى واحد وباقى عناصر هذا العمود إلى أصفار كالآتى .

*** بقسمة عناصر الصف الثانى على $\frac{١}{٣}$**

$$\left[\begin{array}{c|cc} \frac{٧}{٣} & \frac{٢}{٣} & ١ \\ ٢ & ١ & \text{صفر} \end{array}\right]$$

* بضرب عناصر الصف الثانى × − $\frac{\text{٢}}{\text{٣}}$ وجمعه على الأول .

$$\left[\begin{array}{cc|c} \text{١} & \text{صفر} & \text{١} \\ \text{صفر} & \text{١} & \text{٢} \end{array}\right]$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} \\ \text{٢} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \boxed{\begin{array}{c} \text{س} = \text{١} \\ \hline \text{ص} = \text{٢} \end{array}}$$

مثال٢١ :-

أوجد قيمة كل من س ، ص ، ع باستخدام المصفوفات :-

س + ص + ع = ٢

− س + ص + ٣ع = ٤

س + ٣ص + ٢ع = ٢

الحل :-

$$\begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{١} & \text{١} & \text{١} \\ \text{١-} & \text{١} & \text{٣} \\ \text{١} & \text{٣} & \text{٢} \end{bmatrix}^{\text{١-}} \times \begin{bmatrix} \text{٢} \\ \text{٤} \\ \text{٢} \end{bmatrix}$$

مقلوب المصفوفة   الحدود المطلقة

مقلوب المصفوفة :-

* قيمة المحدد :-

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (2-9) - 1(-2-3) + 1(-3-1)$$

$$= -7 + 5 - 4 = -6$$

* المصفوفة المبدلة :-

$$\begin{bmatrix} +\underset{(-7)}{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} & -\underset{(-5)}{\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} & +\underset{(-4)}{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ -\underset{(-1)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}} & +\underset{(1)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} & -\underset{(2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} \\ +\underset{(2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} & -\underset{(4)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}} & +\underset{(2)}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -7 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \\ -4 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(مصفوفة المرافقات) (المصفوفة المبدلة)

$$\text{المقلوب} = \frac{١}{-٦} \begin{bmatrix} -٧ & ١ & ٢ \\ ٥ & ١ & -٤ \\ -٤ & -٢ & ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{٧}{٦} & -\frac{١}{٦} & -\frac{٢}{٦} \\ -\frac{٥}{٦} & -\frac{١}{٦} & +\frac{٤}{٦} \\ \frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} & -\frac{٢}{٦} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \\ \text{ع} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{٧}{٦} & -\frac{١}{٦} & -\frac{٢}{٦} \\ -\frac{٥}{٦} & -\frac{١}{٦} & +\frac{٤}{٦} \\ \frac{٤}{٦} & +\frac{٢}{٦} & -\frac{٢}{٦} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{١٤}{٦} & -\frac{٤}{٦} & -\frac{٤}{٦} \\ -\frac{١٠}{٦} & -\frac{٤}{٦} & +\frac{٨}{٦} \\ \frac{٨}{٦} & +\frac{٨}{٦} & -\frac{٤}{٦} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ \\ -١ \\ ٢ \end{bmatrix}$$

س	=	١
ص	=	-١
ع	=	٢

الفصل الثالث

القواعد الأساسية لنظرية الاحتمالات

المبحث الأول

التعاريف والقواعد الأساسية لنظرية الإحتمالات

مقدمة :-

تعتبر الإحتمالات من أهم فروع الرياضيات التى تستخدم فى مجالات التقدم العلمى والتى تقوم عليها الكثير من الدراسات ومن بينها الدراسات التجارية . فقد ظلت الإحتمالات زمناً طويلاً ولاتزال الدعامة التى تقوم عليها نظرية الخطر والتأمين كما أنها أخذت مكان الصداره فى إدارة الأعمال من حيث مراقبة جودة الإنتاج والمخزون بالإضافة إلى أنها أصبحت من الأساسيات فى بحوث العمليات سواء ماكان منها متصلاً بالمحاسبة الإدارية أو محاسبة التكاليف أو إدارة الأعمال أو الإحصاء الرياضى .

وقبل أن نبدأ فى تعريف الإحتمال يتعين علينا إلقاء الضوء على بعض التعاريف الأساسية الخاصة بالإحتمالات .

١ - تعريف الحادث :-

يعرف الحادث بأنه فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة حيث أن أى تجربة يكون لها مجموعة من النتائج . فمثلاً عند إلقاء زهره نرد (زهره طاولة) على سطح أملس فإذا سألنا عن فئة النتائج الشاملة فهى تتمثل فى ظهور الأرقام (١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦) وإذا سألنا عن ظهور الأرقام الفردية فقط فإن الحدث (أ) يتمثل فى ظهور الأرقام (١ ، ٣ ، ٥) وإذا سألنا عن ظهور الأرقام الزوجية فقط فإن الحدث (ب) يتمثل فى ظهور (٢ ، ٤ ، ٦) ويعتبر الحادثان أ ، ب كل منهما فئة جزئية من فئة النتائج الشاملة .

٢- أنواع الحوادث :-

١/٢ الحوادث المؤكدة الوقوع :

وهى الحوادث التى يكون الشخص متأكداً تماماً من وقوعها أو حدوثها دون حاجة لإجراء تجارب مقدماً فعلى سبيل المثال يمكن القول أنه من المؤكد إذا ألقينا قطعة نقود على سطح أملس سيكون الناتج صوره أو كتابه ويمكن القول أيضاً أنه من المؤكد أن تشرق الشمس من الشرق وتغرب من الغرب فكل هذه الأحداث نتيجتها معروفة مقدماً دون حاجة لإجراء أى تجارب عملية للتحقق من النتيجة .

وعلى هذا الأساس تكون نسبة وقوع هذه الحوادث ١٠٠٪ .

٢/٢ الحوادث المؤكدة عدم الوقوع (الحوادث المستحيلة) :

وهى الحوادث التى يكون الشخص متأكداً تماماً من عدم حدوثها أو وقوعها دون حاجة لإجراء تجارب مقدماً فعلى سبيل المثال يمكن القول أنه من المؤكد أن الشمس لاتشرق من الغرب ومثال آخر إذا ألقينا قطعة نقود على سطح أملس فمن المؤكد عدم ظهور الصوره والكتابة معاً فى وقت واحد أو بمعنى آخر يستحيل ظهور الصوره والكتابة فى وقت واحد . ويعتبر نتيجة وقوع هذه الحوادث معروفة مقدماً دون حاجة لإجراء أية تجارب عملية للتحقق من هذه النتيجة وعلى هذا الأساس تكون نسبة وقوع هذه الحوادث = صفر٪ .

٣/٢ الحوادث غير المؤكدة الوقوع :

فى حالة عدم وجود عنصر التاكد بالنسبة لتوقع أى شخص بمعنى أن الشخص يكون غير متأكد مقدماً من وقوع حادث ما وغير متاكد أيضاً من عدم وقوعه فيطلق على

هده الحالة لفظ من المحتمل وهو لفظ يدل على حادث عير مؤكد الوقوع وغير مؤكد عدم الوقوع

وعلى سبيل المثال نقول من المحتمل نجاح طالب بالسنة الأولى بكلية التجارة – جامعة القاهرة – هذا العام ، وأيضاً من المحتمل وصول الطائرة القادمة من مطار لندن إلى مطار القاهرة فى الميعاد المحدد لها . وأيضاً من المحتمل أن يظهر على السطح العلوى صوره لقطعة نقود ألقيت على سطح أملس .

ومن العرض السابق يمكن أن نصل إلى تعريف محدد للإحتمال .

٣ - تعريف الإحتمال :-

الإحتمال هو عبارة عن نسبة تحقق الحدث أو المجموعة الفرعية بالنسبة للمجموعة الشاملة أو الكلية . أو هو كسر أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح . كما يمكن تعريف الإحتمال أيضاً بأنه التكرار النسبى لتحقق حادث معين وعلى أساس هذا التعريف يكون :-

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{الحدث أو المجموعة الجزئية}}{\text{المجموعة الشاملة أو الكلية}}$$

أو

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{عدد الحالات التى تحقق الإحتمال}}{\text{عدد الحالات الكلية}}$$

وبطريقة أخرى

$$\text{إحتمال وقوع حادث ما} = \frac{\text{عدد الحالات المواتية أو الموافقة لتحقق الحادث}}{\text{عدد الحالات الممكنة أو الكلية لتحقق جميع الحوادث}}$$

فإذا كان عدد الحالات المواتية أو الموافقة لتحقق الحادث أ هى م حالة من بين عدد الحالات الممكنة أو الكلية وهى ن حالة ، فإن :-

$$ح(أ) = \frac{م}{ن}$$

ملاحظات هامة :-

أ - الإحتمال عبارة عن كسر أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح .

ب - لايمكن أن يكون الإحتمال قيمة سالبة .

جـ - لايمكن أن يزيد الإحتمال عن الواحد الصحيح .

٤ - أنواع الإحتمالات :-

تنقسم الإحتمالات إلى نوعين رئيسيين هما :-

١/٤ الإحتمال النظرى أو الرياضى أو الحسابى :

Mathematical Probability

يتم حساب الإحتمال النظرى أو الرياضى دون حاجة لإجراء تجارب معينة وتعتبر قيمة هذا الإحتمال ثابتة لاتختلف بإختلاف الفرد أو الزمان أو المكان . فعلى سبيل المثال إذا ألقيت زهرة طاولة على سطح أملس فإن إحتمال ظهور أى رقم من الأرقام على السطح العلوى للزهرة = $\frac{١}{٦}$ وإذا ألقيت قطعة نقود مرة واحدة على سطح أملس فإن إحتمال ظهور الشعار الجمهورى على السطح العلوى = $\frac{١}{٢}$

ويلاحظ أنه لتحقق الإحتمال النظرى يشترط أساساً وجود التناسق والتجانس والتماثل والتساوى فى المفردات موضوع الدراسة كتجانس الماده المصنوعة منها قطعة النقود كذلك تناسق وتساوى سمك هذه القطعة فى أى جزء من أجزائها .

كما يمكن تقسيم الإحتمال النظرى أو الرياضى أو الحسابى إلى :-

١/١/٤ إحتمال بسيط : Simple Probabilites

وهو مايتعلق بحادث واحد فقط بسيط والحادث البسيط هو عبارة عن فئة جزئية أو فرعية تشمل ناتج واحد فقط من نتائج الفئة الشاملة .

٢/١/٤ إحتمال مركب : Compound Probability

وهو يتعلق بعده حوادث بسيطة أو بحادث واحد مركب .

٢/٤ الإحتمال التجريبى أو الإحصائى :

Statistical Probability

يتم حساب الإحتمال التجريبى أو الإحصائى من واقع الخبرة الفعلية بعد إجراء تجارب معينة فعلى سبيل المثال إذا طلب حساب إحتمال ظهور السطح العلوى لزهره الطاولة وعليه ٤ نقط فى الحالات الآتية :-

أ - إذا ألقيت زهرة الطاولة ٥٠٠ مرة .

ب - إذا ألقيت زهرة الطاولة ١٠٠٠ مرة .

جـ - إذا ألقيت زهرة الطاولة ٣٠٠٠ مرة .

وهنا يقتضى الأمر القيام بثلاث تجارب وتسجيل عدد المرات التى يظهر فيها السطح العلوى لزهرة الطاولة وعليه ٤ نقط فى كل تجربة .

ويلاحظ أن الإحتمال التجريبى يختلف عن الإحتمال النظرى حيث أن الإحتمال النظرى لظهور السطح العلوى لزهرة الطاولة وعليه ٤ نقط إذا ألقى مرة واحدة = $\frac{١}{٦}$ = ١٦٧, ، ومن المعلوم أن الإحتمال النظرى والإحتمال التجريبى يتساويان تقريباً إذا كان عدد الوحدات الخاضعة لتجربة معينة عدداً كبيراً جداً وهذا مايعبر عنه بقانون الأعداد الكبيرة والذى ينص على :-

« كلما زادت عدد الوحدات الخاضعة لتجربة معينة زيادة لانهائية كلما تلاشى الفرق بين الإحتمال النظرى والإحتمال التجريبى أي كلما إتجه هذا الفرق إلى الصفر »

فإذا كان لدينا الحادث (أ) وكان عدد مرات وقوعه هى (م) حالة من بين عدد مرات إجراء التجربة وليكن م حالة فإن إحتمال وقوع الحادث (أ) يقترب من قيمة معينة تنطبق تماماً مع الإحتمال النظرى ولتكن هذه القيمة ع . كلما زاد عدد مرات إجراء التجربة (ن) زيادة كبيرة جداً تقترب من مالانهاية .

ويعبر عن ذلك رياضياً كما يلى :-

$$ح(أ) = \lim_{ن \to \alpha} \frac{م}{ن} = ع$$

٥ - قاعدة الإحتمال العكسى (الإحتمال التكميلى) :-

إذا كان عدد مرات النجاح فى تجربة ماأجريت (ن) من المرات هو (م) حالة

وبالتالى فإن عدد حالات الفشل لنفس التجربة يتحـــدد بالمقـدار (ن – م) وعلى ذلك يكون :-

إحتمال النجاح = $\frac{م}{ن}$

إحتمال الفشل = $\frac{ن - م}{ن}$

إحتمال النجاح + إحتمال الفشل = $\frac{م}{ن} + \frac{ن - م}{ن}$

= $\frac{م + ن - م}{ن}$

إحتمال النجاح + إحتمال الفشل = ١

ومن العلاقة السابقة يمكن القول أن :-

الإحتمال المطلوب + الإحتمال العكسى = ١
الإحتمال المطلوب = ١ – الإحتمال العكسى

وعن طريق العلاقة السابقة يمكن إيجاد أحد الإحتمالين بمعلومية الإحتمال الآخر.

امثلة متنوعة :-

مثال (١) :-

ألقى مكعب منتظم (زهرة طاولة) مرقم بالأرقام من ١ - ٦ على سطح أملس إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ – إحتمال ظهور الرقم (١) على السطح العلوى للزهره .

ب – إحتمال ظهور الرقم (٢) على السطح العلوى للزهرة .

جـ - إحتمال ظهور الرقم (٣) على السطح العلوى للزهرة .

د - إحتمال ظهور الرقم (٤) على السطح العلوى للزهرة .

هـ - إحتمال ظهور الرقم (٥) على السطح العلوى للزهرة .

و - إحتمال ظهور الرقم (٦) على السطح العلوى للزهرة .

ز - مجموع الإحتمالات السابقة .

ح - إحتمال ظهور الرقم (٧) على السطح العلوى للزهرة .

الحل :-

أ - إحتمال ظهور الرقم (١) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم واحد}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

ب - إحتمال ظهور الرقم (٢) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٢)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

جـ - إحتمال ظهور الرقم (٣) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٣)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

د - إحتمال ظهور الرقم (٤) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٤)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

هـ - إحتمال ظهور الرقم (٥) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٥)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

و - إحتمال ظهور الرقم (٦) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٦)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{١}{٦}$$

ز - مجموع الإحتمالات السابقة $= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = ١$

ح- إحتمال ظهور الرقم (٧) على السطح العلوى للزهرة :-

$$= \frac{\text{عدد الأوجه التى تحمل الرقم (٧)}}{\text{عدد الأوجه الكلية}} = \frac{\text{صفر}}{٦} = \text{صفر}$$

حالة إستحالة مطلقة وهذا يعتبر حادث مؤكد عدم الوقوع .

مثال (٢) :-

ورقة لعب عددها ٥٢ ورقة سحبت منها ورقة واحدة إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة ولد .

ب - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت .

جـ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة صوره .

د - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الأوراق ذات اللون الأحمر .

هـ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة السبعة الطيبة (الكومى) .

الحل :-

أ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة ولد :-

$$= \frac{\text{عدد الأوراق التى تحمل صوره ولد}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{٤}{٥٢}$$

ب - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة بنت :-

$$= \frac{\text{عدد الأوراق التى تحمل صوره بنت}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{٤}{٥٢}$$

جـ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة صوره :-

$$= \frac{\text{عدد الأوراق التى تحمل صوره}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{١٢}{٥٢}$$

د - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة من الأوراق ذات اللون الأحمر :-

$$= \frac{\text{عدد الأوراق ذات اللون الأحمر}}{\text{عدد الأوراق الكلية}} = \frac{٢٦}{٥٢}$$

هـ - إحتمال أن تكون الورقة المسحوبة (السبعة الطيبة) :-

$$= \frac{\text{عدد الأوراق التى تحمل السبعة الطيبة}}{\text{عدد الأوراق جميعها}} = \frac{١}{٥٢}$$

مثال (٣) :-

صندوق به ٣٠ كرة حمراء ، ٥٠ كرة بيضاء ، ٢٠ كرة صفراء . سحبت منه كرة واحدة إحسب الإحتمالات الآتية :-

١ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٢ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء .

٣ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء .

٤ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء .

الحل :-

١ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء = $\frac{\text{عدد الكرات الحمراء}}{\text{عدد الكرات جميعها}}$

$= \frac{٣٠}{١٠٠} = ٣,$

٢ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات جميعها}}$

$= \frac{٥٠}{١٠٠} = ٥,$

٣ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء = $\frac{\text{عدد الكرات الصفراء}}{\text{عدد الكرات جميعها}}$

$= \frac{٢٠}{١٠٠} = ٢,$

٤ - إحتمال أن تكون الكره المسحوبة سوداء = $\frac{\text{عدد الكرات السوداء}}{\text{عدد الكرات جميعها}}$

= $\frac{\text{صفر}}{١٠٠}$ = صفر

حالة إستحالة مطلقة (حادث مؤكد عدم الوقوع)

مثال (٤) :-

مخزن به ٩٠ سلعة جيدة ، ١٠ سلع رديئة فإذا تم سحب سلعة واحدة عشوائياً من هذا المخزن . إحسب الإحتمالات الآتية :-

١ - إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة .

٢ - إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة رديئة .

الحل :-

١ - إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة = $\frac{\text{عدد السلع الجيدة}}{\text{عدد السلع جميعها}}$

= ,٩

أ، بإستخدام قاعدة الإحتمال العكسى .

إحتمال أن تكون السلعة جيدة = ١ - إحتمال أن تكون السلعة رديئة .

= ١ - ,١ = ,٩

٢ - إحتمال أن تكون السلعة رديئة = $\frac{\text{عدد السلع الرديئة}}{\text{عدد السلع جميعها}}$

= $\frac{١٠}{١٠٠}$ = ,١

أ، بإستخدام قاعدة الإحتمال العكسى .

إحتمال أن تكون السلعة رديئة = ١ - إحتمال أن تكون السلعة جيدة .

= ١ - ,٩ = ,١

٦ - الإحتمالات المركبة:- Compound Probabilities

تتعلق الإحتمالات المركبة بعده حوادث بسيطة أو بحادث واحد مركب والحادث المركب عبارة عن فئة جزئية تشمل أكثر من ناتج واحد من نتائج الفئة الشاملة وتتحدد العلاقة بين الظواهر والحوادث المختلفة من خلال المجموعات التالية :-

أ - مجموعة الحوادث المانعة او المتنافرة او المتعارضة :-

هى مجموعة الظواهر أو الحوادث أو النواتج التى إذا تحقق إحداها يمنعه أو يلغى تماماً وقوع الحوادث الأخرى بمعنى آخر يستحيل وقوع مجموعة من الحوادث المانعة أو المتعارضة فى وقت واحد .

ب - مجموعة الحوادث المشتركة جزئيا:-

تعتبر الظواهر أو الحوادث مشتركة جزئياً إذا كان بينها عناصر مشتركة وأمكن لكل حادث . أن يقع منفرداً على حده كما يمكن للحوادث جميعها أن تتحد أو تقع مشتركة جزئياً فقط وفى نفس الوقت .

ج - مجموعة الحوادث المستقلة :-

هى مجموعة الحوادث أو الظواهر التى إذا وقع إحداها لايؤثر على وقوعه باقى الحوادث الأخرى ويمكن للحوادث جميعها أن تقع معاً فى وقت واحد .

د - مجموعة الحوادث غير المستقلة (الحوادث المرتبطة أو المشروطة) :-

هى مجموعة الحوادث أو الظواهر التى إذا وقع إحداها يؤثر على وقوع باقى الحوادث الأخرى فتحدث معاً مرتبطة أو مشروطة

ويتكون الإحتمال المركب من مجموعة الإحتمالات البسيطة للظواهر أو الحوادث أو النواتج المختلفة وذلك بعد معالجتها رياضياً إما عن طريق جمع هذه الإحتمالات أو عن طريق حاصل ضربها وذلك حسب نوع الحوادث المختلفة السابقة والعلاقة بينها . ويتضح ذلك من خلال تطبيق القواعد الأساسية للإحتمالات .

١/٦ القواعد الأساسية لحساب الإحتمالات المركبة:-

١/١/٦ قاعدة الجمع :-

أ- مجموعة الحوادث المانعة أو المتنافرة أو المتعارضة :

إذا كان لدينا الحادثان المانعان $أ_١$ ، $أ_٢$ وهذا يعنى أن تحقق الحادث $أ_١$ يمنع أو يلغى تحقق الحادث $أ_٢$ والعكس صحيح فإن تحقق الحادث $أ_٢$ يلغى تحقق الحادث $أ_١$ أى أنه يستحيل حدوثها معاً فى نفس الوقت .

والمثال على ذلك قطعة النقود فكل وجه من أوجه قطعة النقود يمثل حدث بسيط والوجهين معاً يمثلان حادثان مانعان بمعنى يستحيل ظهور الوجهين معاً فى وقت واحد . وكذلك مكعب زهره الطاولة فكل وجه من أوجه هذا المكعب يمثل حدث بسيط وإذا أخذنا وجهين أو أكثر فإنهما يمثلان عدة حوادث مانعة بمعنى أنه يستحيل ظهور أكثر من وجه واحد على السطح العلوى لمكعب زهره الطاولة

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث أ$_1$ بالرمز ح (أ$_1$)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث أ$_2$ بالرمز ح (أ$_2$)

وإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث أ$_1$ أو الحادث (أ$_2$) بالرمز

ح (أ$_1$ أو أ$_2$) فإن

ح (أ$_1$ أو أ$_2$) = ح (أ$_1$) + ح (أ$_2$)

ملحوظة :-

الرمز أو ــــ يحول إلى ــــ◄ علامة جمع

مثال (٥) :-

بفرض أن لدينا صندوق به ١٠٠ كرة منها ٧٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، ١٠ كرات صفراء . فإذا سحبنا كرة واحدة من هذا الصندوق فما هو إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو صفراء ثم إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء أو بيضاء أو صفراء .

الحل :-

بفرض أن ح (أ$_1$) = إحتمال سحب كرة حمراء .

ح (أ$_2$) = إحتمال سحب كرة بيضاء .

ح $(أ_١$ أو $أ_٢)$ = إحتمال سحب كرة حمراء أو بيضاء

∴ ح $(أ_١$ أو $أ_٢)$ = ح $(أ_١)$ + ح $(أ_٢)$

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} + \frac{٢٠}{١٠٠} = ٠,٩$$

وبفرض أن ح $(أ_٣)$ = إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء

∴ ح $(أ_١$ أو $أ_٢$ أو $أ_٣)$ = ح $(أ_١)$ + ح $(أ_٢)$ + ح $(أ_٣)$

$$= \frac{٧٠}{١٠٠} + \frac{٢٠}{١٠٠} + \frac{١٠}{١٠٠}$$

$$= ٠,٧ + ٠,٢ + ٠,١ = ١$$

مثال (٦):-

ألقى مكعب منتظم له ستة أوجه مرقمة بالأرقام من ١ - ٦ إحسب الإحتمالات الآتية :-

١- إحتمال ظهور الرقم ٥ أو الرقم ٦ إلى أعلى .

٢ - إحتمال ظهور أحد الأرقام ٤ على الأقل .

٣ - إحتمال ظهور أحد الأرقام أقل من ٣ .

٤ - إحتمال ظهور أحد الأرقام ٤ على الأكثر .

٥ - إحتمال ظهور أحد الأرقام أكثر من ٣ .

الحل :-

١ - إحتمال ظهور الرقم ٥ أو ٦ :-

إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم ٥ بالرمز $أ_١$

إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم ٦ بالرمز $أ_٢$

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦}$$

٢ - إحتمال ظهور أحد الأرقام ٤ على الأقل :-

هذا الإحتمال يعنى ظهور الأرقام ٤ أو ٥ أو ٦

فإذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم ٤ بالرمز $أ_١$

، إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم ٥ بالرمز $أ_٢$

و إذا رمزنا لإحتمال ظهور الرقم ٦ بالرمز $أ_٣$

∴ ح ($أ_١$ أو $أ_٢$ أو $أ_٣$) = ح ($أ_١$) + ح ($أ_٢$) + ح ($أ_٣$)

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

٣ - إحتمال ظهور أحد الأرقام أقل من ٣ :-

هذا الإحتمال يعنى ظهور الأرقام ٢ أو ١

$\therefore$ ح $(أ_1$ أو $أ_2) =$ ح $(أ_1) +$ ح $(أ_2)$

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$$

٤ – إحتمال ظهور الأرقام ٤ على الأكثر :-

هذا الإحتمال يعني ظهور أحد الأرقام ٤ أو ٣ أو ٢ أو ١

$\therefore$ ح $(أ_1$ أو $أ_2$ أو $أ_3$ أو $أ_4) =$ ح $(أ_1) +$ ح $(أ_2) +$ ح $(أ_3) +$ ح $(أ_4)$

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦}$$

$$= \frac{٤}{٦} = \frac{٢}{٣}$$

٥ – إحتمال ظهور أحد الأرقام أكثر من ٣ :-

هذا الإحتمال يعني ظهور أحد الأرقام ٤ أو ٥ أو ٦

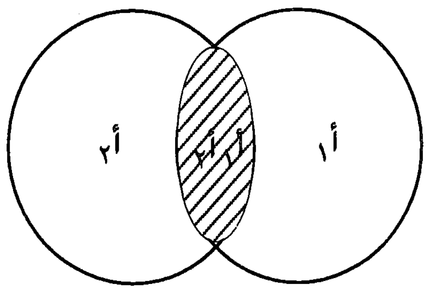
$\therefore$ ح $(أ_1$ أو $أ_2$ أو $أ_3) =$ ح $(أ_1) +$ ح $(أ_2) +$ ح $(أ_3)$

$$= \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} + \frac{١}{٦} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$$

ب - مجموعة الحوادث المشتركة جزئياً :-

١ - إحتمال تحقق حادث على الاقل من حادثين :-

إذا كان لدينا الحادثان أ$_1$ ، أ$_2$ حيث يوجد بينها عناصر مشتركة جزئياً بحيث يمكن للحادث أ$_1$ أن يقع منفرداً دون وقوع الحادث أ$_2$ كما يمكن للحادث أ$_2$ أن يقع منفرداً دون وقوع الحادث أ$_1$ ويمكن للحادثان أ$_1$ ، أ$_2$ أن يقعا مشتركان فى نفس الوقت كما يتضح من الشكل التالى .



تمثل الدائرة الأولى كاملة عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث . أ$_1$ كما تمثل الدائرة الثانية بالكامل عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث أ$_2$ ويمثل الجزء المظلل أ$_1$ أ$_2$ عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان أ$_1$ أ$_2$ مشتركان .

وإذا رمزنا لإحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما أو لإحتمال تحقق حادث واحد على الأقل من الحادثين بالرمز ح (أ$_1$ + أ$_2$) فيمكن الوصول لهذا الإحتمال كالآتى .

إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما يعنى إحتمال تحقق الحادث الأول أ$_1$ على إنفراد دون تحقق الحادث الثانى معه + إحتمال تحقق الحادث الثانى أ$_2$ على إنفراد

دون تحقق الحادث الأول معه + إحتمال تحقق الحادثان $أ_1$ ، $أ_2$ معاً مشتركان .

فإذا كان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث $أ_1$ على إنفراد دون وقوع الحادث $أ_2$ هى $م_1$ حالة .

وكان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث $أ_2$ على إنفراد دون وقوع الحادث $أ_1$ هى $م_2$ حالة .

وكان عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان $أ_1$ ، $أ_2$ معاً مشتركان هى $م_{12}$ حالة وكان عدد الحالات جميعها ن حالة فإن :-

إحتمال تحقق الحادث $أ_1$ على إنفراد = $\frac{م_1}{ن}$

إحتمال تحقق الحادث $أ_2$ على إنفراد = $\frac{م_2}{ن}$

إحتمال تحقق الحادث $أ_1$ ، $أ_2$ معاً مشتركان = $\frac{م_{12}}{ن}$

ويكون إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما = $\frac{م_1}{ن} + \frac{م_2}{ن} + \frac{م_{12}}{ن}$

وبإضافة وطرح $\frac{م_{12}}{ن}$ للإحتمالات السابقة نجد أن

إحتمال تحقق أحد الحادثين أو كلاهما = $\frac{م_1}{ن} + \frac{م_2}{ن} + \frac{م_{12}}{ن} + \frac{م_{12}}{ن} - \frac{م_{12}}{ن}$

$$= \left(\frac{م_1 + م_{12}}{ن}\right) + \left(\frac{م_2 + م_{12}}{ن}\right) - \frac{م_{12}}{ن}$$

$$\boxed{\therefore ح(أ_1 + أ_2) = ح(أ_1) + ح(أ_2) - ح(أ_1\ أ_2)}$$

وتمثل ($م_1 + م_{12}$) عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث $أ_1$ وتمثلها الدائرة الأولى بالكامل كما تمثل ($م_2 + م_{12}$) عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادث $أ_2$ وتمثلها الدائرة الثانية بالكامل وهذا يعنى أن الجزء المظلل وهو عدد الحالات التى يمكن أن يقع بها الحادثان $أ_1$ ، $أ_2$ معاً مشتركان قد تكرر مرتين مع الدائرة الأولى مرة ومع الدائرة الثانية مرة أخرى لذلك وجب حذفه مرة واحدة حتى لايتكرر إضافة العناصر المشتركة مرتين .

مثال (٧) :-

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة هو ٩, وإحتمال نجاحه فى مادة المحاسبة هو ٦, . أوجد إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين .

الحل :-

بفرض أن إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة ح ($أ_1$)

بفرض أن إحتمال نجاح الطالب فى مادة المحاسبة ح ($أ_2$)

، إحتمال نجاح الطالب فى المادتين معاً ح ($أ_1$ $أ_2$)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين ح ($أ_1 + أ_2$)

∴ ح ($أ_1 + أ_2$) = ح ($أ_1$) + ح ($أ_2$) − ح ($أ_1$ $أ_2$)

= ٩, + ٦, − (٩, × ٦,)

= ١,٥ − ٥٤, = ٩٦,

حل آخر :- عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى :

إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين = ١ - إحتمال الرسوب فى المادتين .

= ١ - (,١ × ,٤)

= ١ - ,٠٤ = ,٩٦

وهو نفس الناتج السابق .

مثال (٨) :-

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الإقتصاد هو ,٨ وإحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من مادتى الإقتصاد والتنظيم = ,٩

إحسب إحتمال نجاح الطالب فى مادة التنظيم .

الحل :-

إحتمال نجاح الطالب فى مادة الإقتصاد = ح (أ$_1$) = ,٨

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة التنظيم = ح (أ$_2$) = ؟

، إحتمال نجاح الطالب فى المادتين معاً = ح (أ$_1$ أ$_2$)

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين = ح (أ$_1$ + أ$_2$) = ,٩

∴ ح (أ$_1$ + أ$_2$) = ح (أ$_1$) + ح (أ$_2$) - ح (أ$_1$ أ$_2$)

,٩ = ,٨ + ح (أ$_2$) - ,٨ × ح (أ$_2$)

= ,٨ + ح (أ$_{٢}$) [١ - ,٨]

= ,٨ + ,٢ ح (أ$_{٢}$)

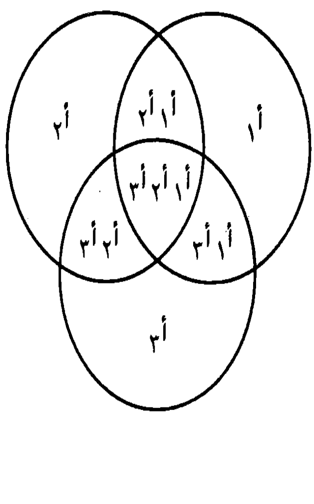
,٩ - ,٨ = ,٢ ح (أ$_{٢}$)

,١ = ,٢ ح (أ$_{٢}$)

∴ ح (أ$_{٢}$) = ,٥

٢ - إحتمال تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث :-

إذا كان لدينا الحوادث أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ، أ$_{٣}$ حيث يوجد بينها حوادث مشتركة جزئياً بحيث يمكن للحادث أ١ أن يقع منفرداً دون الحادثان أ$_{٢}$ ، أ$_{٣}$ ويمكن للحادث أ$_{٢}$ أن يقع منفرداً دون الحادثان أ$_{١}$ ، أ$_{٣}$ كما يمكن للحادث أ$_{٣}$ أن يقع منفرداً دون الحادثان أ$_{١}$ ، أ$_{٢}$ ويمكن أيضاً للحوادث الثلاثة أن تحدث معاً بالإشتراك فى وقت واحد كما يتضح ذلك من الشكل التالى :-



ويلاحظ أن إحتمال تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث هو عبارة عن حاصل جمع إحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة كل إحتمال على حده مطروحاً منه إحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة كل إحتمالين معاً مضافاً إليه إحتمال تحقق الحوادث الثلاثة معاً.

ويلاحظ أيضاً أن عدد الحدود الخاصة بإحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة مفرده يتحدد على أساس $^{٣}\text{ق}_{١}$. وأن عدد الحدود الخاصة بإحتمالات تحقق الحوادث الثلاثة معاً يتحدد على أساس $^{٣}\text{ق}_{٣}$ وإذا رمزنا للحوادث الثلاث بالرموز $\text{أ}_{١}$ ، $\text{أ}_{٢}$ ، $\text{أ}_{٣}$ فإنه يكون لدينا .

$$\text{ح}(\text{أ}_{١} + \text{أ}_{٢} + \text{أ}_{٣}) = \text{ح}(\text{أ}_{١}) + \text{ح}(\text{أ}_{٢}) + \text{ح}(\text{أ}_{٣}) - [\,\text{ح}(\text{أ}_{١}\,\text{أ}_{٢}) + \text{ح}(\text{أ}_{١}\,\text{أ}_{٣}) + \text{ح}(\text{أ}_{٢}\,\text{أ}_{٣})\,] + \text{ح}(\text{أ}_{١}\,\text{أ}_{٢}\,\text{أ}_{٣})$$

مثال (٩) :-

إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة هو ٩, وإحتمال نجاحه فى مادة السلوكية ٨, وإحتمال نجاحه فى مادة الموارد الإقتصادية ٧, أوجد إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد .

الحل :-

إحتمال نجاح الطالب فى مادة الرياضة = $\text{ح}(\text{أ}_{١})$

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة السلوكية = ح (أ_{2})

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة الموارد الإقتصادية = ح (أ_{3})

، إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد

= ح $(\text{أ}_{1} + \text{أ}_{2} + \text{أ}_{3})$

∵ ح $(\text{أ}_{1} + \text{أ}_{2} + \text{أ}_{3})$ = ح (أ_{1}) + ح (أ_{2}) + ح (أ_{3})

- [ح $(\text{أ}_{1}\text{أ}_{2})$ + ح $(\text{أ}_{1}\text{أ}_{3})$ + ح $(\text{أ}_{2}\text{أ}_{3})$]

+ ح $(\text{أ}_{1}\text{أ}_{2}\text{أ}_{3})$

∴ ح $(\text{أ}_{1} + \text{أ}_{2} + \text{أ}_{3})$ = ,٩ + ,٨ + ,٧ - [(,٩ × ,٨) + (,٩ × ,٧)

+ (,٨ × ,٧)] + (,٩ × ,٨ × ,٧)

= ٢,٤ - [,٧٢ + ,٦٣ + ,٥٦] + ,٥٠٤

= ٢,٤ - ١,٩١ + ,٥٠٤

= ,٤٩ + ,٥٠٤ = ,٩٩٤

حل آخر:- عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى :

إحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من الثلاث مواد

= ١ - (إحتمال الرسوب فى المواد الثلاث) .

= ١ - (,١ × ,٢ × ,٣)

= ١ - ,٠٠٦ = ,٩٩٤

٢/١/٦ قاعدة الضرب :-

أ - مجموعة الحوادث المستقلة :-

إذا كان لدينا الحادثان أ$_1$ ، أ$_2$ المستقلان وهذا يعنى أن وقوع الحادث أ$_1$ لايؤثر على وقوع الحادث أ$_2$ والعكس صحيح فوقوع الحادث أ$_2$ لايؤثر على وقوع الحادث أ$_1$ وليس هناك مايمنع من حدوثها معاً فى وقت واحد .

والأمثلة على الحوادث المستقلة كثيرة فإذا ألقينا قطعتى نقود على سطح أملس فكل قطعة على حدة تمثل حادث مستقل عن القطعة الأخرى وظهور أحد الأوجه فى أى قطعة لايؤثر على ظهور أى وجه فى القطعة الأخرى ، وليس هناك مايمنع من ظهور صورتان معاً أو كتابتان معاً أو ظهور صوره فى أحد القطعتين مع كتابة على القطعة الأخرى .

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث الأول بالرمز ح (أ$_1$)

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادث الثانى بالرمز ح (أ$_2$)

فإذا رمزنا لإحتمال وقوع الحادثان أ$_1$ ، أ$_2$ معاً فى وقت واحد بالرمز ح (أ$_1$ أ$_2$)

فإن :-

ح (أ$_1$ و أ$_2$) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$)

ملحوظة :-

الرمز و $\xrightarrow{\text{يحول إلى}}$ علامة ضرب

مثال (١٠):-

ثلاثة أشخاص أ ، ب ، جـ إحتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة فى نهاية سنة على الترتيب ٨, ، ٧, ، ٦,

إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال حياة الثلاثة حتى نهاية السنة .

ب - إحتمال وفاة الثلاثة خلال السنة .

جـ - إحتمال وفاة أ فقط من بين الثلاثة خلال السنة .

الحل:-

أ - إحتمال حياة الثلاثة حتى نهاية السنة :-

وهذا الإحتمال يعنى حياة أ وحياة ب وحياة جـ

∴ ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

=٨, × ٧, × ٦,

=٣٣٦,

ب - إحتمال وفاة الثلاثة خلال السنة :-

وهذا الإحتمال يعنى وفاة أ ووفاة ب ووفاة جـ

ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

=(١ -٨,)(١ -٧,)(١ -٦,)

=٢, × ٣, × ٤,

=٠٢٤,

جـ - إحتمال وفاه أ فقط خلال السنة :-

وهذا يعنى إحتمال وفاه أ فقط وحياة ب و جـ

ح (أ و ب و جـ) = ح (أ) × ح (ب) × ح (جـ)

= (١ - ,٨) × ,٧ × ,٦

= ,٢ × ,٧ × ,٦

= ,٠٨٤

مثال (١١) :-

ثلاثة صناديق الأول به ٣٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، ٥٠ كرة صفراء .

والثانى به ٢٥ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء ، ٤٥ كرة صفراء .

والثالث به ٤٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، ٤٠ كرة صفراء .

فإذا تم سحب كرة واحدة من كل صندوق بطريقة عشوائية .

إحسب إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء اللون .

الحل :-

٣٠ ح	٢٥ ح	٤٠ ح
٢٠ ب	٣٠ ب	٢٠ ب
٥٠ ص	٤٥ ص	٤٠ ص
١٠٠ كرة	١٠٠ كرة	١٠٠ كرة

إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء .

هذا يعنى إحتمال سحب كرة حمراء من الصندوق الأول وسحب كرة حمراء من الصندوق الثانى وسحب كرة حمراء من الصندوق الثالث .

فإذا رمزنا لإحتمالات السحب من الصندوق الأول والثانى والثالث على الترتيب بالرمز $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$. فإن

$$ح (أ_١ و أ_٢ و أ_٣) = ح (أ_١) × ح (أ_٢) × ح (أ_٣)$$

$$= \frac{٣٠}{١٠٠} × \frac{٢٥}{١٠٠} × \frac{٤٠}{١٠٠}$$

$$= ,٣ × ,٢٥ × ,٤$$

$$= ,٠٣$$

مثال (١٢) :-

فى أحد المصانع ثلاثة مخازن بكل منها عدد من السلع الممتازة والجيدة والرديئة على النحو التالى :-

المخزن الأول به ٨٠٠ سلعة ممتازة ، ١٥٠ سلعة جيدة ، ٥٠ سلعة رديئة .

المخزن الثانى به ٧٠٠ سلعة ممتازة ، ٢٠٠ سلعة جيدة ، ١٠٠ سلعة رديئة .

المخزن الثالث به ٦٠٠ سلعة ممتازة ، ١٠٠ سلعة جيدة ، ٣٠٠ سلعة رديئة .

فإذا تم سحب سلعة واحدة عشوائياً من كل مخزن فما هو إحتمال .

١ - أن تكون جميع السلع المسحوبة ممتازة .

٢ -أن تكون جميع السلع المسحوبة جيدة .

٣ - أن تكون جميع السلع المسحوبة رديئة .

الحل :-

المخزن / حالة السلعة	المخزن الأول	المخزن الثانى	المخزن الثالث
ممتازة	٨٠٠	٧٠٠	٦٠٠
جيدة	١٥٠	٢٠٠	١٠٠
رديئة	٥٠	١٠٠	٣٠٠
المجموع	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠

١- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة ممتازة :-

هذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة ممتازة من المخزن الأول وممتازة من المخزن الثانى وممتازة من المخزن الثالث وبفرض أن إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة ممتازة من المخزن الأول والثانى والثالث .

سوف نرمز لها على الترتيب بالرمز $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$

$$ح (أ_١ و أ_٢ و أ_٣) = ح (أ_١) \times ح (أ_٢) \times ح (أ_٣)$$

$$= \frac{٨٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٦٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ,٨ \times ,٧ \times ,٦$$

$$= ,٣٣٦$$

٢- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة جيدة :-

هذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة جيدة من المخزن الأول الثانى والثالث .

$$ح\,(أ_1 \text{ و } أ_2 \text{ و } أ_3) = ح\,(أ_1) \times ح\,(أ_2) \times ح\,(أ_3)$$

$$= \frac{١٥٠}{١٠٠٠} \times \frac{٢٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ,١٥ \times ,٢ \times ,١$$

$$= ,٠٠٣٠$$

٣- إحتمال أن تكون جميع السلع المسحوبة رديئة :-

هذا يعنى إحتمال أن تكون السلعة المسحوبة رديئة من المخزن الأول والثانى والثالث .

$$ح\,(أ_1 \text{ و } أ_2 \text{ و } أ_3) = ح\,(أ_1) \times ح\,(أ_2) \times ح\,(أ_3)$$

$$= \frac{٥٠}{١٠٠٠} \times \frac{١٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}$$

$$= ,٠٥ \times ,١ \times ,٣$$

$$= ,٠٠١٥$$

مثال (١٣):-

صندوق به ١٠٠ كرة منها ٦٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء ، ١٠ كرات سوداء سحب منه كرة واحدة فى ثلاث مرات متتالية . إحسب الإحتمالات الآتية :

١ - إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء .

٢ - إحتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

وذلك فى الحالتين الآتيين :-

أ - مع الإحلال (رد الكرة المسحوبة وقبل عملية السحب التالى) .

ب - مع عدم الإحلال (عدم رد الكرة المسحوبة) .

الحل :-

٦٠ ح
٣٠ ب
١٠ س

١٠٠ كرة

أولا :- مع الإحلال :-

١ - إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء .

$$= \frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٦٠}{١٠٠}$$

= ,٦ × ,٦ × ,٦ = ,٢١٦

٢ - إحتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

$$= \frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٣٠}{١٠٠} \times \frac{١٠}{١٠٠}$$

= ,٦ × ,٣ × ,١

= ,٠١٨

ثانياً :- مع عدم الإحلال :-

١ - إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء .

$$= \frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٥٩}{٩٩} \times \frac{٥٨}{٩٨}$$

= ,٦ × ,٥٩٦ × ,٥٩ = ,٢١١

ملحوظة :-

يلاحظ هنا أن الكرة المسحوبة لايعاد وضعها إلى الصندوق معنى ذلك أن بعد عملية السحب الأول عدد الكرات الحمراء قد نقص بمقدار كرة واحدة وكذلك العدد الكلى نقص بمقدار هذه الكرة فأصبح عدد الكرات الحمراء بعد عملية السحب الأول ٥٩ كرة والعدد الكلى ٩٩ كرة . وكذلك بعد عملية السحب الثانى . نجد أن عدد الكرات الحمراء قد نقص بمقدار هذه الكرة فأصبح ٩٨ كرة .

٢ - إحتمال أن تكون الكرة الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة سوداء .

$$= \frac{٦٠}{١٠٠} \times \frac{٣٠}{٩٩} \times \frac{١٠}{٩٨}$$

$$= ,٦ \times ,٣٠٣ \times ,١٠٢$$

$$= ,٠١٨٥$$

ملحوظة :-

يلاحظ هنا أن الكرة المسحوبة لايعاد وضعها إلى الصندوق معنى ذلك أن بعد إجراء عملية السحب الأول نجد أن العدد الكلى للكرات نقص بمقدار كرة واحدة الحمراء المسحوبة فأصبح ٩٩ كرة .

وعند إجراء عملية السحب الثانى نجد أن عدد الكرات البيضاء مازال ٣٠ كرة . والعدد الكلى ٩٩ كرة . وبعد إجراء عملية السحب الثالث نجد أن عدد الكرات قد نقص بمقدار الكرة البيضاء المسحوبة فأصبح ٩٨ كرة . وعند إجراء عملية السحب الثالث نجد أن عدد الكرات السوداء مازال ١٠ كرات فى حين أن العدد الكلى ٩٨ كرة فقط . وهو العدد المتبقى بعد إجراء عملية السحب الثانى .

٣/١/٦ قاعدتى الجمع والضرب معاً :-

تستخدم قاعدتى الجمع والضرب فى نفس الوقت فى حالة الحوادث المانعة والحوادث المستقلة أو غير المستقلة معاً . والأمثلة التالية توضح ذلك .

مثال (١٤) :-

ثلاثة أشخاص أ ، ب ، جـ فإذا كان إحتمال بقائهم على قيد الحياة فى نهاية سنة على الترتيب ,٨ ، ,٧ ، ,٦ .

إحسب الإحتمالات الآتية :-

١ – إحتمال حياة أ فقط حتى نهاية السنة .

٢ – إحتمال حياة واحد فقط حتى نهاية السنة .

٣ – إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة .

٤ – إحتمال وفاه واحد على الأكثر خلال السنة .

الحل :-

١ - إحتمال حياة أ فقط حتى نهاية السنة :-

وهذا يعنى إحتمال حياة أ ووفاه ب و جـ

=٨, × ٣, × ٤,

=٠٩٦,

٢ - إحتمال حياة واحد فقط حتى نهاية السنة :-

فى هذه الحالة لايوجد تخصيص للشخص الذى يبقى على قيد الحياة لذلك لابد من تحديد كافة الإحتمالات الممكنة .

= حياة أ ووفاه ب و جـ أو حياة ب ووفاه أ و جـ أو حياة جـ ووفاه أ و ب .

= ٨, × ٣, × ٤, + ٧, × ٢, × ٤, + ٦, × ٢, × ٣,

= ٠٩٦, + ٠٥٦, + ٠٣٦,

=١٨٨,

٣ - إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة :-

وهذا يعنى إحتمال حياة واحد فقط أو إثنين فقط أو حياة الثلاثة .

وهنا يتمثل الإحتمال المطلوب فى حاصل جمع الثلاث إحتمالات السابقة .

أ - إحتمال حياة واحد فقط :-

= حياة أ ووفاه ب و جـ أو حياة ب ووفاه أ و جـ أو حياه جـ ووفاه أ و ب

= ,٨ × ,٣ × ,٤ + ,٧ × ,٢ × ,٤ + ,٦ × ,٢ × ,٣

= ,١٨٨

ب - إحتمال حياة إثنين فقط :-

= حياة أ و ب ووفاه جـ أو حياة أ و جـ ووفاه ب أو حياه ب و جـ ووفاه أ

= ,٨ × ,٧ × ,٤ + ,٨ × ,٦ × ,٣ + ,٧ × ,٦ × ,٢

= ,٢٢٤ + ,١٤٤ + ,٠٨٤

= ,٤٥٢

جـ - إحتمال حياة الثلاثة معاً :-

= حياة أ و ب و جـ

= ,٨ × ,٧ × ,٦

= ,٣٣٦

∴ إحتمال حياة واحد على الأقل = ,١٨٨ + ,٤٥٢ + ,٣٣٦

= ,٩٧٦

حل آخر : (بإستخدام قانون تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث) :

إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة :-

ح (أ١ + أ٢ + أ٣) = ح (أ١) + ح (أ٢) + ح (أ٣) - [ح (أ١ أ٢) + ح (أ١ أ٣)

+ ح (أ٢ أ٣) + ح (أ١ أ٢ أ٣)

= ,٨ + ,٧ + ,٦ - [(,٨ × ,٧) + (,٨ × ,٦) + (,٧ × ,٦)] + (,٨ × ,٧ × ,٦)

= (٢,١) - [,٥٦ + ,٤٨ + ,٤٢] + ,٣٣٦

= ٢,١ - ١,٤٦ + ,٣٣٦

= ,٩٧٦

حل آخر :-

بإستخدام قاعدة الإحتمال العكسى :-

= ١ - إحتمال وفاه الثلاثة .

= ١ - (,٢ × ,٣ × ,٤)

= ١ - ,٠٢٤ = ,٩٧٦

٤ - إحتمال وفاه واحد على الأكثر خلال السنة :-

وهذا يعنى إحتمال وفاه واحد فقط أو عدم وفاه أى واحد منهم ويتمثل الإحتمال المطلوب فى حاصل جمع النتيجتين .

أ - إحتمال وفاه واحد فقط :-

= وفاه أ وحياة ب و جـ أو وفاه ب وحياه أ و جـ أو وفاه جـ وحياة أ و ب

= ,٢ × ,٧ × ,٦ + ,٣ × ,٨ × ,٦ + ,٤ × ,٨ × ,٧

= ,٠٨٤ + ,١٤٤ + ,٢٢٤

= ,٤٥٢

ب - إحتمال عدم وفاه أى واحد منهم :-

= حياه أ و ب و جـ

= ,٨ × ,٧ × ,٦ = ,٣٣٦

∴ إحتمال وفاه واحد على الأكثر خلال السنة = ٤٥٢, + ٣٣٦,

=٧٨٨,

مثال (١٥):-

صندوق به ٣٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، ٥٠ كرة صفراء فإذا سحبنا منه كرة واحدة فى ثلاث مرات متتالية دون إحلال (عدم رد الكرة المسحوبة مرة ثانية إلى الصندوق) . إحسب إحتمال أن تكون الكرات الثلاث المسحوبة مختلفة الألوان .

الحل :-

إحتمال أن تكون الكرات الثلاث مختلفة الألوان يعنى إحتمال أن تكون احدى الكرات حمراء والأخرى بيضاء والأخرى صفراء دون ترتيب لذلك يجب أخذ التراتيب المختلفة فى الإعتبار .

∴ إحتمال أن تكون الكرات الثلاث مختلفة الألوان

= إحتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية بيضاء والثالثة صفراء .

أو إحتمال أن تكون الأولى حمراء والثانية صفراء والثالثة بيضاء .

أو إحتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية حمراء والثالثة صفراء .

أو إحتمال أن تكون الأولى صفراء والثانية حمراء والثالثة بيضاء .

أو إحتمال أن تكون الأولى صفراء والثانية بيضاء والثالثة حمراء .

أو إحتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية صفراء والثالثة حمراء .

$$+\left(\frac{٢٠}{٩٨}\times\frac{٥٠}{٩٩}\times\frac{٣٠}{١٠٠}\right)+\left(\frac{٥٠}{٩٨}\times\frac{٢٠}{٩٩}\times\frac{٣٠}{١٠٠}\right)=$$

$$+\left(\frac{٢٠}{٩٨}\times\frac{٣٠}{٩٩}\times\frac{٥٠}{١٠٠}\right)+\left(\frac{٥٠}{٩٨}\times\frac{٣٠}{٩٩}\times\frac{٢٠}{١٠٠}\right)$$

$$\left(\frac{٣٠}{٩٨}\times\frac{٥٠}{٩٩}\times\frac{٢٠}{١٠٠}\right)+\left(\frac{٣٠}{٩٨}\times\frac{٢٠}{٩٩}\times\frac{٥٠}{١٠٠}\right)$$

$$\left(\frac{٥٠}{٩٨}\times\frac{٢٠}{٩٩}\times\frac{٣٠}{١٠٠}\right)\ ٦\ =$$

$$(\ ,٥١\times ,٢٠٢\times ,٣\ )\ ٦\ =$$

$$,١٨٥\ =$$

حل آخر :-

يتكون الإحتمال المطلوب من عدة حالات تنتج من ترتيبات الألوان الثلاثة المختلفة معاً بطرق عددها ٣ لـ٣ أو $\underline{|٣}$.

$$\therefore \text{الإحتمال} = \underline{|٣} \times \frac{٣٠}{١٠٠}\times\frac{٢٠}{٩٩}\times\frac{٥٠}{٩٨}$$

$$= ٣\times٢\times١\ (,٣\times ,٢٠٢\times ,٥١)$$

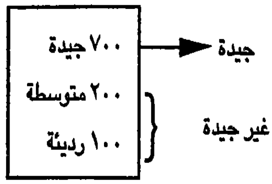
$$= ,١٨٥$$

مثال (١٦) :-

تم حصر عدد السلع الموجودة بأحد المخازن فتبين أنه يوجد به ٧٠٠ سلعة جيدة ، ٢٠٠ سلعة متوسطة ، ١٠٠ سعة رديئة .

فإذا سحبنا منه سلعة واحدة عشوائية فى ثلاث مرات متتالية إحسب إحتمال أن يكون من بين السلع الثلاث سلعة واحدة على الأقل جيدة .

الحل :-



١٠٠٠

إحتمال سحب سلعة واحدة على الأقل جيدة :-

= سلعة واحدة فقط جيدة أو سلعتين فقط جيدة أو الثلاث سلع جيدة .

$$= {}^{٣}\text{ق}_{١}\left(\frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}\right) + {}^{٣}\text{ق}_{٢}\left(\frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}\right) + {}^{٣}\text{ق}_{٣}\left(\frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٧٠٠}{١٠٠٠}\right)$$

$$= {}^{٣}\text{ق}_{١}\,(٫٧ \times ٫٣ \times ٫٣) + {}^{٣}\text{ق}_{٢}\,(٫٧ \times ٫٧ \times ٫٣) + {}^{٣}\text{ق}_{٣}\,(٫٧ \times ٫٧ \times ٫٧)$$

$$= ٣(٫٠٦٣) + ٣(٫١٤٧) + ١(٫٣٤٣)$$

$$= ٫١٨٩ + ٫٤٤١ + ٫٣٤٣$$

$$= ٫٩٧٣$$

حل آخر :-

إحتمال سحب سلعة واحدة على الأقل جيدة :-

= ١ - (إحتمال أن تكون الثلاث سلع غير جيدة)

$$= ١ - \left(\frac{٣٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٣٠٠}{١٠٠٠}\right)$$

$$= ١ - (٫٣ \times ٫٣ \times ٫٣)$$

$$= ١ - ٫٠٢٧ = ٫٩٧٣$$

حل آخر :-

(بإستخدام قانون تحقق حادث على الأقل من ثلاث حوادث)

إحتمال سحب سلعة واحدة على الأقل جيدة :-

$$ح(أ_1 + أ_2 + أ_3) = ح(أ_1) + ح(أ_2) + ح(أ_3)$$

$$- [ح(أ_1 أ_2) + ح(أ_1 أ_3) + ح(أ_2 أ_3)] + ح(أ_1 أ_2 أ_3)$$

= ,٧ + ,٧ + ,٧ − [,٧ × ,٧ + ,٧ × ,٧ + ,٧ × ,٧] + ,٧ × ,٧ × ,٧

= ٢,١ − ١,٤٧ + ,٣٤٣

= ,٩٧٣

وهو نفس الناتج السابق .

٤/١/٦ قاعدة الحوادث المرتبطة (و المشروطة (الإحتمال الشرطى) :-

Conditional and Joint events

إذا كان لدينا الحادثان $أ_1$ ، $أ_2$ الغير مستقلان أو حادثان مرتبطان بمعنى أن تحقق الحادث الأول $أ_1$ يؤثر بالتبعية على تحقق الحادث الثانى $أ_2$ أو يقع الحادث $أ_2$ بشرط وقوع الحادث $أ_1$ أولاً . وهى يرمز لها بالرمز $ح(أ_2 / أ_1)$ ويعنى هذا الرمز إحتمال تحقق الحادث $أ_2$ بشرط تحقق الحادث $أ_1$ وعلى ذلك يمكن القول أن :

$$ح(أ_1 ، أ_2) = ح(أ_1) \times ح(أ_2 / أ_1)$$

حيث أن :

ح (أ$_1$ ، أ$_2$) هو إحتمال تحقق الحادثان أ$_1$ ، $_2$ الغير مستقلان أو المرتبطان معاً .

ح (أ$_1$) هو إحتمال تحقق الحادث الأول .

ح (أ$_1$ / أ$_2$) هو إحتمال تحقق الحادث الثانى بشرط تحقق الحادث الأول .

ويمكن تعميم القاعدة السابقة كما يلى :-

إذا كان لدينا الحوادث الغير مستقلة أو المرتبطة بـ لترتيب أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، ... أ ن

فإن :-

ح (أ$_1$ ، أ$_2$ ، أ$_3$ ، ... أ ن) = ح (أ$_1$) × ح (أ$_2$/أ$_1$) × ح (أ$_3$/أ$_2$/أ$_1$)

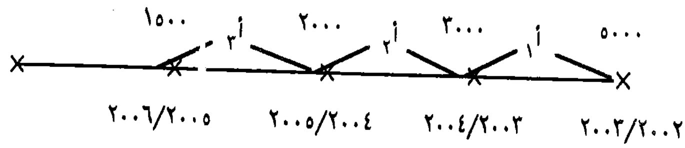
× .... × ح (أ ن/ أ$_{ن-1}$/ أ$_{ن-2}$ .... أ$_1$)

مثال (١٧) :-

إذا كان مقيد بالسنة الأولى بكلية التجارة – جامعة القاهرة فى العام الجامعى ٢٠٠٢/ ٢٠٠٣ ٥٠٠٠ طالب نجح منهم إلى السنة الثانية فى نهاية العام ٣٠٠٠ طالب فقط ثم نجح منهم للسنة الثالثة ٢٠٠٠ طالب فقط ثم نجح منهم للسنة الرابعة ١٥٠٠ طالب فقط .

إحسب إحتمال وصول طالب مقيد بالسنة الأولى فى العام الجامعى ٢٠٠٢/٢٠٠٣ إلى السنة الرابعة دون رسوب .

الحل :-



إحتمال وصول الطالب المقيد بالسنة الأولى فى العام الجامعى ٢٠٠٢/٢٠٠٣ إلى السنة الرابعة دون رسوب يعنى ذلك إحتمال نجاحه من السنة الأولى إلى السنة الثانية ثم نجاحه من السنة الثانية إلى السنة الثالثة ويعتبر ذلك حادث مشروط بنجاحه فى السنة الأولى . ثم نجاحه من السنة الثالثة إلى السنة الرابعة . ويعتبر أيضاً حادث مشروط بنجاحه فى السنتين الأولى والثانية .

$$\therefore \text{ح}(\text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \text{أ}_3) = \text{ح}(\text{أ}_1) \times \text{ح}(\text{أ}_2 / \text{أ}_1) \times \text{ح}(\text{أ}_3 / \text{أ}_2 / \text{أ}_1)$$

$$= \frac{٣٠٠٠}{٥٠٠٠} \times \frac{٢٠٠٠}{٣٠٠٠} \times \frac{١٥٠٠}{٢٠٠٠}$$

$$= \frac{١٥٠٠}{٥٠٠٠} = ,٣$$

مثال (١٨) :-

مخزن به ٦٠٠ سلعة ممتازة ، ١٥٠ سلعة جيدة ، ١٠٠ سلعة متوسطة ، ٢٥٠ سلعة رديئة . تم سحب سلعة واحده من المخزن عشوائياً فى ثلاث مرات متتالية دون إحلال . إحسب إحتمال أن تكون الأولى فقط ممتازة .

الحل :-

إحتمال أن تكون السلعة الأولى فقط ممتازة يعنى سحب سلعة ممتازة فى المرة الأولى دون رد السلعة للمخزن ثم سحب سلعة غير ممتازة (جيدة أو متوسطة أو رديئة) دون رد السلعةللمخزن ثم سحب سلعة غير ممتازة (جيدة أو متوسطة أو رديئة) .

$$\therefore \text{ح}(\text{أ}_1 ، \text{أ}_2 ، \text{أ}_3) = \text{ح}(\text{أ}_1) \times \text{ح}(\bar{\text{أ}}_2 / \text{أ}_1) \times \text{ح}(\bar{\text{أ}}_3 / \bar{\text{أ}}_2 / \text{أ}_1)$$

$$= \frac{٦٠٠}{١٠٠٠} \times \frac{٥٠٠}{٩٩٩} \times \frac{٤٩٩}{٩٩٨}$$

$$= ,٦ \times ,٥٠٠٥ \times ,٥$$

$$= ,١٥٠١٥$$

٥/١/٦ قواعد بييز للتقسيم :- Bayess Rules

١/٥/١/٦ القاعدة الأولى :-

إذا كان لدينا عدة حوادث مانعة أو متنافية على الترتيب $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ... ، $أ_{ن}$
وكان الحدث ب يمكن أن يقع مع أحد الحوادث المتنافية السابقة فإن :

$$\text{إحتمال تحقق الحدث مع أحد الحوادث المانعة} = \sum_{ر=١}^{ر=ن} ح(أ_{ر} ، ب)$$

حيث :-

$$\sum_{ر=٠}^{ر=ن} ح(أ_{ر} ، ب) = ح(أ_{١} ، ب) + ح(أ_{٢} ، ب) +$$

$$ح(أ_{٣} ، ب) + \ldots\ldots + ح(أ_{ن} ، ب)$$

حيث :-

$$ح(أ_{١} ، ب) = ح(أ_{١}) \times ح(ب/أ_{١})$$

$$ح(أ_{٢} ، ب) = ح(أ_{٢}) \times ح(ب/أ_{٢})$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$، ح(أ_{ن} ، ب) = ح(أ_{ن}) \times ح(ب/أ_{ن})$$

٢/٥/١/٦ القاعدة الثانية :-

إذا كان لدينا عدة حوادث مانعة أو متنافية على الترتيب $أ_١$ ، $أ_٢$ ، $أ_٣$ ، ... ، $أ_ن$ وكان الحدث ب يمكن أن يقع مع أحد الحوادث المتنافية السابقة فإن :

إحتمال تحقق الحدث ب مع حدث معين من الأحداث المانعة السابقة وليكن الحدث ر

$$= \frac{ح(أ_ر ، ب)}{\sum_{ر=١}^{ر=ن} ح(أ_ر ، ب)}$$

مثال (١٩) :-

فى إحدى المصانع ثلاث مخازن يحتوى المخزن الأول على ٨٠ سلعة ممتازة ، ٢٠ سلعة جيدة ، المخزن الثانى يحتوى على ٩٠ سلعة ممتازة ، ١٠ سلع جيدة ، المخزن الثالث يحتوى على ٧٠ سلعة ممتازة ، ٣٠ سلعة جيدة فإذا إخترنا أحد المخازن بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة إحسب إحتمال أن تكون هذه السلعة ممتازة . وبفرض أننا إخترنا أحد المخازن بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة فوجدت أنها ممتازة فما هو إحتمال أن تكون هذه السلعة من المخزن الثانى .

الحل :-

١ - إحتمال أن تكون هذه السلعة ممتازة :-

نفرض أن حدث إختيار المخزن الأول = $أ_١$

وحدث إختيار المخزن الثانى = $أ_٢$

وحدث إختيار المخزن الثالث = $أ_{٣}$

وحدث سحب سلعة ممتازة = ب

∴ الإحتمال = ح ($أ_{١}$ ، ب) + ح ($أ_{٢}$ ، ب) + ح ($أ_{٣}$ ، ب)

= ح ($أ_{١}$) × ح (ب/ $أ_{١}$) + ح ($أ_{٢}$) × ح (ب/ $أ_{٢}$)

+ ح ($أ_{٣}$) × ح (ب/ $أ_{٣}$)

$$= \frac{١}{٣} \times \frac{٨٠}{١٠٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٩٠}{١٠٠} + \frac{١}{٣} \times \frac{٧٠}{١٠٠}$$

$$= \frac{١}{٣} [\,,٨ + ,٩ + ,٧\,] = \frac{١}{٣} \times ٢,٤ = ,٨$$

٢ - بفرض أننا إخترنا أحد المخازن بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة فوجدت أنها ممتازة فماهو إحتمال أن تكون هذه السلعة من المخزن الثانى .

$$\text{الإحتمال} = \frac{ح\,(أ_{٢}\text{ ، ب})}{ح\,(أ_{١}\text{ ، ب}) + ح\,(أ_{٢}\text{ ، ب}) + ح\,(أ_{٣}\text{ ، ب})}$$

$$= \frac{\frac{١}{٣} \times ,٩}{\frac{١}{٣} [\,,٨ + ,٩ + ,٧\,]}$$

$$= \frac{,٩}{٢,٤} = ,٣٧٥$$

مثال (٢٠) :-

أربعة صناديق متماثلة فى الشكل الأول به ٣٠ كرة حمراء ، ٤٠ كرة بيضاء ، ٣٠ كرة صفراء والثانى به ٥٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، ٣٠ كرة صفراء ، والثالث به ١٠

كرات حمراء ، ٤٠كرة بيضاء ، ٥٠ كرة صفراء والرابع به ٦٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء ، ١٠ كرات صفراء ، فإذا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة . إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء اللون . وبفرض أننا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة فوجدت صفراء اللون . إحسب إحتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الثالث .

الحل :-

٣٠ ح	٥٠ ح	١٠ ح	٦٠ ح
٤٠ ب	٢٠ ب	٤٠ ب	٣٠ ب
٣٠ ص	٣٠ ص	٥٠ ص	١٠ ص
١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠

١ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة بيضاء اللون :-

بفرض أن حدث إختيار الصندوق الأول = أ$_1$

و حدث إختيار الصندوق الثانى = أ$_2$

و حدث إختيار الصندوق الثالث = أ$_3$

و حدث إختيار الصندوق الرابع = أ$_4$

بفرض أن حدث سحب كرة بيضاء = ب

$\therefore$ الإحتمال = ح (أ$_1$ ، ب) + ح (أ$_2$ ، ب) + ح (أ$_3$ ، ب) + ح (أ$_4$ ، ب)

= ح (أ$_1$) × ح (ب/ أ$_1$) + ح (أ$_2$) × ح (ب/أ$_2$) + ح (أ$_3$)

× ح (ب/ أ$_3$) + ح (أ$_4$) × ح (ب/أ$_4$)

$$= \frac{١}{٤} \times \frac{٤٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٢٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٤٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٣٠}{١٠٠}$$

$$= \frac{١}{٤}[٫٤ + ٫٢ + ٫٤ + ٫٣]$$

$$= \frac{١}{٤}[١٫٣] = ٫٣٢٥$$

٢ - بفرض أننا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة فوجدت أنها صفراء اللون إحسب إحتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الثالث .

بفرض أن حدث سحب كرة صفراء = هـ

$$\therefore \text{الإحتمال} = \frac{ح(أ_٣ ، هـ)}{ح(أ_١ ، هـ) + ح(أ_٢ ، هـ) + ح(أ_٣ ، هـ) + ح(أ_٤ ، هـ)}$$

$$= \frac{\frac{١}{٤} \times \frac{٥٠}{١٠٠}}{\frac{١}{٤} \times \frac{٣٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٣٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{٥٠}{١٠٠} + \frac{١}{٤} \times \frac{١٠}{١٠٠}}$$

$$= \frac{\frac{١}{٤} \times ٫٥}{\frac{١}{٤}[٫٣ + ٫٣ + ٫٥ + ٫١]}$$

$$= \frac{٫٥}{١٫٢} = ٫٤$$

مثال (٢١) :-

مصنع به ٤ آلات الأولى تنتج ٣٠٠٠ وحدة يومياً والثانية تنتج ٢٥٠٠ وحدة يومياً

والثالثة تنتج ٣٠٠٠ وحدة يومياً ، والرابعة تنتج ١٥٠٠ وحدة يومياً . وبفحص إنتاج الآلات الأربعة تبين أن ٤٪ من إنتاج الآلة الأولى معيب ، ٦٪ من إنتاج الآلة الثانية معيب ، ٨٪ من إنتاج الآلة الثالثة معيب ، ١٠٪ من إنتاج الآلة الرابعة معيب فإذا إخترنا وحدة واحدة من إنتاج المصنع عشوائياً . إحسب الإحتمالات الآتية:-

١- إحتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة .

٢ - وبفرض أننا إخترنا وحدة واحدة عشوائياً من إنتاج المصنع وتبين أنها جيدة فماهو إحتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الآلة الثانية .

الحل:-

الآلات / بيان	الآلة الأولى	الآلة الثانية	الآلة الثالثة	الآلة الرابعة	الإجمالى
حجم الانتاج	٣٠٠٠	٢٥٠٠	٣٠٠٠	١٥٠٠	١٠٠٠٠
نسبة إنتاج كل آلة (الإحتمال)	,٣	,٢٥	,٣٠	,١٥	١
إحتمال أن تكون الوحدة معيبة	,٠٤	,٠٦	,٠٨	,١٠	—
إحتمال أن تكون الوحدة جيدة	,٩٦	,٩٤	,٩٢	,٩٠	—

١ - إحتمال أن تكون هذه الوحدة معيبة :-

بفرض أن حدث إختيار وحدة من إنتاج الآلة الأولى = أ$_1$

، حدث إختيار وحدة من إنتاج الآلة الثانية = أ$_2$

، حدث إختيار وحدة من إنتاج الآلة الثالثة = أ$_3$

، حدث إختيار وحدة من إنتاج الآلة الرابعة = أ$_4$

، بفرض أن تكون هذه الوحدة معيبة = ب

، بفرض أن تكون هذه الوحدة جيدة = هـ

∴ الإحتمال = ح (أ$_1$ ، ب) + ح (أ$_2$ ، ب) + ح (أ$_3$ ، ب) + ح (أ$_4$ ، ب)

= ,٣ × ,٠٤ + ,٢٥ × ,٠٦ + ,٣ × ,٠٨ + ,١٥ × ,١

= ,٠١٢ + ,٠١٥ + ,٠٢٤ + ,٠١٥

= ,٠٦٦

٢ - بفرض إننا إخترنا وحدة عشوائياً من إنتاج المصنع . وتبين أنها جيدة فماهو إحتمال أن تكون هذه الوحدة من إنتاج الآلة الثانية .

∴ الإحتمال = ح (أ$_2$ ، هـ) / [ح (أ$_1$ ، هـ) + ح (أ$_2$ ، هـ) + ح (أ$_3$ ، هـ) + ح (أ$_4$ ، هـ)]

= (,٢٥ × ,٩٤) / (,٣ × ,٩٦ + ,٢٥ × ,٩٤ + ,٣ × ,٩٢ + ,١٥ × ,٩)

= ,٢٣٥ / (,٢٨٨ + ,٢٣٥ + ,٢٧٦ + ,١٣٥)

= ,٢٣٥ / ,٩٣٤

= ,٢٥١٦

١ - ألقى مكعب منتظم (زهره طاولة) مرقم بالأرقام من ١ - ٦ على سطح أملس .

إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال ظهور الرقم (٣) على السطح العلوى للزهرة .

ب - إحتمال ظهور الرقم (٤) على السطح العلوى للزهرة .

جـ - إحتمال ظهور الرقم (٦) على السطح العلوى للزهرة .

٢ - صندوق به ٤٠ كرة صفراء ، ٣٠ كرة سوداء ، ٣٠ كرة حمراء . سحبت منه كرة واحدة . إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة صفراء .

ب - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة سوداء .

جـ - إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء .

٣ - ألقى مكعب منتظم (زهرة طاولة) مرقم بالأرقام من ١ - ٦ على سطح أملس.

إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ -إحتمال ظهور الرقم ٤ أو الرقم ٥ إلى أعلى .

ب - إحتمال ظهور أحد الأرقام ٣ على الأقل .

جـ - إحتمال ظهور أحد الأرقام أقل من ٤ .

د - إحتمال ظهور أحد الأرقام ٣ على الأكثر.

هـ - إحتمال ظهور أحد الأرقام أكثر من ٤ .

٤ - أ ، ب شخصان فإذا كان إحتمال بقائهما على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب ٨, ، ٧, إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ -إحتمال بقاء أ ، ب حتى نهاية السنة .

ب - إحتمال وفاه أ ، ب خلال السنة .

جـ - إحتمال حياة أ فقط حتى نهاية السنة .

د - إحتمال حياة واحد فقط حتى نهاية السنة.

هـ - إحتمال وفاة واحد على الأقل من الإثنين خلال السنة .

و - إحتمال حياة واحد على الأقل من الإثنين حتى نهايةالسنة .

٥ - إذا كان إحتمال نجاح الطالب فى مادة الإدارة هو ٩, وإحتمال نجاحه فى مادتى الإدارة والإقتصاد ٧٢, وإحتمال نجاح الطالب فى مادة واحدة على الأقل من المادتين هو ٩٨, . إحسب إحتمال نجاح الطالب فى مادة الإقتصاد .

٦ - قامت ثلاث طائرات من مطار القاهرة متجهه إلى مطار نيويورك . فإذا كان إحتمال وصول الطائرة الأولى فى موعدها المحدد ٩, وإحتمال وصول الطائرة الثانية ٨, وإحتمال وصول الطائرة الثالثة ٧, . إوجد إحتمال وصول طائرة واحدة على الأقل فى موعدها المحدد وذلك بثلاث طرق مختلفة .

٧ - مجموعة كاملة من أوراق اللعب عددها (٥٢ ورقة) سحبنا منها ورقة واحدة فى ثلاث مرات متتالية دون إحلال . إحسب إحتمال أن تكون الأوراق الثلاثة إحداها صورة والأخرى ولد والثالثة السبعة الطيبة .

٨ – صندوق به ٨٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة صفراء . سحبت منه كرة واحدة فى مرتين متتاليتين . إحسب إحتمال أن تكون الكرتان واحدة منهما حمراء على الأقل وذلك فى الحالتين .

أ – حالة السحب بدون إحلال .

ب – حالة السحب مع الإحلال .

٩ – صندوق به ٦٠ كرة بيضاء ، ٤٠ كرة خضراء . سحبنا منه كرة واحدة فى مرتين متتاليتين دون إحلال ثم سحبنا كرة ثالثة ماإحتمال أن تكون هذه الكرة خضراء اللون .

١٠ – ثلاثة أشخاص أ ، ب ، جـ إحتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة فى نهاية سنة على الترتيب ٧, ، ٦, ، ٥, . إحسب الإحتمالات الآتية :-

أ – إحتمال حياة الثلاثة حتى نهاية السنة .

ب – إحتمال وفاه الثلاثة خلال السنة .

جـ – إحتمال حياة أ فقط حتى نهاية السنة .

د – إحتمال وفاة واحد فقط خلال السنة .

هـ – إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة .

١١ – مصنع لديه ٣ مخازن لمنتجاته يحتوى الأول على ٧٠٠ سلعة جيدة ، ٣٠٠ سلعة رديئة ويحتوى المخزن الثانى على ٨٠٠ سلعة جيدة ، ٢٠٠ سلعة رديئة ويحتوى المخزن الثالث على ٦٠٠ سلعة جيدة ، ٤٠٠ سلعة رديئة .

فإذا إخترنا أحد المخازن عشوائياً وسحبنا منه سلعةواحدة إحسب إحتمال أن تكون هذه السلعة جيدة ، وبفرض أننا إخترنا أحد المخازن بطريقة عشوائية وسحبنا منه سلعة واحدة فوجدت أنها جيدة . إحسب إحتمال أن تكون هذه السلعة من المخزن الثالث.

١٢ - خمسة صناديق متماثلة فى الشكل الأول به ٧٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء والثانى به ٦٠ كرة حمراء ، ٤٠ كرة بيضاءوالثالث به ٥٠ كرة حمراء ، ٥٠ كرة بيضاءوالرابع به ٤٠ كرة حمراء ، ٦٠ كرة بيضاءوالخامس به ٣٠ كرة حمراء ، ٧٠ كرة بيضاء . فإذا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة . إحسب إحتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء اللون . وبفرض أننا إخترنا صندوق واحد عشوائياً وسحبنا منه كرة واحدة فوجدت بيضاء اللون . إحسب إحتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الخامس .

الفصل الرابع

توزيع ثنائي الحدين في الاحتمالات

توزيع ثنائى الحدين فى الإحتمالات

يعتبر توزيع ثنائى الحدين من التوزيعات الإحتمالية التى يكثر إستخدامها فى نظرية الإحتمالات ويُستخدم هذا التوزيع متى توافرت الشروط الآتية :-

أ - أن تكون بصدد تجربة ما وتتم هذه التجربة بعدد كبير من المرات المتكررة وتكون كل مرة مستقلة عن نظيرتها .

ب - كل نتيجة لأى محاولة لها حالتين فقط لاثالث لهما إما تحقيق النجاح أو تحقيق الفشل .

جـ - ثبات قيم إحتمالى النجاح والفشل لأى محاولة .

ويعتبر توزيع ثنائى الحدين مناسب ومقبول طالما توافرت كافة هذه الشروط فى أى تجربة .

وإذا فرضنا أن إحتمال النجاح = أ

وأن إحتمال الفشل = س

حيث أ + س = ١

وإذا تذكرنا مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب وفقاً للمقدار ذو الحدين التالى .

$$(س + أ)^{ن} = س^{ن} + {}^{ن}ق_{١} \; أ \; س^{ن - ١} + {}^{ن}ق_{٢} \; أ^{٢} \; س^{ن - ٢} +$$

$$........ + {}^{ن}ق_{ر} \; أ^{ر} \; س^{ن - ر} + ... \; أ^{ن}$$

حيث :-

ر = عدد مرات حدوث الحادث من بين عدد مرات إجراء التجربة .

ن = عدد الحالات الكلية أو هو مدى المتغير العشوائى فى توزيع ذو الحدين أو هو عدد مرات إجراء التجربة .

وللحصول على دالة إحتمال توزيع ثنائى الحدين نعتمد على المعادلة الآتية :

دالة إحتمال توزيع ثنائى الحدين = $ {}^{ن}ق_{ر} \; أ^{ر} \; (١ - أ)^{ن-ر} $

أ، = $ {}^{ن}ق_{ر} \; أ^{ر} \; س^{ن-ر} $

حيث ر = [٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، .... ، ن]

ويعتبر توزيع ثنائى الحدين مناسب ومقبول طالما كانت ن محدوده حيث تمثل ن عدد محاولات التجربة أما إذا كانت ن كبيرة بدرجة كافية فإن توزيع ذو الحدين يعتبر غير مناسب ويُستخدم بدلاً منه توزيعات أخرى مثل توزيع بواسون .

والأمثلة التالية توضح كيفية حساب كافة الإحتمالات الممكنة والناتجة من إجراء تجربة معينة فى شكل جدول يسمى بجدول توزيع ثنائى الحدين والذى سوف نستخدمه فى حساب القيمة المتوقعة أو القيمة المتوسطة للمتغير العشوائى .

مثال ١ :-

إذا كان إحتمال إنتاج السلعة الجيدة بأحد المصانع هو ٦, وقد سحبت عشوائياً ١٠٠٠ عينة من إنتاج هذا المصنع ، وكل عينة مكونة من ثلاث سلع .

إوجد توزيع ثنائى الحدين لهذه العينات .

الحل :-

يقصد بتوزيع ثنائى الحدين فى هذا المثال هو توزيع الألف عينة وفقاً لعدد السلع الجيدة فى العينة فقد تكون هناك عينات لايوجد بها أى سلعة جيدة وعينات أخرى يوجد بها سلعة واحدة جيدة ، وعينات أخرى بها سلعتين جيدتين ، وعينات أخرى يوجد بها ثلاث سلع جيدة .

وحيث أن إحتمال إنتاج السلعة الجيدة = ٦, (وهذا هو الإحتمال المطلوب) وأن الإحتمال العكسى وهو إحتمال إنتاج السلعة الرديئة (١ - ٦, = ٤,) .

وللحصول على توزيع ثنائى الحدين للعينات المسحوبة لابد من إيجاد حدود مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار (٤, + ٦,)^{٣} والحدود المختلفة تمثل الإحتمالات الآتية :

ح (٠) إحتمال ألا توجد أى سلعة جيدة من بين الثلاث سلع .

ح (١) إحتمال أن توجد سلعة واحدة جيدة من بين الثلاث سلع .

ح (٢) إحتمال أن توجد أى سلعتين جيدتين من بين الثلاث سلع .

ح (٣) إحتمال أن توجد ثلاث سلع جيدة من بين الثلاث سلع .

وعلى أساس هذه الإحتمالات يمكن تحديد عدد العينات وفقاً لعدد السلع الجيدة وذلك على النحو التالى :-

عدد العينات	الإحتمال ح (ر)	عدد السلع الجيدة
٦٤	ح(٠) = ^{٣}ق$_{٠}$ (٦,)^{٠} (٤,)^{٣} = ٠٦٤, × ١٠٠٠	٠
٢٨٨	ح(١) = ^{٣}ق$_{١}$ (٦,)^{١} (٤,)^{٢} = ٢٨٨, × ١٠٠٠	١
٤٣٢	ح(٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ (٦,)^{٢} (٤,)^{١} = ٤٣٢, × ١٠٠٠	٢
٢١٦	ح(٣) = ^{٣}ق$_{٣}$(٦,)^{٣} (٤,)^{٠} = ٢١٦, × ١٠٠٠	٣
١٠٠٠	المجموع = ١,٠٠٠	

مثال ٢:-

إذا كان إحتمال إنتاج سلعة جيدة بأحد المصانع يتحدد من خلال إحصائية يقضى بأنه من بين كل ١٠٠٠ وحدة منتجة من هذه السلعة توجد ٨٠٠ وحدة فقط جيدة والباقى غير مطابق للمواصفات فإذا تم سحب ١٠٠٠ عينة من إنتاج هذه السلعة فى هذا المصنع وكل عينة مكونة من ٤ سلع أوجد توزيع ثنائى الحدين لهذه العينات . ومن هذا الجدول أوجد الإحتمالات الآتية :-

١ - إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة .

٢ - إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة .

٣ - إحتمال أن تكون سلعتين على الأقل جيدة .

٤ - إحتمال أن تكون أكثر من سلعتين جيدة .

٥ - إحتمال أن تكون أقل من سلعتين جيدة .

٦ - إحتمال أن تكون سلعتين على الأكثر جيدة .

٧ - إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأقل رديئة .

٨ - إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأكثر رديئة .

٩ - إحتمال أن تكون أقل من ٣ سلع رديئة .

١٠ - إحتمال أن تكون أكثر من ٣ سلع رديئة .

١١ - إحتمال أن تكون سلعة واحدة فقط رديئة .

الحل :-

إحتمال إنتاج سلعة جيدة = $\frac{\text{عدد السلع الجيدة}}{\text{عدد السلع جميعها}}$

= $\frac{٨٠٠}{١٠٠٠}$ = ,٨

∴ أ = ,٨

ومنها س (إحتمال إنتاج السلعة الرديئة) = ١ - ,٨ = ,٢

ويتحدد مفكوك توزيع ثنائى الحدين بمفكوك (س + أ)^{ن}

= (,٢ + ,٨)^{٤}

وذلك على النحو التالى .

عدد السلع الجيدة (ر)	الإحتمال ح (ر)
٠	ح (٠) = ^{٤}ق$_{٠}$ (,٨)^{٠} (,٢)^{٤} = ,٠٠١٦
١	ح (١) = ^{٤}ق$_{١}$ (,٨)^{١} (,٢)^{٣} = ,٠٢٥٦
٢	ح (٢) = ^{٤}ق$_{٢}$ (,٨)^{٢} (,٢)^{٢} = ,١٥٣٦
٣	ح (٣) = ^{٤}ق$_{٣}$ (,٨)^{٣} (,٢)^{١} = ,٤٠٩٦
٤	ح (٤) = ^{٤}ق$_{٤}$ (,٨)^{٤} (,٢)^{٠} = ,٤٠٩٦
	المجموع = ١,٠٠٠

١ - إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة = ح (٤) = ٤٠٩٦,

٢ - إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة = ح (٠) = ٠٠١٦,

٣ - إحتمال أن تكون سلعتين على الأقل جيدة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٢ جيدة أو ٣ جيدة أو ٤ جيدة .

= ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

=١٥٣٦, +٤٠٩٦, +٤٠٩٦,

=٩٧٢٨,

٤ - إحتمال أن تكون أكثر من سلعتين جيدة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ جيدة أو ٤ جيدة

= ح (٣) + ح (٤)

=٤٠٩٦, +٤٠٩٦, =٨١٩٢,

٥ - إحتمال أن تكون أقل من سلعتين جيدة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعة واحدة جيدة أو عدم وجود أى سلعة جيدة .

= ح (١) + ح (٠)

=٠٢٥٦, +٠٠١٦, =٠٢٧٢,

٦ - إحتمال أن تكون سلعتين على الأكثر جيدة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعتين جيدة أو سلعة جيدة أو عدم وجود أى سلعة جيدة .

= ح (٢) + ح (١) + ح (٠)

= ١٥٣٦, + ٠٢٥٦, + ٠٠١٦, = ١٨٠٨,

٧ - إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأقل رديئة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ سلع رديئة أو أربع سلع رديئة :-

= ح (١) + ح (٠)

= ٠٢٥٦, + ٠٠١٦, = ٠٢٧٢,

٨ - إحتمال أن تكون ٣ سلع على الأكثر رديئة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ سلع رديئة أو سلعتين رديئتين أو سلعة واحدة رديئة أو عدم وجود أى سلعة رديئة .

= ح (١) + ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

= ٠٢٥٦, + ١٥٣٦, + ٤٠٩٦, + ٤٠٩٦,

= ٩٩٨٤,

أ ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى .

= ١ - إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة .

= ١ - ٠٠١٦, = ٩٩٨٤,

٩ - إحتمال أن تكون أقل من ٣ سلع رديئة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون سلعتين رديئتين أو سلعة رديئة أو عدم وجود أى سلع رديئة .

= ح (٢) + ح (٣) + ح (٤)

= ,١٥٣٦ + ,٤٠٩٦ + ,٤٠٩٦ = ,٩٧٢٨

أ ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى .

= ١ - [ح (١) + ح (٠)]

= ١ - [,٠٢٥٦ + ,٠٠١٦]

= ١ - ,٠٢٧٢ = ,٩٧٢٨

١٠ - إحتمال أن تكون أكثر من ٣ سلع رديئة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٤ سلع رديئة .

= ح (٠) = ,٠٠١٦

١١ - إحتمال أن تكون سلعة واحدة فقط رديئة :-

هذا الإحتمال يعنى إحتمال أن تكون ٣ جيدة أو ٤ جيدة

ح (٣) = ,٤٠٩٦

مثال ٣ :-

رمى لاعب قطعة نقود على سطح أملس ٤ مرات متتالية . حدد التوزيع الإحتمالى الذى يتبعه عدد مرات ظهور الكتابة وبإستخدام هذا التوزيع حدد الإحتمالات المختلفة لعدد مرات ظهور وجه الكتابة .

الحل :-

إحتمال ظهور الكتابة = $\frac{١}{٢}$ = أ

إحتمال ظهور الصوره = $\frac{١}{٢}$ = س

عدد مرات إجراء التجربة = ن = ٤

التوزيع الإحتمالى وفقاً لمفكوك $(س + أ)^{٤} = (\frac{١}{٢} + \frac{١}{٢})^{٤}$

عدد مرات ظهور الكتابة (ر)	قيمة الإحتمال ح (ر)
٠	$ح(٠) = {}^{٤}ق_{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} = \frac{١}{١٦}$
١	$ح(١) = {}^{٤}ق_{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} = \frac{٤}{١٦}$
٢	$ح(٢) = {}^{٤}ق_{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٢} = \frac{٦}{١٦}$
٣	$ح(٣) = {}^{٤}ق_{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣} \left(\frac{١}{٢}\right)^{١} = \frac{٤}{١٦}$
٤	$ح(٤) = {}^{٤}ق_{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٤} \left(\frac{١}{٢}\right)^{٠} = \frac{١}{١٦}$
	مجموع الإحتمالات $= \frac{١٦}{١٦} = ١$

مثال٤ :-

ألقى لاعب ثلاث زهرات طاولة (زهره النرد) على سطح أملس حدد . بإستخدام توزيع ثنائى الحدين التوزيع الإحتمالى لعدد مرات ظهور الرقم (٥) وإحسب الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال ظهور الرقم (٥) مرة واحدة فقط .

ب - إحتمال عدم ظهور الرقم (٥)

جـ- إحتمال ظهور الرقم (٥) مرة واحدة على الأقل .

د - إحتمال ظهور الرقم (٥) مرتين على الأكثر .

الحل :-

إحتمال ظهور الرقم (٥) = $\frac{1}{6}$ = أ

إحتمال عدم الظهور للرقم (٥) = ١ - $\frac{1}{6}$ = $\frac{5}{6}$ = س

ويتحدد التوزيع الإحتمالى لتوزيع ثنائى الحدين لهذه التجربة حسب مفكوك

(س + أ)^{ن} = ($\frac{5}{6}$ + $\frac{1}{6}$)^{3}

الإحتمال ح (ر)	عدد مرات ظهور الرقم (٥) (ر)
ح (٠) = $^{3}\text{ق}_{0}\left(\frac{1}{6}\right)^{0}\left(\frac{5}{6}\right)^{3}$ = ,٥٧٨٧	٠
ح (١) = $^{3}\text{ق}_{1}\left(\frac{1}{6}\right)^{1}\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$ = ,٣٤٧٣	١
ح (٢) = $^{3}\text{ق}_{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{1}$ = ,٠٦٩٤	٢
ح (٣) = $^{3}\text{ق}_{3}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{0}$ = ,٠٠٤٦	٣
المجموع ١,٠٠٠٠	

ومن الجدول السابق يمكن إيجاد الإحتمالات الآتية :-

أ - إحتمال ظهور الرقم (٥) مرة واحدة فقط :-

= ح (١) = ,٣٤٧٣

ب – إحتمال عدم ظهور الرقم (٥) :–

= ح (٠) = ٥٧٨٧,

جـ – إحتمال ظهور الرقم (٥) مرة واحدة على الأقل :–

وهذا يعنى إحتمال ظهور الرقم (٥) مرة واحدة أو مرتين أو ثلاثة .

= ح (١) + ح (٢) + ح (٣)

= ٣٤٧٣, + ٠٦٩٤, + ٠٠٤٦, = ٤٢١٣,

أ ، عن طريق الإحتمال العكسى .

= ١ – (إحتمال عدم ظهور الرقم (٥))

= ١ – ح (٠)

= ١ – ٥٧٨٧, = ٤٢١٣,

د – إحتمال ظهور الرقم (٥) مرتين على الأكثر :–

وهذا الإحتمال يعنى إحتمال ظهور الرقم (٥) مرتين أو مرة واحدة أو عدم ظهور الرقم (٥) فى أى مرة .

= ح (٢) + ح (١) + ح (٠)

= ٠٦٩٤, + ٣٤٧٣, + ٥٧٨٧,

= ٩٩٥٤,

أ ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى .

= ١ – ح (٣)

= ١ – ٠٠٤٦, = ٩٩٥٤,

مثال٥:-

في أحد المصانع لإنتاج اللمبات الكهربائية تبين أن من بين كل ١٠٠٠ لمبة منتجة توجد ٢٠٠ لمبة غير صالحة للإستخدام . فإذا سحبنا من إنتاج هذا المصنع عينة مكونة من ٦ لمبات . كون جدول توزيع ثنائى الحدين وفقاً لعدد اللمبات الغير صالحة للإستخدام ومن هذا الجدول إحسب الإحتمالات الآتية .

١ - إحتمال أن تكون جميع اللمبات غير صالحة للإستخدام .

٢ - إحتمال أن تكون جميع اللمبات صالحة للإستخدام .

٣ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٢ على الأقل غير صالحة للإستخدام .

٤ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٤ فقط صالحة للإستخدام .

٥ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٤ على الأقل غير صالحة للإستخدام .

الحل:-

إحتمال أن تكون اللمبة غير صالحه للإستخدام = $\frac{٢٠٠}{١٠٠٠}$ = ٢, = أ

إحتمال أن تكون اللمبة صالحه = ١ - ٢, = ٨, = س

ن = ٦

ويتحدد التوزيع الإحتمالى لتوزيع ثنائى الحدين لهذه التجربة

حسب مفكوك (س + أ)^{ن} = (٨, + ٢,)^{٦}

ويتحدد التوزيع الإحتمالى لعدد اللمبات غير صالحه الاستخدام من خلال جدول توزيع ثنائى الحدين التالى .

جدول توزيع ثنائى الحدين حسب عدد اللمبات غير الصالحة بالعينة

ر	الإحتمال ح$_{ر}$
٠	ح(٠) = ^{٦}ق$_{٠}$ (٠,٢)^{٠} (٠,٨)^{٦} = ,٢٦٢١٤٤
١	ح(١) = ^{٦}ق$_{١}$ (٠,٢)^{١} (٠,٨)^{٥} = ,٣٩٣٢١٦
٢	ح(٢) = ^{٦}ق$_{٢}$ (٠,٢)^{٢} (٠,٨)^{٤} = ,٢٤٥٧٦٠
٣	ح(٣) = ^{٦}ق$_{٣}$ (٠,٢)^{٣} (٠,٨)^{٣} = ,٠٨١٩٢٠
٤	ح(٤) = ^{٦}ق$_{٤}$ (٠,٢)^{٤} (٠,٨)^{٢} = ,٠١٥٣٦٠
٥	ح(٥) = ^{٦}ق$_{٥}$ (٠,٢)^{٥} (٠,٨)^{١} = ,٠٠١٥٣٦
٦	ح(٦) = ^{٦}ق$_{٦}$ (٠,٢)^{٦} (٠,٨)^{٠} = ,٠٠٠٠٦٤
	مجموع الإحتمالات = ١,٠٠٠٠٠٠

ومن الجدول السابق يمكن حساب الإحتمالات الآتية :-

١ - إحتمال أن تكون جميع اللمبات غير صالحه للإستخدام :-

= ح(٦) = ,٠٠٠٠٦٤

٢ - إحتمال أن تكون جميع اللمبات صالحه للإستخدام :-

= ح(٠) = ,٢٦٢١٤٤

٣ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٢ على الأقل غير صالحه للإستخدام :-

وهذا الإحتمال يعنى أن يكون ٢ غير صالحه أو ٣ أو ٤ أو ٥ أو ٦

= ح(٢) + ح(٣) + ح(٤) + ح(٥) + ح(٦)

= ,٢٤٥٧٦٠ + ,٠٨١٩٢٠ + ,٠١٥٣٦٠ + ,٠٠١٥٣٦ + ,٠٠٠٠٦٤

= ,٣٤٤٦٤

أ ، عن طريق قاعدة الإحتمال العكسى

= ١ - [ح (٠) + ح (١)]

= ١ - [,٢٦٢١٤٤ + ,٣٩٣٢١٦]

= ١ - [,٦٥٥٣٦٠] = ,٣٤٤٦٤

٤ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٤ فقط صالحه للإستخدام :-

= ح (٢) = ,٢٤٥٧٦٠

٥ - إحتمال أن يكون من بين اللمبات ٤ على الأقل صالحه للإستخدام :-

= ح (٢) + ح (١) + ح (٠)

= ,٢٤٥٧٦٠ + ,٣٩٣٢١٦ + ,٢٦٢١٤٤

= ,٩٠١١٢٠

الفصل الخامس

نظرية الاحتمالات ومراقبة جودة الإنتاج

نظرية الاحتمالات ومراقبة جودة الإنتاج

من المعلوم أنه فى أى مشروع صناعى لابد من وجود وحدات غير مطابقة للمواصفات بنسبة مسموح بها فى أى صناعة من الصناعات فإذا زادت هذه النسبة عن النسبة المسموح بها فإن ذلك يرجع إلى وجود عامل أو أكثر من العوامل التى تسببت فى زيادة هذه النسبة عن المسموح بها مثل :-

وجود خلل فى الآلات - أو عدم مطابقة المادة الأولية للشروط المطلوبة - أو قلة كفاءة المشتغلين بالمصنع - أو سوء التنظيم الداخلى للمصنع .

لهذا أمكن إستخدام أداه من الأدوات الرياضية التى تستخدم فى إطار نظرية الإحتمالات فى مراقبة الإنتاج والجودة فى المشروعات الصناعية والحكم على مدى سلامة الإنتاج من عدمه وذلك عن طريق إتباع الأسلوبين التاليين :-

أولاً :- مقارنة الإحتمال النظرى لإنتاج السلع الجيدة بالإحتمال الفعلى .

ثانياً :- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى .

والأمثلة التالية توضح كيفية الحكم على مدى سلامة الإنتاج .

مثال ١ :-

قامت إحدى الشركات الصناعية بإختبار ٣٢٠ من قطع غيار الثلاجات التى ينتجها أحد مصانعها وكانت كل عينة مكونة من ٤ قطع غيار وقد تبين للشركة أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد قطع الغيار الجيدة هو .

عدد قطع الغيار الجيدة	عدد العينات
٠	٢
١	١٠
٢	٤٨
٣	١٣٠
٤	١٣٠
المجموع الكلى	٣٢٠

والمطلوب تحديد مدى سلامة الإنتاج بهذا المصنع إذا كان الإحتمال النظرى لإنتاج قطعة الغيار الجيدة هو ٨, .

الحل :-

يمكن الحكم على مدى سلامة الإنتاج . عن طريقة مقارنة الإحتمال النظرى المعطى فى التمرين لإنتاج قطعة الغيار الجيدة وهو ٨, بالإحتمال الفعلى المستنتج من التمرين . أو عن طريق مقارنة توزيع العينات وفقاً للإختبار الفعلى المعطى فى التمرين بتوزيع العينات وفقاً للإختبار النظرى المستنتج من التمرين .

أولاً : مقارنة الإحتمال النظرى لإنتاج قطعة الغيار الجيدة المعطى فى التمرين بالإحتمال الفعلى المستنتج من التمرين . ويتم تحديد الإحتمال الفعلى كالآتى :-

عدد قطع الغيار الجيدة	عدد العينات	عددقطع الغيار الجيده×عدد العينات
٠	٢	صفر
١	١٠	١٠
٢	٤٨	٩٦
٣	١٣٠	٣٩٠
٤	١٣٠	٥٢٠
المجموع	٣٢٠	١٠١٦

المتوسط م = $\frac{١٠١٦}{٣٢٠}$ = ٣,١٧٥

الإحتمال = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{٣,١٧٥}{٤}$ = ,٧٩٤

الإحتمال النظرى	,٨٠٠
الإحتمال الفعلى	,٧٩٤
الفرق	,٠٠٦

يلاحظ أن الإحتمال النظرى قريب جداً من الإحتمال الفعلى والفرق بينهما ضئيل جداً . مما يعتبر دليلاً قاطعاً على سلامة الإنتاج بهذا المصنع وعدم وجود أى نقص فى العوامل التى تؤثر فى سلامة الإنتاج .

ثانيا : مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى المعطى فى التمرين بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى المستنتج من التمرين .

ويتحدد التوزيع النظرى كالآتى :-

∴ الإحتمال النظرى لإنتاج السلعة الجيدة = ٫٨

∴ الإحتمال النظرى لإنتاج السلعة الرديئة = ٫٢

ويتحدد التوزيع النظرى علـــى أســـاس مفكوك نـظرية ذات الحدين للمقـــدار $(٫٢ + ٫٨)^{٤}$ حيث يكون لدينا .

ر	الإحتمال ح$_{ر}$	عدد العينات
٠	$^{٤}ق_{٠}\ (٫٨)^{٠}\ (٫٢)^{٤} = ٫٠٠١٦ \times ٣٢٠$	١
١	$^{٤}ق_{١}\ (٫٨)^{١}\ (٫٢)^{٣} = ٫٠٢٥٦ \times ٣٢٠$	٨
٢	$^{٤}ق_{٢}\ (٫٨)^{٢}\ (٫٢)^{٢} = ٫١٥٣٦ \times ٣٢٠$	٤٩
٣	$^{٤}ق_{٣}\ (٫٨)^{٣}\ (٫٢)^{١} = ٫٤٠٩٦ \times ٣٢٠$	١٣١
٤	$^{٤}ق_{٤}\ (٫٨)^{٤}\ (٫٢)^{٠} = ٫٤٠٩٦ \times ٣٢٠$	١٣١
	المجموع = ١٫٠٠٠٠	٣٢٠

ثم يتم مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى لها على النحو التالى .

مقارنة التوزيع الفعلى بالتوزيع النظرى

عدد قطع الغيار الجيدة	التوزيع الفعلى	التوزيع النظرى	الفرق
٠	٢	١	١+
١	١٠	٨	٢+
٢	٤٨	٤٩	١-
٣	١٣٠	١٣١	١-
٤	١٣٠	١٣١	١-
المجموع الكلى	٣٢٠	٣٢٠	

وبمقارنة التوزيع الفعلى والتوزيع النظرى يتبين أن التوزيع الفعلى يزيد عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يجب أن تكون فيها عدد قطع الغيار الجيدة بمقدار ٣ عينات بينما يقل عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد قطع الغيار الجيدة ٢ أو ٣ أو ٤ بمقدار ٣ عينات . وحيث أن الفرق بين التوزيعين الفعلى والنظرى فروق ضئيلة فإنه يمكن إعتبار أن الإنتاج فى المصنع يسير طبقاً للمواصفات الموضوعة له .

مثال٢ :-

وفقاً للمواصفات الموضوعة للإنتاج بأحد المصانع الحربية أن يكون من بين كل ١٠٠ رصاصة منتجة توجد ٧٠ رصاصة صالحة للإستخدام فإذا قام هذا المصنع

باختيار ١٠٠٠ عينة من إنتاجه وكل عينة مكونة من ٣ رصاصات وقد تبين له أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد الرصاصات الصالحه للإستخدام هو .

عدد الرصاصات الصالحه	عدد العينات
٠	١٢٠
١	٣٥٠
٢	٣٧٠
٣	١٦٠
المجموع الكلى	١٠٠٠

والمطلوب تحديد مدى سلامة الإنتاج بهذا المصنع بمقارنة :-

أ - الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى .

ب - مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى .

الحل :-

أ - مقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى :-

ويتحدد الإحتمال الفعلى لإنتاج الرصاصة الجيدة كما يلى :-

عدد الرصاصات الصالحة	عدد العينات	عدد الرصاصات الصالحه × عدد العينات
٠	١٢٠	٠
١	٣٥٠	٣٥٠
٢	٣٧٠	٧٤٠
٣	١٦٠	٤٨٠
المجموع	١٠٠٠	١٥٧

المتوسط م = $\frac{١٥٧٠}{١٠٠٠}$ = ١,٥٧

الإحتمال = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{١,٥٧}{٣}$ = ,٥٢٣

وهذا يمثل الإحتمال الفعلى = ,٥٢٣

أما الإحتمال النظرى = $\frac{٧٠}{١٠٠}$ = ,٧٠٠

الإحتمال النظرى	,٧٠٠
الإحتمال الفعلى	,٥٢٣
الفرق	,١٧٧

وبمقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى نجد أن هناك فرقاً كبيراً بين الإحتمالين مما يعد دليلاً على وجود خلل بالعملية الإنتاجية الأمر الذى يترتب عليه . أنه يمكن القول أن هذا المصنع لايسير طبقاً للمواصفات الموضوعه .

ب- مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى لها :

يتحدد التوزيع النظرى على أساس مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار $(٫٣ + ٫٧)^{٣}$ وذلك كمايلي :-

عدد الرصاصات الصالحه	الإحتمال	عدد العينات
٠	$ق^{٣}_{٠} (٫٧)^{٠} (٫٣)^{٣} = ٫٠٢٧ \times ١٠٠٠$	٢٧
١	$ق^{٣}_{١} (٫٧)^{١} (٫٣)^{٢} = ٫١٨٩ \times ١٠٠٠$	١٨٩
٢	$ق^{٣}_{٢} (٫٧)^{٢} (٫٣)^{١} = ٫٤٤١ \times ١٠٠٠$	٤٤١
٣	$ق^{٣}_{٣} (٫٧)^{٣} (٫٣)^{٠} = ٫٣٤٣ \times ١٠٠٠$	٣٤٣
	المجموع = ١٫٠٠٠	١٠٠٠

مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى

عدد الرصاصات الصالحه	التوزيع الفعلى	التوزيع النظرى	عدد العينات
٠	١٢٠	٢٧	٩٣+
١	٣٥٠	١٨٩	١٦١+
٢	٣٧٠	٤٤١	٧١-
٣	١٦٠	٣٤٣	١٨٣-
المجموع الكلى	١٠٠٠	١٠٠٠	

وبمقارنة التوزيعين الفعلى والنظرى للعينات المسحوبة يتضح أن التوزيع الفعلى يزيد عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد الرصاصات الصالحه للإستخدام ٠ أو ١ فى حين أنه يقل عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد الرصاصات الصالحه ٢ أو ٣ ومقدار هذا الفرق سواء بالزيادة أو النقصان هو ٢٥٤ وهذا الفرق يعد دليلاً على أن الإنتاج فى هذا المصنع لايسير طبقاً للمواصفات الموضوعه .

مثال٣ :-

قام أحد المصانع للصناعات الكهربائية بإختبار ٣٠٠ عينة من المراوح الكهربائية من إنتاجه وكل عينة مكونة من خمس مراوح وقد تبين للمصنع أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد المراوح الصالحه للإستخدام كما يلى :-

عدد المراوح الصالحة	٠	١	٢	٣	٤	٥
عدد العينات	٣	٥	٧	١٥	٦٠	٢١٠

فإذا كانت مواصفات الإنتاج بهذا المصنع تتضمن أنه من بين كل ١٠٠٠ مروحة كهربائية منتجة توجد ٩٦٠ مروحه صالحه للإستخدام . والمطلوب تحديد ما إذا كان الإنتاج فى هذا المصنع يسير طبقاً للمواصفات الموضوعه من عدمه وذلك عن طريق :-

أ - مقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى .

ب - مقارنة توزيع العينات من واقع الإختبار الفعلى بتوزيع العينات من واقع الإختبار النظرى .

الحل :-

أ - مقارنة الإحتمال النظرى بالإحتمال الفعلى :-

ويتحدد الإحتمال الفعلى لإنتاج المروحه الصالحه للإستخدام كمايلى :-

عدد المراوح الصالحة	عدد العينات	عدد المراوح الصالحه × عدد العينات
٠	٣	٠
١	٥	٥
٢	٧	١٤
٣	١٥	٤٥
٤	٦٠	٢٤٠
٥	٢١٠	١٠٥٠
المجموع	٣٠٠	١٣٥٤

المتوسط م = $\frac{١٣٥٤}{٣٠٠}$ = ٤,٥

الإحتمال = $\frac{م}{ن}$ = $\frac{٤,٥}{٥}$ = ,٩

وهذا يمثل الإحتمال الفعلى لإنتاج المروحة الصالحه للإستخدام .

أما الإحتمال النظرى = $\frac{٩٦٠}{١٠٠٠}$ = ,٩٦

الإحتمال النظرى	,٩٦
الإحتمال الفعلى	,٩٠
الفرق	,٠٦

يلاحظ أن هناك فرقاً كبيراً بين الإحتمالين النظرى والفعلى مما يدل على عدم سلامة الإنتاج .

ب - مقارنة التوزيع الفعلى للعينات بالتوزيع النظرى لها :

يتحدد التوزيع النظرى للعينات على أساس مفكوك نظرية ذات الحدين للمقدار $(٠٤, + ٩٦,)^{٥}$ وذلك على النحو التالى :-

عدد المراوح الصالحه	الإحتمال	عدد العينات
٠	$^{٥}ق_{٠}\ (٠,٩٦)^{٠}\ (٠,٠٤)^{٥} = ٠,٠٠٠$	٠٠٠
١	$^{٥}ق_{١}\ (٠,٩٦)^{١}\ (٠,٠٤)^{٤} = ٠,٠٠٠$	٠٠٠
٢	$^{٥}ق_{٢}\ (٠,٩٦)^{٢}\ (٠,٠٤)^{٣} = ٠,٠٠١$	٠٠٠
٣	$^{٥}ق_{٣}\ (٠,٩٦)^{٣}\ (٠,٠٤)^{٢} = ٠,٠١٤$	٤
٤	$^{٥}ق_{٤}\ (٠,٩٦)^{٤}\ (٠,٠٤)^{١} = ٠,١٧٠$	٥١
٥	$^{٥}ق_{٥}\ (٠,٩٦)^{٥}\ (٠,٠٤)^{٠} = ٠,٨١٥$	٢٤٥
المجموع الكلى	المجموع = ١,٠٠٠	٣٠٠

وبمقارنة التوزيع الفعلى للعينات المسحوبة بالتوزيع النظرى لها يتحدد كمايلى :-

مقارنة التوزيع الفعلى بالتوزيع النظرى

عدد المراوح الصالحه	التوزيع الفعلى	التوزيع النظرى	الفرق
٠	٣	٠٠٠	٣+
١	٥	٠٠٠	٥+
٢	٧	٠٠٠	٧+
٣	١٥	٤	١١+
٤	٦٠	٥١	٩+
٥	٢١٠	٢٤٥	٣٥-
المجموع الكلى	٣٠٠	٣٠٠	

وبمقارنة التوزيعين الفعلى والنظرى للعينات المسحوبة يتضح أن التوزيع الفعلى يزيد عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يكون فيها عدد المراوح الصالحه للإستخدام ٠ أو ١ أو ٢ أو ٣ أو ٤ بينما يقل عن التوزيع النظرى فى عدد العينات التى يجب أن تكون جميع المراوح فيها صالحه مما يدل على أن الإنتاج بالمصنع لايسير طبقاً للمواصفات الموضوعه .

الفصل السادس

نظرية الاحتمالات واتخاذ القرارات الإدارية

نظرية الاحتمالات واتخاذ القرارات الإدارية

إن أى شركة تجارية أو أى مشروع صناعى يهدف إلى تحقيق أكبر ربح بأقل تكلفة ممكنة وهذا يتوقف على إختيار الخطة المناسبة من مجموع الخطط المطروحة أمام هذه الشركة أو المشروع الصناعى ، وكل خطة من هذه الخطط يصادف تنفيذها صور متعددة من حالات الطلب والتى تتغير بتغير الأحوال الإقتصادية من رواج أو كساد وأحياناً يكون الطلب على السلعة ردىء - أو أقل من المتوسط - أو معتدل أو ممتاز .

وإختيار أى خطة من الخطط المطروحة يتطلب من القائمين على إدارة المشروع مقارنة منفعةالمشروع المتوقعة من كل خطة من الخطط المتاحة لإختيار أفضلها حيث أن الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة للمشروع تعتبر هى الخطة الأفضل .

ولكى تكون الصوره أكثر وضوحاً نفترض أن هناك تاجر يتعامل فى ثلاث سلع على الأكثر من السلع التى تتلف فى حالة عدم بيعها خلال نفس اليوم وبفرض أن الخطط المتاحة أمام هذا التاجر تتحدد على أساس عدد السلع المتعامل فيها وتتمثل فى الخطط الآتية :-

الخطة الأولى ($ط_1$) ألا يتعامل فى هذه السلعة .

الخطة الثانية ($ط_2$) أن يتعامل فى سلعة واحدة .

الخطة الثالثة ($ط_3$) أن يتعامل فى سلعتين .

الخطة الرابعة ($ط_4$) أن يتعامل فى ثلاث سلع .

وبفرض أن حالات الطلب على السلعة يتمثل فى الحالات الآتية :-

الطلب الأول ($ب_1$) طلب ردىء وذلك فى حالة عدم بيع أى سلعة .

الطلب الثانى ($ب_2$) طلب أقل من المتوسط فى حالة بيع سلعة واحدة .

الطلب الثالث ($ب_3$) طلب معتدل فى حالة بيع سلعتين .

الطلب الرابع ($ب_4$) طلب ممتاز فى حالة بيع ثلاث سلع .

وحتى يتمكن هذا التاجر من تحديد الخطة المناسبة يجب تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة وهذه الإحتمالات يمكن تحديدها إذا توافرت لدى التاجر بيانات عن التجار الآخرين الذين يتعاملون فى نفس نوع السلعة التى يتعامل فيها هذا التاجر وهذه الإحتمالات تعتمد أساساً على خبرة هذا التاجر . ولإختيار الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة يتم إتباع الخطوات الآتية :-

أولاً: تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة :-

ويتم تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة عن طريق :-

أ - تحديد إحتمال البيع ومنه تحديد إحتمال عدم البيع .

ب - عن طريق إحتمال البيع وإحتمال عدم البيع يتم تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين ومن هذا الجدول يتم إيجاد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة

ح($ب_1$) ، ح($ب_2$) ، ح($ب_3$) ، ح ($ب_4$) .

ثانياً : تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر :-

وهنا يتم تحديد ربح أو خسارة التاجر فى حالة إتباع الخطة الأولى (ط$_{١}$) مع جميع حالات الطلب (ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$ ، ب$_{٤}$) بمعلومية ثمن شراء السلعة وثمن بيعها .

وسوف نفترض أن الربح أو الخسارة الناتج هو :-

(هـ$_{١١}$ ، هـ$_{٢١}$ ، هـ$_{٣١}$ ، هـ$_{٤١}$) وهذا يمثل الصف الأول من مصفوفة الأرباح والخسائر .

كذلك يتم تحديد ربح أو خسارة التاجر فى حالة إتباع الخطة الثانية ط$_{٢}$ مع جميع حالات الطلب (ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$ ، ب$_{٤}$) وسوف نفترض أيضاً أن الربح أو الخسارة الناتج هو (هـ$_{١٢}$ ، هـ$_{٢٢}$ ، هـ$_{٣٢}$ ، هـ$_{٤٢}$) وهذا يمثل الصف الثانى من مصفوفة الأرباح والخسائر .

كذلك يتم تحديد ربح أو خسارة التاجر فى حالة إتباع الخطة الثالثة ط$_{٣}$ مع جميع حالات الطلب (ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$ ، ب$_{٤}$) وسوف نفترض أيضاً أن الربح أو الخسارة الناتج هو (هـ$_{١٣}$ ، هـ$_{٢٢}$ ، هـ$_{٣٣}$ ، هـ$_{٤٣}$) وهذا يمثل الصف الثالث من مصفوفة الأرباح والخسائر .

وأخيراً يتم تحديد ربح أو خسارة التاجر فى حالة إتباع الخطة الرابعة ط$_{٤}$ مع جميع حالات الطلب (ب$_{١}$ ، ب$_{٢}$ ، ب$_{٣}$ ، ب$_{٤}$) وسوف نفترض أيضاً أن الربح أو الخسارة الناتج هو .

(هـ$_{١٤}$ ، هـ$_{٢٤}$ ، هـ$_{٣٤}$ ، هـ$_{٤٤}$) وهذا يمثل الصف الرابع من مصفوفة الأرباح والخسائر .

وعلى ذلك فإن مصفوفة الأرباح والخسائر تكون على النحو التالى :-

$$\begin{array}{cccccc} \text{ب}_{٤} & \text{ب}_{٣} & \text{ب}_{٢} & \text{ب}_{١} & & \\ \left[\begin{array}{cccc} \text{هـ}_{٤١} & \text{هـ}_{٣١} & \text{هـ}_{٢١} & \text{هـ}_{١١} \\ \text{هـ}_{٤٢} & \text{هـ}_{٣٢} & \text{هـ}_{٢٢} & \text{هـ}_{١٢} \\ \text{هـ}_{٤٣} & \text{هـ}_{٣٣} & \text{هـ}_{٢٣} & \text{هـ}_{١٣} \\ \text{هـ}_{٤٤} & \text{هـ}_{٣٤} & \text{هـ}_{٢٤} & \text{هـ}_{١٤} \end{array}\right] & & & & & \begin{array}{c} \text{ط}_{١} \\ \text{ط}_{٢} \\ \text{ط}_{٣} \\ \text{ط}_{٤} \end{array} \end{array}$$

ثالثاً: تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة :-

وهنا يتم ضرب إحتمال تحقق حالة الطلب الأول ح ($\text{ب}_{١}$) فى كل رقم من أرقام العمود الأول من المصفوفة فيكون الناتج هو :-

($\text{ت}_{١١}$ ، $\text{ت}_{١٢}$ ، $\text{ت}_{١٣}$ ، $\text{ت}_{١٤}$) أى التوقع الرياضى لربح أو خسارة هذا التاجر عند تحقق حالة الطلب الأول مع جميع الخطط حيث .

$$\text{ت}_{١١} = \text{ح}(\text{ب}_{١}) \times \text{هـ}_{١١}$$

$$\text{ت}_{١٢} = \text{ح}(\text{ب}_{١}) \times \text{هـ}_{١٢}$$

$$\text{ت}_{١٣} = \text{ح}(\text{ب}_{١}) \times \text{هـ}_{١٣}$$

$$\text{ت}_{١٤} = \text{ح}(\text{ب}_{١}) \times \text{هـ}_{١٤}$$

وكذلك يتم ضرب إحتمال تحقق الطلب الثانى ح ($\text{ب}_{٢}$) فى كل رقم من أرقام العمود الثانى فيكون الناتج هو :-

$$(\text{ت}_{٢١} \text{ ، } \text{ت}_{٢٢} \text{ ، } \text{ت}_{٢٣} \text{ ، } \text{ت}_{٢٤})$$

حيث :-

$$\text{ت}_{٢١} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٢}) \times \text{هـ}_{٢١}$$

$$\text{ت}_{٢٢} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٢}) \times \text{هـ}_{٢٢}$$

$$\text{ت}_{٢٣} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٢}) \times \text{هـ}_{٢٣}$$

$$\text{ت}_{٢٤} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٢}) \times \text{هـ}_{٢٤}$$

وكذلك يتم ضرب إحتمال تحقق حالة الطلب الثالث ح ($\text{ب}_{٣}$) فى كل رقم من أرقام العمود الثالث فيكون الناتج هو .

$$(\text{ت}_{٣١} \text{ ، } \text{ت}_{٣٢} \text{ ، } \text{ت}_{٣٣} \text{ ، } \text{ت}_{٣٤})$$

حيث :-

$$\text{ت}_{٣١} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٣}) \times \text{هـ}_{٣١}$$

$$\text{ت}_{٣٢} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٣}) \times \text{هـ}_{٣٢}$$

$$\text{ت}_{٣٣} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٣}) \times \text{هـ}_{٣٣}$$

$$\text{ت}_{٣٤} = \text{ح}\,(\text{ب}_{٣}) \times \text{هـ}_{٣٤}$$

وكذلك يتم ضرب إحتمال تحقق حالة الطلب الرابع ح ($\text{ب}_{٤}$) فى كل رقم من أرقام العمود الرابع فيكون الناتج هو .

($\text{ت}_{٤١}$ ، $\text{ت}_{٤٢}$ ، $\text{ت}_{٤٣}$ ، $\text{ت}_{٤٤}$)

حيث :-

$\text{ت}_{٤١} = \text{ح}(\text{ب}_{٤}) \times \text{هـ}_{٤١}$

$\text{ت}_{٤٢} = \text{ح}(\text{ب}_{٤}) \times \text{هـ}_{٤٢}$

$\text{ت}_{٤٣} = \text{ح}(\text{ب}_{٤}) \times \text{هـ}_{٤٣}$

$\text{ت}_{٤٤} = \text{ح}(\text{ب}_{٤}) \times \text{هـ}_{٤٤}$

وعلى ذلك يكون شكل المصفوفة كالآتى :-

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccc} \text{ح}(\text{ب}_{٤}) & \text{ح}(\text{ب}_{٣}) & \text{ح}(\text{ب}_{٢}) & \text{ح}(\text{ب}_{١}) \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
\text{هـ}_{٤١} & \text{هـ}_{٣١} & \text{هـ}_{٢١} & \text{هـ}_{١١} \\
\text{هـ}_{٤٢} & \text{هـ}_{٣٢} & \text{هـ}_{٢٢} & \text{هـ}_{١٢} \\
\text{هـ}_{٤٣} & \text{هـ}_{٣٣} & \text{هـ}_{٢٣} & \text{هـ}_{١٣} \\
\text{هـ}_{٤٤} & \text{هـ}_{٣٤} & \text{هـ}_{٢٤} & \text{هـ}_{١٤}
\end{bmatrix} & \begin{array}{c} \text{ط}_{١} \\ \text{ط}_{٢} \\ \text{ط}_{٣} \\ \text{ط}_{٤} \end{array}
\end{array}$$

ثم يتم جمع كل صف من صفوف المصفوفة حيث يمثل الصف الأول

ت (ط١) أى المنفعة المتوقعة للخطة الأولى . ويمثل الصف الثانى .

ت (ط٢) المنفعة المتوقعة للخطة الثانية . ويمثل الصف الثالث .

ت (ط٣) المنفعة المتوقعة للخطة الثالثة . ويمثل الصف الرابع .

ت (ط٤) المنفعة المتوقعة للخطة الرابعة .

حيث :-

$$ت\ (ط_{١}) = ت_{١١} + ت_{٢١} + ت_{٣١} + ت_{٤١}$$

$$ت\ (ط_{٢}) = ت_{١٢} + ت_{٢٢} + ت_{٣٢} + ت_{٤٢}$$

$$ت\ (ط_{٣}) = ت_{١٣} + ت_{٢٣} + ت_{٣٣} + ت_{٤٣}$$

$$ت\ (ط_{٤}) = ت_{١٤} + ت_{٢٤} + ت_{٣٤} + ت_{٤٤}$$

ثم يتم إختيار الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة . ويكون شكل المصفوفة فى شكلها النهائى كالآتى :-

$$\begin{array}{l} ت\ (ط_{١}) = \\ ت\ (ط_{٢}) = \\ ت\ (ط_{٣}) = \\ ت\ (ط_{٤}) = \end{array} \begin{bmatrix} ت_{١١} + ت_{٢١} + ت_{٣١} + ت_{٤١} \\ ت_{١٢} + ت_{٢٢} + ت_{٣٢} + ت_{٤٢} \\ ت_{١٣} + ت_{٢٣} + ت_{٣٣} + ت_{٤٣} \\ ت_{١٤} + ت_{٢٤} + ت_{٣٤} + ت_{٤٤} \end{bmatrix}$$

ويتم إيضاح ماتقدم من خلال الأمثلة الآتية :-

مثال١ :-

يقوم أحد التجار بتوزيع ثلاث سلع الأكثر فى خلال موسم معين من السلع التى تتلف إذا بقيت حتى نهاية الموسم دون بيع فإذا كان ثمن شراء السلعة ٢٠٠ جنيه وثمن بيعها ٣٠٠ جنيه وأن الخطط المتاحة لهذا التاجر هى :-

الخطة الأولى ($ط_١$) ألا يتعامل فى هذه السلعة .

الخطة الثانية ($ط_٢$) أن يتعامل فى سلعة واحدة .

الخطة الثالثة ($ط_٣$) أن يتعامل فى سلعتين .

الخطة الرابعة ($ط_٤$) أن يتعامل فى ثلاث سلع .

وأن حالات الطلب على السلعة تتمثل فى الحالات الآتية :-

الحالة الأولى ($ب_١$) طلب ردىء فى حالة عدم بيع أى سلعة .

الحالة الثانية ($ب_٢$) طلب أقل من المتوسط فى حالة بيع سلعة واحدة .

الحالة الثالثة ($ب_٣$) طلب معتدل فى حالة بيع سلعتين .

الحالة الرابعة ($ب_٤$) طلب ممتاز فى حالة بيع ثلاث سلع .

فإذا أمكن جمع بيانات عن ١٠٠٠ تاجر كان يتعامل كل منهم فى الموسم السابق فى نفس نوع السلع التى يتعامل فيها هذا التاجر وهذه البيانات هى :-

عدد السلع المباعة	٠	١	٢	٣
عدد التجار	١٠٠	٢٨٠	٤٠٠	٢٢٠

والمطلوب :- تحديد الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة .

الحل :-

لتحديد الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة نتبع الخطوات الآتية :-

١ - تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة .

٢ - تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر (الخطط مقترنة بحالات الطلب) .

٣ - تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة ومن هذه المصفوفة يتم إختيار الخطة التى تحقق للتاجر أكبر منفعة متوقعة .

أولاً : تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة :-

أ - إيجاد إحتمال البيع ومنه إيجاد إحتمال عدم البيع .

ولإيجاد إحتمال البيع يجب حساب متوسط عدد السلع التى باعها كل تاجر من هؤلاء التجار والتى جمعت عنهم بيانات عن الموسم السابق وقسمه هذا المتوسط على عدد السلع التى يتعامل فيها كل من هؤلاء التجار نحصل على الإحتمال .

$$\text{الإحتمال} = \frac{\text{المتوسط}}{\text{عدد السلع المتعامل فيها}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

حيث أن :-

عدد السلع المباعة	عدد التجار	عدد السلع المباعة × عدد التجار
٠	١٠٠	صفر
١	٢٨٠	٢٨٠
٢	٤٠٠	٨٠٠
٣	٢٢٠	٦٦٠
المجموع	١٠٠٠	١٧٤٠

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{إجمالى (عدد السلع × عددالتجار)}}{\text{عدد التجار}}$$

$$= \frac{١٧٤٠}{١٠٠٠} = ١,٧٤$$

$$\text{الإحتمال} = \frac{\text{المتوسط}}{\text{عدد السلع المتعامل فيها}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}$$

$$= \frac{١,٧٤}{٣} = ,٥٨$$

إحتمال عدم البيع = ١ - ,٥٨ = ,٤٢

ب - تكوين جدول توزيع ثنائي الحدين .

عن طريق إحتمال البيع (,٥٨) وإحتمال عدم البيع (,٤٢) يمكن تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين وإيجاد مفكوك المقدار $(,٤٢ + ,٥٨)^{٣}$ فإذا رمزنا لحالات الطلب بالرمز ر وإحتمالات تحققها بالرمز ح (ر) فيكون لدينا .

ر	ح (ر)
٠	ح (٠) = ^{٣}ق$_{٠}$ (,٥٨)^{٠} (,٤٢)^{٣} = ,١
١	ح (١) = ^{٣}ق$_{١}$ (,٥٨)^{١} (,٤٢)^{٢} = ,٣
٢	ح (٢) = ^{٣}ق$_{٢}$ (,٥٨)^{٢} (,٤٢)^{١} = ,٤
٣	ح (٣) = ^{٣}ق$_{٣}$ (,٥٨)^{٣} (,٤٢)^{٠} = ,٢
	المجموع الكلى = ١,٠٠

ويلاحظ أن :-

ح (ب$_{١}$) إحتمال تحقق الطلب الأول ويمثل إحتمال تحقق حالة الطلب الردئ .

= ح (٠) = ,١

، ح (ب$_{٢}$) إحتمال تحقق الطلب الثانى ويمثل إحتمال تحقق الطلب .

الأقل من المتوسط ح (١) = ,٣

، ح (ب$_{٣}$) إحتمال تحقق الطلب الثالث ويمثل إحتمال تحقق الطلب المعتدل .

= خ (٢) = ,٤

، ح (ب$_{٤}$) إحتمال تحقق الطلب الرابع ويمثل إحتمال تحقق الطلب الممتاز .

= ح (٣) = ,٢

وهذه الإحتمالات سوف يتم إستخدامها فى الخطوة الثالثة عند تحديد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة .

ثانيا: تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر :- (الخطط مقترنة بحالات الطلب)

حالات الطلب ثمن البيع ٣٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ٢٠٠ جنيه	ب$_{١}$ (٠)	ب$_{٢}$ (١)	ب$_{٣}$ (٢)	ب$_{٤}$ (٣)
	٠ × ٣٠٠ = صفر	١ × ٣٠٠ = ٣٠٠	٢ × ٣٠٠ = ٦٠٠	٣ × ٣٠٠ = ٩٠٠
ط$_{١}$ (٠) ٠ × ٢٠٠ = صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ط$_{٢}$ (١) ١ × ٢٠٠ = ٢٠٠	٢٠٠ -	١٠٠	١٠٠	١٠٠
ط$_{٣}$ (٢) ٢ × ٢٠٠ = ٤٠٠	٤٠٠ -	١٠٠ -	٢٠٠	٢٠٠
ط$_{٤}$ (٣) ٣ × ٢٠٠ = ٦٠٠	٦٠٠ -	٣٠٠ -	صفر	٣٠٠

ثالثا: مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة :

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب$_{١}$	ب$_{٢}$	ب$_{٣}$	ب$_{٤}$	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ت (ط$_{١}$)	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ت (ط$_{٢}$)	٢٠ -	٣٠	٤٠	٢٠	٧٠
ت (ط$_{٣}$)	٤٠ -	٣٠ -	٨٠	٤٠	٥٠
ت (ط$_{٤}$)	٦٠ -	٩٠ -	صفر	٦٠	٩٠ -

∴ الخطة التى تحقق أكبر منفعة متوقعة هى الخطة الثانية التعامل وسلعة واحدة وهنا يحقق ربح مقداره ٧٠ جنيه .

مثال ٢ :-

فى إحدى الشركات التجارية وجد أن ثمن شراء السلعة ٢٠٠ جنيه وثمن بيعها ٣٠٠ جنيه فإذا كانت الخطط المتاحة أمام هذه الشركة كما يلى بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة .

ط١ الخطة الأولى :- عدم التعامل فى هذه السلعة

ط٢ الخطة الثانية :- التعامل فى سلعة واحدة .

ط٣ الخطة الثالثة :- التعامل فى سلعتين .

ط٤ الخطة الرابعة :- التعامل فى ثلاث سلع .

ط٥ الخطة الخامسة :- التعامل فى أربع سلع .

وكانت حالات الطلب على السلعة تتمثل فى الحالات الآتية :-

ب١ الطلب الأول :- عدم طلب أى سلعة

ب٢ الطلب الثانى :- طلب سلعة واحدة

ب٣ الطلب الثالث :- يتمثل فى بيع سلعتين .

ب٤ الطلب الرابع :- يتمثل فى بيع ثلاث سلع .

ب٥ الطلب الخامس :- يتمثل فى بيع أربع سلع .

فإذا تم تجميع بيانات عن ١٠٠٠ شركة كانت تتعامل فى الموسم السابق فى نفس نوع السلع التى تتعامل فيها هذه الشركة وكانت هذه البيانات كما يلى :-

عدد السلع	٠	١	٢	٣	٤
عدد الشركات	١٠	٨٠	١١٠	٣٠٠	٥٠٠

والمطلوب :- تحديد الخطة التى تحقق للشركة أكبر منفعة متوقعة .

الحل :-

أولاً : تحديد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة :-

أ - إيجاد إحتمال البيع ومنه إيجاد إحتمال عدم البيع :-

عدد السلع	عدد الشركات	عدد السلع × عدد الشركات
٠	١٠	صفر
١	٨٠	٨٠
٢	١١٠	٢٢٠
٣	٣٠٠	٩٠٠
٤	٥٠٠	٢٠٠٠
المجموع الكلى	١٠٠٠	٣٢٠٠

$$\text{المتوسط} = \frac{\text{إجمالى (عدد السلع × عدد الشركات)}}{\text{عدد الشركات}}$$

$$= \frac{٣٢٠٠}{١٠٠٠} = ٣,٢$$

$$\text{إحتمال البيع} = \frac{\text{المتوسط}}{\text{عدد السلع المتعامل فيها}}$$

$$= \frac{٣,٢}{٤} = ,٨$$

إحتمال عدم البيع = ١ - ,٨ = ,٢

ب- تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين :-

يتم إيجاد مفكوك المقدار $(٫٢ + ٫٨)^{٤}$

ر	ح (ر)	
٠	ح (٠) = $^{٤}ق_{٠}\ (٫٨)^{٠}\ (٫٢)^{٤}$ =	,٠٠١٦
١	ح (١) = $^{٤}ق_{١}\ (٫٨)^{١}\ (٫٢)^{٣}$ =	,٢٥٦
٢	ح (٢) = $^{٤}ق_{٢}\ (٫٨)^{٢}\ (٫٢)^{٢}$ =	,١٥٣٦
٣	ح (٣) = $^{٤}ق_{٣}\ (٫٨)^{٣}\ (٫٢)^{١}$ =	,٤٠٩٦
	ح (٤) = $^{٤}ق_{٤}\ (٫٨)^{٤}\ (٫٢)^{٠}$ =	,٤٠٩٦
	المجموع الكلى =	١,٠٠٠٠

ويلاحظ أن :-

أ - إحتمال تحقق الطلب الأول : عدم طلب أى سلع .

ح $(ب_{١})$ = ,٠٠١٦

ب - إحتمال تحقق الطلب الثانى : طلب سلعة واحدة .

ح $(ب_{٢})$ = ح (١) = ,٠٢٥٦

جـ - إحتمال تحقق الطلب الثالث : طلب سلعتين .

ح $(ب_{٣})$ = ح (٢) = ,١٥٣٦

د - إحتمال تحقق الطلب الرابع : طلب ٣ سلع

ح $(ب_{٤})$ = ح (٣) = ,٤٠٩٦

هـ - إحتمال تحقق الطلب الخامس طلب ٤ سلع

ح(ب٥) = ح (٤) = ٤٠٩٦,.

ثانيا: تكوين مصفوفة الارباح والخسائر :- (الخطط مقترنة بحالات الطلب)

حالات الطلب ثمن البيع ٣٠٠ جنيه / الخطط المتاحة ثمن الشراء ٢٠٠ جنيه	ب١(٠)	ب٢(١)	ب٣(٢)	ب٤(٣)	ب٥(٤)
	٠ × ٣٠٠ = صفر	١ × ٣٠٠ = ٣٠٠	٢ × ٣٠٠ = ٦٠٠	٣ × ٣٠٠ = ٩٠٠	٤ × ٣٠٠ = ١٢٠٠
ط١ (٠) ٠ × ٢٠٠ = صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ط٢ (١) ١ × ٢٠٠ = ٢٠٠	-٢٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
ط٣ (٢) ٢ × ٢٠٠ = ٤٠٠	-٤٠٠	-١٠٠	٢٠٠	٢٠٠	٢٠٠
ط٤ (٣) ٣ × ٢٠٠ = ٦٠٠	-٦٠٠	-٣٠٠	صفر	٣٠٠	٣٠٠
ط٥ (٤) ٤ × ٢٠٠ = ٨٠٠	-٨٠٠	-٥٠٠	-٢٠٠	١٠٠	٤٠٠

ثالثا : تكوين مصفوفة الارباح والخسائر المتوقعة :

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١(٠)	ب٢(١)	ب٣(٢)	ب٤(٣)	ب٥(٤)	المنافع المتوقعة
	.٠٠١٦	.٠٢٥٦	.١٥٣٦	.٤٠٩٦	.٤٠٩٦	
ت(ط١)(٠)	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ت(ط٢)(١)	-.٣٢	٢.٥٦	١٥,٣٦	٤٠,٩٦	٤٠,٩٦	٩٩,٥٢
ت(ط٣)(٢)	-.٦٤	-٢,٥٦	٣٠.٧٢	٨١.٩٢	٨١.٩٢	١٩١,٣٦
ت(ط٤)(٣)	-.٩٦	-٧.٦٨	صفر	١٢٢,٨٨	١٢٢.٨٨	٢٣٧.١٢
ت(ط٥)(٤)	-١.٢٨	-١٢.٨٠	-٣٠.٧٢	٤٠.٩٦	٤٠.٩٦	٣٧,١٢

على التاجر إتباع الخطة الرابعة وهى التعامل ، ثلاث سلع وفى هذه الحالة يحقق ربح مقداره ٢٣٧.١٢

مثال ٣ :-

قامت إحدى الشركات الصناعية بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب وقد تبين لها أن عدد السلع المباعة إسبوعياً يتراوح مابين ٢٠ ، ٢٣ سلعة وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :-

عدد السلع	٢٠	٢١	٢٢	٢٣
الإحتمال	,١٠	,٣٠	,٤٠	,٢٠

فإذا كانت تكاليف إنتاج السلعة ١٠٠ج وثمن بيعها ٢٠٠ج وقد طلبت منك الشركة تحديد عدد السلع الواجب إنتاجه إسبوعياً بفرض أن السلعة التى تبقى دون بيع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة .

الحل :-

فى هذا التمرين توفر لدينا إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة لذلك ليس هناك حاجة إلى تكوين جدول توزيع ثنائى الحدين لإيجاد إحتمالات تحقق حالات الطلب المختلفة وسوف نبدأ الحل بإيجاد مصفوفة الأرباح والخسائر ثم مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة . وذلك بعد إفتراض الخطط وحالات الطلب حيث أن :-

الخطط (ط)	حالات الطلب (ل)
($ط_1$) الخطة الأولى إنتاج ٢٠ سلعة	($ب_1$) حالة الطلب الأولى طلب ٢٠ سلعة
($ط_2$) الخطة الثانية إنتاج ٢١ سلعة	($ب_2$) حالة الطلب الثانية طلب ٢١ سلعة
($ط_3$) الخطة الثالثة إنتاج ٢٢ سلعة	($ب_3$) حالة الطلب الثالثة طلب ٢٢ سلعة
($ط_4$) الخطة الرابعة إنتاج ٢٣ سلعة	($ب_4$) حالة الطلب الرابعة طلب ٢٣ سلعة

وعلى أساس الخطط وحالات الطلب السابقة وتكاليف إنتاج السلعة وثمن بيعها يتم تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر .

أولاً: تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر :-

حالات الطلب ثمن البيع ٢٠٠ جنيه / الخطط المتاحة تكاليف الإنتاج ١٠٠ جنيه	ب١ (٢٠)	ب٢ (٢١)	ب٣ (٢٢)	ب٤ (٢٣)
	٢٠ × ٢٠٠ = ٤٠٠٠	٢١ × ٢٠٠ = ٤٢٠٠	٢٢ × ٢٠٠ = ٤٤٠٠	٢٣ × ٢٠٠ = ٤٦٠٠
ط١ (٢٠) ٢٠ × ١٠٠ = ٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠	٢٠٠٠
ط٢ (٢٠) ٢١ × ١٠٠ = ٢١٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠	٢١٠٠
ط٣ (٢٠) ٢٢ × ١٠٠ = ٢٢٠٠	١٨٠٠	٢٠٠٠	٢٢٠٠	٢٢٠٠
ط٤ (٢٠) ٢٣ × ١٠٠ = ٢٣٠٠	١٧٠٠	١٩٠٠	٢١٠٠	٢٣٠٠

ثانياً: تكوين مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة :-

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ت (ط١) (٢٠)	٢٠٠	٦٠٠	٨٠٠	٤٠٠	٢٠٠٠
ت (ط٢) (٢١)	١٩٠	٦٣٠	٨٤٠	٤٢٠	٢٠٨٠
ت (ط٣) (٢٢)	١٨٠	٦٠٠	٨٨٠	٤٤٠	٢١٠٠
ت (ط٤) (٢٣)	١٧٠	٥٧٠	٨٤٠	٤٦٠	٢٠٤٠

على التاجر إتباع الخطة الثالثة وهى التعامل فى ٢٢ سلعة وفى هذه الحالة يحقق أرباح قدارها ٢ ٠ جنيه.

مثال٤ :-

قامت إحدى الشركات بدراسة الطلب الأسبوعى على السلعة التى تنتجها وإحتمالات تحقق هذا الطلب حيث تبين لها أن عدد السلع المباعة أسبوعياً يتراوح بين ٣ : ٦ سلع وأن إحتمالات تحقق الطلب كانت كما يلى :

عدد السلع المباعة	٣	٤	٥	٦
الإحتمال	,١	,٣	,٤	,٢

والمطلوب : تحديد عدد السلع الواجب إنتاجها أسبوعياً لتحقيق أكبر منفعة متوقعة إذا علمت أن تكلفة السلعة على الشركة ١٠٠ جنيه. وأن بيعها للمستهلك ٢٠٠ جنيه وبفرض أن السلع التى تبقى بدون بيع حتى نهاية الأسبوع تفقد قيمتها وتعتبر خسارة على الشركة.

الحل٤ :-

الخطط المتاحة أمام الشركة (ط)	حالات الطلب وفقاً لدراسة السوق
($ط_1$) إنتاج ٣ سلع	($ب_1$) طلب ٣ سلع
($ط_2$) إنتاج ٤ سلع	($ب_2$) طلب ٤ سلع
($ط_3$) إنتاج ٥ سلع	($ب_3$) طلب ٥ سلع
($ط_4$) إنتاج ٦ سلع	($ب_4$) طلب ٦ سلع

أولاً : تحديد مصفوفة الأرباح والخسائر (الخطط مقترنة بحالات الطلب)

حالات الطلب ثمن البيع ٢٠٠ جنيه / الخطط المتاحة التكلفة ١٠٠ جنيه	ب١(٣)	ب٢(٤)	ب٣(٥)	ب٤(٦)
	٣ × ٢٠٠ = ٦٠٠	٤ × ٢٠٠ = ٨٠٠	٥ × ٢٠٠ = ١٠٠٠	٦ × ٢٠٠ = ١٢٠٠
ط١(٣) ٣ × ١٠٠ = ٣٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٣٠٠
ط٢(٤) ٤ × ١٠٠ = ٤٠٠	٢٠٠	٤٠٠	٤٠٠	٤٠٠
ط٣(٥) ٥ × ١٠٠ = ٥٠٠	١٠٠	٣٠٠	٥٠٠	٥٠٠
ط٤(٦) ٦ × ١٠٠ = ٦٠٠	صفر	٢٠٠	٤٠٠	٦٠٠

ثانياً: تحديد مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة :

إحتمالات تحقق حالات الطلب / الخطط المتاحة	ب١	ب٢	ب٣	ب٤	المنافع المتوقعة
	٠,١	٠,٣	٠,٤	٠,٢	
ت(ط١)(٣)	٣٠	٩٠	١٢٠	٦٠	٣٠٠
ت(ط٢)(٤)	٢٠	١٢٠	١٦٠	٨٠	٣٨٠
ت(ط٣)(٥)	١٠	٩٠	٢٠٠	١٠٠	٤٠٠
ت(ط٤)(٦)	صفر	٦٠	١٦٠	١٢٠	٣٤٠

∴ على التاجر إتباع الخطة الثالثة وهى التعامل فى ٥ سلع وعندئذ يحقق. أرباح قدرها ٤٠٠ جنيه.

الفصل السابع

التطبيقات التجارية على الدوال

التطبيقات التجارية على الدوال

طرق إيجاد الدوال:

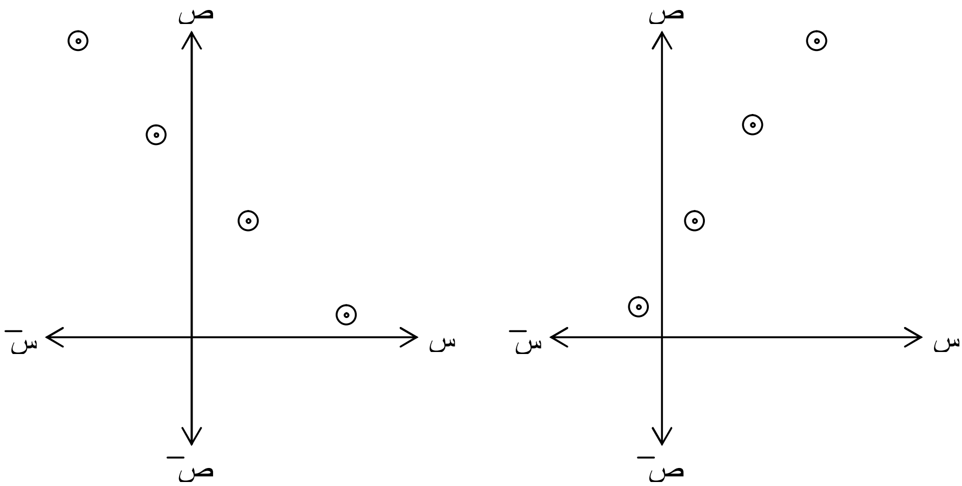
لاشك أن الدالة فى صورتها العامة ص = د(س) أو ص = د(س ، ع ، ل، ....) لا تعطى شكل العلاقة الجبرية التى تحدد قيمة المتغير التابع إذا تحددت قيمة المتغير المستقل أو قيم المتغيرات المستقلة.

وإذا توصلنا إلى الصورة الجبرية للعلاقة الدالية فإنه يمكننا الوصول إلى العديد من النتائج التى تفيد الهدف من دراسة ظاهرة (أو ظواهر) معينة، مثل حساب القيمة المتوقعة للمتغير التابع إذا ما أخذ المتغير المستقل قيمة معينة، كما يمكن حساب معدل التغير فى المتغير التابع بالنسبة للتغير فى المتغير المستقل.

والصورة الجبرية التى تصف العلاقة الدالية بين متغير تابع ومتغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة يمكن أن نصل إليها بصورة تقريبية عن طريق استخدام شكل الانتشار (الاتجاه العام لانتشار النقط الممثلة للقيم المتقابلة للمتغيرين) وهذه الطريقة شائعة الاستخدام فى حالة العلاقات الدالية البسيطة (بين متغيرين).

وتتحدد درجة المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين بالاتجاه العام لشكل انتشار النقط التى تمثل المتغيرين (كل قيمتين متقابلتين للمتغيرين س، ص نمثلهما بنقطة) فإذا كانت أقرب إلى الخط المستقيم سواء كان صاعداً إلى أعلى نحو اليمين [يصنع زاوية حادة مع المحور الأفقى – محور س شكل (١)] أو هابطاً إلى أسفل نحو اليمين [يصنع زاوية منفرجة مع المحور الأفقى – محور س شكل (٢)] فإن العلاقة بين المتغيرين تمثلها معادلة من الدرجة الأولى يطلق عليها معادلة الخط المستقيم أو معادلة الاتجاه العام فى صورة:

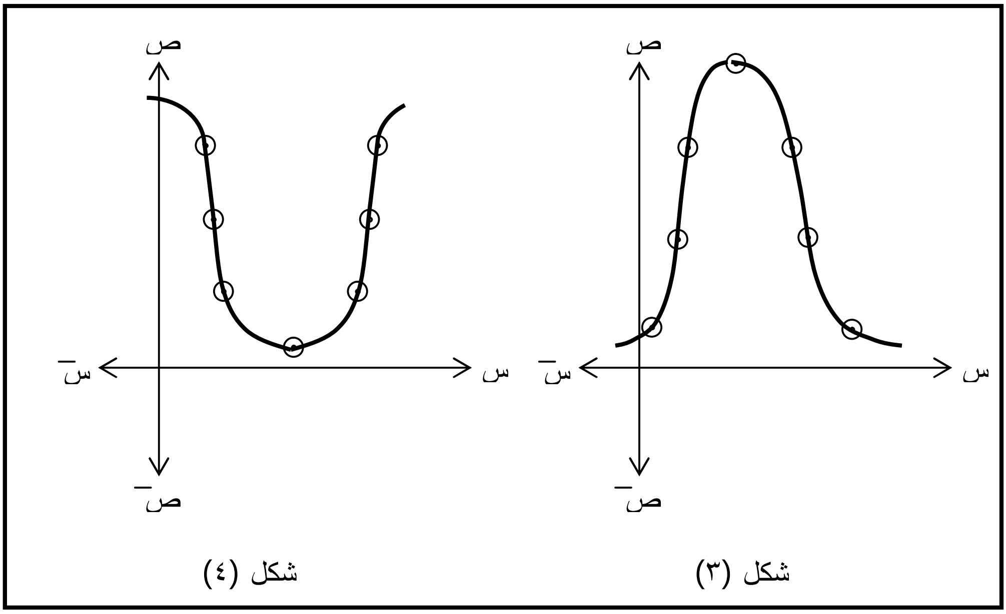
ص = أ س + ب   حيث ص المتغير التابع، س المتغير المستقل.



شكل (٢) شكل (١)

أما إذا كان الاتجاه العام لشكل انتشار النقط التى تمثل المتغيرين أقرب ما يكون إلى منحنى منتظم أو شبه منتظم وله نهاية واحدة سواء كانت عظمى (شكل ٣) أم صغرى (شكل ٤) فإن العلاقة بين المتغيرين تمثلها معادلة من الدرجة الثانية فى صورة:

ص = أس^{٢} + ب س + جـ



شكل (٤) شكل (٣)

أما إذا كان الاتجاه العام لانتشار النقط أقرب ما يكون إلى منحنى منتظم أو شبه منتظم له أكثر من نهاية فإن العلاقة بين المتغيرين تمثلها معادلة من درجة أعلى من الدرجة الثانية تبعاً لعدد النهايات التى يمكن التعرف عليها من شكل الانتشار.

فمعادلة الدرجة الثالثة فى صورة:

ص = أس^{٣} + ب س^{٢} + جـ س + د

ومعادلة الدرجة الرابعة فى صورة:

ص = أ س^{٤} + ب س^{٣} + جـ س^{٢} + د س + هـ: وهكذا.

ولكن كيف نحدد ثوابت المعادلة التى تمثل العلاقة الدالية، بمعنى أوضح فى معادلة الدرجة الأولى ص = أس + ب كيف نحسب قيمة أ، ب وفى معادلة الدرجة الثانية ص = أس^{٢} + ب س + جـ

كيف نحدد قيمة أ، ب، جـ وهكذا.

طريقة الفروق المتساوية:

إذا كان لدينا مجموعة من أزواج القيم تمثل المتغيرين المستقل (س) والتابع (ص) فإن خطوات الحل تتحدد فى الآتى:

١- نوجد الفروق بين كل قيمتين متتاليتين للمتغير (س) ونطلق عليها $ف_{س}$

حيث $ف_{س} = س_{ر+١} - س_{ر}$

٢- نوجد الفروق بين كل قيمتين متتاليتين للمتغير (ص) ونطلق عليها $ف_{ص}$

حيث $ف_{ص} = ص_{ر+١} - ص_{ر}$

وهذا يعنى أن نطرح القيمة – السابقة لها.

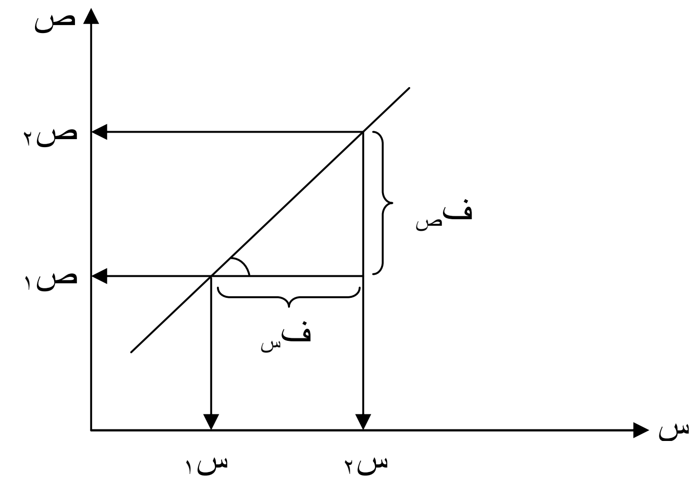
٣- بقسمة الفروق فى ص ÷ الفروق فى س فنحصل على $ف_{١} = \frac{ف\ ص}{ف\ س}$

فإن كان الناتج مقدار ثابت كانت المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الأولى فى صورة: ص = أ س + ب

والمقدار الثابت $ف_{١}$ هو ميل الزاوية التى يصنعها الخط المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

$$ميل\ الزاوية = ظل\ الزاوية = \frac{المقابل}{المجاور} = \frac{ف\ ص}{ف\ س} = ف_{١} = أ$$

كما هو موضح فى الشكل (٥)



شكل (٥)

ولكى نحصل على صورة المعادلة يتم اختيار أى زوج من أزواج القيم التى تمثل المتغيرين ثم نعوض فى العلاقة: $ص = ص_ر + ف_١ (س - س_ر)$

حيث $س_ر$، $ص_ر$ هو أى زوج من أزواج القيم وترتيبه (ر) مثلاً.

مثال (١): أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص إذا كانت لديك القيم التالية:

س	٢	٣	٥	٧	١٠	١٥	٢٠
ص	١١	١٤	٢٠	٢٦	٣٥	٥٠	٦٥

الحـل

فروق س ($ف_{س}$)	فروق ص ($ف_{ص}$)	$ف_{١} = \frac{ف_{ص}}{ف_{س}}$
٣ – ٢ = ١	١٤ – ١١ = ٣	$\frac{٣}{١}$ = ٣
٥ – ٣ = ٢	٢٠ – ١٤ = ٦	$\frac{٦}{٢}$ = ٣
٧ – ٥ = ٢	٢٦ – ٢٠ = ٦	$\frac{٦}{٢}$ = ٣
١٠ – ٧ = ٣	٣٥ – ٢٦ = ٩	$\frac{٩}{٣}$ = ٣
١٥ – ١٠ = ٥	٥٠ – ٣٥ = ١٥	$\frac{١٥}{٥}$ = ٣
٢٠ – ١٥ = ٥	٦٥ – ٥٠ = ١٥	$\frac{١٥}{٥}$ = ٣

وحيث أن $ف_{١}$ ثابتة لجميع الفروق المتتالية للمتغيرين، فإن معنى ذلك أن المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الأولى فى صورة: ص = أ س + ب
ولإيجاد هذه المعادلة نأخذ أى زوج من أزواج القيم وليكن الأول حيث س = ٢، ص = ١١

ونعوض فى العلاقة:

ص = $ص_{ر}$ + $ف_{١}$ (س – $س_{ر}$)

= ١١ + ٣ (س – ٢)

= ١١ + ٣س – ٦

∴ ص = ٣ س + ٥

ولكن بفرض أن $ف_١$ لم تكن ثابتة فإن معنى ذلك أن القيم لا تمثلها معادلة الدرجة الأولى بل من درجة أعلى وفى هذه الحالة وبعد أن نصل إلى قيم $ف_١$ نتبع الآتى:

١- نوجد الفرق بين كل قيمتين متتاليتين من $ف_١$ ونطلق عليها فروق $ف_١$ وهى تمثل: $ف_{ر+١}$ - $ف_ر$ أى نطرح كل قيمة – السابقة لها.

٢- نحسب فروق جديدة للمتغير س حسب العلاقة:

$$س_{ر+٢} - س_ر$$

أى نطرح القيمة الثالثة – الأولى، والرابعة – الثانية، الخامسة – الثالثة وهكذا. (لاحظ أن الفرق بين ترتيب القيم = ٢).

كما يمكن أن نحصل على هذه القيم بطريقة أخرى وهى جمع كل قيمتين متتاليتين من قيم $ف_س$ أى $ف_ر + ف_{ر+١}$

٣- نحسب $ف_٢$ بقسمة فروق $ف_١$ ÷ فروق س الجديدة فإذا كانت مقدار ثابت كانت المعادلة التى تمثل المتغيرين من الدرجة الثانية فى صورة:

$$ص = أس^٢ + ب\,س + جـ$$

أما إذا كانت قيم $ف_٢$ غير ثابتة نستمر فى الحل كما يلى:

٤- نحسب الفرق بين كل قيمتين متتاليتين من $ف_٢$ ونطلق عليها فروق $ف_٢$ وهى $ف_{ر+١} - ف_ر$

٥- نحسب فروق جديدة للمتغير س حسب العلاقة: $س_{ر+٣} - س_ر$

أى نطرح القيمة الرابعة – الأولى، الخامسة – الثانية، السادسة – الثالثة وهكذا (لاحظ أن الفرق بين ترتيب القيم = ٣)

كما يمكن أن نحصل على هذه القيم بجمع كل ثلاثة قيم متتالية من قيم $ف_س$ أى:

$$ف_ر + ف_{ر+١} + ف_{ر+٢}$$

٦- نحسب $ف_٣$ بقسمة فروق $ف_٢$ ÷ الفروق الجديدة للمتغير س فإذا كانت $ف_٣$ قيمة ثابتة كانت المعادلة التى تمثل المتغيرين من الدرجة الثالثة فى صورة:

$$ص = أ\,س^٣ + ب\,س^٢ + جـ\,س + د$$

فإن لم تكن ف$_٣$ ثابتة كان معنى ذلك أن المعادلة من درجة أعلى ونتبع نفس ما سبق للوصول إلى المعادلات من درجات أعلى.

مثال (٢):أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغير س، ص من خلال القيم التالية:

س	٢	٣	٤	٥	٧	١٠	١٢	١٥
ص	١٩	٣٢	٤٩	٧٠	١٢٤	٢٣٥	٣٢٩	٥٠٠

الحـل

ف$_{س}$	ف$_{ص}$	ف$_١$	فروق ف$_١$	فروق س الجديدة	ف$_٢$ = فروق ف$_١$ / فروق س الجديدة
١	١٣	١٣	٤	٢	٢
١	١٧	١٧	٤	٢	٢
١	٢١	٢١	٦	٣	٢
٢	٥٤	٢٧	١٠	٥	٢
٣	١١١	٣٧	١٠	٥	٢
٢	٩٤	٤٧	١٠	٥	٢
٣	١٧١	٥٧			

وحيث أن قيمة ف$_٢$ ثابتة فمعنى ذلك أن المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الثانية فى صورة: ص = أ س^٢ + ب س + جـ

ولكى نحصل على هذه المعادلة نعوض فى العلاقة:

ص = ص$_ر$ + ف$_١$ (س – س$_ر$) + ف$_٢$ (س – س$_ر$) (س – س$_{ر+١}$)

فإذا افترضنا أن ر= ١ فإن س$_١$ = ٢ ، ص$_١$ = ١٩ ، س$_٢$ = ٣

ص = ١٩ + ١٣ (س – ٢) + ٢(س – ٢) (س – ٣)

= ١٩ + ١٣س – ٢٦ + ٢ (س^٢ – ٥س + ٦)

= ١٠ + ١٣س – ٢٦ + ٢س^٢ – ١٠س + ١٢

ص = ٢س^٢ + ٣س + ٥

لاحظ أن ف_{1} = ١٣ هى التى تقابل أزواج القيم التى اخترناها وهى الزوج الأول (٢، ١٩).

مثال (٦):أوجد المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص من خلال القيم التالية:

س	١	٣	٥	٨	١٠	١٢	١٥
ص	١	٧٩	٣٢٥	١٢١٩	٢٣٠٥	٣٨٩٥	٧٤٣٥

الحـل

$\text{ف}_{\text{س}}$	$\text{ف}_{\text{ص}}$	ف_{1}	فروق ف_{1}	فروق س الجديدة	ف_{2}	فروق ف_{2}	فروق س الجديدة	ف_{3}
٢	٧٨	٣٩						
			٨٤	٤	٢١			
٢	٢٤٦	١٢٣				١٤	٧	٢
			١٧٥	٥	٣٥			
٣	٨٩٤	٢٩٨				١٤	٧	٢
			٢٤٥	٥	٤٩			
٢	١٠٨٦	٥٤٣				١٤	٧	٢
			٢٥٢	٤	٦٣			
٢	١٥٩٠	٧٩٥				١٤	٧	٢
			٣٨٥	٥	٧٧			
٣	٣٥٤٠	١١٨٠						

وحيث أن ف_{3} ثابتة فإن المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الثالثة فى صورة:

$$\text{ص} = \text{أ}\ \text{س}^{3} + \text{ب}\ \text{س}^{2} + \text{جـ}\ \text{س} + \text{د}$$

ولكى نحصل على هذه المعادلة نعوض فى العلاقة التالية:

$$\text{ص} = \text{ص}_{\text{ر}} + \text{ف}_{1}\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}}) + \text{ف}_{2}\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}})\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}+1})$$

$$+\ \text{ف}_{3}\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}})\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}+1})\,(\text{س} - \text{س}_{\text{ر}+2})$$

وبأخذ القيمة الأولى لـــــ س ، ص حيث س$_{ر}$ = ١، ص$_{ر}$ = ١، س$_{ر+١}$ = ٣، س$_{ر+٢}$ = ٥

ص = ١ + ٣٩(س – ١) + ٢١(س - ١) (س - ٣)+٢(س - ١) (س - ٣)(س - ٥)

= ١ + ٣٩س – ٣٩ + ٢١(س^{٢} – ٤س+٣)+٢(س^{٣} – ٩س^{٢}+ ٢٣س – ١٥)

= ١ + ٣٩س – ٣٩ + ٢١س^{٢} – ٨٤س+٦٣+٢س^{٣}-١٨س^{٢}+٤٦س – ٣٠

ص = ٢س^{٣} + ٣س^{٢} + س – ٥

<u>ملحوظة:</u> نفرض أن المعادلة التى تمثل العلاقة بين المتغيرين كانت من درجة أعلى (م مثلاً) أى أن قيم ف لم تثبت إلا عند ف$_{م}$ فإن المعادلة تكون فى الصورة التالية:

ص = أ س^{م} + ب س$^{م-١}$ + جـ س$^{م-٢}$ + ... + ك س + ل

ويتم إيجاد قيم أ، ب، جـ، ......، ك، ل من خلال العلاقة:

ص = ص$_{ر}$+ف$_{١}$(س - س$_{ر}$) +ف$_{٢}$(س – س$_{ر}$) (س-س$_{ر+١}$) + ف$_{٣}$(س – س$_{ر}$) (س – س$_{ر+١}$) (س – س$_{ر+٢}$) + ... + ف$_{م}$ (س–س$_{ر}$) (س-س$_{ر+١}$) (س-س$_{ر+٢}$) ...... (س – س$_{م}$)

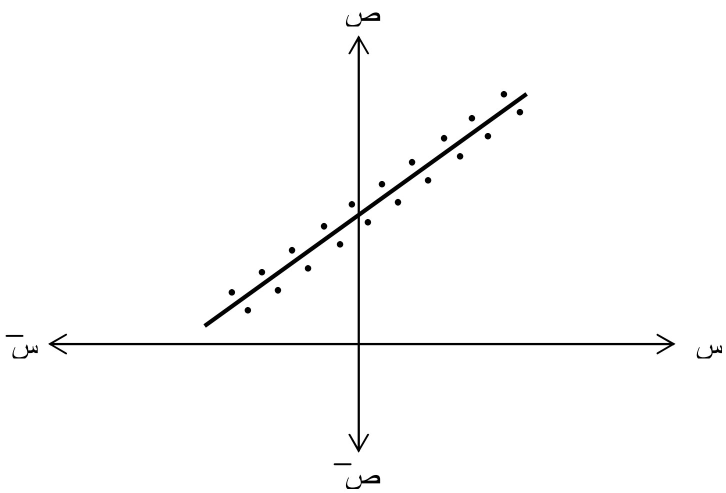
طريقة المربعات الصغرى:

رأينا كيف تستخدم طريقة الفروق المتساوية فى حالة وقوع جميع النقط التى تمثل أزواج القيم على خط مستقيم، فى حالة ما إذا كانت العلاقة الدالية تمثلها معادلة من الدرجة الأولى، أو تقع على منحنى إذا كانت العلاقة الدالية تمثلها معادلة من الدرجة الثانية أو أعلى من ذلك.

إلا أنه من النادر عملياً أن تتطابق النقط المشاهدة (الفعلية) مع النقط النظرية لأية دالة سواء كانت خطية أو غير خطية، ومن ثم فإن أية علاقة بين متغيرين قد لا يمثلها تماماً خط مستقيم أو منحنى من أى درجة ولكن ستكون هناك معادلة من بين هذه المعادلات تكون أقرب ما يكون إلى تمثيل الواقع الذى

تمثله البيانات (القيم) المشاهدة أو الفعلية. ومن أهم الطرق التى تستخدم لتقدير معالم المعادلة التى يقع عليها الاختيار هى طريقة المربعات الصغرى.

وهذه التسمية تأتى من أن الخط الذى نختاره لتمثيل العلاقة الدالية يتوسط أغلب النقط المشاهدة بحيث يكون مجموع مربعات فروق النقط المشاهدة عن النقط التى يمثلها ذلك الخط أقل ما يمكن كما يتضح من شكل (٦).



شكل (٦)

الدالة من الدرجة الأولى:

تمثلها المعادلة: ص = أ س + ب

ولإيجاد قيمة أ، ب يتم تكوين معادلتين نحصل عليها كما يلى:

نفرض أن لدينا أزواج القيم التالية للمتغيرين س، ص:

$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$
$ص_{١}$	$ص_{٢}$	$ص_{٣}$	$ص_{٤}$

والمعادلة التى نرغب فى التوصل إليها يجب أن تعطينا كل قيمة من قيم ص بالتعويض عن س بالقيم المقابلة:

$$ص_١ = أ\ س_١ + ب$$

$$ص_٢ = أ\ س_٢ + ب$$

$$ص_٣ = أ\ س_٣ + ب$$

$$ص_٤ = أ\ س_٤ + ب$$

بالجمع

$$مجـ\ ص = أ\ مجـ\ س + ن \times ب$$ .... (١)

وبضرب المعادلات السابقة × معامل أ

$$مجـ\ س_١\ ص_١ = أ\ س^٢_١ + ب\ س_١$$

$$مجـ\ س_٢\ ص_٢ = أ\ س^٢_٢ + ب\ س_٢$$

$$مجـ\ س_٣\ ص_٣ = أ\ س^٢_٣ + ب\ س_٣$$

$$مجـ\ س_٤\ ص_٤ = أ\ س^٢_٤ + ب\ س_٤$$

بالجمع

$$مجـ\ س\ ص = أ\ مجـ\ س^٢ + ب\ مجـ\ س$$ .... (٢)

وبالتالى فإن المعادلتين القياسيتين هما:

$$مجـ\ ص = أ\ مجـ\ س + ن \times ب$$ حيث (ن) عدد أزواج القيم.

$$مجـ\ س\ ص = أ\ مجـ\ س^٢ + ب\ مجـ\ س$$

وبحل هاتين المعادلتين يمكننا الحصول على أ، ب ويمكن حل المعادلتين إما باستخدام طريقة الحذف والتعويض او المحددات أو المصفوفات.

مثال (٧): باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد معادلة الدرجة الأولى فى صورة:

ص = أ س + ب من واقع البيانات التالية:

س	٢	٣	٥	٧	١٠
ص	١١	١٤	٢٠	٢٦	٣٥

الحـــل

س	ص	س ص	س^{٢}
٢	١١	٢٢	٤
٣	١٤	٤٢	٩
٥	٢٠	١٠٠	٢٥
٧	٢٦	١٨٢	٤٩
١٠	٣٥	٣٥٠	١٠٠
٢٧	١٠٦	٦٩٦	١٨٧

ومعادلة الدرجة الأولى فى صورة ص = أ س + ب نحصل عليها بعـــد إيجـــاد قيمة أ، ب من خلال حل المعادلتين القياسيتين:

مجـــ ص = أ مجـــ س + ن × ب

مجـــ س ص = أ مجـــ س^{٢} + ب مجـــ س

وبالتعويض:

١٠٦ = ٢٧ أ + ٥ ب

٦٩٦ = ١٨٧ أ + ٢٧ ب

ويمكن حل المعادلتين باستخدام المحددات حيث:

أ = $\frac{\Delta \text{أ}}{\Delta}$ ، ب = $\frac{\Delta \text{ب}}{\Delta}$

$$\text{أ} = \frac{\begin{vmatrix} ٥ & ١٠٦ \\ ٢٧ & ٦٩٦ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٥ & ٢٧ \\ ٢٧ & ١٨٧ \end{vmatrix}} \quad ، \quad \text{ب} = \frac{\begin{vmatrix} ١٠٦ & ٢٧ \\ ٦٩٦ & ١٨٧ \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} ٥ & ٢٧ \\ ٢٧ & ١٨٧ \end{vmatrix}}$$

$$\text{أ} = \frac{٣٤٨٠-٢٨٦٢}{٩٣٥-٧٢٩} = \frac{٦١٨-}{٢٠٦-} \qquad \text{ب} = \frac{١٩٨٢٢-١٨٧٩٢}{٩٣٥-٧٢٩} = \frac{١٠٣٠-}{٢٠٦-}$$

∴ أ = ٣   ∴ ب = ٥

∴ المعادلة التى تمثل هذه القيم من الدرجة الأولى فى صورة:

ص = ٣س + ٥

الدالة من الدرجة الثانية:

معادلة الدرجة الثانية فى صورة: ص = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ

ولإيجاد قيمة أ، ب، جـ نكون ثلاث معادلات قياسية بنفس الأسلوب السابق أى بفرض أن لدينا أزواج القيم التالية للمتغيرين س، ص:

$س_{١}$	$س_{٢}$	$س_{٣}$	$س_{٤}$
$ص_{١}$	$ص_{٢}$	$ص_{٣}$	$ص_{٤}$

وبالتعويض عن قيم س فى المعادلة نحصل على قيم ص المقابلة كما يلى:

$ص_{١}$ = أ $س^{٢}_{١}$ + ب $س_{١}$ + جـ

$ص_{٢}$ = أ $س^{٢}_{٢}$ + ب $س_{٢}$ + جـ

$ص_{٣}$ = أ $س^{٢}_{٣}$ + ب $س_{٣}$ + جـ

$ص_{٤}$ = أ $س^{٢}_{٤}$ + ب $س_{٤}$ + جـ   .   .   .   .

بالجمع

مجـ ص = أ مجـ $س^{٢}$ + ب مجـ س + ن × جـ .... (١)

وبضرب المعادلات السابقة × معامل ب نحصل على:

$س_١ ص_١ = أ س^٣_١ + ب س^٢_١ + جـ س_١$

$س_٢ ص_٢ = أ س^٣_٢ + ب س^٢_٢ + جـ س_٢$

$س_٣ ص_٣ = أ س^٣_٣ + ب س^٢_٣ + جـ س_٣$

$س_٤ ص_٤ = أ س^٣_٤ + ب س^٢_٤ + جـ س_٤$

بالجمع ______________________

$مجـ س ص = أ مجـ س^٣ + ب مجـ س^٢ + جـ مجـ س$.... (٢)

وبضرب المعادلات الأولى مرة أخرى × معامل أ نحصل على:

$س^٢_١ ص_١ = أ س^٤_١ + ب س^٣_١ + جـ س^٢_١$

$س^٢_٢ ص_٢ = أ س^٤_٢ + ب س^٣_٢ + جـ س^٢_٢$

$س^٢_٣ ص_٣ = أ س^٤_٣ + ب س^٣_٣ + جـ س^٢_٣$

$س^٢_٤ ص_٤ = أ س^٤_٤ + ب س^٣_٤ + جـ س^٢_٤$

بالجمع ______________________

$مجـ س^٢ ص = أ مجـ س^٤ + ب مجـ س^٣ + جـ مجـ س^٢$ .... (٣)

وبالتالى تصبح المعادلات القياسية لإيجاد قيم أ، ب، جـ فى معادلة الدرجة الثانية هى:

$مجـ ص = أ مجـ س^٢ + ب مجـ س + ن × جـ$

$مجـ س ص = أ مجـ س^٣ + ب مجـ س^٢ + جـ مجـ س$

$مجـ س^٢ ص = أ مجـ س^٤ + ب مجـ س^٣ + جـ مجـ س^٢$

مثال (٨):باستخدام طريقة المربعات الصغرى أوجد معادلة الدرجة الثانية فى صورة:

$ص = أ س^٢ + ب س + جـ$ من خلال البيانات التالية:

س	١	٢	٣	٤	٥
ص	١٢	٢١	٣٤	٥١	٧٢

الحــل

س	ص	س ص	س^{٢}	س^{٢}ص	س^{٣}	س^{٤}
١	١٢	١٢	١	١٢	١	١
٢	٢١	٤٢	٤	٨٤	٨	١٦
٣	٣٤	١٠٢	٩	٣٠٦	٢٧	٨١
٤	٥١	٢٠٤	١٦	٨١٦	٦٤	٢٥٦
٥	٧٢	٣٦٠	٢٥	١٨٠٠	١٢٥	٦٢٥
١٥	١٩٠	٧٢٠	٥٥	٣٠١٨	٢٢٥	٩٧٩

ولإيجاد معادلة الدرجة الثانية التى تمثل هذه القيم يتم التعويض فـــى المعــادلات القياسية التالية:

مجــ ص = أ مجــ س^{٢} + ب مجــ س + ن × جـ

مجــ س ص = أ مجــ س^{٣} + ب مجــ س^{٢} + جــ مجــ س

مجــ س^{٢} ص = أ مجــ س^{٤} + ب مجــ س^{٣} + جــ مجــ س^{٢}

وبالتعويض:

١٩٠ = ٥٥ أ + ١٥ ب + ٥ جـ (١)

٧٢٠ = ٢٢٥ أ + ٥٥ ب + ١٥ جـ (٢)

٣٠١٨ = ٩٧٩ أ + ٢٢٥ ب + ٥٥ جـ (٣)

وباستخدام طريقة الحذف:

بضرب المعادلة (١) × ٣

٥٧٠ = ١٦٥ أ + ٤٥ ب + ١٥ جـ (٤)

بطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٢)

١٥٠ = ٦٠ أ + ١٠ ب (٥)

بضرب المعادلة (١) × ١١

٢٠٩٠ = ٦٠٥ أ + ١٦٥ ب + ٥٥ جـ (٦)

بطرح المعادلة (٦) من المعادلة (٣)

٩٢٨ = ٣٧٤ أ + ٦٠ ب (٧)

بضرب المعادلة (٥) × (٦)

٩٠٠ = ٣٦٠ أ + ٦٠ ب (٨)

بطرح المعادلة (٨) من المعادلة (٧)

٢٨ = ١٤ أ ∴ أ = ٢

بالتعويض فى المعادلة (٥)

١٥٠ = ٦٠ × ٢ + ١٠ب

١٥٠ – ١٢٠ = ١٠ب

٣٠ = ١٠ ب ∴ ب = ٣

بالتعويض فى المعادلة (١)

١٩٠ = ٥٥ × ٢ + ١٥ × ٣ + ٥ جـ

١٩٠ = ١١٠ + ٤٥ + ٥ جـ

١٩٠ – ١٥٥ = ٥جـ

٣٥ = ٥جـ ∴ جـ = ٧

∴ معادلة الدرجة الثانية فى صورة:

ص = ٢س^{٢} + ٣س + ٧

ملحوظة:

يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى لإيجاد المعادلات من الدرجات الأعلى بنفس الأسلوب المتبع – بفرض أن المعادلة التى تمثل قيم المتغيرين س، ص من الدرجة (م) فى صورة:

ص = أ س^{م} + ب س$^{م-١}$ + جـ س$^{م-٢}$ + ... + ك س + ل

ولإيجاد قيمة أ، ب، جـ ...، ك، ل يتم تكوين (م+١) معادلة قياسية بالصورة التالية:

مجـ ص = أ مجـ س^{م} + ب مجـ س$^{م-١}$ +جـ مجـ س$^{م-٢}$ +...+ك مجـ س+ن×ل

مجـ س ص = أمجـ س$^{م+١}$ +ب مجـ س^{م} +جـ مجـ س$^{م-١}$ +..+ك مجـ س^{٢} +ل مجـ س

مجـ س^{٢}ص=أ مجـ س$^{م+٢}$ +ب مجـ س$^{م+١}$ +جـ مجـ س^{م} +..+ك مجـ س^{٣} +ل مجـ س^{٢}

⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

مجـ س^{م}ص=أمجـ س^{٢م} +ب مجـ س$^{٢م-١}$ +جـ مجـ س$^{٢م-٢}$ + ...+ك مجـ س$^{م+١}$ +ل مجـ س^{م}

وبحل هذه المعادلات نحصل على قيم أ، ب، جـ، ......، ك، ل

الدالة فى حالة تعدد المتغيرات المستقلة:

سبق أن ذكرنا أنه فى بعض الحالات يكون لدينا متغير تابع يعتمد فى تغيره على أكثر من متغير مستقل كأن يكون ص = د(س، ع) والدالة بهذه الصورة غير محددة فإذا حددناها فى صورة خطية ص=أ س + ب ع + جـ فإنه يمكن تحديد قيم أ، ب، جـ من خلال تكوين ثلاث معادلات قياسية كما سبق، بفرض أن لدينا القيم التالية للمتغيرات الثلاث:

ص$_{١}$	ص$_{٢}$	ص$_{٣}$	ص$_{٤}$
س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	س$_{٤}$
ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$	ع$_{٤}$

ويمكن الحصول على قيم ص إذا عوضنا بقيمة س، ع فى المعادلة كما يلى:

ص$_{١}$ = أ س$_{١}$ + ب ع$_{١}$ + جـ

ص$_{٢}$ = أ س$_{٢}$ + ب ع$_{٢}$ + جـ

ص$_{٣}$ = أ س$_{٣}$ + ب ع$_{٣}$ + جـ

ص$_{٤}$ = أ س$_{٤}$ + ب ع$_{٤}$ + جـ

بالجمع

مجـ ص = أ مجـ س + ب مجـ ع + ن × جـ .... (١)

بضرب المعادلات السابقة × معامل أ

س$_{١}$ ص$_{١}$ = أ س$^{٢}_{١}$ + ب س$_{١}$ ع$_{١}$ + جـ س$_{١}$

س$_{٢}$ ص$_{٢}$ = أ س$^{٢}_{٢}$ + ب س$_{٢}$ ع$_{٢}$ + جـ س$_{٢}$

س$_{٣}$ ص$_{٣}$ = أ س$^{٢}_{٣}$ + ب س$_{٣}$ ع$_{٣}$ + جـ س$_{٣}$

س$_{٤}$ ص$_{٤}$ = أ س$^{٢}_{٤}$ + ب س$_{٤}$ ع$_{٤}$ + جـ س$_{٤}$

بالجمع

مجـ س ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س ع + جـ مجـ س...... (٢)

وبضرب المعادلات الأربع الأولى أيضاً × معامل ب

ص$_{١}$ ع$_{١}$ = أ س$_{١}$ع$_{١}$ + ب ع$^{٢}_{١}$ + جـ ع$_{١}$

ص$_{٢}$ ع$_{٢}$ = أ س$_{٢}$ع$_{٢}$ + ب ع$^{٢}_{٢}$ + جـ ع$_{٢}$

ص$_{٣}$ ع$_{٣}$ = أ س$_{٣}$ع$_{٣}$ = ب ع$^{٢}_{٣}$ + جـ ع$_{٣}$

ص$_{٤}$ ع$_{٤}$ = أ س$_{٤}$ع$_{٤}$ + ب ع$^{٢}_{٤}$ + جـ ع$_{٤}$

بالجمع

مجـ ص ع = أ مجـ س ع + ب مجـ ع^{٢} + جـ مجـ ع........(٣)

أى أن المعادلات القياسية لإيجاد المعادلة الخطية فى الصورة:

ص = أ س + ب ع + جـ   هى:

مجـ ص = أ مجـ س + ب مجـ ع + ن × جـ

مجـ س ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س ع + جـ مجـ س

مجـ ص ع = أ مجـ س ع + ب مجـ ع^{٢} + جـ مجـ ع

مثال (٩): إذا علمت أن حجم الإنتاج (ص) دالة فى كل من حجم رأس المال (س) وحجم العمل (ع) والعلاقة الدالية فى صورة : ص = أس + ب ع + جـ

أوجد هذه المعادلة من خلال البيانات التالية:

س	٤	٦	٤	٤	٣	٣
ع	٣	٤	٤	٣	٢	٢
ص	٧	٦	٢	٣	٧	٥

الحـل

س	ع	ص	س ع	س ص	ص ع	س^{٢}	ع^{٢}
٤	٣	٧	١٢	٢٨	٢١	١٦	٩
٦	٤	٦	٢٤	٣٦	٢٤	٣٦	١٦
٤	٤	٢	١٦	٨	٨	١٦	١٦
٤	٣	٣	١٢	١٢	٩	١٦	٩
٣	٢	٧	٦	٢١	١٤	٩	٤
٣	٢	٥	٦	١٥	١٠	٩	٤
٢٤	١٨	٣٠	٧٦	١٢٠	٨٦	١٠٢	٥٨

المعادلات القياسية للعلاقة: ص = أ س + ب ع + جـ هى:

مجـ ص = أ مجـ س + ب مجـ ع + ن × جـ

مجـ س ص = أ مجـ س^{٢} + ب مجـ س ع + جـ مجـ س

مجـ ص ع = أ مجـ س ع + ب مجـ ع^{٢} + جـ مجـ ع

وبالتعويض:

٣٠ = ٢٤أ + ١٨ب + ٦جـ (١)

١٢٠ = ١٠٢أ + ٧٦ب + ٢٤جـ (٢)

٨٦ = ٧٦أ + ٥٨ب + ١٨جـ (٣)

ويمكن استخدام طريقة الحذف فى حل المعادلات الثلاث كما يلى:

بضرب المعادلة (١) × ٤

١٢٠ = ٩٦أ + ٧٢ب + ٢٤جـ (٤)

بطرح المعادلة (٤) من المعادلة (٢)

صفر = ٦ أ + ٤ ب (٥)

بضرب المعادلة (١)× ٣

٩٠ = ٧٢ أ + ٥٤ ب + ١٨ جـ (٦)

بطرح المعادلة (٦) من المعادلة (٣)

-٤ = ٤ أ + ٤ ب (٧)

بطرح المعادلة (٧) من المعادلة (٥)

٤ = ٢أ ∴ أ = ٢

بالتعويض فى المعادلة (٥)

صفر = ٦ × ٢ + ٤ب

-١٢ = ٤ب ∴ ب = -٣

وبالتعويض فى المعادلة (١)

∴ ٣٠ = ٢٤ × ٢ + ١٨ × -٣ + ٦جـ

٣٠ = ٤٨ – ٥٤ + ٦جـ

٣٠ = -٦ + ٦جـ

٣٦ = ٦جـ ∴ جـ = ٦

∴ العلاقة الدالية فى صورة: ص = ٢س – ٣ع + ٦

الفصل الثامن

التطبيقات التجارية على التفاضل

التطبيقات التجارية على التفاضل

مرونة العرض والطلب:

لو فرضنا أن سعر سلعة ما قد تغير من س إلى س + Δس فإن الكمية المطلوبة سوف تتغير من ط إلى ط + Δط (والكمية المعروضة من ع إلى ع + Δع).

وتعرف مرونة الطلب (أو العرض) على سلعة معينة اقتصادياً، بأنها التغير في الكمية المطلوبة (أو المعروضة) نتيجة التغير في سعر السلعة تغيراً طفيفاً جداً، أو مدى استجابة الكمية المطلوبة (أو المعروضة) من سلعة ما للتغير الذى يطرأ على سعرها، مع افتراض ثبات جميع العوامل الأخرى. كما تعرف مرونة الطلب (أو العرض) رياضياً بأنها النهاية التى يتجه إليها متوسط التغير فى الطلب (أو العرض) عندما يقترب التغير فى السعر من الصفر.

وتقاس مرونة الطلب أو العرض كما يلى:

$$\text{مرونة الطلب أو العرض} = \frac{\text{النسبة المئوية للتغير فى الكمية المطلوبة (أو المعروضة)}}{\text{النسبة المئوية للتغير فى السعر}}$$

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{ط} + \Delta\,\text{ط} - \text{ط}}{\text{ط}} \times ١٠٠ \div \frac{\text{س} + \Delta\,\text{س} - \text{س}}{\text{س}} \times ١٠٠$$

$$= \frac{\Delta\,\text{ط}}{\text{ط}} \times ١٠٠ \div \frac{\Delta\,\text{س}}{\text{س}} \times ١٠٠ = \frac{\Delta\text{ط}}{\text{ط}} \times ١٠٠ \times \frac{\text{س}}{\Delta\,\text{س} \times ١٠٠}$$

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} \times \frac{\Delta\,\text{ط}}{\Delta\,\text{س}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{ط}} \times \underset{\Delta\,\text{س} \to ٠}{\text{نـــــــها}} \frac{\Delta\,\text{ط}}{\Delta\,\text{س}}$$

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} \times \frac{\text{ء ط}}{\text{ء س}}$$

$$\text{وبالقياس فإن مرونة العرض} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$$

مثال (١): بفرض أن العلاقة بين سعر السلعة (س) والكمية المطلوبة منها (ط) يمكن التعبير عنها بالدالة التالية: ط = ١٥٠ – ٠,١س^{٢} أوجد مرونة الطلب عندما يكون سعر السلعة = ٥ وحدات نقدية.

الحـــــل

$$\text{مرونة الطلب} = \frac{\text{س}}{\text{ط}} \times \frac{\text{ء ط}}{\text{ء س}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{ط}} \times -٠,٢\text{س} \qquad \text{وحيث أن س} = ٥$$

$$\therefore \text{ط} = ١٥٠ - ٠,١ \, (٥)^{٢}$$

$$= ١٥٠ - ٢,٥ = ١٤٧,٥$$

$$\frac{\text{ء ط}}{\text{ء س}} = -٠,٢ \times ٥ = -١$$

$$\therefore \text{مرونة الطلب} = \frac{٥}{١٤٧,٥} \times -١$$

$$= \frac{-٥}{١٤٧,٥} = -٠,٠٣٣$$

ملحوظة:

تأخذ مرونة الطلب قيمة سالبة دائماً لوجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة وسعرها. فإذا كانت المرونة تقع بين (٠، -١) يقال أن الطلب قليل المرونة وإذا كانت المرونة = -١ يقال أن الطلب متكافئ المرونة، أما إذا كانت المرونة أقل من (-١) فيقال أن الطلب كثير المرونة.

مثال (٢):

إذا كانت العلاقة بين العرض والسعر لسلعة ما تمثلها الدالة التالية:

ع = ١٥٠ + ١,٢س^{٢}

أوجد مرونة العرض عندما يكون سعر الواحدة ١٠ وحدات نقدية.

الحـــــــل

$$\text{مرونة العرض} = \frac{\text{س}}{\text{ع}} \times \frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$$

$$= \frac{\text{س}}{\text{ع}} \times ٢,٤\text{س} \qquad \text{وحيث أن س} = ١٠$$

$$\therefore \text{ع} = ١٥٠ + ١,٢\ (١٠)^{٢} = ١٥٠ + ١٢٠ = ٢٧٠$$

$$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = ٢,٤ \times ١٠ = ٢٤$$

$$\therefore \text{مرونة العرض} = \frac{١٠}{٢٧٠} \times ٢٤٠$$

$$= \frac{٢٤٠}{٢٧٠} = ٠,٨٨٩$$

ملحوظة:

تأخذ مرونة العرض قيمة موجبة دائماً لوجود علاقة طردية بين الكمية المعروضة من سلعة معينة وسعرها، فإذا كانت المرونة تقع بين (٠ ، ١) يقال أن العرض قليل المرونة، وإذا كانت المرونة = ١ يقال أن العرض متكافئ المرونة، أما إذا كانت المرونة أكبر من (١) فيقال أن العرض كثير المرونة.

التكاليف الكلية والمتوسطة والحدية:

يقصد بالتكاليف الكلية إجمالى التكاليف (الثابتة والمتغيرة) التى تتحملها المنشأة فى سبيل إنتاج عدد معين من الوحدات. أما التكاليف المتوسطة فيقصد بها متوسط تكلفة الوحدة الواحدة وهى عبارة عن التكاليف الكلية مقسومة على عدد الوحدات المنتجة.

أما التكلفة الحدية فهى عبارة عن معدل التغير فى التكاليف الكلية للإنتاج الناتجة عن التغير فى عدد الوحدات المنتجة بمقدار ضئيل جداً يقترب من الصفر.

فإذا كانت التكلفة الكلية دالة فى عدد الوحدات المنتجة أى أن ص=د(س)

فإن التكلفة المتوسطة = د(س) ÷ س

$$\text{والتكلفة الحدية} = \lim_{\Delta س \to ٠} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ء ص}{ء س}$$

أى المشتقة الأولى لدالة التكاليف الكلية.

مثال (٣): تتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية (ص) وحجم الإنتاج الكلى (س) وفقاً للدالة:

$$ص = \frac{١}{١٠٠٠} (٣س^{٢} - ٥٥)^{٣}$$

احسب معدل التغير فى دالة التكاليف الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج الكلى، وذلك عند حجم إنتاج كلى قدره ٥ وحدات.

الحـــــل

معدل التغير = التكلفة الحدية = المشتقة الأولى للدالة

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١}{١٠٠٠} (٣(٣س^{٢} - ٥٥)^{٢} \times ٦س)$$

$$= \frac{١٨س}{١٠٠٠} (٣س^{٢} - ٥٥)^{٢}$$

وعند حجم إنتاج كلى قدره ٥ وحدات أى س = ٥

$$\frac{ء ص}{ء س} = \frac{١٨ \times ٥}{١٠٠٠} (٣ \times ٢٥ - ٥٥)^٢$$

$$= ٠,٠٩ \times (٧٥ - ٥٥)^٢$$

$$= ٠,٠٩ \times (٢٠)^٢ = ٠,٠٩ \times ٢٠٠ = ٣٦$$

ومعنى ذلك أن أى تغير فى عدد الوحدات المنتجة (بعد إنتاج ٥ وحدات) ولو ضئيلاً جداً (وحدة مثلاً) يؤدى إلى تغير فى التكاليف الكلية للإنتاج بمقدار ٣٦ وحدة نقدية.

مثال (٤): إذا كانت العلاقة بين التكاليف الكلية (ص) وعدد الوحدات المنتجة (س) فى أحد المصانع تحددها الدالة التالية: ص = ٥٠ + ٥س + ٠,٢س^٢

أوجد التكلفة الحدية والتكلفة المتوسطة عند إنتاج ١٠ وحدات

الحـــــل

التكلفة الحدية هى $\frac{ء ص}{ء س} = ٥ + ٠,٤س$ وعند إنتاج ١٠ وحدات

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٥ + ٠,٤ \times ١٠ = ٥ + ٤ = ٩$$

أى أنه بعد إنتاج ١٠ وحدات فإن إنتاج أى وحدة إضافية يؤدى إلى زيادة التكاليف الكلية بمقدار ٩ وحدات نقدية.

التكلفة المتوسطة = التكاليف الكلية ÷ عدد الوحدات المنتجة (س)

$$= \frac{٥٠}{س} + \frac{٥س}{س} + \frac{٠,٢س^٢}{س}$$

$= \frac{٥٠}{س} + ٥ + ٠,٢س$ وعند إنتاج ١٠ وحدات

$\therefore$ التكلفة المتوسطة = $\frac{٥٠}{١٠}$ + ٥ + ٠,٢ × ١٠

= ٥ + ٥ + ٢ = ١٢

أى أن متوسط تكلفة إنتاج الوحدة = ١٢ وحدة نقدية (إذا كان حجم الإنتاج ١٠ وحدات).

الإيراد الكلى والمتوسط والحدى:

الإيراد الكلى = سعر بيع الوحدة × عدد الوحدات المباعة

والإيراد المتوسط = الإيراد الكلى ÷ عدد الوحدات المباعة

والإيراد الحدى عبارة عن معدل التغير فى الإيراد الكلى نتيجة التغير فى عدد الوحدات المباعة تغيراً ضئيلاً جداً يقترب من الصفر.

فإذا كان الإيراد الكلى دالة فى عدد الوحدات المباعة أى أن ص = د(س) فإن الإيراد المتوسط = د(س) ÷ س

والإيراد الحدى = $\underset{\Delta س \leftarrow ٠}{نهـا} \frac{\Delta ص}{\Delta س} = \frac{ء ص}{ء س}$

أى المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلى

الربح الكلى والمتوسط والحدى:

الربح الكلى = الإيراد الكلى – التكاليف الكلية

أما الربح المتوسط = الربح الكلى ÷ عدد الوحدات المباعة

أو = الإيراد المتوسط – التكلفة المتوسطة

والربح الحدى عبارة عن معدل التغير فى دالة الإيراد الكلى نتيجة التغير فى عدد الوحدات المباعة تغيراً ضئيلاً يقترب من الصفر.

أو الربح الحدى = الإيراد الحدى – التكلفة الحدية

مثال (٥):تتحدد العلاقة بين الإيراد الكلى (ص) وحجم الإنتاج الكلى (س) فى أحد المصانع وفقاً للدالة التالية: ص = ٠,٠٠٤ (٥س^{٢} – ١٠٠)^{٢}

احسب معدل التغير فى دالة الإيراد الكلى بالنسبة لحجم الإنتاج عند إنتاج ١٠وحدات.

الحـــل

المطلوب: الإيراد الحدى أو المشتقة الأولى لدالة الإيراد الكلى

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠,٠٠٤ \ (٢(٥س^{٢} - ١٠٠) \times ١٠س)$$

$$= ٠,٠٠٤ \times ٢٠س \ (٥س^{٢} - ١٠٠)$$

$$= ٠,٠٨ \ س \ (٥س^{٢} - ١٠٠)$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠,٤س^{٣} - ٨س$$ وعند إنتاج ١٠ وحدات

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠,٤ \ (١٠)^{٣} - ٨(١٠)$$

$$= ٠,٤ \times ١٠٠٠ - ٨٠$$

$$= ٤٠٠ - ٨٠ = ٣٢٠$$

ومعنى ذلك أنه بعد إنتاج ١٠ وحدات فإن أى زيادة فى عدد الوحدات المنتجة ولو بوحدة واحدة يؤدى إلى زيادة فى الإيراد الكلى بمقدار ٣٢٠ وحدة نقدية.

الدخل والاستهلاك والادخار (الاستثمار):

يتوزع دخل الفرد بين الاستهلاك والادخار (الاستثمار) حيث أن الدخل = الاستهلاك + الادخار. وتؤدى الزيادة فى مستوى الدخل إلى زيادة الاستهلاك وزيادة حجم الادخار (الاستثمار) وإن كان ذلك يتوقف على عوامل كثيرة من

أهمها المستوى المعيشى والثقافى للفرد وميوله المختلفة تجاه الاستهلاك أو الادخار ومعنى ذلك أن الاستهلاك دالة فى الدخل وكذلك الادخار دالة فى الدخل أيضاً، وإيجاد المشتقة الأولى لدالة الاستهلاك أو معدل التغير فى الاستهلاك نتيجة التغير فى الدخل تغيراً طفيفاً جداً يعرف "بالميل الحدى للاستهلاك" وتتراوح قيمته بين (صفر، ١).

كما تسمى المشتقة الأولى لدالة الادخار أو معدل التغير فى الادخار نتيجة التغير فى الدخل تغيراً طفيفاً جداً "بالميل الحدى للادخار" وتتراوح قيمته أيضاً بين (صفر، ١).

وأى زيادة فى الميل الحدى للاستهلاك يترتب عليها نقص فى الميل الحدى للادخار والعكس صحيح حيث أن الميل الحدى للاستهلاك + الميل الحدى للادخار = ١.

مثال (٦):

إذا كانت العلاقة بين الدخل (س) والاستهلاك (ص) هى:

$$\text{ص} = ١٠ + ٠{,}٨\ \text{س} - \sqrt{\text{س}}$$

أوجد الميل الحدى للاستهلاك، والميل الحدى للادخار عند مستوى دخل ٤٠٠ جنيه.

الحـــــــل

الميل الحدى للاستهلاك = المشتقة الأولى للدالة:

$$\text{ص} = ١٠ + ٠{,}٨\ \text{س} - \sqrt{\text{س}}$$

$$\text{ص} = ١٠ + ٠{,}٨\ \text{س} - \text{س}^{\frac{١}{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠{,}٨ - \frac{١}{٢}\ \text{س}^{\frac{-١}{٢}}$$

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠{,}٨ - \frac{١}{٢\sqrt{\text{س}}}$$

وعند دخل (س) قدره ٤٠٠ جنيه

$$\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠{,}٨ - \frac{١}{٢\sqrt{٤٠٠}}$$

$$= ٠,٨ - \frac{١}{٢ \times ٢٠} = ٠,٨ - \frac{١}{٤٠} = ٠,٨ - ٠,٠٢٥ = ٠,٧٧٥$$

∵ الميل الحدى للاستهلاك + الميل الحدى للادخار = ١

∴ الميل الحدى للادخار = ١ – ٠,٧٧٥ = ٠,٢٢٥

تطبيقات متنوعة:

مثال (٧): إذا كانت العلاقة بين الدخل القومى (س) والمنفق على التعليم (ص) فى دولة ما تمثلها الدالة التالية: ٥ص = ٢س – ١٠٠

احسب معدل التغير فى المنفق على التعليم فى هذه الدولة بالنسبة للتغير فى دخلها القومى.

الحـــل

المطلوب المشتقة الأولى لدالة المنفق على التعليم $\frac{ء ص}{ء س}$

٥ص = ٢س – ١٠٠

ص = ٠,٤س – ٢٠

$$\frac{ء ص}{ء س} = ٠,٤$$

ومعنى ذلك أن أى زيادة فى الدخل القومى يترتب عليها زيادة فى المنفق على التعليم تعادل ٤٠%. فمثلاً إذا زاد الدخل القومى لهذه الدولة بمقدار مليار جنيه (١٠٠٠ مليون) فإن ذلك سوف يترتب عليه زيادة فى المنفق على التعليم مقدارها ٤٠٠ مليون جنيه.

مثال (٨): فى مصنع دمياط للغزل والنسيج إذا كانت كل ساعة عمل تؤدى إلى إنتاج ٥ وحدات من الغزل، وكل وحدة من الغزل تؤدى إلى إنتاج ١٠ وحدات من النسيج. احسب معدل التغير فى وحدات الغزل بالنسبة للتغير فى وحدات ساعات العمل.

الحـــــل

نفرض أن ساعات العمل (س) ووحدات الغزل (ص) ووحدات النسيج (ع)

ص = ٥ س ومنها $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = ٥

، ع = ١٠ ص ومنها $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ١٠

ولكن المطلوب معدل التغير فى وحدات النسيج (ع) بالنسبة لوحدات ساعات العمل (س)

أى $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ وحيث أن $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}} = \frac{\text{ء ع}}{\text{ء ص}} \times \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$

∴ $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ١٠ × ٥ = ٥٠

بمعنى أن أى تغير فى ساعات العمل بمقدار ساعة واحدة يؤدى إلى تغير فى وحدات النسيج مقداره ٥٠ وحدة.

حل آخر:

المطلوب $\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ ومعنى ذلك أن نوجد علاقة دالية بين ع ، س:

Q ص = ٥س ، ع = ١٠ص

∴ ع = ١٠(٥س)

ع = ٥٠ س

$\frac{\text{ء ع}}{\text{ء س}}$ = ٥٠

مثال (٩): إذا كانت العلاقة بين ما يخصصه الفرد فى مجتمع معين من دخله (س) للاستهلاك (ص) تحددها الدالة التالية: ٣ص = ٢,٤س + ١٥

أوجد الميل الحدى للاستهلاك (معدل التغير فى الاستهلاك بالنسبة للدخل). ثم أوجد قيمة ما يخصصه فرد دخله الشهرى ٣٠٠ جنيه للاستهلاك.

الحـــــل

٣ص = ٢,٤س + ١٥

ص = ٠,٨س + ٥

$$\therefore \frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}} = ٠,٨$$

أى أن أى زيادة فى الدخل يقابلها زيادة فى ما يخصصه الفرد للاستهلاك مقدارها ٨٠%.

وإذا كان دخل الفرد (س) = ٣٠٠ فإن ما يخصصه للاستهلاك (ص)

ص = ٠,٨ (٣٠٠) + ٥

= ٢٤٠ + ٥ = ٢٤٥ جنيه

الفصل التاسع

التطبيقات التجارية على التكامل

التطبيقات التجارية على التكامل

التكامل غير المحدود: Unlimited Integration

مثال (١) : إذا علمت أن دالة التكلفة الحدية لأحد المصانع

$= ٠,٠٦س^{٢} - ٢س + ٥$

حيث س عدد الوحدات المنتجة. أوجد دالة التكلفة الكلية. ثم حدد هذه التكلفة عند حجم إنتاج قدره ١٠٠ وحدة علماً بأن التكلفة الثابتة للإنتاج ١٥٠٠ جنيه.

الحـــل

دالة التكلفة الكلية = ∫دالة التكلفة الحدية

$$ص = \int (٠,٠٦س^{٢} - ٢س + ٥).ء س$$

$$= \frac{٠,٠٦س^{٣}}{٣} - \frac{٢س^{٢}}{٢} + ٥س + جـ$$

$$ص = ٠,٠٢س^{٣} - س^{٢} + ٥س + جـ$$

وعند إنتاج ١٠٠ وحدة (التكلفة الثابتة للإنتاج تمثل ثابت التكامل جـ = ١٥٠٠)

$$ص = ٠,٠٢ \ (١٠٠)^{٣} - (١٠٠)^{٢} + ٥ \ (١٠٠) + ١٥٠٠$$

$$= ٠,٠٢ \ (١٠٠٠٠٠٠) - ١٠٠٠٠ + ٥٠٠ + ١٥٠٠$$

$$= ٢٠٠٠٠ - ١٠٠٠٠ + ٥٠٠ + ١٥٠٠ = ١٢٠٠٠ \text{ جنيه}$$

أى أن تكاليف إنتاج ١٠٠ وحدة تبلغ ١٢ ألف جنيه

مثال (٢) :إذا علمت أن التكلفة الحدية ($\overline{ت}$) ودالة الإيراد الحدى ($\overline{ى}$) لأحد المصانع هما:

$$\overline{ت} = ٠,٢س^{٢} + ٠,٠٥س$$

$$\overline{ى} = ٥٠٠ - ٠,١س$$

حيث س حجم الإنتاج أوجد دالة الربح الكلى؟ ثم حدد قيمة هذا الربح عند إنتاج ١٠ وحدات علماً بأن التكاليف الثابتة للإنتاج تبلغ ١٠٠ جنيه.

الحـــــل

دالة الربح الكلى = دالة الإيراد الكلى – دالة التكاليف الكلية

= ∫دالة الإيراد الحدى – ∫دالة التكلفة الحدية

= ∫(٥٠٠ – ٠,١س) . ءس – ∫(٠,٢س^{٢} + ٠,٠٥س). ءس

$$= \left(\text{٥٠٠س} - \frac{\text{٠,١س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}_{١}\right) - \left(\frac{\text{٠,٢س}^{٣}}{٣} + \frac{\text{٠,٠٥س}^{٢}}{٢} + \text{جـ}_{٢}\right)$$

وحيث أن ثابت التكامل فى دالة الإيراد الكلى تمثل قيمة الإيراد الكلى

عند س = ٠ ∴ جـ$_{١}$ = ٠

بينما ثابت التكامل فى دالة التكاليف الكلية يكون لها قيمة عند س = ٠ لوجود مصاريف لا علاقة لها بعملية الإنتاج جـ$_{٢}$ = ١٠٠

$$\text{ر} = \text{٥٠٠س} - \text{٠,٠٥س}^{٢} - \frac{١}{١٥}\text{س}^{٣} - \text{٠,٠٢٥س}^{٢} - ١٠٠$$

$$= -\frac{١}{١٥}\text{س}^{٣} - \text{٠,٠٧٥س}^{٢} + \text{٥٠٠س} - ١٠٠$$

وعند إنتاج ١٠ وحدات فإن الربح الكلى للمصنع (ر):

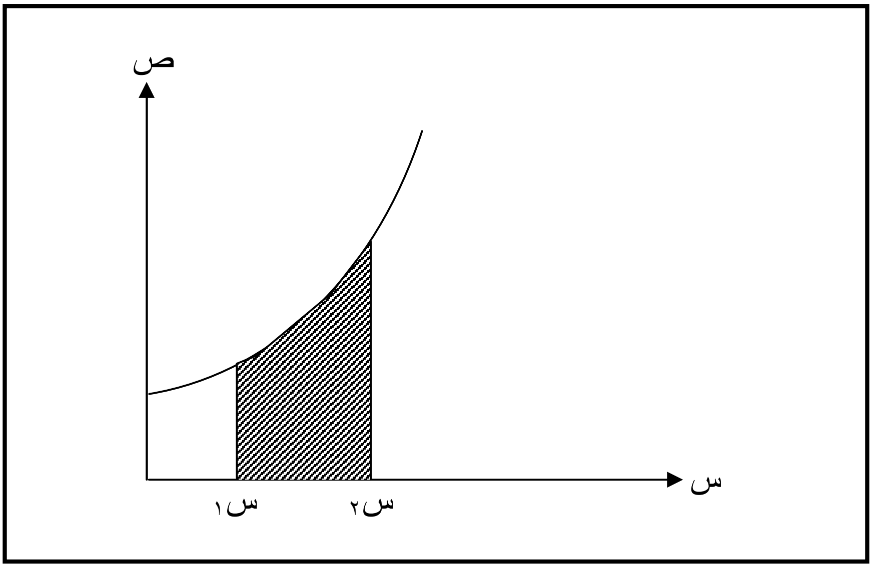
$$\text{ر} = -\frac{١}{١٥}(١٠)^{٣} - ٠,٠٧٥\,(١٠)^{٢} + ٥٠٠\,(١٠) - ١٠٠$$

= -٦٦,٦٧ – ٧,٥ + ٥٠٠٠ - ١٠٠

ر = ٤٨٥٢,٨٣ وحدة نقدية.

التكامل المحدود Limited Integration

والمعنى المقصود هو إيجاد المساحة أسفل المنحنى والمحصورة بين قيمتين محددتين للمتغير المستقل (س) وهما س$_{١}$، س$_{٢}$ كما هو موضح فى الشكل التالى.



ويقصد بالرمز $\int_{أ}^{ب}$ ص . ء س المساحة المحصورة بين منحنى الدالة ومحور السينات فيما بين القيمتين المحددتين للمتغير س وهما أ، ب حيث تمثل (أ) الحد الأدنى الذى يأخذه المتغير س و (ب) الحد الأعلى لقيمة س ويتم إيجاد التكامل المحدود مثل إيجاد التكامل غير المحدود تماماً ثم يتم التعويض مرة بالحد الأعلى للمتغير س ويطرح منه القيمة بعد التعويض مرة بالحد الأدنى للمتغير س.

مثال (١):إذا كانت دالة الإيراد الحدى لمنتج معين تمثلها العلاقة:

- ٠,٠٥س + ٤٠

حيث س عدد الوحدات المباعة والمطلوب:

١- تحديد الإيراد الكلى نتيجة بيع ١٠٠ وحدة.

٢- ما هو الإيراد الإضافى إذا زادت المبيعات من ١٠٠ وحدة إلى ١٢٠ وحدة.

الحـــــــل

دالة الإيراد الكلى = ∫دالة الإيراد الحدى

ص = ∫(-٠,٠٥س + ٤٠) . ء س

$$\text{ص} = \frac{-٠,٠٥\text{س}^{٢}}{٢} + ٤٠\text{س} + \text{جـ}$$

والمطلوب الإيراد الكلى نتيجة بيع ١٠٠ وحدة. ويمكن حسابه بتحديد حدود التكامل من صفر إلى ١٠٠.

$$\text{ص} = \Big[-٠,٠٢٥\text{س}^{٢} + ٤٠\text{س} + \text{جـ}\Big]_{٠}^{١٠٠}$$

= [-٠,٠٢٥ (١٠٠)^{٢} + ٤٠(١٠٠) + جـ] – [-٠,٠٢٥(٠)^{٢}+٤٠(٠)+ جـ]

= -٠,٠٢٥ × ١٠٠٠٠ + ٤٠٠٠

= -٢٥٠ + ٤٠٠٠

ص = ٣٧٥٠ وحدة نقدية

والإيراد الإضافى الناتج عن زيادة المبيعات من ١٠٠ وحدة إلى ١٢٠ وحدة نحصل عليه كما يلى:

$$\text{الإيراد الإضافى} = \Big[-٠,٠٢٥\text{س}^{٢} + ٤٠\text{س}\Big]_{١٠٠}^{١٢٠}$$

= [-٠,٠٢٥ (١٢٠)^{٢} + ٤٠(١٢٠)] – ٣٧٥٠

= -٣٦٠ + ٤٨٠٠ – ٣٧٥٠

= ٦٩٠ وحدة نقدية

مثال (٢):مصنع إدفينا للأغذية المحفظة بدمياط يبلغ إنتاجه اليومى ١٠٠٠٠ علبة سردين وذلك باستخدام العمال الدائمين فى المصنع، فإذا علمت أن معدل التغير فى الإنتاج بالنسبة للتغير فى عدد العمال الإضافيين (س) يتحدد بالعلاقة التالية:

١٥٠ – ٣ $\sqrt{\text{س}}$

المطلوب معرفة تأثير استخدام ٢٥ من العمال الإضافيين إلى حجم العمالة الدائمة فى المصنع على حجم الإنتاج اليومى.

الحـــــــل

نوجد معادلة الإنتاج حيث تساوى ∫دالة الإنتاج الحدى (معدل التغير فى الإنتاج)

ص = ∫(١٥٠ – ٣$\sqrt{\text{س}}$). ء س

ص = ∫(١٥٠ – ٣س$^{\frac{١}{٢}}$). ء س

ص = ١٥٠س – ٣ $\dfrac{\text{س}^{\frac{٣}{٢}}}{\frac{٣}{٢}}$ + جـ

ص = ١٥٠ س – ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$+ جـ

وثابت التكامل فى دالة الإنتاج الكلى (جـ) نحصل عليها بوضع س = ٠

وحجم الإنتاج ص = ١٠٠٠٠

١٠٠٠٠ = ١٥٠ (٠) – ٢ (٠) + جـ

∴ جـ = ١٠٠٠٠

ص = ١٥٠س – ٢س$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١٠٠٠٠ حيث س عدد العمال الإضافيين

فإذا استخدم المصنع ٢٥ عامل إضافى فإن حجم الإنتاج (ص) يكون:

ص = ١٥٠ (٢٥) – ٢ (٢٥)$^{\frac{٣}{٢}}$ + ١٠٠٠٠

= ٣٧٥٠ – ٢ × ٢٥ × $\sqrt{٢٥}$ + ١٠٠٠٠

= ٣٧٥٠ – ٢٥٠ + ١٠٠٠٠

= ١٣٥٠٠

ومعنى ذلك أنه إذا استخدم المصنع (٢٥) عاملاً إضافياً فإنه ستحدث زيادة فـــى حجم الإنتاج اليـــومى قـــدرها ٣٥٠٠ علبـــة ســـردين (١٣٥٠٠ – ١٠٠٠٠ = ٣٥٠٠).

مثال (٣):إذا كانت دالة التكلفة الحدية فى مصنع النصر لصناعة السيارات هى:

$\frac{٥٠٠٠}{\sqrt{س - ١}}$ حيث س حجم الإنتاج. أوجد مقدار التكلفة الثابتة للمصنع إذا كانت التكلفة الكلية لإنتاج ٥٠ وحدة تبلغ ١٠٠ ألف جنيه

الحـــــل

التكلفة الكلية = ∫ دالة التكلفة الحدية

$$ص = \int \frac{٥٠٠٠}{\sqrt{س - ١}} \; . \; ء س$$

$$ص = \int ٥٠٠٠ \; (س - ١)^{-\frac{١}{٢}} \; . \; ء س$$

$$ص = \int ٥٠٠٠ \; \frac{(س - ١)^{\frac{١}{٢}}}{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$$ص = ١٠٠٠٠ \; (س - ١)^{\frac{١}{٢}} + جـ$$

$$ص = ١٠٠٠٠ \sqrt{س - ١} + جـ$$

وحيث أن جـ تمثل التكلفة الثابتة للمصنع فإنه يمكن تحديدها عنــد س = ٥٠، ص = ١٠٠٠٠٠

$$١٠٠٠٠٠ = ١٠٠٠٠ \sqrt{٥٠ - ١} + جـ$$

$$= ١٠٠٠٠ \sqrt{٤٩} + جـ$$

$$١٠٠٠٠٠ = ٧٠٠٠٠ + جـ$$

∴ التكلفة الثابتة للمصنع جـ = ٣٠٠٠٠ جنيه.

الفصل العاشر

مقدمة فى البرمجة الخطية

Linear Programming

مقدمة فى البرمجة الخطية

مقدمة:

يطلق على الأسلوب الرياضى الذى يعـــالج مـــشكلة التوزيـــع الأمثـــل لمجموعة من الموارد المحدودة على مجموعة من الاستخدامات المتنافسة علـــى هذه الموارد أسلوب البرمجة الخطية.

وهذا يعنى أن الإطار الذى يحكم علاقة المتغيرات الممثلة لأوجه النشاط المطلوب تحديدها فى إطار مجموعة من الموارد المحدودة يأتى غالباً فى صورة متباينات وليس معادلات.

وقد بدأ الاهتمام بمشاكل البرمجة الخطية من خلال الاهتمام بشكل عـــام ببحوث العمليات Operation Research أثناء الحرب العالمية الثانية، حيـــث قامت إنجلترا بتشكيل فريق من علمائها لدراسة المشاكل التى تواجهها الجيـــوش فى جبهات القتال، والمتعلقة بالاستخدام الأمثل للإمكانيات العسكرية المحـــدودة. ونظراً للنتائج المشجعة التى توصل إليها العلماء واستطاعوا بها تغيير مـــوازين القوى على أكثر من جبهة قتال، قامت الولايات المتحدة الأمريكية، وقبل الانتهاء من الحرب، بتشكيل فريق علمى مماثل للفريق الإنجليزى، وقد حقـــق الفريـــق الأمريكى أيضاً نتائج طيبة.

ثم انتقل الاهتمام، بعد الحرب، ببحوث العمليات من المجالات العسكرية إلى المجالات الاقتصادية المختلفة وخاصة لدى مديرى المصانع المختلفة، حيث أدى الاتجاه المتزايد نحو التخصص إلى تعقد مشاكل اتخاذ القرارات.

ويعتبر جورج دانتزج George Dantzig أول من وضع أسلوب متقدم لحل مشاكل البرمجة الخطية وذلك فى عام ١٩٤٧ وهو ما يطلق عليه أســـلوب السمبلكس Simplex method وقد استخدم هذا الأسلوب فى حل الكثيـــر مـــن

المشاكل الإدارية ومن أهمها استغلال الموارد المتاحة للمشروع بطريقة تحقــق للمشروع أقصى أرباح ممكنة أو تؤدى إلى تحمل المشروع أقل تكلفة ممكنة.

مجالات استخدام البرمجة الخطية:

من أهم المشاكل التى تستخدم فيها البرمجة الخطية:

١- تخطيط الإنتاج فى المنشآت الصناعية بهدف تحديد السياسة المثلى لعدد المنتجات التى يمكن إنتاجها.

٢- التخطيط التسويقى فى المنشآت التجارية بهدف تحديد المزيج التــسويقى أو التشكيلة السلعية التى يمكن أن يتعامل فيها المشروع.

٣- الاختيار بين طرق توزيع المنتجات وبدائل تقديم الخدمات.

٤- الاختيار الأمثل للاستثمارات عند تكوين محفظة الأوراق الماليــة فــى منشآت الأموال.

٥- تحديد مواقع إقامة المصانع، وموقعها من الأسواق ومصادر المواد الخام والعمالة.

هذا بالإضافة إلى العديد من المشكلات الأخرى التى تتدخل فــى حلهــا البرامج الخطية.

مشكلة البرمجة الخطية Linear Programming problem

تتكون مشكلة البرمجة الخطية من:

١- دالة الهدف Objective Function والهدف من حل مشكلة البرمجــة الخطية إما أن يكون تحقيق أقصى ربــح ممكــن أى تعظــيم الــربح Maximization أو تخفيض التكاليف لأدنــى حــد ممكــن أو تدنيــة التكاليف Minimization.

٢- القيود أو الشروط constraints وهى إما أن تكون على صورة (> أو ≤) أو على صورة (< أو ≥) أو قد تأتى على صورة (=).

٣- المتغيرات Variables وتحتوى عليها دالة الهـدف والقيـود، حيـث تتضمن كل من دالة الهدف والقيود ثوابت محددة القيمة، ومتغيرات غير محددة القيمة، ومطلوب تحديد قيمة هذه المتغيرات عـن طريـق حـل المشكلة.

الفروض الأساسية Basic Assumption:

يعتمد أسلوب البرمجة الخطية على عدة فروض من أهمها:

١ - فرض التأكد التام (التيقن الكامل)

Complete Certainty Assumption:

يفترض فى أسلوب البرمجة الخطية أن الإدارة (متخذ القرار) فى حالـة تأكد تام فيما يتعلق بالعوامل والمتغيرات الخاصة بالمشكلة مثل الموارد المتاحـة ونتائج البرامج المختلفة ومستويات الأداء، وهذا يعنى أن البرمجة الخطية تعتبر من الأساليب المحددة ولا مجال للاحتمالات فيها.

٢ - فرض العلاقة الخطية Linear Assumption:

يفترض فى كل العلاقات القائمة بين تغيرات المشكلة أنها خطية وهـذا الفرض يقترب من الواقع فى كثير من المشاكل.

٣ - فرض عدم السلبية Non-negative Assumption

وهذا يعنى أن المتغيرات فى أسلوب البرمجة الخطية لا تأخذ قيماً سالبة أى لابد أن تكون جميعها إما موجبـة أو = صـفر أى أن س، ص، ع، .... $\leq$ صفر.

٤ - فرض قابلية التجزئة Divisibility Assumption

من الممكن أن يتعامل أسلوب البرمجة الخطية مع المتغيرات المتـصلة continuous variables وهذا يعنى أنه قد تأخذ المتغيرات قيماً كـسرية، أى

كسور وحدة القياس فمثلاً يسمح بإنتاج كسور من المنتج أى قد ينتج عن حل مشكلة البرمجة الخطية أن تأخذ قيمة المتغير كسراً.

٥ - فرض وحدة الفترة الزمنية One- period Assumption

بمعنى أن أسلوب البرمجة الخطية يفترض أنه يتعامل مع فترة زمنية واحدة أى أنه أسلوب ثابت Static وغير حركى. أى لا يبحث فى أثر النتائج فى فترة معينة على الفترات الأخرى.

٦ - فرض ثبات هامش ربح الوحدة

Fixed Contribution Margin Assumption:

وهذا يعنى أن أسلوب البرمجة الخطية يفترض ثبات أسعار البيع بصرف النظر عن حجم الإنتاج أو المبيعات. كما يدل هذا الفرض على ثبات التكلفة المتغيرة وعدم تأثرها بحجم الإنتاج.

مفاهيم أساسية:

يتضمن أسلوب البرمجة الخطية مجموعة من المفاهيم أو الاصطلاحات من الضرورى الإلمام بها للوقوف على مضمونها بصورة واضحة:

١ - البرمجة الخطية Linear Programming

وهى طريقة لتحديد البرنامج الأمثل لمجموعة أنشطة متداخلة فى ضوء مجموعة من الموارد المحدودة المتاحة خلال فترة زمنية محددة.

٢ - الخطية Linear

وهى تعنى وجود تناسب طردى بين أحد المتغيرات التابعة ومتغير أو أكثر من المتغيرات المستقلة.

٣ - البرنامج Program

ويعنى خطة تغطى فترة زمنية معينة ومن أمثلتها التشكيلة السلعية للإنتاج أو التوزيع، الجدول الزمنى للإنتاج، قنوات الإعلان، وسائل توزيع المنتجات ... .

٤ - البرنامج الأمثل (المثالى) Optimal Program

وهو إما أن يكون برنامج يمكن بموجبه تعظيم maximization أو تدنية minimization معيار أو مقياس معين للكفاءة مثل الأرباح أو التكاليف.

٥ - البرمجة Programming

مجموعة إجراءات منظمة عن طريقها يمكن وضع برنامج أو خطة معينة. وتتكون البرمجة من سلسلة من الإرشادات وقواعد الحساب لحل مشكلة يمكن تنفيذها يدوياً أو بالكمبيوتر.

٦ - النشاط Activity

عبارة عن سلعة أو خدمة أو مشروع يتنافس مع غيره فى الحصول على موارد محدودة، فأنواع السلع تعتبر أنشطة، ومستوى النشاط عبارة عن كمية معينة من الإنتاج.

نموذج مشكلة البرمجة الخطية:

يتكون هذا النموذج من ثلاثة أجزاء هى:

١ - دالة الهدف:

فى أى مشكلة برمجة خطية تقوم الإدارة بتحديد هدف أو معيار للكفاءة يكون قابلاً للقياس، ومن خلال هذا الهدف يتم البحث عن البرنامج الأمثل.

ويتم ترجمة هذا الهدف فى شكل كمى ويصبح دالة للهدف، وهذه الدالة لابد أن تكون خطية، وتجدر الإشارة إلى أن دالة الهدف عبارة عن شكل رياضى لسلوك الأرباح مثلاً (كمتغير تابع) مع التغير فى الكميات المباعة والمنتجة من السلع (متغيرات مستقلة).

٢ - القيود (المتباينات) Constraints

إذا نظرنا إلى دالة الهدف يتبين أن التعظيم أو التدنية فى المتغير التابع لا يعنى شيئاً بدون إضافة شكل أو آخر من القيود حيث إنه بدون هذه القيود فإن

تعظيم الأرباح يعنى رقم لا نهائى موجب. وتخفيض التكاليف يعنى صفر. أما إذا وضعنا بعض القيود على دالة الهدف مثل الكميات المتاحة من الموارد أو الإمكانات فإن حجم الإنتاج أو المبيعات أو .. يجب أن يتحدد بحيث لا يتعارض مع هذه القيود.

ولما كان أى برنامج إنتاجى يتضمن إنتاج كميات معينة من السلع لابد أن يصمم بحيث لا يتطلب موارد أكثر من المتاح حالياً فإن القيود الخطية للمشكلة لابد أن يعبر عنها فى شكل متباينات Inequalities وتأتى هذه القيود إما فى شكل (=) أو (≤) أو (≥).

٣- قيود عدم السلبية Non-negative Constraints

وهذه القيود لا تسمح لأى متغير أن تكون له قيمة سالبة فالنشاط إما أن يستبعد أى يأخذ القيمة صفر، أو يكون جزء من البرنامج فتكون له قيمة موجبة.

وتصاغ قيود عدم السلبية للمتغيرات س، ص، ع ..... فى صورة:

س، ص، ع، .... ≤ صفر.

وقبل أن نستعرض الطرق المختلفة لحل مشاكل البرمجة الخطية نتعرف أولاً على المتباينات كأحد أشكال العلاقات الرياضية، وكيفية تمثيلها بيانياً.

التمثيل البيانى للمتباينات الخطية:

إذا كانت العلاقة بين المتغيرين س، ص من الدرجة الأولى (س، ص بأس = ١) تمثيلها بيانياً يكون فى شكل خط مستقيم. فمثلاً العلاقة:

٢س + ص = ٥

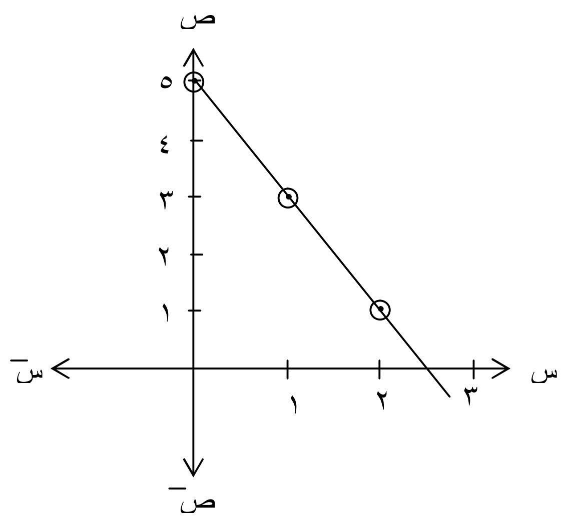
عند وضع س = ٠ فإن ص = ٥

، عند وضع س = ١ فإن ص = ٣

، عند وضع س = ٢ فإن ص = ١

وهكذا ...

وبتحديد وضع هذه النقط بيانياً يتبين أنها تقع على خط مستقيم يتضح من شكل (١).



شكل (١)

ولتحديد منطقة الحلول لمتباينة أو أكثر نتبع الآتى:

١- نحول المتباينات إلى معادلات.

٢- تمثل كل معادلة بخط مستقيم وذلك بوضع س = ٠ ومنها نحسب قيمة ص. ثم نضع ص = ٠ ومنها نحسب قيمة س. وبالتالى نحصل على نقطتين تمثلان كل معادلة.

٣- نحدد منطقة الحلول وفقاً لاتجاه المتباينات كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (١) : حدد منطقة الحلول للمتباينة:

س + ٣ ص > ٦

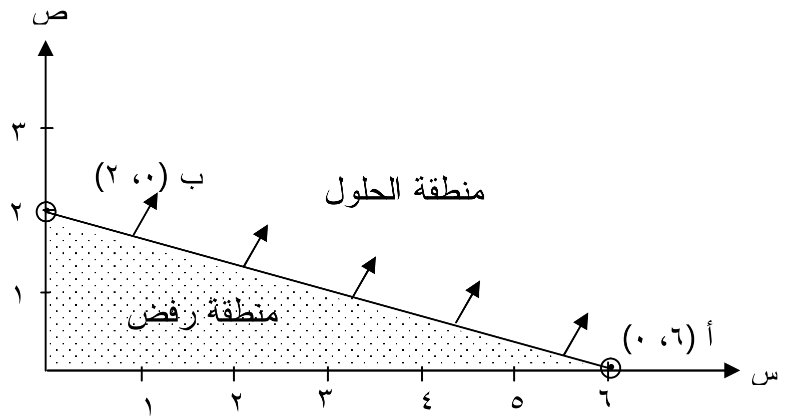
الحــل

نحولها إلى معادلة: س + ٣ص = ٦

س = ٠ ص = ٢

س = ٦ ص = ٠

وحيث أن المتباينة > فإن منطقة الحلول تتحدد فى الفراغ الــذى يعلــو الخــط المستقيم أ ب. شكل (٢)



شكل (٢)

وبالطبع إذا كانت المتباينة < فإن منطقة الحلول تتحدد فى الفراغ الذى يقع أسفل الخط المستقيم أ ب.

وإذا كانت المتباينة ≤ (أكبر من أو يساوى) فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط الممثلة للخط المستقيم أ ب بالإضافة إلى النقط التى تقع فى الفــراغ الــذى يعلوه.

وإذا كانت المتباينة ≥ (أقل من أو يساوى) فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط الممثلة للخط المستقيم أ ب بالإضافة إلى النقط التى تقع فى الفراغ الذى يقع أسفله.

مثال (٢) :حدد منطقة الحلول للمتباينتين التاليتين:

٣س + ٥ص ≤ ١٥

٤س + ٢ص ≤ ٨

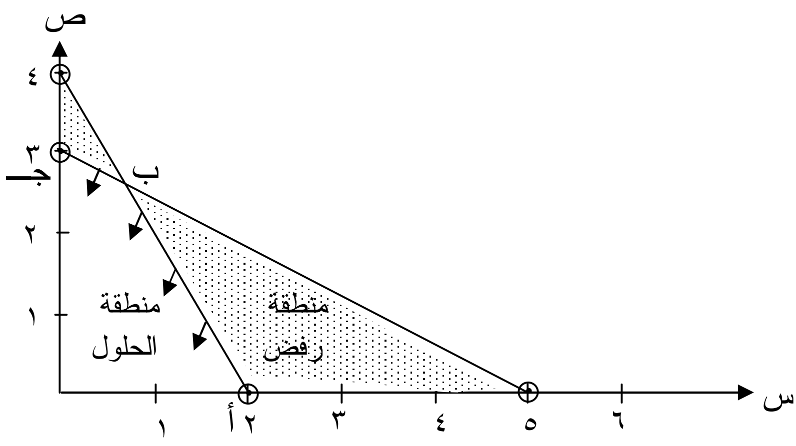
الحـــل

١- تحول المتباينات إلى معادلات:

٣س + ٥ص = ١٥	٤س + ٢ص = ٨
س = ٠ ص = ٣	س = ٠ ص = ٤
س = ٥ ص = ٠	س = ٢ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات

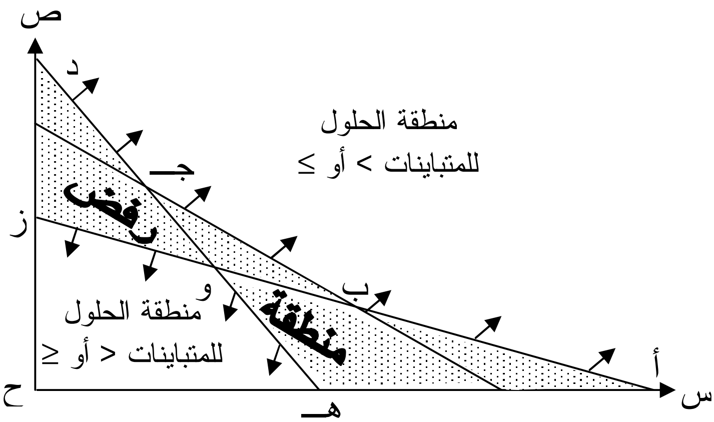
٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط: أ، ب، جـــ، د شكل (٣)



شكل (٣)

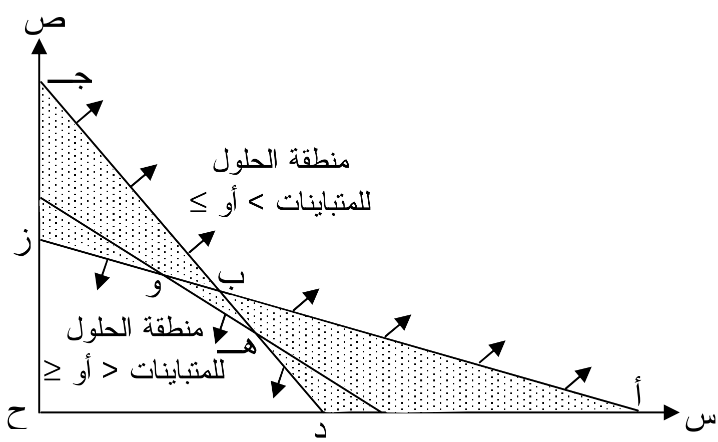
وكقاعدة عامة، إذا نظرنا إلى شكل (٤) فإنه يتبين أن منطقة الحلول للمتباينات (> أو ≤) تتحدد فى النقط (أ، ب، جـــ، د).

أما إذا كانت المتباينات (< أو ≥) فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط (هـــ ، و ، ز، ح).



شكل (٤)

وفى شكل (٥) فإن منطقة الحلول للمتباينات > أو ≤ تتحدد فى النقط (أ، ب، جـ). أما فى حالة المتباينات < أو ≥ فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط (د، هـ، و، ز، ح).



شكل (٥)

لاحظ:

١- أن المناطق المحصورة بين المستقيمات الممثلة للمتباينات تعتبر مناطق رفض طالما كانت المتباينات ذات اتجاه واحد.

٢- إذا تقاطعت المستقيمات فى نقطة واحدة كانت هذه النقطة إحدى نقاط منطقة الحلول سواء كانت المتباينات (≤ أو ≥).

مثال (٣): حدد منطقة الحلول للمتباينات:

٢س + ٣ص ≥ ١٨

٤س + ٣ص ≥ ٢٤

٥س + ٥ص ≤ ١٥

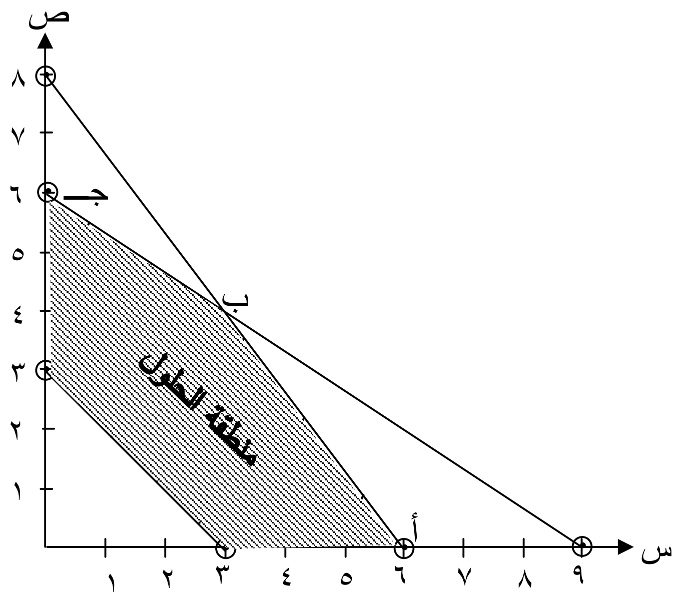
الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ٣ص = ١٨	٤س + ٣ص = ٢٤	٥س + ٥ص = ١٥
س = ٠ ص = ٦	س = ٠ ص = ٨	س = ٠ ص = ٣
س = ٩ ص = ٠	س = ٦ ص = ٠	س = ٣ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط (أ ، ب، جـــ، د، هـــ). شكل (٦)



شكل (٦)

مثال (٤):حدد منطقة الحلول للمتباينات:

٦س + ٤ص ≤ ٢٤

٥س + ٦ص ≤ ٣٠

٢س + ٣ص ≥ ٢٤

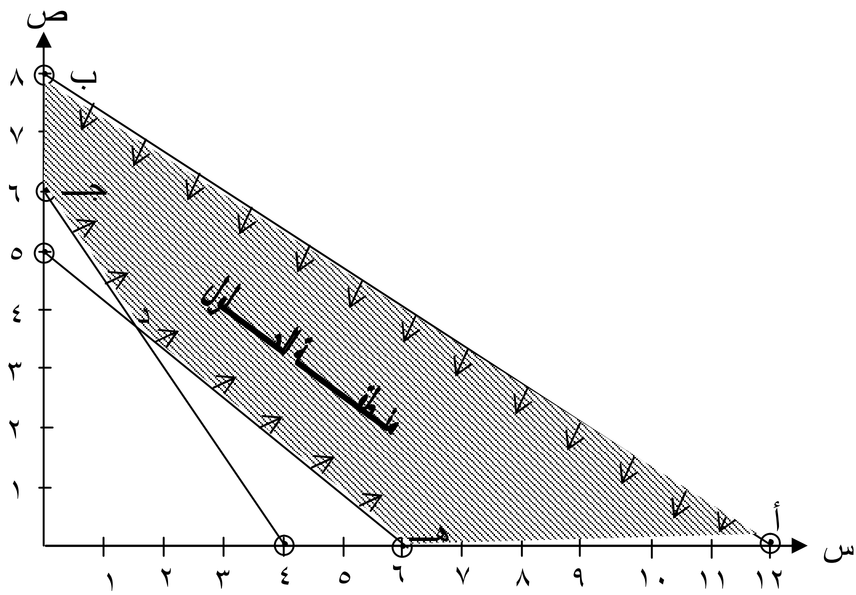
الحـــل

١ - نحول المتباينات إلى معادلات:

٦س + ٤ص = ٢٤	٥س + ٦ص = ٣٠	٢س + ٣ص = ٢٤
س = ٠ ص = ٦	س = ٠ ص = ٥	س = ٠ ص = ٨
س = ٤ ص = ٠	س = ٦ ص = ٠	س = ١٢ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط (أ، ب، جـ ، د، هـ). شكل (٧)



شكل (٧)

الفصل الحادى عشر

الطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة الخطية

Graphical Method of Linear Programming

الطريقة البيانية فى حل مشاكل البرمجة الخطية

Graphical Method of Linear Programming

سبق أن بينا أن رسم المتباينات وتحديد منطقة الحلول يتم من خلال تحويل المتباينات إلى معادلات ثم تمثيل كل معادلة بخط مستقيم، ويتم تحديد منطقة الحلول وفقاً لاتجاه المتباينات، وما نضيفه هنا هو أن النقط التى تمثل منطقة الحلول يتم التعويض بها فى دالة الهدف ثم نختار النقطة التى تحقق لنا الهدف، وهى إما النقطة التى تحقق لنا أكبر قيمة فى حالة التعظيم، أو النقطة التى تحقق أقل قيمة فى حالة التدنية، ويتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية:

مثال (١): عظم دالة الربح التالية : ر = ٢٠س + ١٥ص بالقيود التالية:

٢س + ٤ص ≤ ١٦

٣س + ٢ص ≤ ١٢

س ≥ ٠ ص ≥ ٠

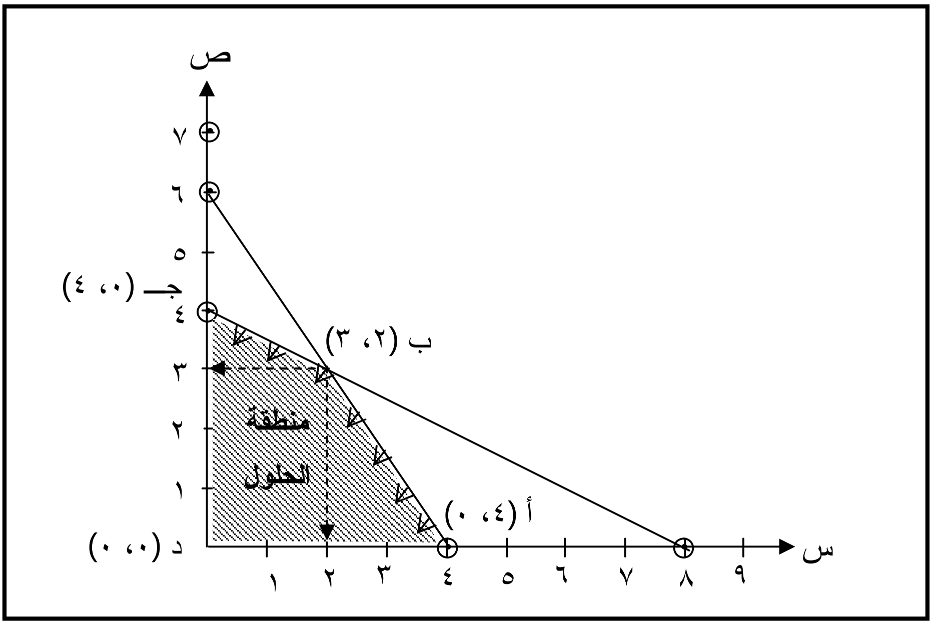
الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ٤ص = ١٦	٣س + ٢ص = ١٢
س = ٠ ص = ٤	س = ٠ ص = ٦
س = ٨ ص = ٠	س = ٤ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط أ، ب، جـــ، د.



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ر = ٢٠س + ١٥ص

عند النقطة أ (٤، ٠) ر = ٢٠ (٤) + ١٥ (٠) = ٨٠ جنيه

عند النقطة ب (٢، ٣) ر = ٢٠ (٢) + ١٥ (٣) = ٨٥ جنيه

عند النقطة جـ (٠، ٤) ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٤) = ٦٠ جنيه

عند النقطة د (٠، ٠) ر = ٢٠ (٠) + ١٥ (٠) = صفر

٥- اختيار الحل الأمثل:

لما كان الهدف هو تعظيم دالة الربح ∴ يتحقق أقصى ربح ممكن وقدره ٨٥ جنيه عند النقطة ب حيث س = ٢، ص = ٣.

٦- تحديد الموارد المستغلة:

يتم ذلك بالتعويض فى قيود س، ص

القيد الأول: ٢س + ٤ص ≤ ١٦ القيد الثانى: ٣س + ٢ص ≤ ١٢

٢(٢) + ٤(٣) = ١٦ ٣(٢) + ٢(٣) = ١٢

يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة

مثال (٢) :أوجد قيمة س، ص التى تجعل الدالة:

ر = ١٢س + ١٠ص أكبر ما يمكن

بالقيود التالية: ٤س + ٣ص ≤ ٧٢٠

٢س + ٣ص ≤ ٥٧٠

س ≥ ٠ ص ≥ ٠

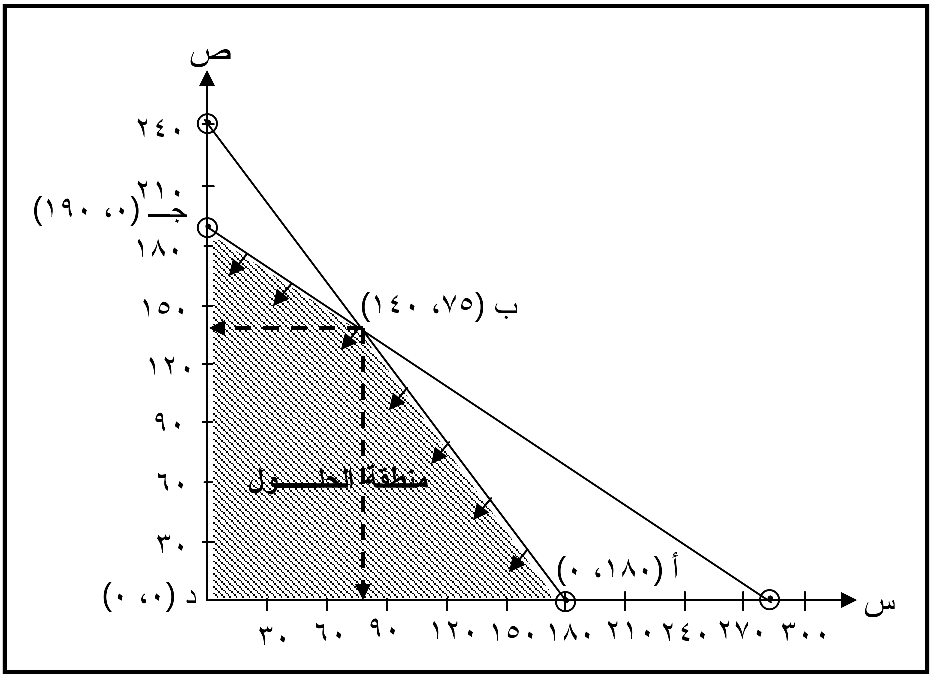
الحــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٤س + ٣ص = ٧٢٠	٢س + ٣ص = ٥٧٠
س = ٠ ص = ٢٤٠	س = ٠ ص = ١٩٠
س = ١٨٠ ص = ٠	س = ٢٨٥ ص = صفر

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات فإن منطقة الحلول تتحدد فى النقط أ، ب، جـ، د



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف : ر = ١٢س + ١٠ص

النقطة أ (١٨٠، ٠) ر = ١٢(١٨٠) + ١٠(٠) = ٢١٦٠

النقطة ب (٧٥، ١٤٠) ر = ١٢(٧٥) + ١٠(١٤٠) = ٢٣٠٠

النقطة جـ (٠، ١٩٠) ر = ١٢(٠) + ١٠ (١٩٠) = ١٩٠٠

النقطة د (٠، ٠) ر = ١٢(٠) + ١٠ (٠) = صفر

٥- اختيار الحل الأمثل:

لما كان المطلوب النهاية العظمى للدالة فإن نقطة ب هى التى تحقق الهدف حيث تبلغ الدالة نهايتها العظمى وقدرها ٢٣٠٠ عند س=٧٥، ص=١٤٠

٦- تحديد الموارد المستغلة:

القيد الأول: ٤س + ٣ص ≤ ٧٢٠	القيد الثانى: ٢س + ٣ص ≤ ٥٧٠
٤(٧٥) + ٣(١٤٠) = ٧٢٠	٢(٧٥) + ٣(١٤٠) = ٥٧٠
يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة	يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة

مثال (٣): أوجد النهاية الصغرى للدالة: ت = ٥س + ٨ص

بالقيود التالية: ١٠س + ٥ ص ≤ ٣٠٠

٥س + ١٠ص ≤ ٢٥٠

٤س + ٣ ص ≤ ١٥٠

س ≤ ٠ ص ≤ ٠

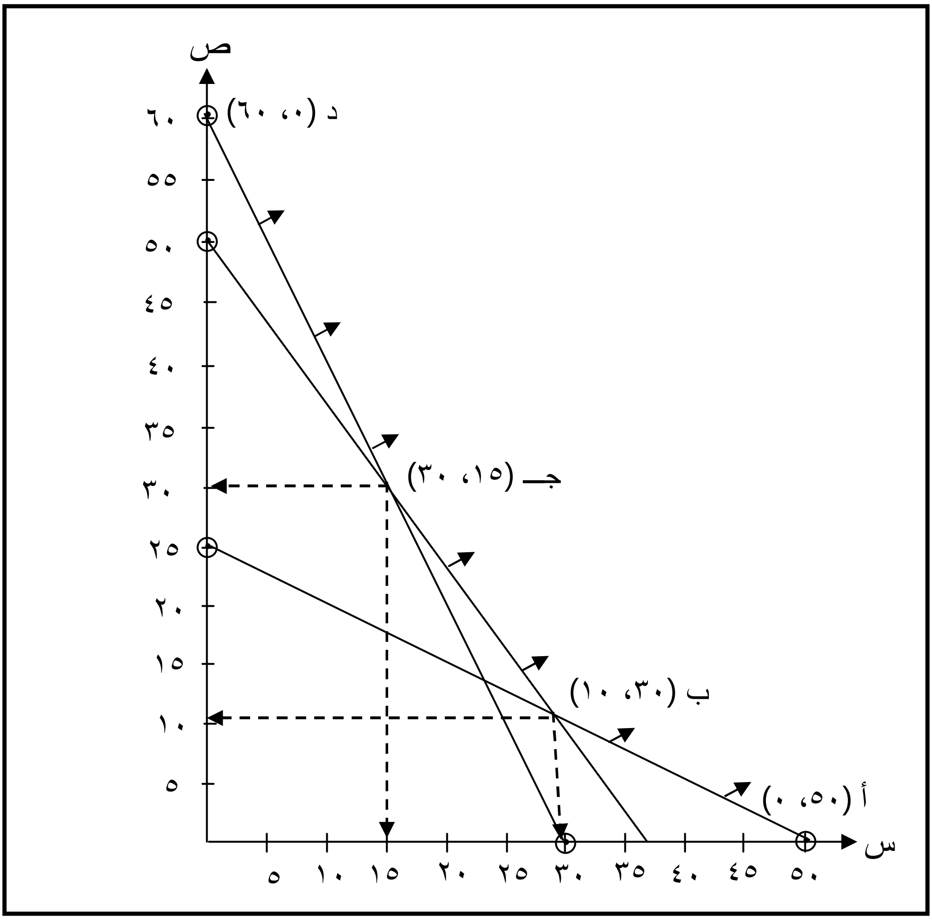
الحـــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

١٠س+٥ص=٣٠٠	٥س+١٠ص=٢٥٠	٤س+٣ص=١٥٠
س = ٠ ص = ٦٠	س = ٠ ص = ٢٥	س = ٠ ص = ٥٠
س = ٣٠ ص = ٠	س = ٥٠ ص = ٠	س = ٣٧,٥ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات تتحدد منطقة الحلول فى النقط أ، ب، جـ، د



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ت = ٥س + ٨ص

النقطة أ (٥٠، ٠)	ت = ٥ (٥٠) + ٨(٠) = ٢٥٠
النقطة ب (٣٠، ١٠)	ت = ٥ (٣٠) + ٨(١٠) = ٢٣٠
النقطة جـ (١٥، ٣٠)	ت = ٥(١٥) + ٨(٣٠) = ٣١٥
النقطة د (٠، ٦٠)	ت = ٥(٠) + ٨(٦٠) = ٤٨٠

٥- اختيار الحل الأمثل:

تتحقق النهاية الصغرى للدالة وقدرها ٢٣٠ عند النقطة (ب) حيث س = ٣٠، ص = ١٠.

٦- تحديد الموارد المستغلة:

القيد الأول: ١٠س + ٥ص ≤ ٣٠٠

١٠(٣٠) + ٥(١٠) = ٣٥٠ يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة

القيد الثانى: ٥س + ١٠ص ≤ ٣٥٠

٥(٣٠) + ١٠(١٠) = ٢٥٠ يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة

القيد الثالث: ٤س + ٣ص ≤ ١٥٠

٤(٣٠) + ٣(١٠) = ١٥٠ يحقق القيد ولا توجد موارد غير مستغلة

مثال (٤):مصنع دمياط للأثاث ينتج نوعين من غرف النوم "نفرتيتى" و "كليوباترا" فإذا علمت أن عملية التصنيع تمر بثلاثة أقسام هى التقطيع والتجميع والدهان وتحتاج الغرفة من النوع الأول إلى عدد ٢، ٥، ٤ ساعة عمل على الترتيب فى الأقسام الثلاثة، بينما تحتاج الغرفة من النوع الثانى إلى عدد ٤، ٢، ٤ ساعة عمل على الترتيب فى الأقسام الثلاثة.

فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة فى الأقسام الثلاثة يومياً هى ٥٦، ٦٠، ٦٤ ساعة عمل على الترتيب. وأن ربح المصنع من بيع الغرفة من النوع الأول ٧٠٠ جنيه ومن النوع الثانى ٥٠٠ جنيه. حدد الكمية الواجب إنتاجها يومياً من كل نوع لتحقيق أقصى ربح ممكن.

الحـــل

مشاكل البرمجة الخطية التى تأتى فى صورة لفظية تحتاج أولاً إلى تكوين المتباينات مع ملاحظة أنه يكون لدينا نوعين فقط من المنتجات (فى حالة الرسم البيانى فقط) وقد يكون لدينا مرحلتين أو أكثر من مراحل الإنتاج.

وبالتالى نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الأول (نفرتيتى) = س

، نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الثانى (كليوباترا)=ص

	النوع الأول (س)		**النوع الثانى (ص)**		**الإمكانيات المتاحة**
قسم التقطيع	**٢س**	+	**٤ص**	3	**٥٦**
قسم التجميع	**٥س**	+	**٢ص**	3	**٦٠**
قسم الدهان	**٤س**	+	**٤ص**	3	**٦٤**

لاحظ أن إنتاج كلاً من النوعين لابد أن يتم فى إطار ساعات العمل المتاحة ومن ثم تكون المتباينات ≤ أما دالة الهدف فتتكون من ربح بيع الوحدة من كل نوع.

ر = ٧٠٠س + ٥٠٠ص نهاية عظمى

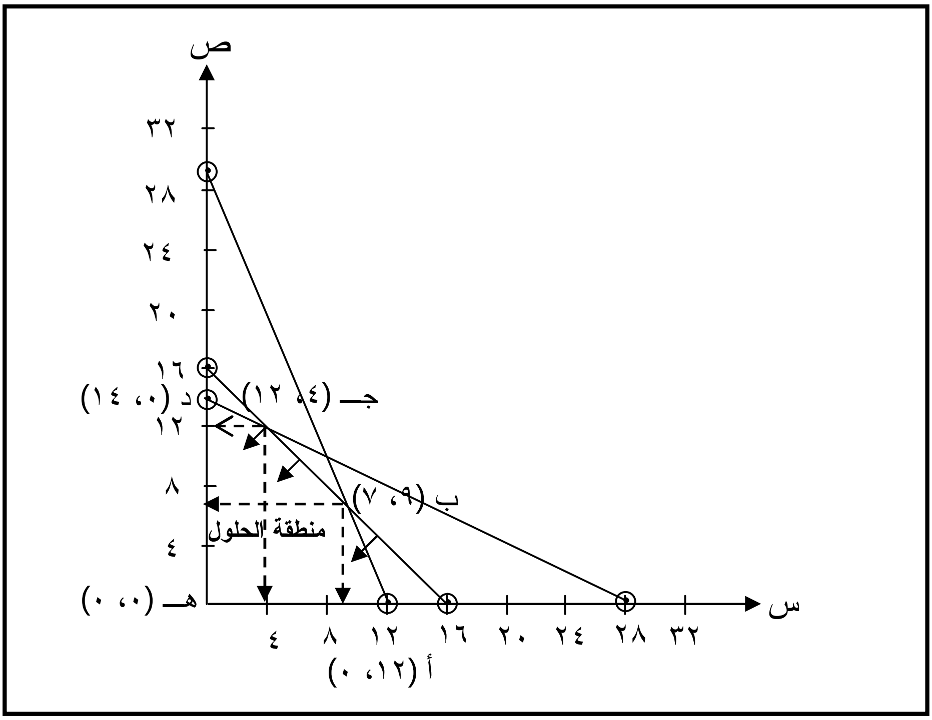
ثم يبدأ الحل كما سبق:

١- نحول المتباينات إلى معادلات:

٢س + ٤ص = ٥٦	٥س + ٢ص = ٦٠	٤س + ٤ص = ٦٤
س = ٠ ص = ١٤	س = ٠ ص = ٣٠	س = ٠ ص = ١٦
س = ٢٨ ص = ٠	س = ١٢ ص = ٠	س = ١٦ ص = ٠

٢- نرسم المعادلات.

٣- نحدد منطقة الحلول وفقاً لاتجاه المتباينات تتحدد منطقة الحلول فى النقط أ، ب، جـ، د، هـ



٤- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ر = ٧٠٠س + ٥٠٠ ص

النقطة أ (١٢، ٠)	ر = ٧٠٠(١٢) + ٥٠٠(٠) = ٨٤٠٠ جنيه
النقطة ب (٩، ٧)	ر = ٧٠٠(٩) + ٥٠٠(٧) = ٩٨٠٠ جنيه
النقطة جـ (٤، ١٢)	ر = ٧٠٠(٤) + ٥٠٠(١٢) = ٨٨٠٠ جنيه
النقطة د (٠، ١٤)	ر = ٧٠٠(٠) + ٥٠٠(١٤) = ٧٠٠٠ جنيه
النقطة هـ (٠، ٠)	ر = ٧٠٠(٠) + ٥٠٠(٠) = صفر

٥- اختيار الحل الأمثل:

يتحقق أقصى ربح ممكن وقدره ٩٨٠٠ جنيه عند النقطة (ب) أى عند س = ٩، ص = ٧.

ومعنى ذلك أن إنتاج ٩ غرف من النوع الأول "نفرتيتى"، ٧ غرف من النوع الثانى "كليوباترا" يحقق أقصى ربح ممكن وقدره ٩٨٠٠ جنيه.

٦- تحديد الموارد المستغلة:

قسم التقطيع: ٢س + ٤ص ≤ ٥٦

٢(٩) + ٤(٧) = ٤٦

يحقق القيد ولكن توجد ١٠ ساعات عمل فى قسم التقطيع غير مستغلة.

قسم التجميع: ٥س + ٢ص ≤ ٦٠

٥(٩) + ٢(٧) = ٥٩

يحقق القيد ولكن توجد ساعة عمل فى قسم التجميع غير مستغلة.

قسم الدهان: ٤س + ٤ص ≤ ٦٤

٤(٩) + ٤(٧) = ٦٤

يحقق القيد ولا توجد ساعات عمل غير مستغلة فى قسم الدهان.

مثال (٥):مصنع "ست الحبايب" لإنتاج أدوات السفرة يستخدم نوعين من الآلات فى إنتاج الملاعق والسكاكين فإذا علمت أن الدستة (١٢ قطعة) من الملاعق تحتاج إلى ٦ ساعات تشغيل على الآلة من النوع الأول وساعتين على الآلة من النوع الثانى. والدستة من السكاكين تحتاج إلى ٣ ساعات تشغيل على كل آلة من النوعين. فإذا كانت ساعات التشغيل القصوى على الآلات ١٠ ساعات يومياً، ولدى المصنع ٨ آلات من النوع الأول، و ١٢ آلة من النوع الثانى. وكان ربح المصنع من بيع الدستة من الملاعق ١٥ جنيه ومن السكاكين ١٠ جنيه. حدد الكمية الواجب إنتاجها من كل نوع يومياً لتحقيق أقصى ربح ممكن.

الحــل

١- نكون المتباينات ودالة الهدف:

نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من الملاعق = س دستة

، نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من السكاكين = ص دستة

	الملاعق (س)		السكاكين (ص)		الإمكانيات المتاحة
النوع الأول	٦س	+	٣ص	≤	١٨٠
النوع الثانى	٢س	+	٣ص	≤	١٢٠

دالة الهدف: ر = ١٥س + ١٠ص أكبر ما يمكن

٢- نحول المتباينات إلى معادلات:

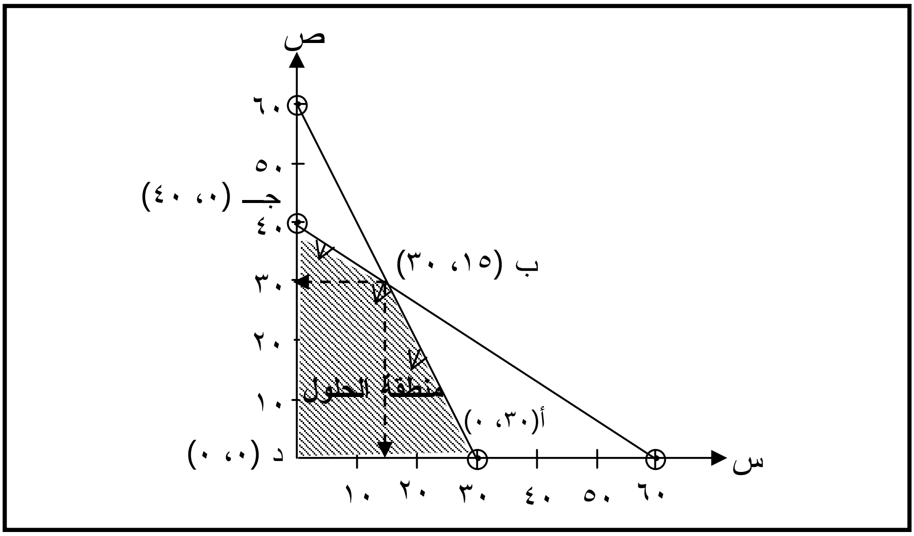
٦س + ٣ص = ١٨٠ ٢س + ٣ص = ١٢٠

س = ٠ ص = ٦٠ س = ٠ ص = ٤٠

س = ٣٠ ص = ٠ س = ٦٠ ص = ٠

٣- نرسم المعادلات

٤- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات تتحدد منطقة الحلول فى النقط أ، ب، جـ، د



٥- نعوض بالنقط فى دالة الهدف: ر = ١٥س + ١٠ص

النقطة أ (٣٠، ٠) ر = ١٥(٣٠) + ١٠(٠) = ٤٥٠ جنيه

النقطة ب (١٥، ٣٠) ر = ١٥(١٥) + ١٠(٣٠) = ٥٢٥ جنيه

النقطة جـ (٠، ٤٠) ر = ١٥(٠) + ١٠ (٤٠) = ٤٠٠ جنيه

النقطة د (٠ ، ٠)　　　ر = ١٥(٠) + ١٠(٠) = صفر

٦- اختيار الحل الأمثل:

يتحقق أكبر ربح ممكن وقدره ٥٢٥ جنيه عند نقطة (ب) أى عند س = ١٥، ص=٣٠ وهذا يعنى أن إنتاج ١٥ دستة من الملاعق (١٨٠ ملعقة)، ٣٠ دستة من السكاكين (٣٦٠ قطعة)، يحقق المصنع أقصى ربح ممكن وقدره ٥٢٥ جنيه يومياً.

٧- تحديد الموارد المستغلة:

الآلة الأولى: ٦س + ٣ص ≤ ١٨	الآلة الثانية: ٢س + ٣ص ≤ ١٢
٦(١,٥) + ٣(٣) = ١٨	٢(١,٥) + ٣(٣)=١٢
يحقق القيد ولا توجد ساعات تشغيل غير مستغلة	**يحقق القيد ولا توجد ساعات تشغيل غير مستغلة**

مثال (٦):قرر أحد الأطباء نظام غذائى معين لأحد المرضى يحقق له ٤٠٠ سعر حرارى و٢٠٠ وحدة بروتين و٣٠ وحدة فيتامين، فإذا كان لدى المستشفى نوعان من الغذاء مما قرره الطبيب، النوع الأول تحتوى الوحدة منه على ٥٠٠سعر حرارى و٥٠وحدة بروتين و ٥ وحدات فيتامين. والنوع الثانى تحتوى الوحدة منه على ٨٠٠ سعر حرارى و ٢٠ وحدة بروتين و٤ وحدات فيتامين. فإذا كان سعر الوحدة من النوع الأول ٢ جنيه وسعر الوحدة من النوع الثانى ٣ جنيه.

المطلوب: تحديد الكمية الواجب إعطاؤها للمريض من كل نوع والتى تحقق له القيمة الغذائية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة.

الحـــل

١- نكون المتباينات ودالة الهدف:

نفرض أن الكمية الواجب توفيرها من الغذاء الأول = س

نفرض أن الكمية الواجب توفيرها من الغذاء الثانى = ص

	النوع الأول (س)		النوع الثانى (ص)		الإمكانيات المتاحة
سعر حرارى	**٥٠٠س**	**+**	**٨٠٠ص**	£	**٤٠٠٠**
بروتين	**٥٠س**	**+**	**٢٠ص**	£	**٢٠٠**
فيتامين	**٥س**	**+**	**٤ص**	£	**٣٠**

دالة التكلفة: ت = ٦س + ٨ص أقل ما يمكن

٢- نحول المتباينات إلى معادلات:

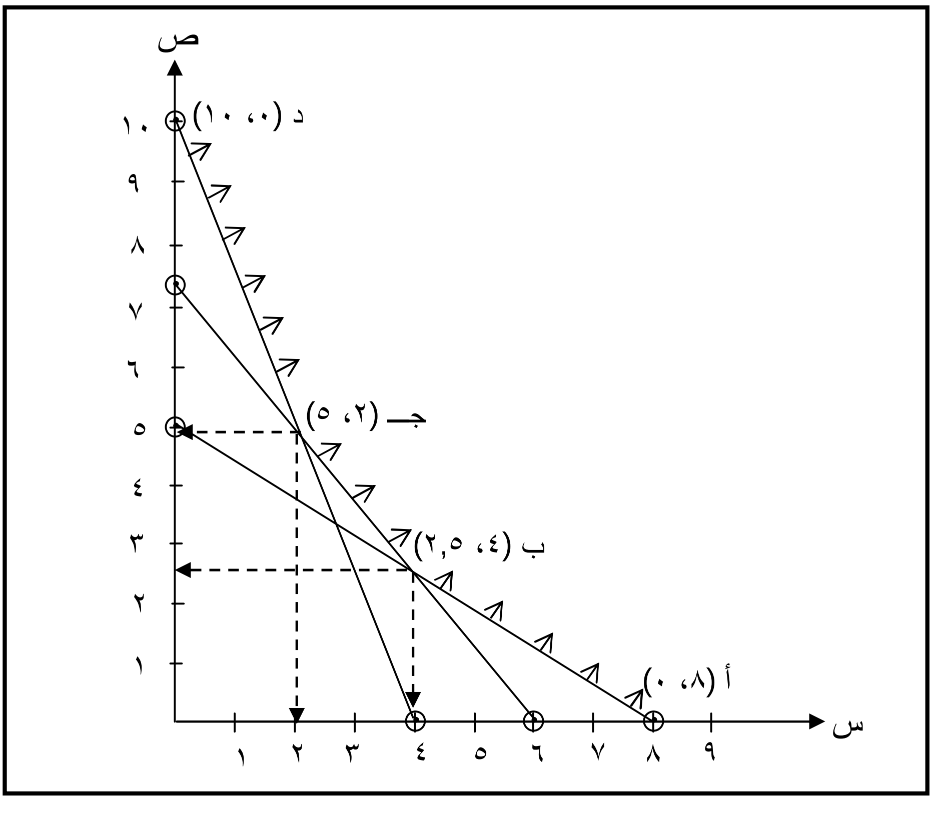
٥٠٠س+٨٠٠ص = ٤٠٠٠ ٥٠س+٢٠ص = ٢٠٠ ٥س + ٤ص=٣٠

س = ٠ ص = ٥ س = ٠ ص = ١٠ س = ٠ ص = ٥

س = ٨ ص = ٠ س = ٤ ص = ٠ س = ٦ ص = ٠

٣- نرسم المعادلات.

٤- نحدد منطقة الحلول: وفقاً لاتجاه المتباينات تتحدد منطقة الحلول فى النقط أ، ب، جـ، د



٥- نعوض بالنقط فى دالة الهدف:

ت = ٢س + ٣ص

النقطة أ (٨ ، ٠) ت = ٢(٨) + ٣(٠) = ١٦ جنيه

النقطة ب (٤ ، ٢,٥) ت = ٢(٤) + ٣(٢,٥) = ١٥,٥ جنيه

النقطة جـ (٢ ، ٥) ت = ٢(٢) + ٣(٥) = ١٩ جنيه

النقطة د (٠، ١٠) ت = ٢(٠) + ٣(١٠) = ٣٠ جنيه

٦- اختيار الحل الأمثل:

تتحقق أقل تكلفة ممكنة وقدرها ١٥,٥ جنيه عند نقطة (ب) حيث س = ٤، ص=٢,٥ أى بتقديم ٤ وحدات من الغذاء الأول و ٢,٥ وحدة من الغذاء الثانى.

٧- تحديد الموارد المستغلة:

سعر حرارى: ٥٠٠س + ٨٠٠ص ≥ ٤٠٠٠

٥٠٠(٤) + ٨٠٠(٢,٥) = ٤٠٠٠

يحقق القيد ولا يوجد أى نقص فى الكمية المطلوبة.

بروتين: ٥٠ س + ٢٠ص ≥ ٢٠٠

٥٠(٤) + ٢٠(٢,٥) = ٢٥٠

يحقق القيد ويوجد زيادة ٥٠ وحدة يوفرها الغذاء عن الحد الأدنى.

فيتامين: ٥س + ٤ص ≥ ٣٠

٥(٤) + ٤(٢,٥) = ٣٠

يحقق القيد ولا يوجد أى نقص فى الكمية المطلوبة.

الفصل الثانى عشر
طريقة السمبلكس فى حل مشاكل البرمجة الخطية
(تعظيم)

طريقة السمبلكس فى حل مشاكل البرمجة الخطية (تعظيم)

وتمتاز هذه الطريقة بقدرتها على التعامل مع المشكلات الخاصة بأكثر من متغيرين مثل الطريقة الجبرية إلا أنها تتفوق عليها فى أنها قادرة على التوقف عن متابعة الحل عند مرحلة يكون عندها الحل مثالياً، بمعنى آخر أننا فى الطريقة الجبرية نضطر إلى تحديد كل نقاط الحل، ثم نستبعد ما لا يتفق مع أى من المتباينات، ثم نعوض بنقاط الحل الممكن فى دالة الهدف ثم نختار الحل الأمثل حسب دالة الهدف.

أما فى طريقة السمبلكس فإننا نبدأ الحل باختيار أفضل نقطة ممكنة ثم نختبر الحل فإذا كان حلاً مثالياً نتوقف عنده، أما إذا كان من الممكن إجراء تحسين على الحل يؤدى إلى نتائج أفضل (زيادة الربح أو تخفيض التكلفة) نستمر فى الحل إلى أن نصل إلى الحل الأمثل، وهذا يوفر كثيراً فى الوقت وخاصة إذا كان الحل يدوياً وليس باستخدام الحاسب الآلى.

ويقوم أسلوب السمبلكس على مبدأين أساسيين هما:

١- مبدأ الحلول الممكنة Feasible Solutions.

٢- مبدأ المثالية Optimality.

وكل حل يتم التوصل إليه باستخدام أسلوب السمبلكس لابد أن يكون أفضل من الحلول السابقة له، ولابد أن يكون الحل الأمثل أحد الحلول الممكنة.

خطوات الحل باستخدام طريقة السمبلكس:

١- يتم إضافة متغيرات تمثل الموارد غير المستغلة أو الراكدة Slack Variables وهى ذات إشارة موجبة فى المتباينات (≥) وسالبة فى المتباينات (≤).

٢- المتغيرات المضافة إلى المعادلات يفترض أنها المتغيرات الأساسية على أنها لا تحقق أى عائد فقيمتها فى دالة الهدف = صفر. وتعتمد طريقة السمبلكس على محاولة إدخال المتغيرات غير الأساسية فى

نموذج الحل (وهى المتغيرات التى تتضمنها المتباينات) لتحل محل المتغيرات الأساسية المفترضة.

٣- يتم وضع المعادلات ودالة الهدف فى شكل جدول.

٤- تعتمد طريقة السمبلكس على أسلوب التخفيض المحورى لإيجاد مقلوب المصفوفة التى تمثل معاملات المتغيرات فى المعادلات بالإضافة إلى مصفوفة الوحدة التى تمثل المتغيرات الراكدة. وهذا يعنى أن كل عمود من أعمدة مصفوفة معاملات المتغيرات يتحدد فيه عنصر معين نحوله إلى واحد صحيح وباقى عناصر العمود إلى أصفار وفقاً لما يعرف بمفتاح الحل.

٥- يتحدد عمود المفتاح The Key Column وفقاً لأكبر قيمة موجبة فى دالة الهدف فى حالة التعظيم وأقل قيمة (أكبر رقم بإشارة سالبة) فى دالة الهدف فى حالة التدنية ومنه يتحدد العنصر الداخل كمتغير أساسى للحل.

٦- يتحدد صف المفتاح The Key Row بقسمة عمود الثوابت على عمود المفتاح ونختار أقل قيمة موجبة من ناتج القسمة. ومنه يتحدد العنصر الخارج كمتغير غير أساسى.

٧- يتحدد رقم المفتاح The Key Number بالعنصر الذى يتلاقى عنده عمود المفتاح مع صف المفتاح وهذا العنصر نحوله إلى واحد صحيح وباقى عناصر العمود إلى أصفار.

٨- نستمر فى الحل طالما كانت هناك قيم موجبة (فى حالة التعظيم) أو سالبة (فى حالة التدنية) فى دالة الهدف تحت المتغيرات الواردة فى المعادلات.

٩- هناك فروقاً جوهرية فى خطوات الحل بطريقة السمبلكس فى حالة التعظيم عن حالة التدنية ويتضح ذلك لاحقاً.

١٠- يمكن إجراء اختبار مثالية للحل حتى نتأكد أن الحل الذى توصلنا إليه يمثل الحل الأمثل.

مثال (١):مصنع دمياط لفرش السيارات ينتج نوعين من فرش السيارات، فإذا كانت الوحدة من النوع الأول تحتاج إلى ساعتين عمل فى قسم التفصيل و٣ ساعات عمل فى قسم الحياكة والوحدة من النوع الثانى تحتاج إلى ٤ ساعات عمل فى قسم التفصيل وساعتين عمل فى قسم الحياكة. فإذا كانت ساعات العمل المتاحة يومياً فى قسم التفصيل ١٦ ساعة عمل وفى قسم الحياكة ١٢ ساعة عمل. فإذا علمت أن ربح بيع الوحدة من النوع الأول ٢٠ جنيه ومن النوع الثانى ١٥ جنيه. حدد الكمية الواجب إنتاجها يومياً من كل نوع لكى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن.

الحـــل

١ - نكون المتباينات ودالة الهدف:

نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الأول من فرش السيارات = س

نفرض أن الكمية الواجب إنتاجها من النوع الثانى من فرش السيارات = ص

	النوع الأول (س)		النوع الثانى (ص)		الموارد المتاحة
قسم التفصيل	٢س	+	٤ص	≥	١٦
قسم الحياكة	٣س	+	٢ص	≥	١٢

دالة الهدف هــ = ٢٠س + ١٥ص أكبر ربح ممكن

٢ - نحول المتباينات إلى معادلات بعد إضافة المتغيرات الراكدة م$_{١}$، م$_{٢}$ للمعادلتين:

٢س + ٤ص + م$_{١}$ = ١٦

٣س + ٢ص + م$_{٢}$ = ١٢

٣- نكون جدول الحل المبدئى:

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	الثوابت	النسبة
م١	٢	٤	١	٠	١٦	١٦/ =٨
م٢	٣	٢	٠	١	١٢	١٢/ =(٤)
هـ	٢٠	١٥	٠	٠	٠	

يحل محله س ← (صف م٢)

← صف المفتاح (أقل قيمة موجبة)

↑ عمود المفتاح (أكبر قيمة موجبة)

ملاحظات على جدول الحل المبدئى:

١- إن افتراض أن م١، م٢ متغيرين أساسيين لا يحقق أى ربح للمنشأة وبالتالى لابد من التفكير فى سلسلة من الإجراءات (خطوات طريقة السمبلكس) لكى يحل أحد المتغيرات غير الأساسية فى النموذج، والذى يمكن أن يحقق ربحاً، محل المتغيرات الأساسية.

٢- تحديد المتغير الداخل كمتغير أساسى يقوم على أساس المتغير الذى يحقق ربحاً أكبر فالربح المحقق من إنتاج وحدة من س = ٢٠ جنيه ومن ص = ١٥ جنيه وبالتالى نختار إدخال س كمتغير أساسى.

٣- لكى نحدد المتغير الخارج من بين م١، م٢ لابد أن نراعى شروط عدم السلبية وذلك بأن نحدد عدد الوحدات التى يمكن إنتاجها من س بقسمة عمود الثوابت والذى يمثل الموارد المتاحة (ساعات العمل المتاحة فى كل قسم) ÷ معاملات س فى المعادلات والتى تمثل معدل الإحلال بين س وكل من م١، م٢. فالرقم (٢) فى الصف الأول يعنى أن عدم إنتاج وحدة من س يؤدى إلى وجود ساعتين عمل معطلتين فى قسم التفصيل، والرقم (٣) فى الصف الثانى يعنى أن عدم إنتاج وحدة من س يؤدى إلى وجود ٣ ساعات عمل معطلة فى قسم الحياكة.

وعملية القسمة تعطى لنا عدد الوحدات من النوع س، والتى يتم إنتاجها باستخدام ساعات العمل فى القسم الأول = $\frac{١٦}{٢}$ = ٨ وحدات. وكذلك عدد الوحدات من النوع س والتى يتم إنتاجها باستخدام ساعات العمل فى القسم الثانى = $\frac{١٢}{٣}$ = ٤ وحدات.

فإنتاج ٨ وحدات من س لا يحقق شرط عدم السلبية لأن إنتاجها يحتاج إلى ٤٠ ساعة عمل فى القسمين (٢× ٨ + ٣×٨) بينما ساعات العمل المتاحة فى القسمين تبلغ ٢٨ ساعة فقط.

بينما إنتاج ٤ وحدات من س يمكن أن يتم فى حدود ساعات العمل المتاحة لأن إنتاج ٤ وحدات من س يحتاج إلى ٢٠ ساعة عمل فقط أى أقل من ساعات العمل المتاحة فى القسمين.

نبدأ فى إجراء خطوات طريقة السمبلكس:

بقسمة عناصر الصف الثانى (صف المفتاح) ÷ ٣ ← رقم المفتاح

الصف الثانى الجديد يصبح	١	$\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{١}{٣}$	٤

الصف الأول الجديد ينتج من ضرب الصف الثانى الجديد × -٢ وجمعه على الصف الأول القديم.

حاصل الضرب	-٢	$-\frac{٤}{٣}$	٠	$-\frac{٢}{٣}$	-٨
الصف الأول القديم	٢	٤	١	٠	١٦

بالجمع

الصف الأول الجديد	٠	$\frac{٨}{٣}$	١	$-\frac{٢}{٣}$	٨

الصف الثالث الجديد ينتج من ضرب الصف الثانى الجديد × -٢٠ وجمعه على الصف الثالث القديم.

حاصل الضرب	-٢٠	$-\frac{٤٠}{٣}$	٠	$-\frac{٢٠}{٣}$	-٨٠
الصف الثالث القديم	٢٠	١٥	٠	٠	٠

بالجمع

الصف الثالث الجديد	٠	$\frac{٥}{٣}$	٠	$-\frac{٢٠}{٣}$	-٨٠

جدول الحل الثانى

متغيرات أساسية	س	ص	$م_1$	$م_2$	الثوابت	النسبة	
$م_1$	٠	$\frac{٨}{٣}$	١	$-\frac{٢}{٣}$	٨	٣	® صف المفتاح
س	٣	$\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{١}{٣}$	٤	٦	
هـ	٠	$\frac{٥}{٣}$	٠	$-\frac{٢٠}{٣}$	٨		

عمود المفتاح

لازالت هناك قيم موجبة فى دالة الهدف ∴ هذا الحل لا يمثل الحل الأمثل ولأن القيم الموجبة قيمة واحدة فى عمود ص ∴ عمود المفتاح هو عمود ص ∴ ص يدخل كمتغير أساسى.

وبقسمة عمود الثوابت على عمود المفتاح فإن الصف الأول هو صف المفتاح ويخرج $م_1$ ليحل محله ص والرقم $\frac{٨}{٣}$ وهو المفتاح يحول إلى واحد صحيح وباقى عناصر العمود إلى أصفار بضرب عناصر الصف الأول × $\frac{٣}{٨}$

الصف الأول الجديد	٠	١	$\frac{٣}{٨}$	$-\frac{١}{٤}$	٣

الصف الثانى الجديد ينتج من ضرب الصف الأول الجديد × $-\frac{٢}{٣}$ وجمعه على الصف الثانى القديم.

حاصل الضرب	٠	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٦}$	٢-
الصف الثانى القديم	١	$\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{١}{٣}$	٤
بالجمع					
الصف الثانى الجديد	١	٠	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	٢

الصف الثالث الجديد ينتج من ضرب الصف الأول الجديد × (-٥/٣) وجمعه على الصف الثالث القديم.

حاصل الضرب	٠	-٥/٣	-٥/٨	٥/١٢	-٥
الصف الثالث القديم	٠	٥/٣	٠	-٢٠/٣	-٨٠
بالجمع					
الصف الثالث الجديد	٠	٠	-٥/٨	-٢٥/٤	-٨٥

جدول الحل الثالث

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	الثوابت
ص	٠	١	٣/٨	-١/٤	٣
س	٣	٠	-١/٤	١/٢	٢
هـ	٠	٠	-٥/٨	-٢٥/٤	-٨٥

لم تعد هناك قيم موجبة فى دالة الهدف وتتحقق النهاية العظمى للدالة وقدرها ٨٥جنيه عند س = ٢، ص = ٣ أى بإنتاج وحدتين من النوع الأول من فرش السيارات و٣ وحدات من النوع الثانى من فرش السيارات يحقق المصنع ربح يومى ٨٥ جنيه.

اختبار مثالية الحل:

إذا كانت عناصر دالة الهدف فى عمود الحل النهائى تساوى القيمة د(هـ) – أهـ فإن الحل الذى توصلنا إليه يكون الحل الأمثل.

، أهـ نحصل عليها بضرب أعمدة جدول الحل النهائى × قيمة ص، س فى دالة الهدف الأصلية (لاحظ ترتيب وجودها فى جدول الحل النهائى).

ص فى د(هـ) =١٥	٠	١	٣/٨	-١/٤	٣
س فى د(هـ)=٢٠	١	٠	-١/٤	١/٢	٢
أ هـ	٠×١٥ + ١×٢٠	١×١٥ + ١×٢٠	٣/٨ ×١٥ + -١/٤ ×٢٠	-١/٤ ×١٥ + ١/٢ ×٢٠	٣×١٥ + ٢×٢٠

د(هـ)	٢٠	١٥	٠	٠	٠
أهـ	-٢٠	١٥	٥/٨	٢٥/٤	٨٥
					بالطرح
د(هـ)- أهـ	٠	٠	-٥/٨	-٢٥/٤	-٨٥

وهى قيمة الصف الأخير من جدول الحل النهائى.

هام جداً:

لابد أن نتفهم طبيعة ومعنى الأرقام الواردة فى أى جدول من جداول الحل حيث أن الأرقام الواردة فى أى صف تمثل معدلات الإحلال بين المتغير الأساسى والمتغيرات الموجودة فى الأعمدة. فعلى سبيل المثال لو رجعنا إلى الأرقام الواردة فى جدول الحل الثانى والموجودة فى الصف الثانى بعد إدخال (س) كمتغير أساسى لوجدناها كما يلى:

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢
س	١	٢/٣	٠	١/٣

والرقم (١) معناه معدل الإحلال بين س، س فإدخال وحدة من س معناه الاستغناء عن وحدة من س فى نفس الوقت.

والرقم($\frac{٢}{٣}$) معناه معدل الإحلال بين س، ص فإدخال وحدة من ص معناه الاستغناء عن $\frac{٢}{٣}$ وحدة من س فى نفس الوقت لأن الوحدة من ص تحتاج إلى ساعتين فى قسم الحياكة بينما الوحدة من س

تحتاج إلى ٣ ساعات ($\frac{٢}{٣}$ وحدة من س × ٣ ساعات = ٢ ساعة التى تحتاجها وحدة من ص).

والرقم (٠) معناه عدم وجود علاقة إحلال بين المتغير س وساعات العمل الراكدة (غير المستغلة أو العاطلة) فى قسم التفصيل.

والرقم [$\frac{١}{٣}$] معناه معدل الإحلال بين المتغير س وساعات العمل العاطلة فى قسم الحياكة وهو يعنى أن زيادة ساعات التعطل فى قسم الحياكة بمقدار ساعة يؤدى إلى التعطل عن إنتاج $\frac{١}{٣}$ وحدة من س. (الوحدة من س تحتاج إلى ٣ ساعات عمل فى قسم الحياكة)

القيم الواردة فى الصف الأخير من جدول الحل النهائى وتحت $م_١$ ، $م_٢$ قيماً سالبة ($\frac{-٥}{٨}$) ، ($\frac{-٢٥}{٤}$) $\frac{٥}{٨}$ معناها أن تعطل العمل ساعة واحدة فى القسم الأول (التفصيل) يكلف الشركة $\frac{٥}{٨}$جنيه أى يقلل الأرباح بمقدار (٦٢,٥ قرش) ونفس الوضع بالنسبة للقسم الثانى (الحياكة) فإن تعطل العمل بمقدار ساعة واحدة يؤدى إلى خفض الأرباح بما قيمته $\frac{٢٥}{٤}$ جنيه أى ٦,٢٥ جنيه.

ومعنى ذلك أن زيادة ساعات العمل فى القسم الأول (التفصيل) بمقدار ساعة يؤدى إلى زيادة الأرباح بما قيمته $\frac{٥}{٨}$ جنيه وزيادة ساعة واحدة فى القسم الثانى (الحياكة) تؤدى إلى زيادة الأرباح بما قيمته ٦,٢٥ جنيه – ويطلق على

هاتين القيمتين فى التحليل الاقتصادى الأرباح الحدية Marginal Profit أو أسعار الظل Shadow Prices.

إن معرفة أسعار الظل للوحدة من الموارد المتاحة (ساعات العمل) فى كل قسم يمكنا من حساب القيمة الحقيقية للموارد المتاحة:

قيمة الموارد المتاحة فى قسم التفصيل = ١٦ × $\frac{٥}{٨}$ = ١٠

قيمة الموارد المتاحة فى قسم الحياكة = ١٢ × $\frac{٢٥}{٤}$ = ٧٥

مجموع قيم الموارد المتاحة ٨٥

ويلاحظ أن قيمة الموارد المتاحة تتساوى تماماً مع رقم الأرباح الذى يحققه الحل الأمثل وهو ما يطلق عليه المشكلة الثنائية أو التوأم Dual Problem فى البرمجة الخطية وسوف نعرض لها لاحقاً.

الفصل الثالث عشر
طريقة السمبلكس فى حل مشاكل البرمجة الخطية
(تدنية)

الفصل الثالث عشر

طريقة السمبلكس فى حل مشاكل البرمجة الخطية (تدنية)

سبق أن أشرنا إلى أن أولى خطوات طريقة السمبلكس هى تحويل المتباينات إلى معادلات بعد إضافة متغيرات راكدة تمثل الموارد غير المستغلة أو العاطلة تكون قيمتها موجبة فى حالة التعظيم (المتباينات ≥) وسالبة فى حالة التدنية (المتباينات ≤).

ويجب أن نلاحظ أن إضافة متغيرات راكدة بإشارة سالبة لا يحقق شرط عدم السلبية وبالتالى لابد من إضافة متغيرات يطلق عليها البعض متغيرات صورية أو اصطناعية أو وهمية Artificial Variables وهى تمثل وحدات إنتاج وهمية لها قيمة موجبة تتضاءل مع كل محاولة لتحسين الحل حتى تصل إلى الصفر عند الوصول إلى الحل الأمثل.

ثم نكون دالة هدف جديدة نرمز لها بالرمز (و) تتكون من المتغيرات الوهمية.

وتمر خطوات الحل بمرحلتين:

المرحلة الأولى:

وفيها نتخلص من المتغيرات الوهمية التى سوف نرمز لها بالرموز (ط$_{١}$، ط$_{٢}$، ط$_{٣}$، .....) حيث يفترض أنها تمثل المتغيرات الأساسية.

المرحلة الثانية:

بعد أن نتخلص من أعمدة المتغيرات الوهمية وصف دالة الهدف الجديدة (و) تبدأ المرحلة الثانية على دالة الهدف الأصلية (هـ) فإما أن نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل أو نستمر فى خطوات الحل إذا ظلت هناك قيماً سالبة فى دالة الهدف الأصلية تحت المتغيرات غير الأساسية Non-basic Variables.

ويمكن أن نتتبع خطوات الحل من خلال المثال التالى:

مثال (٢): شركة مصرية للإنتاج الزراعى تستخدم نوعين من الأسمدة تباع الوحدة من النوع الأول بسعر ٦ جنيه ومن النوع الثانى بسعر ٨ جنيه. ويغذى كل منهما التربة الزراعية بما تحتاجه من النترات والبوتاس فإذا كانت الوحدة من النوع الأول من السماد تمد التربة بـــ ٣ وحدات من النترات و٥ وحدات من البوتاس، والوحدة من النوع الثانى من السماد تمد التربة بـــ ٦ وحدات من النترات ووحدتين من البوتاس. فإذا كان الحد الأدنى المطلوب للتربة من النترات ٣٩ وحدة ومن البوتاس ٢٥ وحدة. حدد الكمية الواجب شراؤها من كل نوع من نوعى السماد لإمداد التربة بما تحتاجه من مواد كيماوية بأقل تكلفة ممكنة.

الحـــل

نفرض أن الكمية الواجب شراؤها من النوع الأول من السماد = س

نفرض أن الكمية الواجب شراؤها من النوع الثانى من السماد = ص

	النوع الأول (س)		**النوع الثانى (ص)**		**الإمكانيات المتاحة**
نترات	**٣س**	+	**٦ص**	£	**٣٩**
بوتاس	**٥س**	+	**٢ص**	£	**٢٥**

دالة الهدف: د(هـــ) = ٦س + ٨ص أقل ما يمكن

١- نحول المتباينات إلى معادلات مع إضافة متغيرات راكدة (م$_١$، م$_٢$) بإشارات سالبة ومتغيرات وهمية (ط$_١$، ط$_٢$) بإشارات موجبة.

٣س + ٦ص – م$_١$ + ط$_١$ = ٣٩

٥س + ٢ص – م$_٢$ + ط$_٢$ = ٢٥

٢- نكون دالة هدف جديدة (و) = ط$_١$ + ط$_٢$

ط$_١$ = ٣٩ – ٣س – ٦ص + م$_١$

ط$_٢$ = ٢٥ – ٥س – ٢ص + م$_٢$

بالجمع

و = ٦٤ – ٨س – ٨ص + م$_١$ + م$_٢$

٣- نضع المتغيرات ودالة الهدف الأصلية ودالة الهدف الجديدة فى شكل نموذج الحل المبدئى.

جدول الحل المبدئى

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	ط١	ط٢	الثوابت	النسبة
ط١	٣	٦	-١	٠	١	٠	٣٩	٣٩/٣ = ١٣
ط٢	٥	٢	٠	-١	٠	١	٢٥	٢٥/٥ = ٥
هـ	٦	٨	٠	٠	٠	٠	٠	
و	-٨	-٨	١	١	٠	٠	٦٤	

يخرج ← ويحل محله س

← صف المفتاح

عمود المفتاح

يتحدد عمود المفتاح وفقاً لأقل قيمة (أكبر رقم بإشارة سالبة) فى دالة الهدف الجديدة (و) وحيث أنهما قيمتان متساويتان. ∴ نبدأ بعمود س والصف الثانى هو صف المفتاح

\ يخرج ط٢ ويحل محله س ورقم المفتاح = ٥ يحول إلى واحد صحيح وباقى عناصر العمود إلى أصفار.

بقسمة عناصر الصف الثانى ÷ ٥

الصف الثانى الجديد	١	٢/٥	٠	-١/٥	٠	١/٥	٥

الصف الأول الجديد ينتج من ضرب الصف الثانى الجديد × -٣ وجمعه على الصف الأول القديم.

حاصل الضرب	-٣	-٦/٥	٠	٣/٥	٠	-٣/٥	-١٥
الصف الأول القديم	٣	٦	-١	٠	١	٠	٣٩

بالجمع

الصف الأول الجديد	٠	٢٤/٥	-١	٣/٥	١	-٣/٥	٢٤

الصف الثالث الجديد ينتج من ضرب الصف الثانى الجديد × -٦ وجمعه على الصف الثالث القديم.

حاصل الضرب	-٦	-١٢/٥	٠	٦/٥	٠	-٦/٥	-٣٠
الصف الثالث القديم	٦	٨	٠	٠	٠	٠	٠

بالجمع

الصف الثالث الجديد	٠	٢٨/٥	٠	٦/٥	٠	-٦/٥	-٣٠

الصف الرابع الجديد ينتج من ضرب الصف الثانى الجديد × ٨ وجمعه على الصف الرابع القديم.

حاصل الضرب	٨	١٦/٥	٠	-٨/٥	٠	٨/٥	٤٠
الصف الرابع القديم	-٨	-٨	١	١	٠	٠	٦٤

بالجمع

١٠٤	٨/٥	٠	-٣/٥	١	-٢٤/٥	٠	الصف الرابع الجديد

جدول الحل الثانى

متغيرات أساسية	س	ص	$م_1$	$م_2$	$ط_1$	$ط_2$	الثوابت	النسبة	
$ط_1$	٠	٢٤/٥	-١	٣/٥	١	-٣/٥	٢٤	٥	**® صف المفتاح**
$ط_2$	١	٢/٥	٠	-١/٥	٠	١/٥	٥	١٢,٥	
هـــ	٠	٢٨/٥	٠	٦/٥	٠	-٦/٥	-٣٠		
و	٠	-٢٤/٥	١	-٣/٥	٠	٨/٥	١٠٤		

-

عمود المفتاح

مازالت هناك قيم سالبة فى (و) ولم يتم التخلص من المتغيرات الوهمية

∴ نستمر فى الحل، أكبر رقم بإشارة سالبة فى (و) = -٢٤/٥

∴ عمود ص هو عمود المفتاح، وأقل نسبة موجبة = ٥ فى الصف الأول

∴ الصف الأول هو صف المفتاح وبالتالى يخرج $ط_1$

ويحل محله ص ورقم المفتاح = ٢٤/٥ يحول إلى واحد صحيح وباقى عناصر

العمود إلى أصفار.

بضرب الصف الأول × $\frac{٥}{٢٤}$

الصف الأول الجديد	٠	١	$\frac{-٥}{٢٤}$	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٥}{٢٤}$	$\frac{-١}{٨}$	٥

الصف الثانى الجديد ينتج من ضرب الصف الأول الجديد × $\frac{-٢}{٥}$ وجمعه على الصف الثانى القديم.

حاصل الضرب	٠	$\frac{-٢}{٥}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{-١}{٢٠}$	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٢٠}$	-٣
الصف الثانى القديم	١	٨	٠	$\frac{-١}{٥}$	٠	$\frac{١}{٥}$	٥

بالجمع

الصف الثانى الجديد	١	٠	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{-١}{٤}$	$\frac{-١}{١٢}$	$\frac{١}{٤}$	٣

الصف الثالث الجديد ينتج من ضرب الصف الأول الجديد × $\frac{-٢٨}{٥}$ وجمعه على الصف الثالث القديم

حاصل الضرب	٠	$\frac{-٢٨}{٥}$	$\frac{٧}{٦}$	$\frac{-٧}{١٠}$	$\frac{-٧}{٦}$	$\frac{٧}{١٠}$	-٢٨
الصف الثالث القديم	٠	$\frac{٢٨}{٥}$	٠	$\frac{٦}{٥}$	٠	$\frac{-٦}{٥}$	-٣٠

بالجمع

الصف الثالث الجديد	٠	٠	$\frac{٧}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{-٧}{٦}$	$\frac{-١}{٢}$	-٥٨

الصف الرابع الجديد ينتج من ضرب الصف الأول الجديد × $\frac{٢٤}{٥}$ وجمعه على الصف الرابع القديم.

حاصل الضرب	٠	$\frac{٢٤}{٥}$	-١	$\frac{٣}{٥}$	١	$\frac{-٣}{٥}$	٢٤
الصف الرابع القديم	٠	$\frac{-٢٤}{٥}$	١	$\frac{-٣}{٥}$	٠	$\frac{٨}{٥}$	١٠٤

بالجمع

الصف الرابع الجديد	٠	٠	٠	٠	١	١	١٢٨

جدول الحل الثالث

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	ط١	ط٢	الثوابت
ص	٠	١	-٥/٢٤	١/٨	٥/٢٤	-١/٨	٥
س	١	٠	١/١٢	-١/٤	-١/١٢	١/٤	٣
هـ	٠	٠	٧/٦	١/٢	-٧/٦	-١/٢	-٥٨
و	٠	٠	٠	٠	١	١	١٢٨

ثم التخلص من المتغيرات الوهمية (ط١، ط٢) ولم تعد هناك قيماً سالبة فى (و).

∴ تنتهى المرحلة الأولى من الحل وتبدأ المرحلة الثانية بعد شطب أعمدة ط١، ط٢ وصف (و) من جدول الحل السابق.

جدول الحل النهائى

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	الثوابت
ص	٠	١	-٥/٢٤	١/٨	٥
س	١	٠	١/١٢	-١/٤	٣
هـ	٠	٠	٧/٦	١/٢	-٥٨

يلاحظ أنه لا توجد قيماً سالبة فى دالة الهدف الأصلية (هـ) تحت المتغيرات غير الأساسية وهذا يعنى أننا توصلنا إلى الحل النهائى ويعتبر الجدول الممثل لبداية المرحلة الثانية من الحل هو جدول الحل النهائى. حيث تصل الدالة إلى نهايتها الصغرى وقدرها ٥٨ عند س = ٣، ص = ٥ .

وهذا يعنى أنه بشراء ٣ وحدات من النوع الأول من السماد و٥ وحدات من النوع الثانى يمكننا توفير ما تحتاجه التربة بأقل تكلفة وقدرها ٥٨ جنيه.

ملحوظة هامة جداً:

يمكننا تقليل خطوات الحل بأن نبدأ المرحلة الأولى للحل بدون دالة الهدف الأصلية (هــ) وبعد أن نتخلص من المتغيرات الوهمية ($ط_١$، $ط_٢$) نستبعد دالة الهدف (و) وأعمدة $ط_١$، $ط_٢$ ثم نتوصل إلى الصف الممثل لدالة الهدف الأصلية (هــ) من خلال إجراء اختبار المثالية:

د(هــ) – أهــ كما يلى:

متغيرات أساسية		س	ص	$م_١$	$م_٢$	الثوابت
ص فى دالة الهدف	= ٨ $\overset{\times}{\leftarrow}$	٠	١	$\frac{-٥}{٢٤}$	$\frac{١}{٨}$	٥
س فى دالة الهدف	= ٦ $\overset{\times}{\leftarrow}$	١	٠	$\frac{١}{١٢}$	$\frac{-١}{٤}$	٣
أهــ		٨×٠ + ٦×١	٨×١ + ٦×٠	٨× $\frac{-٥}{٢٤}$ + ٦× $\frac{-١}{١٢}$	٨× $\frac{١}{٨}$ + ٦× $\frac{-١}{٤}$	٨×٥ + ٦×٣
د(هــ)		٦	٨	٠	٠	٠
أهــ		٦	٨	$\frac{-٧}{٦}$	$\frac{-١}{٢}$	٥٨
د(هــ) – أ هــ		٠	٠	$\frac{٧}{٦}$	$\frac{١}{٢}$	-٥٨

مثال (٣): أوجد النهاية الصغرى للدالة : د (هـ) = ٤س + ٨ص + ٣ع

بالقيود التالية: س + ص ≥ ٢

٢ص + ع ≥ ٥

س، ص، ع ≥ صفر

الحــــل

١- نحول المتباينات إلى معادلات بعد إضافة المتغيرات الراكدة والمتغيرات الوهمية:

س + ص – $م_١$ + $ط_١$ = ٢

٢ص + ع – $م_١$ + $ط_٢$ = ٥

٢- نكون دالة هدف جديدة (و) = $ط_١$ + $ط_٢$

$ط_١$ = ٢ – س – ص + $م_١$

$ط_٢$ = ٥ – ٢ص – ع + $م_٢$

و = ٧ – س – ٣ص – ع + $م_١$ + $م_٢$

٣- نضع المتباينات ودالة الهدف الأصلية (هـ) ودالة الهدف الجديدة (و) فى شكل جدول مبدئى للحل:

جدول الحل المبدئى (الأول)

متغيرات أساسية	س	ص	ع	م١	م٢	ط١	ط٢	الثوابت	النسبة
ط١	١	١	٠	١-	٠	١	٠	٢	٢
ط٢	٠	٢	١	٠	١-	٠	١	٥	٢,٥
هـ	٤	٨	٣	٠	٠	٠	٠	٠	
و	١-	٣-	١-	١	١	٠	٠	٧	

عمود ص هو عمود المفتاح والصف الأول هو صف المفتاح

∴ ص يحل محل ط١، رقم المفتاح = ١ ∴ يظل الصف الأول كما هو:

الصف الأول الجديد	١	١	٠	١-	٠	١	٠	٢

صف (٢) الجديد = صف (١) الجديد × -٢ + صف (٢) القديم

حاصل الضرب	٢-	٢-	٠	٢	٠	٢-	٠	٤-
صف (٢) القديم	٠	٢	١	٠	١-	٠	١	٥
صف (٢) الجديد	٢-	٠	١	٢	١-	٢-	١	١

صف (٣) الجديد = صف (١) الجديد × -٨ + صف (٣) القديم

حاصل الضرب	٨-	٨-	٠	٨	٠	٨-	٠	١٦-
صف (٣) القديم	٤	٨	٣	٠	٠	٠	٠	٠
صف (٣) الجديد	٤-	٠	٣	٨	٠	٨-	٠	١٦-

صف (٤) الجديد = صف (١) الجديد × ٣ + صف (٤) القديم

حاصل الضرب	٣	٣	٠	٣-	٠	٣	٠	٦
صف (٤) القديم	١-	٣-	١-	١	١	٠	٠	٧
صف (٤) الجديد	٢	٠	١-	٢-	١	٣	٠	١٣

جدول الحل الثانى

متغيرات أساسية	س	ص	ع	م$_1$	م$_2$	ط$_1$	ط$_2$	الثوابت	النسبة
ص	١	١	٠	-١	٠	١	٠	٢	
ط$_2$	-٢	٠	١	٢	-١	-٢	١	١	٠,٥
هـ	-٤	٠	٣	٨	٠	-٨	٠	-١٦	
و	٢	٠	-١	-٢	١	٣	٠	١٣	

عمود ع هو عمود المفتاح والصف الثانى هو صف المفتاح

∴ ع تحل محل ط$_2$ ورقم المفتاح = ١ يبقى كما هو وتحول باقى عناصر العمود إلى أصفار.

الصف الثانى الجديد كما هو

صف (٢) الجديد	-٢	٠	١	٢	-١	-٢	١	١

صف (١) الجديد كما هو

صف (١) الجديد	١	١	٠	-١	٠	١	٠	٢

صف (٣) الجديد = صف (٢) الجديد × -٣ + صف (٣) القديم

حاصل الضرب	٦	٠	-٣	-٦	٣	٦	-٣	-٣
صف (٣) القديم	-٤	٠	٣	٨	٠	-٨	٠	-١٦
صف (٣) الجديد	٢	٠	٠	٢	٣	-٢	-٣	-١٩

صف (٤) الجديد = صف (٢) الجديد × ١ + صف (٤) القديم

حاصل الضرب	-٢	٠	١	٢	-١	-٢	١	١
صف (٤) القديم	٢	٠	-١	-٢	١	٣	٠	١٣
صف (٤) الجديد	٠	٠	٠	٠	٠	١	١	١٤

جدول الحل الثالث

متغيرات أساسية	س	ص	ع	م١	م٢	ط١	ط٢	الثوابت
ص	١	١	٠	-١	٠	١	٠	٢
ع	-٢	٠	١	٢	-١	-٢	١	١
هـ	٢	٠	٠	٢	٣	-٢	-٣	-١٩
و	٠	٠	٠	٠	٠	٠	١	١٤

وبعد أن تم التخلص من المتغيرات الوهمية نقوم بشطب أعمدة المتغيرات الوهمية وصف دالة الهدف (و) ثم نبدأ المرحلة الثانية من الحل.

صف (٤) الجديد = صف (٢) الجديد × ١ + صف (٤) القديم

حاصل الضرب	-٢	٠	١	٢	-١	١
صف (٣) القديم	٤	٠	-١	٠	٤	-٢٠
صف (٣) الجديد	٢	٠	٠	٢	٣	-١٩

جدول الحل النهائى

متغيرات أساسية	س	ص	ع	م١	م٢	الثوابت
ص	١	١	٠	-١	٠	٢
ع	-٢	٠	١	٢	-١	١
هـ	٢	٠	٠	٢	٣	-١٩

لم تعد هناك قيم سالبة فى دالة الهدف تحت أعمدة المتغيرات غير الأساسية وبالتالى نكون قد وصلنا إلى الحل النهائى حيث تبلغ الدالة نهايتها الصغرى وقدرها ١٩ عند س = ٠، ص = ٢، ع = ١.

اختبار مثالية الحل:

د(هــ)	٤	٨	٣	٠	٠	٠
أ هــ	٢	٨	٣	-٢	-٣	١٩
د(هــ) – أ هــ	٢	٠	٠	٢	٣	-١٩

وهى نفس قيمة صف (هــ) فى جدول الحل النهائى.

ملاحظات هامة:

١- أن قيود مشاكل البرمجة الخطية فى حالة التعظيم تكون عادة فى صورة (≥) وفى حالة التدنية تكون فى صورة (≤) ولكن ما هو الحل إذا وجدنا ما يخالف ذلك.

من السهل تحويل اتجاه أى متباينة إلى الاتجاه العكسى لها بضرب طرفيها × -١

فمثلاً س + ٢ص ≤ ٥ بضرب الطرفين × -١

تصبح –س -٢ص ≥ -٥ والعكس صحيح.

٢- قد تأتى بعض قيود المشكلة فى صورة معادلة وليس متباينة.

فى هذه الحالة نستبدل المعادلة بمتباينتين إحداهما (≤) والأخرى (≥).

فمثلاً ٣ س + ٢ص = ١٠ يحل محلها المتباينتين

٣س + ٢ص ≤ ١٠

٣س + ٢ص ≥ ١٠

مثال (٤): أوجد النهاية الصغرى للدالة :د(هــ) = ٢س + ص

بالقيود التالية: ٣س + ص = ٣

٤س + ٣ص ≤ ٦

س + ٢ص ≥ ٣

س ≤ ٠ ص ≤ ٠

الحـــل

المعادلة ٣س + ص = ٣ يحل محلها المتباينتين:

٣س + ص ≥ ٣

٣س + ص ≤ ٣

وحيث أن المطلوب نهاية صغرى فإننا نعكس اتجاه المتباينة الثانية بضرب طرفيها × -١

-٣س – ص ≥ -٣

المتباينة: ٤س + ٣ص ≥ ٦ كما هى

المتباينة: س + ٢ص ≤ ٣ تحول إلى –س – ٢ص ≥ -٣

نحول المتباينات إلى معادلات مع إضافة المتغيرات الراكدة والمتغيرات الوهمية:

٣س + ص – م$_{1}$ + ط$_{1}$ = ٣

-٣س – ص – م$_{2}$ + ط$_{2}$ = -٣

٤س + ٣ص – م$_{3}$ + ط$_{3}$ = ٦

-س – ٢ص – م$_{4}$ + ط$_{4}$ = -٣

نكون دالة الهدف الجديدة (و) = ط$_{1}$ + ط$_{2}$ + ط$_{3}$ + ط$_{4}$

ط$_{1}$ = ٣ – س – ص + م$_{1}$

ط$_{2}$ = ٣ + ٣س + ص + م$_{2}$

ط$_{3}$ = ٦ – ٤س – ٣ص + م$_{3}$

ط$_{4}$ = -٣ + س + ٢ص + م$_{4}$

و = ٣ – ٣س – ص + م$_{1}$ + م$_{2}$ + م$_{3}$ + م$_{4}$

نكون جدول الحل المبدئى:

جدول الحل المبدئى

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	م٣	م٤	ط١	ط٢	ط٣	ط٤	الثوابت	النسبة
ط١	٣	١	-١	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٣	١
ط٢	-٣	-١	٠	-١	٠	٠	٠	١	٠	٠	-٣	١
ط٣	٤	٣	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١	٠	٦	١,٥
ط٤	-١	-٢	٠	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١	-٣	٣
هـ	٢	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	
و	-٣	-١	١	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٣	

أقل نسبة موجبة = ١ يتساوى فيها صف (١)، صف (٢)

نبدأ بصف (١) ويخرج ط١ ليحل محله س

رقم المفتاح = ٣ يحول إلى واحد صحيح وباقى عناصر العمود إلى أصفار.

بقسمة الصف الأول ÷ ٣

صف (١) الجديد	١	$\frac{١}{٣}$	$\frac{-١}{٣}$	٠	٠	٠	$\frac{١}{٣}$	٠	٠	٠	١

صف (٢) الجديد = صف (١) الجديد × ٣ + صف (٢) القديم

حاصل الضرب	٣	١	-١	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٣
صف (٢) القديم	-٣	-١	٠	-١	٠	٠	٠	١	٠	٠	-٣
صف (٢) الجديد	٠	٠	-١	-١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠

صف (٣) الجديد = صف (١) الجديد × -٤ + صف (٣) القديم

حاصل الضرب	-٤	$\frac{-٤}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	٠	٠	٠	$\frac{-٤}{٣}$	٠	٠	٠	-٤
صف (٣) القديم	٤	٣	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١	٠	٦
صف (٣) الجديد	٠	$\frac{٥}{٣}$	$\frac{٤}{٣}$	٠	-١	٠	$\frac{-٤}{٣}$	٠	١	٠	٢

صف (٤) الجديد = صف (١) الجديد × ١ + صف (٤) القديم

حاصل الضرب	١	١/٣	-١/٣	٠	٠	٠	١/٣	٠	٠	٠	١
صف (٤) القديم	-١	-٢	٠	٠	٠	-١	٠	٠	٠	١	-٣
صف (٤) الجديد	٠	-٥/٣	-١/٣	٠	٠	-١	١/٣	٠	٠	١	-٢

صف (٥) الجديد = صف (١) الجديد × -٢ + صف (٥) القديم

حاصل الضرب	-٢	-٢/٣	٢/٣	٠	-١	٠	-٢/٣	٠	٠	٠	-٢
صف (٥) القديم	٢	١	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠
صف (٥) الجديد	٠	١/٣	٢/٣	٠	-١	٠	-٢/٣	٠	٠	٠	-٢

صف (٦) الجديد = صف (١) الجديد × ٣ + صف (٦) القديم

حاصل الضرب	٣	١	-١	٠	٠	٠	١	٠	٠	٠	٣
صف (٦) القديم	-٣	-١	١	١	١	١	٠	٠	٠	٠	٣
صف (٦) الجديد	٠	٠	٠	١	١	١	١	٠	٠	٠	٦

جدول الحل الثانى

متغيرات أساسية	س	ص	م$_1$	م$_2$	م$_3$	م$_4$	ط$_1$	ط$_2$	ط$_3$	ط$_4$	الثوابت
ط$_1$	١	١/٣	-١/٣	٠	٠	٠	١/٣	٠	٠	٠	١
ط$_2$	٠	٠	-١	-١	٠	٠	١	١	٠	٠	٠
ط$_3$	٠	٥/٣	٤/٣	٠	-١	٠	-٤/٣	٠	١	٠	٢
ط$_4$	٠	-٥/٣	-١/٣	٠	٠	-١	١/٣	٠	٠	١	-٢
هـ	٠	١/٣	٢/٣	٠	٠	٠	-٢/٣	٠	٠	٠	-٢
و	٠	٠	٠	١	١	١	١	٠	٠	٠	٦

لم تعد هناك قيم سالبة فى دالة الهدف الجديدة (و)

∴ تنتهى المرحلة الأولى من الحل على الرغم من عدم التخلص من باقى المتغيرات الوهمية. ونقوم بشطب أعمدة المتغيرات الوهمية وصف دالة الهدف (و) نحصل على الجدول المبدئى للمرحلة الثانية للحل كما يتضح مما يلى:

جدول الحل النهائى

متغيرات أساسية	س	ص	م$_{١}$	م$_{٢}$	م$_{٣}$	م$_{٤}$	الثوابت
س	١	١/٣	-١/٣	٠	٠	٠	١
ط$_{٢}$	٠	٠	-١	-١	٠	٠	٠
ط$_{٣}$	٠	٥/٣	٤/٣	٠	-١	٠	٢
ط$_{٤}$	٠	-٥/٣	-١/٣	٠	٠	-١	-٢
هـ	٠	١/٣	٢/٣	٠	٠	٠	-٢

ومن الملاحظ أيضاً أنه لم تعد هناك قيم سالبة فى دالة الهدف الأصلية (هـ) تحت المتغيرات غير الأساسية، وبالتالى يكون الحل الذى توصلنا إليه يمثل الحل النهائى.

وتتحقق النهاية الصغرى للدالة وقدرها ٢ عند س = ١ ، ص = صفر.

ملاحظات هامة:

١- يلاحظ أنه لم يتم التخلص من كافة المتغيرات الوهمية حيث مازالت ط$_{٢}$، ط$_{٣}$، ط$_{٤}$ كمتغيرات أساسية وتبلغ قيمة ط$_{٢}$ = ٠، ط$_{٣}$ = ٢، ط$_{٤}$ = -٢ ويمكن أن نفسر ذلك بملاحظة أن: ط$_{١}$، ط$_{٢}$ تمثل القيد الأول من قيود

المشكلة (المعادلة) وحيث أن س حلت محل ط$_١$ كان لابد أن تكون ط$_٢$=صفر، كما هو موجود بالفعل.

وبالتعويض فى القيد الأول ٣ س + ص = ٣ بقيمة س = ١، ص = صفر

٣(١) + ٠ = ٣ ولا توجد أى موارد غير مستغلة.

كما أن ط$_٣$ تمثل القيد الثانى ٤س + ٣ص ≤ ٦

بالتعويض عن س = ١، ص = ٠

٤(١) + ٣(٠) = ٤ وهى لا تحقق القيد

وتوجد موارد غير مستغلة قدرها ٢ وهى قيمة ط$_٣$ التى تظهر فى الحل النهائى.

وكذلك ط$_٤$ تمثل القيد الثالث س + ٢ص ≥ ٣

بالتعويض عن س = ١، ص = ٠

١ + ٢(٠) = ١

وعلى الرغم من أنها تحقق القيد إلا أن هناك موارد غير مستغلة قدرها ٢ وهى قيمة ط$_٤$ مع ملاحظة أن قيمتها فى الحل النهائى = -٢ وليس ٢ ويرجع ذلك إلى أننا غيرنا اتجاه القيد الثالث من ≥ إلى ≤ بالضرب × -١.

أى أن – ط$_٤$ = -٢ ∴ ط$_٤$ = ٢

التاريخ: ٣-١-٢٠١٦	امتحان نهاية الفصل الدارسى الأول ٢٠١٥/٢٠١٦	جامعة القاهرة
الوقت: ١٢ – ٢ ظهرا	مادة الرياضة للتجاريين (١)	كلية التجارة
عدد الصفحات: ٦	السنة الأولى – مجموعة ج	

(١) نهـا (س ← ٥) $\frac{س^{٣} + ١٢٥}{س^{٢} - ٢٥}$ تساوى =

(A) - ٧،٥ **(B)** ٧،٥ **(C)** -١٥ **(D)** ١٥ **(E)** لاشئ مما سبق

(٢) إذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة (ع) من سلعة معينة وسعر هذه السلعة (س) يمكن تمثيلها بالدالة
ع = ٣س – ١ فان مرونة العرض إذا كان سعر السلعة ٢٠جنيه تبلغ :

(A) ٨،٨٥ **(B)** ١،٠١٧ **(C)** ٢٠،٣٣ **(D)** ١٠ **(E)** لاشئ مما سبق

(٣) إذا كان لديك المصفوفتين:

$[أ] = \begin{bmatrix} -٢ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix}$ $[ب] = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ صفر & ٥ \end{bmatrix}$

فان [٢أ – ٥ب] تساوى :

(A) $\begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ صفر & ٢٠ \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} -٨ & -١ \\ ١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -١٢ & ٩ \\ ١٥ & ٣٠ \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} -١٢ & ٩ \\ ١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

(E) لاشئ مما سبق

(٤) باستخدام المحددات فان قيمة س ، ص التى تحقق المعادلتين:

٢س + ٣ ص = ١٥

٤س – ص = ٢

(A) س = ١،٥، ص = ٤ **(B)** س = ١،٥، ص = ٢ **(C)** س = ٢،٥، ص = ٤

(D) س = ٤ ، ص = ١،٥ **(E)** لاشئ مما سبق

(٥) إذا كانت مرونة الطلب على سلعة معينة = $\frac{-١}{٥}$ فإذا علمت أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة

تساوى ١٠٠ وحدة عند سعر قدره ١٠ جنيهات للوحدة أوجد دالة الطلب على هذه السلعة.

(A) ط = -٢س+ ١٢٠ **(B)** ط = ٢ س+ ١٢٠ **(C)** ط = -٢س+ ١٠٠

(D) ط = ٢س + ١٠٠ **(E)** لاشئ مما سبق

(٦) باستخدام طريقة الفروق المتساوية فان المعادلة التى تمثل العلاقة بين س ، ص من خلال القيم التالية:

س	٢	٤	٩	١٢	١٥	٢٠	٢٣	٢٧	٣٠
ص	٣	١٥	٤٥	٦٣	٨١	١١١	١٢٩	١٥٣	١٧١

هى :

(A) ص= ٦س+ ٩ **(B)** ص= ٦س– ١٥ **(C)** ص= ٦س- ٩

(D) ص = ٦س+ ١ **(E)** لاشئ مما سبق

(٧) حاصل ضرب المصفوفتين:

أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} -١ & ٤ \end{bmatrix}$ هو :

(A) $\begin{bmatrix} ٨ \\ -٥ \end{bmatrix}$ **(B)** $\begin{bmatrix} -٢ & ٨ \\ -٥ & ٢٠ \end{bmatrix}$ **(C)** $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ **(D)** $\begin{bmatrix} -٥ & ٨ \end{bmatrix}$ **(E)** لاشىء مما سبق

T اذا كانت ر = ٤س + ٣ص تمثل دالة الربح لمشكلة برمجة خطية وأن القيود على هذه الدالة هى :

س + ص 3 ٤٠ ،

س £ ٨ ، ص £ ١٦ ،

س £ ٠ ، ص £ ٠

(٨) فان منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية العظمى للدالة هى :

(A) (٤٠،١٦) ، (٠،٣٢) ، (٠،١٦) (B) (٢٤،١٦) ، (٨،٣٢) ، (٨،١٦)

(C) (٠، ٤٠) ، (٨،٠) ، (٨،١٦) (D) (٤٠،٠) ،(٨،٠) ، (٠،٠) (E) لاشئ مماسبق

(٩) نقطة الحل التى تحقق اكبر ربح ممكن هى :

(A) (٨ ، ٣٢) (B) (٨ ، ١٦) (C) (٢٤ ، ١٦) (D) (٠ ، ١٦) (E) لاشئ مماسبق

(١٠) النهاية العظمى للدالة تبلغ :

(A) ١٤٤ (B) ٨٠ (C) ١٢٨ (D) ١٣٨ (E) لاشئ مماسبق

T اذا كانت ت =٤س + ٣ص تمثل دالة التكلفة لمشكلة برمجة خطية وأن القيود على هذه الدالة هى :

٦س + ٤ص ≤ ٢٤

٥س + ٦ص ≤ ٣٠

٢س + ٣ص ≥ ٢٤ س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

(١١) فان منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية الصغرى للدالة هى :

(A) (١٢، ٨) ، (٠ ، ٨) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ،٥)

(B) (١٢، ٠) ، (١٢ ، ٨) ، (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠) ، (٣،٥ ، ١،٥)

(C) (١٢، ٠) ، (٠ ، ٨) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (١،٥ ، ٣،٥)

(D) (٠،٠) ، (٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٤ ، ٠)

(E)لاشئ مماسبق

(١٢) نقطة الحل التى تحقق اقل تكلفة ممكنة هى :

(A) (١٢ ، ٠) (B) (٦ ، ٠) (C) (٠ ، ٦) (D) (٣،٥ ، ١،٥) (E) لاشئ مما سبق

(١٣) النهاية الصغرى للدالة تبلغ :

(A)١٨ (B) ٢٤ (C) ١٦،٥ (D)٤٠ (E) لاشئ مما سبق

(١٤) $\underset{س \,ß\, ١}{\text{نـــها}} \dfrac{س^{٢} + ٥س + ٤}{س^{٢} - ٢٥}$ تساوى :

(A)٣ (B) - ١،٥ (C) ٢ (D) -٢ (E) لاشئ مما سبق

(١٥) تتحدد العلاقة بين الإيراد الكلى (ص) وحجم الإنتاج الكلى (س) فى أحد المصانع وفقاً للدالة التالية ص = ٠،٠٠٤ (٥س^{٢} – ١٠٠)^{٢} فان معدل التغير فى دالة الإيراد الكلى بالنسبة لحجم الإنتاج عند حجم إنتاج ١٠ وحدات يبلغ :

(A) ٣٢ (B)٣،٢ (C) ١٦ (D) ٣٢٠ (E) لاشئ مما سبق

(١٦) باستخدام المصفوفات فان قيمة س ، ص التى تحقق المعادلتين :

٢س + ٢ص = ٦

٣س – ص = ٥ هى :

(A) س = ٢، ص = ١ (B) س = ١، ص =٢ (C) س = ١،٥، ص = ١

(D) س = ١، ص = ٤ (E) لاشئ مما سبق

(١٧) حاصل ضرب المصفوفتين:

$[أ] = \begin{bmatrix} ٤ & ٢ \\ ٥ & -٣ \end{bmatrix}$ ، $[ب] = \begin{bmatrix} -١ & ٢ \\ ٥ & ٦ \end{bmatrix}$ هو :

(A)) $\begin{bmatrix} ١٠٢ & -٨٤ \\ ٦٦ & ١٠٨ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -٤ & ١٢ \\ -٢٧ & ١٢ \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} ١٨ & ٢٨ \\ ٢٨ & ٢٤ \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -٤ & ٤ \\ ٢٥ & -١٨ \end{bmatrix}$ (E) لاشىء مما سبق

(١٨) *باستخدام طريقة الفروق فان المعادلة التى تمثل العلاقة بين س، ص من* خلال البيانات التالية هى:

س	٢	٣	٦	٧	٩	١٢	١٤	١٥	٢٠
ص	١١	١٧	٣٥	٤١	٥٣	٧١	٨٣	٨٩	١١٩

(A) ص= ٦س + ٩ (B) ص= ٦س – ٢٣ (C) ص= ٦س - ١

(D) ص = ٦س + ١ (E) لاشئ مما سبق

Tاذا علمت أن عدد السلع المباعة أسبوعياً واحتمالات تحقق الطلب عليها كانت كما يلى:

عدد السلع المباعة	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	المجموع
احتمالات البيع	٠،٠٥	٠،٤٠	٠،١٥	٠،٤٠	١

فإذا كانت تكاليف شراء السلعة ١٠٠ جنيه وثمن بيعها ١٥٠ جنيه وباستخدام مصفوفة الارباح والخسائر التاليه:

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠
أ٢	٩٠٠	١٠٥٠	١٠٥٠	١٠٥٠
أ٣	٨٠٠	٩٥٠	١١٠٠	١١٠٠
أ٤	٧٠٠	٨٥٠	١٠٠٠	١١٥٠

(١٩) فان مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة تصبح :

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠
أ٢	٣٦٠	٤٢٠	٤٢٠	٤٢٠
أ٣	١٢٠	١٣٧،٥	١٦٥	١٦٥
أ٤	٢٨٠	٣٤٠	٤٠٠	٤٦٠

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٠٠	٣٥	٤٥٠
أ٢	٤٥	٤٢٠	٣٨٠	٤٢٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	٤٠٠
أ٤	٣٥٠	٣٤٠	١٥٥	٨٦٠

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٠٠	١٥٠	٤٠٠
أ٢	٤٥	٤٢٠	١٥٧،٥	٤٢٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	٤٤٠
أ٤	٣٥	٣٤٠	١٥٠	٤٦٠

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٥	٤٠	٣٥
أ٢	٤٥	٤٢٠	٣٨٠	٣٤٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	١٥٠
أ٤	٣٥	٣٤٠	١٥٠	٤٦٠

(E) لاشئ مما سبق

(٢٠) الخطة الواجب اتباعها لتحقيق اكبر منفعة متوقعة هى :

(A) الاولى (B) الثانية (C) الثالثة (D) الرابعة (E) لاشئ مما سبق

(٢١) اكبر منفعة متوقعة تبلغ :

(A) ١٠٤٢،٥ جنيه (B) ٩٨٥ جنيه (C) ١٠٠٠ جنيه (D) ١٠٢٥ جنيه (E) لاشئ مما سبق

T الجدول التالى يمثل مشكلة برمجة خطية :

جدول الحل المبدئي

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	م٣	الثوابت
م١	٥	٢	١	٠	٠	٣٠
م٢	٢	٤	٠	١	٠	٢٨
م٣	٤	٤	٠	٠	١	٣٢
-هـ	١٠	٣	٠	٠	٠	

(٢٢) حدد نوع المشكلة :

(A) تعظيم (B) تدنية (C) تدنية ثم تعظيم (D) تعظيم ثم تدنية (E) لاشئ مما سبق

(٢٣) عمود الحل (المفتاح) هو :

(A) عمود م١ (B)عمود ص (C)عمود س (D) عمود م٢ (E) لاشئ مما سبق

(٢٤)صف الحل (المفتاح) هو:

(A) صف ١ (B)صف ٢ (C)صف ٣ (D)صف ٤ (E) لاشئ مما سبق

(٢٥) مفتاح الحل هو:

(A)١٠ (B)٢ (C) ٤ (D) ٥ (E) لاشئ مما سبق

(٢٦) صف دالة الهدف الجديد :

(A)	٠	١-	٢-	٠	٠	٦٠-
(B)	٠	١٧-	٠	٥-	٠	١٤٠-
(C)	٣،٥	٠	١،٥-	٠	٠	٤٥-
(D)	٨،٥	٠	٠	٠،٧٥-	٠	٢١-
(E)	لاشئ مما سبق					

T الجدول التالى يمثل مشكلة برمجة خطية :

متغيرات أساسية	س	ص	ع	م١	م٢	ط١	ط٢	الثوابت
ط١	١	١	٠	١-	٠	١	٠	٢
ط٢	٠	٢	١	٠	١-	٠	١	٥
-هـ	٤	٨	٣	٠	٠	٠	٠	٠
و	١-	٣-	١-	١	١	٠	٠	٧

(٢٧)حدد نوع المشكلة

(A)تعظيم (B)تدنية (C)تدنية ثم تعظيم (D) تعظيم ثم تدنية (E) لاشئ مما سبق

(٢٨)عمود الحل (المفتاح) هو:

(A) عمود س (B)عمود ص (C)عمود م١ (D) عمود ط١ (E) لاشئ مما سبق

(٢٩) صف الحل (المفتاح) هو:

(A) صف ٤ (B)صف ٣ (C) صف ٢ (D)صف ١ (E) لاشئ مما سبق

(٣٠) مفتاح الحل هو:

(A)٨ (B)٣ (C) ٤ (D) ١ (E) لاشئ مما سبق

(٣١) الصف الثانى الجديد :

(A)	٠	٢	١	٠	١-	٠	١	٥
(B)	٠	١	٠،٥	٠	١-	٠	٠،٥	٢،٥
(C)	٢-	٠	١	٢	١-	٢-	١	١
(D)	١	٢	٠	٠،٧٥-	٠	١-	٠	٠
(E)	لاشئ مما سبق							

Tاذا علمت أن عدد السلع المباعة أسبوعياً واحتمالات تحقق الطلب عليها كانت كما يلى:

عدد السلع المباعة	٠	١	٢	٣	المجموع
احتمالات البيع	٠،٠٢	٠،١٦	٠،٤٣	٠،٣٩	١

فإذا كانت تكاليف شراء السلعة ٢٥٠ جنيه وثمن بيعها ٤٠٠ جنيه وقد أمكن إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر (غير مكتملة) كمايلى

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر		صفر
أ٢	-٢٥٠	١٥٠		١٥٠
أ٣		-١٠٠	٣٠٠	
أ٤	-٧٥٠			٤٥٠

(٣٢) فان مصفوفة الارباح والخسائر النهائية تصبح :

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٥٥٠	٦٥٠	٤٥٠	١٥٠
أ٣	-٥٠٠	-٣٤٠	٣٠٠	٣٠٠
أ٤	-١٥٠	-٣٥٠	٥٠	٢٥٠

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٢٥٠	١٥٠	٤٥٠	١٥٠
أ٣	-٦٠٠	-١٠٠	٥٠٠	٣٠٠
أ٤	-٧٥٠	-١٥٠	٥٠	٤٥٠

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٢٥٠	١٥٠	١٥٠	١٥٠
أ٣	-٥٠٠	-١٠٠	٣٠٠	٣٠٠
أ٤	-٧٥٠	-٣٥٠	٥٠	٤٥٠

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٢٥٠	-٥٠٠	-٥٠٠	-٧٥٠
أ٣	-٧٠٠	٣٠٠	٣٠٠	٥٠
أ٤	-٥٥٠	-٣٥٠	٥٠	٤٥٠

(E) لاشئ مما سبق

(٣٣) مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة:

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٥٢	٢٤	٦٤,٥	٣٨,٥
أ٣	-١٣	-١٦	١٢٠	١١٧
أ٤	-٢٥	-٥٦	٢١,٥	١٧٥,٥

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٥	٢٤	٦٤,٥	٥٨,٥
أ٣	-١٠	-١٦	١٢٩	١١٧
أ٤	-١٥	-٥٦	٢١,٥	١٧٥,٥

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٥	٢٤	٤٤,٥	٥٨,٥
أ٣	-١٠	-١٦	١٢٥	١١٥
أ٤	-١٥	-٥٦	٢١,٥	١٧٥,٥

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	-٥	٢٥	٦٤	٥٨,٥
أ٣	-٤٤	-١٦	١٢١	١١٢
أ٤	-١٠	-٥٦	٢١,٥	١٣٥,٥

(E) لاشئ مما سبق

(٣٤)الخطة الواجب اتباعها لتحقيق اكبر منفعة متوقعة هى :

(A) الاولى (B) الثانية (C) الثالثة (D) الرابعة (E) لاشئ مما سبق

(٣٥)اكبر منفعة متوقعة تبلغ :

(A) ٢٢٠ (B) ١٢٦ جنيه (C) ١٤٢ جنيه (D) صفر (E) لاشئ مما سبق

(٣٦) تتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية (ص) وحجم الإنتاج الكلي (س) في أحد المصانع وفقاً للدالة ص= (س+ ٣)^{٣} فإن معدل التغير في دالة التكاليف الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج عند إنتاج ١٠ وحدات هو:

(A)١٦٩ (B)٥٠٧ (C)٣٣٨ (D) ٦٩ (E) لا شيء مما سبق

T اذا علمت ان نسبة الانتاج المطابق للمواصفات فى احد المصانع ٠،٨٠ فاذا سحبنا عينة من ٥ وحدات فان:

(٣٧) احتمال ان يكون بالعينة وحدتين فقط مطابقة للمواصفات

(A) ٠،٦٤ (B)٠،٢٠٤٨ (C)٠،٠٠٦٤ (D)٠،٠٥١٢ (E) لا شيء مما سبق

(٣٨) احتمال ان يكون بالعينة وحدتين على الاكثر مطابقة للمواصفات

(A)٠،٠٠٦٤ (B) ٠،٠٠٦٧٢ (C) ٠،٠٥٧٩٢ (D) ٠،٩٤٢٠٨ (E) لا شيء مما سبق

(٣٩) احتمال ان يكون بالعينة اكثر من وحدتين مطابقة للمواصفات

(A) ٠،٢٠٤٨ (B)٠،٩٤٢٠٨ (C) ٠،٠٠٦٧٢ (D) ٠،٠٥٧٩٢ (E) لا شيء مما سبق

(٤٠) احتمال ان يكون بالعينة اقل من وحدتين مطابقة للمواصفات

(A) ٠،٠٠٦٧٢ (B) ٠،٩٤٢٠٨ (C) ٠،٠٠٠٣٢ (D) ٠،٠٥٧٩٢ (E) لا شيء مما سبق

T الدالة : ت = ٣س + ٥ ص تمثل دالة التكلفة لمشكلة برمجة خطية و القيود على هذه الدالة هى :

س+ ص ³ ١٠٠ ،

س £ ٢٠ ، ص £ ٤٠

س £ صفر ، ص £ صفر

(٤١) فان منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية الصغرى للدالة هى :

(A) (٢٠،٤٠) ،(١٠٠،٠) ،(١٠٠،٠) (B) (٦٠،٤٠) ،(٢٠،٨٠)،(٢٠،٤٠)
(C) (٢٠، ٠) ،(٢٠،٨٠) ، (٠،٤٠) (D) (٢٠،٤٠) ،(٠،٤٠) ، (٠،١٠٠) (E) لاشئ مماسبق

(٤٢) نقطة الحل التى تحقق اقل تكلفة ممكنة هى :

(A) (٠ ، ٤٠) (B) (٨٠ ، ٠) (C) (٢٠ ، ٤٠) (D) (٠ ، ١٠٠) (E) لاشئ مما سبق

(٤٣) النهاية الصغرى للدالة تبلغ :

(A) ٢٦٠ (B) ٣٨٠ (C) ٣٦٠ (D) ٢٠٠ (E) لاشئ مما سبق

T صندوق به ١٠ كرات حمراء و٥ بيضاء سحبنا منه كرتين مرة واحدة (بدون رد) فان :

(٤٤) احتمال ان تكون الكرتان من اللون الاحمر

(A) ٠،٤٤٤ (B) ٠،٤٢٨ (C) ٠،٦٦٧ (D) ٠،٤٧٦٠ (E) لاشئ مما سبق

(٤٥) احتمال ان تكون احداها حمراء والاخرى بيضاء

(A) ٠،٤٧٦ (B) ٠،٢٢٢ (C) ٠،٤٤٤ (D) ٠،٦٦٧ (E) لاشئ مما سبق

جامعة القاهرة	امتحان نهاية الفصل الدارسى الأول ٢٠١٥/٢٠١٦	التاريخ: ٣-١-٢٠١٦
كلية التجارة	مادة الرياضة للتجاريين (١)	الوقت: ١٢ – ٢ظهرا
		عدد الصفحات: ٦

T اذا علمت ان الدالة : ت = ٣س + ٥ ص تمثل دالة التكلفة لمشكلة برمجة خطية و القيود على هذه الدالة

هى : س+ ص 3 ١٠٠

س £ ٢٠ ، ص £ ٤٠

س £ صفر ، ص £ صفر فان :

(١) منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية الصغرى للدالة هى :

(A) (٢٠،٤٠) ،(١٠٠،٠)،(٠،١٠٠) (B) (٤٠،٦٠) ،(٨٠،٢٠)،(٢٠، ٤٠)

(C) (٢٠، ٠) ،(٢٠،٨٠)،(٤٠،٠) (D) (٤٠،٢٠) ،(٤٠،٠)،(١٠٠،٠)

(E) لاشئ مماسبق

(٢) نقطة الحل التى تحقق اقل تكلفة ممكنة هى :

(A) (٠ ، ٤٠) (B) (٨٠ ، ٠) (C) (٢٠ ، ٤٠) (D) (٠ ، ١٠٠)

(E) لاشئ مما سبق

(٣) باستخدام المحددات فان قيمة س ، ص التى تحقق المعادلتين:

٢س + ٣ ص = ١٥

٤س – ص = ٢ هى :

(A) س = ١،٥، ص = ٤ (B) س = ١،٥، ص = ٢ (C) س = ٢،٥، ص = ٤

(D) س = ٤ ، ص = ١،٥ (E) لاشئ مما سبق

T اذا علمت ان نسبة الانتاج المطابق للمواصفات فى احد المصانع ٠،٨٠ فاذا سحبنا عينة من ٥ وحدات فان :

(٤) احتمال ان يكون بالعينة وحدتين فقط مطابقة للمواصفات هو :

(A) ٠،٦٤ (B)٠،٢٠٤٨ (C)٠،٠٠٦٤ (D)٠،٠٥١٢ (E) لا شيء مما سبق

(٥) احتمال ان يكون بالعينة وحدتين على الاكثر مطابقة للمواصفات هو :

(A)٠،٠٠٠٦٤ (B) ٠،٠٠٦٧٢ (C) ٠،٠٥٧٩٢ (D) ٠،٩٤٢٠٨ (E) لا شيء مما سبق

(٦) احتمال ان يكون بالعينة اكثر من وحدتين مطابقة للمواصفات هو :

(A) ٠،٢٠٤٨ (B)٠،٩٤٢٠٨ (C) ٠،٠٠٦٧٢ (D) ٠،٠٥٧٩٢ (E) لا شيء مما سبق

(٧) احتمال ان يكون بالعينة اقل من وحدتين مطابقة للمواصفات هو :

(A) ٠،٠٠٦٧٢ (B) ٠،٩٤٢٠٨ (C) ٠،٠٠٠٣٢ (D) ٠،٠٥٧٩٢ (E) لا شيء مما سبق

(٨) باستخدام طريقة الفروق فان المعادلة التى تمثل العلاقة بين س ، ص من خلال القيم التالية:

س	٢	٤	٩	١٢	١٥	٢٠	٢٣	٢٧	٣٠
ص	٣	١٥	٤٥	٦٣	٨١	١١١	١٢٩	١٥٣	١٧١

(A) ص= ٦س+ ٩ (B) ص= ٦س – ١٥ (C) ص= ٦س - ٩

(D) ص = ٦س+ ١ (E)لاشئ مما سبق

(٩) تتحدد العلاقة بين الإيراد الكلى (ص) وحجم الإنتاج الكلى (س) فى أحد المصانع وفقاً للدالة التالية :

ص = ٠،٠٠٤ (٥س^{٢} – ١٠٠)^{٢} فان معدل التغير فى دالة الإيراد الكلى بالنسبة لحجم الإنتاج عند حجم إنتاج ١٠ وحدات يبلغ :

(A) ٣٢ (B)٣،٢ (C) ١٦ (D) ٣٢٠ (E) لاشئ مما سبق

(١٠) إذا كان لديك المصفوفتين:

$$[أ] = \begin{bmatrix} ٢- & ١ \\ ٣ & ٤ \end{bmatrix} \quad ، \quad [ب] = \begin{bmatrix} ١- & ٢ \\ صفر & ٥ \end{bmatrix}$$

فان [٢أ – ٥ب] تساوى :

(A) $\begin{bmatrix} -١٠ & ٥ \\ صفر & ٢٠ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -٨ & -١ \\ ١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} -١٢ & ٩ \\ ١٥ & ٣٠ \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -١٢ & ٩ \\ ١٥ & ١٠ \end{bmatrix}$ (E) لاشئ مما سبق

T الجدول التالى يمثل مشكلة برمجة خطية :

متغيرات أساسية	س	ص	ع	$م_١$	$م_٢$	$ط_١$	$ط_٢$	الثوابت
$ط_١$	١	١	٠	-١	٠	١	٠	٢
$ط_٢$	٠	٢	١	٠	-١	٠	١	٥
-هـ	٤	٨	٣	٠	٠	٠	٠	٠
و	-١	-٣	-١	١	١	٠	٠	٧

(١١)حدد نوع المشكلة

(A)تعظيم **(B) تدنية** **(C) تدنية ثم تعظيم** **(D) تعظيم ثم تدنية** **(E) لاشئ مما سبق**

(١٢)عمود الحل (المفتاح) هو :

(A) عمود س (B)عمود ص (C)عمود $م_١$ (D) عمود $ط_١$ (E) لاشئ مما سبق

(١٣) صف الحل (المفتاح) هو :

(A) صف ٤ (B)صف ٣ (C) صف ٢ (D) صف ١ (E) لاشئ مما سبق

(١٤) مفتاح الحل هو :

(A) ٨ (B)٣ (C) ٤ (D) ١ (E) لاشئ مما سبق

(١٥) الصف الثانى الجديد :

(A)	٠	٢	١	٠	-١	٠	١	٥
(B)	٠	١	٠،٥	٠	-١	٠	٠،٥	٢،٥
(C)	-٢	٠	١	٢	-١	-٢	١	١
(D)	١	٢	٠	-٠،٧٥	٠	-١	٠	٠

(E) لاشئ مما سبق

(١٦) إذا كانت العلاقة بين الكمية المعروضة (ع) من سلعة معينة وسعر هذه السلعة (س) يمكن تمثيلها بالدالة : ع = ٣س – ١ فان مرونة العرض إذا كان سعر السلعة ٢٠جنيه تبلغ :

(A) ٨،٨٥ (B) ١،٠١٧ (C) ٢٠،٣٣ (D) ١٠ (E) لاشئ مما سبق

(١٧) إذا كانت مرونة الطلب على سلعة معينة = $\frac{-١}{٥}$ فإذا علمت أن الكمية المطلوبة من هذه السلعة تساوى ١٠٠ وحدة عند سعر ١٠ جنيهات للوحدة فان دالة الطلب على هذه السلعة :

(A) ط= -٢س+ ١٢٠ (B) ط = ٢س+ ١٢٠ (C) ط = -٢س+ ١٠٠

(D) ط = ٢س + ١٠٠ (E) لاشئ مما سبق

(١٨) نــــــها $\frac{س^3 + ١٢٥}{س^2 - ٢٥}$ س ← - ٥

(A) - ٧،٥ (B) ٧،٥ (C) -١٥ (D) ١٥ (E) لاشئ مما سبق

(١٩) حاصل ضرب المصفوفتين:

أ = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٥ \end{bmatrix}$ ، ب = [٤ -١] يبلغ :

(A) $\begin{bmatrix} ٨ \\ -٥ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} ٨ & -٢ \\ ٢٠ & -٥ \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} ٨ \\ ٢٠ \end{bmatrix}$ (D) [٨ -٥] (E) لاشىء مما سبق

(٢٠) *باستخدام طريقة الفروق فان المعادلة التى تمثل العلاقة بين س ، ص من خلال البيانات التالية هى:*

س	٢	٣	٦	٧	٩	١٢	١٤	١٥	٢٠
ص	١١	١٧	٣٥	٤١	٥٣	٧١	٨٣	٨٩	١١٩

(A) ص= ٦س + ٩ (B) ص= ٦س – ٢٣ (C) ص= ٦س - ١
(D) ص = ٦س+ ١ (E) لاشئ مما سبق

(٢١) نــــها $\frac{س^2 + ٥س + ٤}{س^2 - ١}$ س ← -١ تساوى :

(A) ٣ (B) - ١،٥ (C) ٢ (D) -٢ (E) لاشئ مما سبق

اذا كانت الدالة : ت =٤س + ٣ص تمثل دالة التكلفة لمشكلة برمجة خطية وأن القيود على هذه الدالة هى :

٦س + ٤ص ≤ ٢٤

٥س + ٦ص ≤ ٣٠

٢س + ٣ص ≥ ٢٤ س ≤ ، ص ≤ ٠ فان :

(٢٢) منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية الصغرى للدالة هى :

(A) (١٢، ٨) ، (٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٠ ،،٥)
(B) (١٢، ٠) ، (١٢ ، ٨) ، (٠ ، ٦) ، (٤ ، ٠)، (٣،٥ ، ١،٥)
(C) (١٢، ٠) ، (٠ ، ٨) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٣،٥ ، ١،٥)
(D) (٠،٠) ، (٨ ، ٠) ، (٠ ، ٦) ، (٦ ، ٠) ، (٤ ، ٠)
(E)لاشئ مماسبق

(٢٣) نقطة الحل التى تحقق اقل تكلفة ممكنة هى :

(A) (١٢ ، ٠) (B) (٦ ، ٠) (C) (٠ ، ٦) (D) (٣،٥ ، ١،٥) (E) لاشئ مما سبق

(٢٤) النهاية الصغرى للدالة تبلغ :

(A)١٨ (B) ٢٤ (C) ٤٨ (D)٤٠ (E) لاشئ مما سبق

(٢٥) حاصل ضرب المصفوفتين:

[أ] = $\begin{bmatrix} ٢ & ٤ \\ -٣ & ٥ \end{bmatrix}$ ، [ب] = $\begin{bmatrix} ٢ & -١ \\ ٦ & ٥ \end{bmatrix}$ هو :

(A) $\begin{bmatrix} -٨٤ & ١٠٢ \\ ١٠٨ & ٦٦ \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} ١٢ & -٤ \\ ١٢ & -٢٧ \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} ٢٨ & ١٨ \\ ٢٤ & ٢٨ \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} ٤ & -٤ \\ -١٨ & ٢٥ \end{bmatrix}$ (E) لاشىء مما سبق

(٢٦) باستخدام المصفوفات فان قيمة س ، ص التى تحقق المعادلتين :

٢س + ٢ص = ٦

٣س – ص = ٥

(A) س = ٢، ص = ١ (B) س = ١، ص =٢ (C) س = ١،٥، ص = ١

(D) س = ١، ص = ٤ (E) لاشئ مما سبق

(٢٧) تتحدد العلاقة بين التكاليف الكلية (ص) وحجم الإنتاج الكلي (س) في أحد المصانع وفقاً للدالة :
ص= (س+ ٣)^{٣} فإن معدل التغير في دالة التكاليف الكلية بالنسبة لحجم الإنتاج عند إنتاج ١٠ وحدات هو:

(A)١٦٩ (B)٥٠٧ (C)٣٣٨ (D) ٦٩ (E) لا شيء مما سبق

T الجدول التالى يمثل مشكلة برمجة خطية :

جدول الحل المبدئي

متغيرات أساسية	س	ص	م١	م٢	م٣	الثوابت
م١	٥	٢	١	٠	٠	٣٠
م٢	٢	٤	٠	١	٠	٢٨
م٣	٤	٤	٠	٠	١	٣٢
-هـ	١٠	٣	٠	٠	٠	

(٢٨) حدد نوع المشكلة

(A) تعظيم (B) تدنية (C) تدنية ثم تعظيم (D) تعظيم ثم تدنية (E) لاشئ مما سبق

(٢٩) عمود الحل (المفتاح) :

(A) عمود م١ (B)عمود ص (C)عمود س (D) عمود م٢ (E) لاشئ مما سبق

(٣٠) صف الحل (المفتاح) :

(A) صف ١ (B) صف ٢ (C) صف ٣ (D) صف ٤ (E) لاشئ مما سبق

(٣١) مفتاح الحل :

(A)١٠ (B)٢ (C) ٤ (D) ٥ (E) لاشئ مما سبق

(٣٢) صف دالة الهدف الجديد :

(A)	٠	-١	-٢	٠	٠	-٦٠
(B)	٠	-١٧	٠	-٥	٠	-١٤٠
(C)	٣،٥	٠	-١،٥	٠	٠	-٤٥
(D)	٨،٥	٠	٠	-٠،٧٥	٠	-٢١
(E)	لاشئ مما سبق					

T اذا علمت أن عدد السلع المباعة أسبوعياً واحتمالات تحقق الطلب عليها كانت كما يلى:

عدد السلع المباعة	٠	١	٢	٣	المجموع
احتمالات البيع	٠،٠٢	٠،١٦	٠،٤٣	٠،٣٩	١

فإذا كانت تكاليف شراء السلعة ٢٥٠ جنيه وثمن بيعها ٤٠٠ جنيه وقد أمكن إعداد مصفوفة الأرباح والخسائر (غير مكتملة) كمايلى :

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر		صفر
أ٢	٢٥٠-	١٥٠		١٥٠
أ٣		١٠٠-	٣٠٠	
أ٤	٧٥٠-			٤٥٠

فان :

(٣٣) مصفوفة الارباح والخسائر النهائية تصبح :

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٥٥٠-	٦٥٠	٤٥٠	١٥٠
أ٣	٥٠٠-	٣٤٠-	٣٠٠	٣٠٠
أ٤	١٥٠-	٣٥٠-	٥٠	٢٥٠

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٢٥٠-	١٥٠	٤٥٠	١٥٠
أ٣	٦٠٠-	١٠٠-	٥٠٠	٣٠٠
أ٤	٧٥٠-	١٥٠-	٥٠	٤٥٠

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٢٥٠-	١٥٠	١٥٠	١٥٠
أ٣	٥٠٠-	١٠٠-	٣٠٠	٣٠٠
أ٤	٧٥٠-	٣٥٠-	٥٠	٤٥٠

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٢٥٠-	٥٠٠-	٥٠٠-	٧٥٠-
أ٣	٧٠٠-	٣٠٠	٣٠٠	٥٠
أ٤	٥٥٠-	٣٥٠-	٥٠	٤٥٠

(E) لاشئ مما سبق

(٣٤) مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة:

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٥٢-	٢٤	٦٤,٥	٣٨,٥
أ٣	١٣-	١٦-	١٢٠	١١٧
أ٤	٢٥-	٥٦-	٢١,٥	١٧٥,٥

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٥-	٢٤	٦٤,٥	٥٨,٥
أ٣	١٠-	١٦-	١٢٩	١١٧
أ٤	١٥-	٥٦-	٢١,٥	١٧٥,٥

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٥-	٢٤	٤٤,٥	٥٨,٥
أ٣	١٠-	١٦-	١٢٥	١١٥
أ٤	١٥-	٥٦-	٢١,٥	١٧٥,٥

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	صفر	صفر	صفر	صفر
أ٢	٥-	٢٥	٦٤	٥٨,٥
أ٣	٤٤-	١٦-	١٢١	١١٢
أ٤	١٠-	٥٦-	٢١,٥	١٣٥,٥

(E) لاشئ مما سبق

(٣٥)الخطة الواجب اتباعها لتحقيق اكبر منفعة متوقعة هى :

(A) الاولى (B) الثانية (C) الثالثة (D) الرابعة (E) لاشئ مما سبق

(٣٦) اكبر منفعة متوقعة تبلغ :

(A) ٢٢٠ (B) ١٢٦ جنيه (C) ١٤٢ جنيه (D) صفر (E) لاشئ مما سبق

T اذا كانت الدالة : ر = ٤س + ٣ص تمثل دالة الربح لمشكلة برمجة خطية وبفرض أن القيود على هذه الدالة هى :

س + ص 3 ٤٠

س £ ٨ ، ص £ ١٦

س £ ٠ ، ص £ ٠ فان :

(٣٧) منطقة الحلول للمتباينات التى تحقق النهاية العظمى للدالة هى :

(A) (١٦،٤٠) ،(٣٢،٠) ،(١٦،٠) (B) (٠،٤٠) ، (٨ ،٠) ،(٠،٠) (C) (٤٠، ٠)

،(٨،٠)،(٨،١٦) (D) (١٦،٢٤) ،(٣٢،٨)،(١٦،٨) (E) لاشئ مماسبق

(٣٨) نقطة الحل التى تحقق اكبر ربح ممكن هى :

(A) (٨ ، ٣٢) (B) (٨ ، ١٦) (C) (٢٤ ، ١٦) (D) (٠ ، ١٦) (E) لاشئ مماسبق

(٣٩) النهاية العظمى للدالة تبلغ :

(A) ١٤٤ (B) ٨٠ (C) ١٢٨ (D) ١٣٨ (E) لاشئ مماسبق

T

اذا علمت أن عدد السلع المباعة أسبوعياً واحتمالات تحقق الطلب عليها كانت كما يلى:

عدد السلع المباعة	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	المجموع
احتمالات البيع	٠،٠٥	٠،٤٠	٠،١٥	٠،٤٠	١

فإذا كانت تكاليف شراء السلعة ١٠٠ جنيه وثمن بيعها ١٥٠ جنيه وباستخدام مصفوفة الارباح والخسائر التاليه:

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠	١٠٠٠
أ٢	٩٠٠	١٠٥٠	١٠٥٠	١٠٥٠
أ٣	٨٠٠	٩٥٠	١١٠٠	١١٠٠
أ٤	٧٠٠	٨٥٠	١٠٠٠	١١٥٠

فان :

(٤٠) مصفوفة الأرباح والخسائر المتوقعة تصبح :

(A)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٥٠	٥٠	٥٠
أ٢	٣٦٠	٤٢٠	٤٢٠	٤٢٠
أ٣	١٢٠	١٣٧،٥	١٦٥	١٦٥
أ٤	٢٨٠	٣٤٠	٤٠٠	٤٦٠

(B)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٠٠	٣٥	٤٥٠
أ٢	٤٥	٤٢٠	٣٨٠	٤٢٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	٤٠٠
أ٤	٣٥٠	٣٤٠	١٥٥	٨٦٠

(C)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٠٠	١٥٠	٤٠٠
أ٢	٤٥	٤٢٠	١٥٧،٥	٤٢٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	٤٤٠
أ٤	٣٥	٣٤٠	١٥٠	٤٦٠

(D)

	ب١	ب٢	ب٣	ب٤
أ١	٥٠	٤٥	٤٠	٣٥
أ٢	٤٥	٤٢٠	٣٨٠	٣٤٠
أ٣	٤٠	٣٨٠	١٦٥	١٥٠
أ٤	٣٥	٣٤٠	١٥٠	٤٦٠

(E) لاشئ مما سبق

(٤١) الخطة الواجب اتباعها لتحقيق اكبر منفعة متوقعة هى :

(A) الاولى (B) الثانية (C) الثالثة (D) الرابعة (E) لاشئ مما سبق

(٤٢) اكبر منفعة متوقعة تبلغ :

(A) ١٠٤٢،٥ جنيه (B) ٩٨٥ جنيه (C) ١٠٠٠ جنيه (D) ١٠٢٥ جنيه (E) لاشئ مما سبق

جامعة القاهرة	امتحان منتصف الفصل الدراسي الأول	التاريخ: ٢٠١٤/١٢/٢٣
كليه التجارة	المادة: الرياضة للتجاريين (١)	الوقت: من ١١ – ١٢
٢٠ نقطة – ٣ صفحات		الزمن : ساعة واحدة

أجب عن الأسئلة الآتية بإختيار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الواردة :-

(١) أ، ب شخصان فإذا كان احتمال بقائهما على قيد الحياة لمده سنة واحدة على الترتيب هو ٠،٩ ، ٠،٨ فإن إحتمال حياه أ ، ب حتى نهاية السنة هو .

أ) ٠،٠٠٥	ب) ٠،٧٢	جـ) ٠،٦٣	ء) ٠،٠٠٥

(٢) أ، ب شخصان فإذا كان احتمال بقائهما على قيد الحياة لمده سنة واحدة على الترتيب هو ٠،٩ ، ٠،٨ فإن إحتمال وفاة أ ، ب خلال السنة هو .

أ) ٠،٧٢	ب) ٠،٠٤	جـ) ٠،٠٢	ء) ٠،١٠

(٣) أ، ب شخصان فإذا كان احتمال بقائهما على قيد الحياة لمده سنة واحدة على الترتيب هو ٠،٩ ، ٠،٨ فإن إحتمال حياة أ فقط حتى نهاية السنة هو .

أ) ٠،١٨	ب) ٠،٢٠	جـ) ٠،١٢	ء) ٠،١٥

(٤) أ، ب شخصان فإذا كان احتمال بقائهما على قيد الحياة لمده سنة واحدة على الترتيب هو ٠،٩ ، ٠،٨ فإن إحتمال حياة واحد فقط منهما حتى نهاية السنة هو .

أ) ٠،٢٥	ب) ٠،٣٠	جـ) ٠،٤٠	ء) ٠،٢٦

(٥) أ، ب شخصان فإذا كان احتمال بقائهما على قيد الحياة لمده سنة واحدة على الترتيب هو ٠،٩ ، ٠،٨ فإن إحتمال حياة واحد على الأقل منهما حتى نهاية السنة هو .

أ) ٠،٩٨	ب) ٠،٧٢	جـ) ٠،٢٦	ء) ٠،٣٠

(٦) صندوق به ٣٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء ، ٤٠ كرة صفراء . فإذا تم سحب كرة واحدة ثلاث مرات متتالية مع الإحلال (الكرة المسحوبة ترد مرة أخرى). فإن إحتمال أن تكون الكرات الثلاث حمراء هو.

أ) ٠،٠٣٥	ب) ٠،٠٢٧	جـ) ٠،٠٠٣	ء) ٠،٠٢٠

(٧) ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال حياه الثلاثة حتى نهاية السنة هو.

أ) ٠،٢٣٦	ب) ٠،٥٢٨	جـ) ٠،٣٣٦	ء) ٠،٢٤٢

(٨)ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال وفاة الثلاثة خلال السنة هو.

أ) ٠،٠٩٦	ب) ٠،٠٢٤	جـ) ٠،٠٤٨	ء) ٠،٠٣٥

(٩)ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال حياة أ فقط هو.

أ) ٠،٠٨٤	ب) ٠،٠٦٩	جـ) ٠،٠٧٥	ء) ٠،٠٩٦

(١٠) ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال حياة واحد فقط من الثلاثة هو.

أ) ٠،١٨٨	ب) ٠،٠٣٢	جـ) ٠،٨٨١	ء) ٠،٢٤٢

(١١) ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال حياة أثنين فقط حتى نهاية السنة هو.

أ) ٠،٤٢٥	ب) ٠،٢٥٢	جـ) ٠،٤٥٢	ء) ٠،٤٦٠

(١٢) ثلاثة أشخاص أ، ب، ج فإذا كان احتمال بقاء كل واحد منهم على قيد الحياة حتى نهاية السنة على الترتيب هو ٠،٨ ، ٠،٧ ، ٠،٦ فإن إحتمال حياة واحد على الأقل حتى نهاية السنة هو.

أ) ٠،٩٧٦	ب) ٠،٦٧٩	جـ) ٠،٧٩٦	ء) ٠،٩٦٧

(١٣) إذا علمت أن (س+٧) (س+٤) (س-٤) (س-٦)

فإن معامل **س**^{٢} فى حاصل ضرب هذه الأقواس هو

أ) ٥٧	ب) ٨٥	جـ) ٦٩	ء) -٥٨

(١٤) ثلاثة صناديق متماثلة فى الشكل بكل منها عدد من الكرات الحمراء وعدد أخر من الكرات البيضاء ، الأول به ٩٠ كرة حمراء ، ١٠ كرات بيضاء ، الثانى به ٨٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، الثالث به ٧٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء

فإذا تم إختيار أحد الصناديق الثلاثة بطريقة عشوائية وسحبت منه كرة فإن احتمال أن تكون الكرة المسحوبة حمراء هو.

أ) ٠،٩	ب) ٠،٨	جـ) ٠،٥	ء) ٠،٤

(١٥) ثلاثة صناديق متماثلة فى الشكل بكل منها عدد من الكرات الحمراء وعدد أخر من الكرات البيضاء ، الأول به ٩٠ كرة حمراء ، ١٠ كرات بيضاء ، الثانى به ٨٠ كرة حمراء ، ٢٠ كرة بيضاء ، الثالث به ٧٠ كرة حمراء ، ٣٠ كرة بيضاء

فإذا تم إختيار أحد الصناديق الثلاثة بطريقة عشوائية وسحبت منه كرة ووجدت أنها بيضاء فإن احتمال أن تكون هذه الكرة من الصندوق الثالث هو

أ) ٠،٩	ب) ٠،٨	جـ) ٠،٥	ء) ٠،٤

(١٦) إذا كان إحتمال إنتاج السلع الجيدة بأحد المصانع هو ٠،٩ فإذا تم سحب ٣ سلع من إنتاج هذا المصنع . فإن إحتمال أن تكون جميع السلع جيدة هو

أ) ٠،٢٧٩	ب) ٠،٢١٥	جـ) ٠،٧٢٩	ء) ٠،٢٢٠

(١٧) إذا كان إحتمال إنتاج السلع الجيدة بأحد المصانع هو ٠،٩ فإذا تم سحب ٣ سلع من إنتاج هذا المصنع. فإن إحتمال أن تكون جميع السلع رديئة هو

أ) ٠،٠٠١	ب) ٠،٠٠٥	جـ) ٠،٠٠٨	ء) ٠،٠١٠

(١٨) إذا كان إحتمال إنتاج السلع الجيدة بأحد المصانع هو ٠،٩ فإذا تم سحب ٣ سلع من إنتاج هذا المصنع . فإن إحتمال أن تكون سلعة واحدة جيدة هو

أ) ٠،٠٣٥	ب) ٠،٠٢٢	جـ) ٠،٠٢٣	ء) ٠،٠٢٧

(١٩) إذا كان إحتمال إنتاج السلع الجيدة بأحد المصانع هو ٠،٩ فإذا تم سحب ٣ سلع من إنتاج هذا المصنع . فإن إحتمال أن تكون سلعتين جيدة هو

أ) ٠،٧٩٢	ب) ٠،٧٢٩	جـ) ٠،٢٩٧	ء) ٠،٠٣٥

(٢٠) إذا كان إحتمال إنتاج السلع الجيدة بأحد المصانع هو ٠،٩ فإذا تم سحب ٣ سلع من إنتاج هذا المصنع . فإن إحتمال أن تكون واحدة على الأكثر جيدة هو

أ) ٠،٠٣٢	ب) ٠،٠٨٢	جـ) ٠،٠٢٨	ء) ٠،٠٤٥

مع أطيب التمنيات بالتوفيق والنجاح ...

ص (٣) من (٣)

جامعة القاهرة	امتحان نهاية الفصل الدراسي الأول ٢٠١٥/٢٠١٦	التاريخ: ٢٠١٦/١/٣
كليه التجارة	المادة: أسياسات الرياضة (١)	الوقت: من ١٠-١٢ عدد الصفحات: ٤

(النموذج الأول)

أجب عن الأسئلة الآتية بإختيار الإجابة الصحيحة من بين الإجابات الواردة مع تظليل رمز الإجابة فى النموذج المرفق بكراسة إجابتك:-

السؤال الأول

يقوم أحد التجار بتوزيع ثلاث سلع على الأكثر خلال موسم معين من السلع الغذائية التى تتلف إذا بقيت دون بيع حتى نهاية الموسم فإذا كان ثمن شراء السلعة ٢٠٠جنيه وثمن بيعها ٣٠٠جنيه وأن الخطط المتاحة لهذا التاجر هى.

الخطط	حالات الطلب
الخطة الأولى ($ط_١$) ألا يتعامل فى هذه السلعة.	($ب_١$) طلب ردىء فى حالة عدم بيع أى سلعة
الخطة الثانية ($ط_٢$) التعامل فى سلعة واحدة.	($ب_٢$) طلب أقل من المتوسط فى حالة بيع سلعة واحدة
الخطة الثالثة ($ط_٣$) التعامل فى سلعتين	($ب_٣$) طلب معتدل فى حالة بيع سلعتين
الخطة الرابعة ($ط_٤$) التعامل فى ٣ سلع.	($ب_٤$) طلب ممتاز فى حالة بيع ٣ سلع

فإذا أمكن جمع بيانات عن ١٠٠٠ تاجر كان يتعامل كل منهم فى الموسم السابق فى نفس نوع السلع التى يتعامل فيها هذا التاجر وهذه البيانات هى :

عدد السلع المباعة	٠	١	٢	٣	المجموع
عدد التجار	١٠٠	٢٨٠	٤٠٠	٢٢٠	١٠٠٠

فإن :-

١- إحتمال تحقق الطلب الردىء ($ب_١$)

أ) ٠,١	ب) ٠,٢	ج) ٠,٣	د) ٠,٤	هـ) لاشىء مما سبق

٢- إحتمال تحقق الطلب أقل من المتوسط ($ب_٢$)

أ) ٠,٢	ب) ٠,٣	ج) ٠,٤	د) ٠,٥	هـ) لاشىء مما سبق

٣- إحتمال تحقق الطلب المعتدل ($ب_٣$)

أ) ٠,٣	ب) ٠,٢	ج) ٠,٤	د) ٠,٥	هـ) لاشىء مما سبق

٤- إحتمال تحقق الطلب الممتاز ($ب_٤$)

أ) ٠,٥	ب) ٠,٣	ج) ٠,٤	د) ٠,٢	هـ) لاشىء مما سبق

٥- المنفعة المتوقعة للخطة الأولى ت ($ط_١$)

أ) ٣٠	ب) صفر	ج) -١٥	د) ٢٠	هـ) لاشىء مما سبق

٦- المنفعة المتوقعة للخطة الثانية ت ($ط_٢$)

أ) ٧٤	ب) ٧٥	ج) ٧٠	د) ٧٣	هـ) لاشىء مما سبق

٧- المنفعة المتوقعة للخطة الثالثة ت ($ط_٣$)

أ) ٥٩	ب) ٥٧	ج) ٥٥	د) ٥٠	هـ) لاشىء مما سبق

٨- المنفعة المتوقعة للخطة الرابعة ت ($ط_٤$)

أ) ٩٢	ب) ٨٩	ج) -٩٠	د) ٨٨	هـ) لاشىء مما سبق

السؤال الثانى

قامت أحدى الشركات لصناعة قطع الغيار بإختبار ١٠٠٠ عينة من إنتاجها وكل عينة مكونة من ٤ قطع وقد كانت نتيجة هذا الاختبار أن توزيع هذه العينات وفقاً لعدد قطع الغيار الجيدة كما يلى.

عدد قطع الغيار الجيدة	٠	١	٢	٣	٤	المجموع
عدد العينات	٢٠	٥٠	٨٠	١٠٠	٧٥٠	١٠٠٠

فإذا كانت المواصفات الموضوعة للإنتاج تحدد أن يكون من بين كل ١٠٠٠ وحدة منتجة توجد ٩٠٠ وحدة جيدة. **فإن:**

٩- متوسط عدد القطع فى جميع العينات هو

أ) ٣١٥٠	ب) ٣٥٢٠	ج) ٣٥٣٠	د) ٣٥١٠	هـ)لاشىء مما سبق

١٠- الاحتمال الفعلى (مع التقريب)

أ) ٠,٨٢	ب) ٠,٩٠	ج) ٠,٨٨	د) ٠,٨٤	هـ)لاشىء مما سبق

السؤال الثالث

إذا علمت أن س + ص – ع = صفر

٢ س – ص + ع = ٦

س + ٣ ص – ٢ ع = ١

فإن:

١١- قيمة D (المحدد العام) تساوى

أ) ٤	ب) ٧	ج) -٥	د) -٣	هـ)لاشىء مما سبق

١٢- قيمة D س تساوى

أ) -٣	ب) -٥	ج) -٦	د) -٤	هـ)لاشىء مما سبق

١٣- قيمة D ص تساوى

أ) -١٠	ب) -٩	ج) -٨	د) -٧	هـ)لاشىء مما سبق

١٤- قيمة D ع تساوى

أ) -١٥	ب) -١٤	ج) -١٢	د) -١١	هـ)لاشىء مما سبق

السؤال الرابع

إذا علمت أن : ٣٧ + ٦٧ + ١٢٧ + ٢٢٩ + ٣٨٥ + ٦٠٧ + ... ٥٠ حداً

فإن:

١٥- قيمة (أ) فى صيغة الحد العام لإيجاد المجموع هى :-

أ) ٢	ب) واحد	ج) ٣	د) ٤	هـ)لاشىء مما سبق

١٦- قيمة (ب) فى صيغة الحد العام لإيجاد المجموع هى :-

أ) واحد	ب) ٣	ج) ٤	د) ٥	هـ)لاشىء مما سبق

١٧- قيمة (ء) فى صيغة الحد العام لإيجاد المجموع هى :-

أ) ٥	ب) ٦	ج) ٧	د) ٨	هـ)لاشىء مما سبق

١٨- قيمة (جـ) فى صيغة الحد العام لإيجاد المجموع هى :-

أ) ٢٢	ب) ٢٣	ج) ٢٤	د) ٢٥	هـ)لاشىء مما سبق

السؤال الخامس :

إذا علمت أن البيان التالى يوضح قيمة الصادرات من المواد الخام بالمليون جنيه لأحدى الشركات خلال السنوات من (٢٠٠٩-٢٠١٤)

السنوات	٢٠٠٩	٢٠١٠	٢٠١١	٢٠١٢	٢٠١٣	٢٠١٤
قيمة الصادرات بالمليون	٥٣	٧٢	٧٥	٧٩	٨٢	٨٧

فإن:

١٩- قيمة (م) فى معادلة الاتجاه العام هى :-

أ) ٢,٤	ب) ٢,٩	ج) ٢,٥	د) ٢,٨	هـ)لاشىء مما سبق

٢٠- قيمة (جـ) فى معادلة الاتجاه العام هى :-

أ) ٧٣,٧	ب) ٧٥	ج) ٧٤	د) ٧٤,٧	هـ)لاشىء مما سبق

٢١- معدل التزايد أو التناقص السنوى هو :-

أ) ٥,٢	ب) ٨,٥	ج) ٥,٨	د) ٥,٧	هـ)لاشىء مما سبق

٢٢- قيمة المشتريات المتوقعة فى سنة ٢٠١٧ هى :-

أ) ١٠٩	ب) ١٠٦,٦	ج) ١٠٥,٥	د) ١٠٧,٦	هـ)لاشىء مما سبق

السؤال السادس :

تقوم إحدى الشركات بالتخطيط لإنتاج نوعان من الأجهزة الكهربائية ويستخدم فى إنتاجها مركزين للإنتاج فإذا كان النوع الأول يحتاج فى إنتاجه إلى ساعتين فى المركز الأول ، ٣ ساعات فى المركز الثانى وإنتاج النوع الثانى يحتاج فى إنتاجه إلى ٤ ساعات فى المركز الأول ، وساعة واحدة فى المركز الثانى فإذا علمت أن العائد من بيع النوع الأول هو ١٠٠ جنيه والعائد من بيع النوع الثانى هو ٨٠ جنيه حتى يحقق المصنع أكبر ربح ممكن. وأن الطاقة القصوى للمركزين الأول والثانى على الترتيب هما ٨٠ ، ٦٠ ساعة عمل أسبوعياً. **فإن:**

٢٣- الكمية الواجب إنتاجها من النوع الأول هى :-

أ) ١٧	ب) ١٥	ج) ١٤	د) ١٦	هـ)لاشىء مما سبق

٢٤- الكمية الواجب إنتاجها من النوع الثانى هى :-

أ) ١٣	ب) ١٢	ج) ١٠	د) ١١	هـ)لاشىء مما سبق

٢٥- أكبر ربح ممكن هى :-

أ) ٢٥٥٠	ب) ٢٧٦٠	ج) ٢٦٥٠	د) ٢٥٦٠	هـ)لاشىء مما سبق

٢٦- الطاقة الضائعة غير المستغلة فى المركزين الأول والثانى على الترتيب هى :-

أ) ٣، ٢	ب) ١ ، ٢	ج) ٢ ، ١	د) ٣ ، ٢	هـ)لاشىء مما سبق

(ص ٣ من ٤)

السؤال السابع :

إذا علمت أن
س + ص + ع = ٢
- س + ص + ٣ ع = ٢
س + ٣ ص + ٢ ع = ٢

فإن :

٢٧- مقلوب المصفوفة هو :-

(أ) $\begin{pmatrix} \frac{١٤}{٦} & \frac{-٤}{٦} & \frac{-٤}{٦} \\ \frac{-١٠}{٦} & \frac{-٤}{٦} & \frac{٨}{٦} \\ \frac{٨}{٦} & \frac{٨}{٦} & \frac{٤}{٦} \end{pmatrix}$

(ب) $\begin{pmatrix} \frac{٧}{٦} & \frac{-١}{٦} & \frac{-٢}{٦} \\ \frac{-٥}{٦} & \frac{-١}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} & \frac{-٢}{٦} \end{pmatrix}$

(ج) $\begin{pmatrix} \frac{١٤}{٥} & \frac{-٤}{٥} & \frac{-٤}{٥} \\ \frac{-١٠}{٥} & \frac{-٤}{٥} & \frac{٨}{٥} \\ \frac{٨}{٥} & \frac{٨}{٥} & \frac{-٤}{٥} \end{pmatrix}$

(ء) $\begin{pmatrix} \frac{٧}{٤} & \frac{-١}{٤} & \frac{-٢}{٤} \\ \frac{-٥}{٦} & \frac{-١}{٦} & \frac{٤}{٦} \\ \frac{٤}{٦} & \frac{٢}{٦} & \frac{-٢}{٦} \end{pmatrix}$

(هـ) لا شىء مما سبق

٢٨- قيمة س ، ص ، ع على الترتيب :-

أ) واحد،-١، ٢	ب) ٢ ، ٣ ، ٢	ج) ١ ، ٣ ، ١	د) ٢ ، ٣ ، ١	هـ)لاشىء مما سبق

السؤال الثامن :

إذا علمت أن تكاليف إنتاج (س) وحدة من منتج معين تتحدد بالعلاقة الآتية

ص = ١٥ س – ٠,٨ $س^{٢}$ + ٠,٠٥ $س^{٣}$

فإن

٢٩- التكلفة الحدية عند إنتاج ٢٠ وحدة هى :-

أ) ٤١	ب) ٤٢	ج) ٤٣	د) ٤٥	هـ)لاشىء مما سبق

٣٠- حجم الإنتاج بالوحدات مقرباً الذى عنده التكلفة الحدية تساوى ١٥ جنيه هو :-

أ) ١٢	ب) ١٥	ج) ١١	د) ١٣	هـ)لاشىء مما سبق

(ص ٤ من ٤)

مع أطيب التمنيات بالنجاح والتوفيق،،،